NUMERO: 573

DATA: 10/07/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Appicciafuoco

MATERIA: Geometria
Prof. Ferrarotti

Anno accademico 2012-2013

Politecnico di Torino

Corso di

GEOMETRIA

Prof. Massimo Ferrarotti

TEORIA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 302

07/03/2013

No testo particolare per geometria.
↳ Classico è Greco-Valabrega

Coadiutori 6D aula 11:30-14:30 dal lunedì al venerdì.

Esame dell'anno scorso era:
SCRITTO a QUIZ cartaceo (16) + 2 ESERCIZI in 2h.

QUIZ → 1,5 punti con solo 4 risposte
soglia sufficienza 8 su 16 quiz giusti

ESERCIZI → 5 punti

Vengono guardati prima i QUIZ e poi gli ESERCIZI: se si è superata la soglia dei quiz, si procede alla correzione degli esercizi
↳ sono basati sui CONCETTI, cioè teoria

3 ARGOMENTI:

1. ALGEBRA LINEARE
2. GEOMETRIA
3. ANALISI A + VARIABILI

Algebra e Analisi sono dei LINGUAGGI mentre la GEOMETRIA è RAPPRESENTAZIONE FISICA.

A livello di notazione si scrive il vettore applicato $\overrightarrow{OP}$ con il simbolo $\vec{v}$.

$\rightarrow \overrightarrow{OP} = \vec{v}$

- Unità di misura lineare = dire quant'è la lunghezza di un segmento

$|\overrightarrow{AB}| \Longrightarrow$ norma / MODULO di $\overrightarrow{AB}$

$|\overrightarrow{OP}| = |\vec{v}|$

$|\vec{0}| = \emptyset \Longrightarrow$ solo in questo caso

- DIREZIONE: retta di $\overrightarrow{OP}$
- VERSO: orientamento del vettore

Notazione:

$\vec{v} \parallel \vec{w}$ se hanno stessa direzione

$\vec{v}, \vec{w}$ CONCORDI / DISCORDI $\Longleftrightarrow$ STESSO VERSO / VERSO OPPOSTO

Esempio

Forze $\rightarrow$ i vettori sono degli oggetti astratti che servono a descrivere la realtà: rimandano un modello ideale.

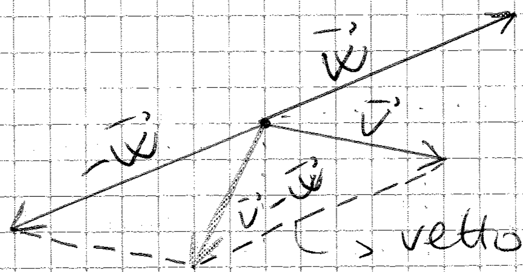
sono un esempio dell'applicazione dei vettori a livello fisico.

Vettori applicati = insieme di oggetti

SOTTRAZIONE:

$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

regola del PARALLELOGRAMMA



↳ vettore differenza

Si nota che il vettore differenza è ottenuto dall'altra diagonale del parallelogrammo *

*Mentre il vettore - somma è ottenuto dalla diagonale + corta ← + lunga del parallelogrammo

PROPRIETÀ SOMMA:

- COMMUTATIVA: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- DISTRIBUTIVA: $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$
- ELEMENTO NEUTRO: Esiste $\vec{0}$ tale che $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ per ogni $\vec{v}$.
- Per ogni $\vec{v}$ $\exists$ $-\vec{v}$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

PRODOTTO PER SCALARI

$\mathbb{R}$ = scalari $a \in \mathbb{R}$

↳ numero in Fisica per distinguere dai vettori

$a \cdot \vec{v}$:

$\parallel \vec{v}$ (direzione)

$|a\vec{v}| = |a||\vec{v}|$ (modulo)

$a > 0$ $a\vec{v}$ concorde $\vec{v}$ (direzione)

$a < 0$ $a\vec{v}$ discorde $\vec{v}$ //

$a = 0$ $a\vec{v} = 0$

$\vec{v} = \vec{0}$ $a\vec{v} = 0$

$1\vec{v} = \vec{v}$

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ se $\vec{v}$ oppure $\vec{w} = 0$
- se $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

  " $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$
- $\cos\vartheta = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$

PROPRIETÀ:

- COMMUTATIVA: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ → perchè l'angolo
- DISTRIBUTIVA: $(\vec{v} + \vec{w})\vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$ non è orientato
  rispetto alla somma $(a\vec{v})\,\vec{w} = a\,(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = |v|^2 \geq 0 \longrightarrow \cos\vartheta = 1$ perchè $\vartheta = 0$

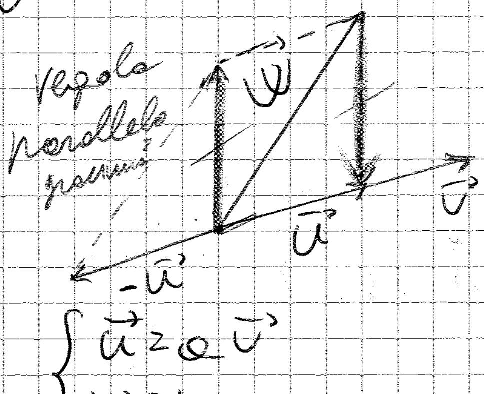
Eserciziello

Ho 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ discordi. Cerco un terzo vettore $\vec{u}$ che sia parallelo a $\vec{v}$ e la differenza con $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}$.

1) $\vec{u}$ sarà un multiplo di $\vec{v}$ (prodotto per scalare mi dà il parallelismo) perchè ~~u//v~~ $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

2) $\vec{w} - \vec{u} \perp \vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{u} = a\vec{v} \\ (\vec{w} - \vec{u})\,\vec{v} = 0 \end{cases}$$



$\vec{u}$ = PROIEZIONE ORTOGONALE di $\vec{w}$ su $\vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{u} = a\vec{v} \\ \vec{w}\vec{v} - \vec{u}\vec{v} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u} = a\vec{v} \\ \vec{w}\vec{v} - a\vec{v}\vec{v} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u} = a\vec{v} \\ \vec{w}\vec{v} - a|\vec{v}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{w}\vec{v} = a|\vec{v}|^2 \rightarrow a = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \qquad \vec{u} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

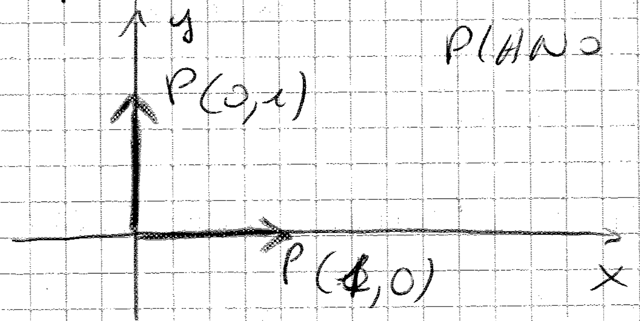
COEFFICIENTE DI EQUILIBR

— Prodotto scalare nello spazio

$$\boxed{\vec{v}\,\vec{w} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}$$

Dimostrazione:

Si definiscono i versori fondamentali: sono dei vettori con modulo pari a 1 e posti dopo aver stabilito un sistema di riferimento, applicato nell'origine, con direzione ognuno uguale a uno degli assi di riferimento.



PIANO

$\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ — VERSORI CANONICI o FONDAMENTALI

modulo 1

SPAZIO:

$\vec{i} = (1,0,0)$

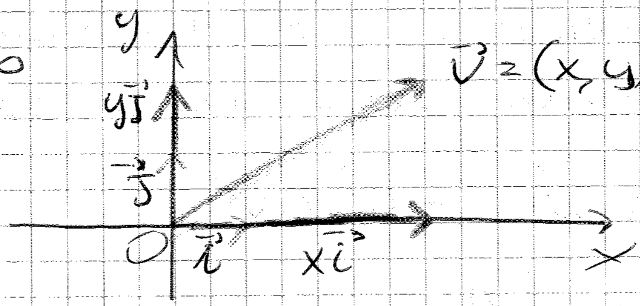
$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{v} = (x,y,z)$

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Nel piano



$\vec{v} = (x,y)$ $\quad \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Nello spazio:

aggiungo la coordinata z

Se faccio PRODOTTO SCALARE nello SPAZIO:

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\vec{v}\,\vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx' + yy' + zz'$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

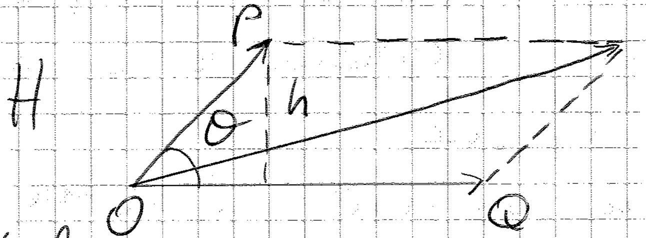
Prodotto esterno/vettoriale vale <u>solo</u> nello <u>SPAZIO</u>, perché è ortogonale alle direzioni di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

nel piano <u>non</u> esiste.

Non si può parlare di prodotto esterno/vettoriale per il piano.

Però il PIANO può essere visto come uno spazio con l'asse K nullo e allora si possono fare i conteggi col prodotto esterno.

Si prendono 2 vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$



$\vec{v} = \vec{OP}$ $\quad \vec{w} = \vec{OQ}$

$\underbrace{h = \vec{OP}\sin\vartheta}_{\text{altezza}}$

Voglio trovare area di H: base x altezza

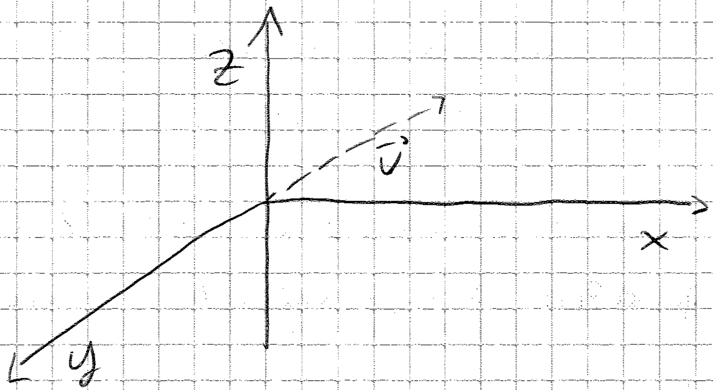
$$\text{Area}(H) = |\vec{OQ}||\vec{OP}|\sin\vartheta = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$$

Per risolvere l'<u>area</u> di una superficie si utilizza il modulo del prodotto esterno/vettoriale.

Nello spazio: prendo un parallelogramma formato da 2 vettori, creo un nuovo vettore che <u>NON</u> sia complanare ai 2 vettori.

I 3 vettori formano così un prisma, che avrà un volume.

Altra osservazione:
Nello SPAZIO Ox,y,z
i 3 versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ identificano le direzioni tra i 3 assi.



Trovare l'angolo che il vettore $\vec{v}$ forma con i 3 assi significa trovare la sua direzione nello spazio.

$$\cos\theta(\vec{v},\vec{i}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\cdot\underbrace{|\vec{i}|}_{=1}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\vec{v} = (x,y,z)$

$\vec{i} = (1,0,0)$ $\quad \vec{v}\cdot\vec{i} = x$

$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1° coordinata del normalizzato di $\vec{v}$

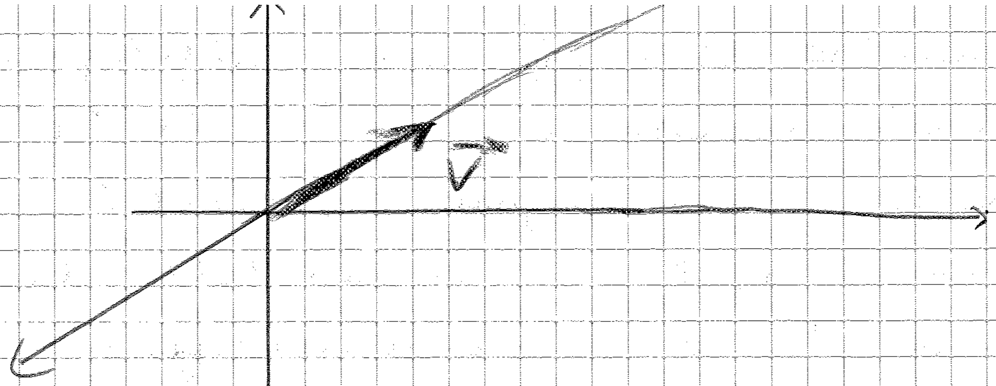
$$\boxed{n(\vec{v}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(x,y,z)}$$ normalizzato di $\vec{v}$

Analogamente:

$$\cos\theta(\vec{v},\vec{j}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ 2° coordinata del normalizzato di $\vec{v}$

$$\cos\theta(\vec{v},\vec{k}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ 3° coordinata del normalizzato di $\vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta(\vec{v},\vec{i})\\ \cos\theta(\vec{v},\vec{j})\\ \cos\theta(\vec{v},\vec{k})\end{array}\right\}$$ COSENI DIRETTORI: servono a verificare in modo univoco il piano, come luogo dei punti ortogonali a un dato vettore

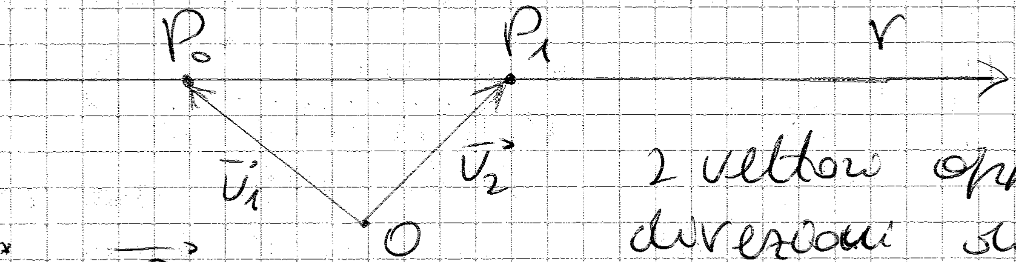


② Rette non passanti per $\vec{O}$, origine

in GENERALE:

una retta si può caratterizzare dando 2 PUNTI.

ⓐ Fisso 2 punti P_0, P_1 (1° metodo)



2 vettori applicati con direzioni diverse

$\vec{v}_1 = \vec{OP_0}$

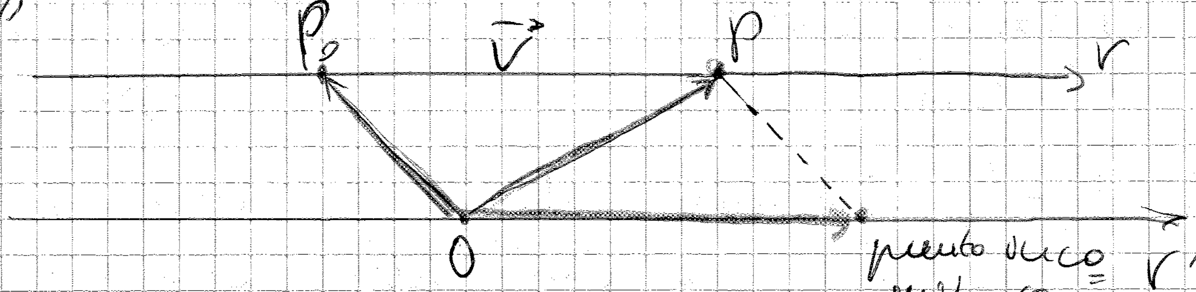
$\vec{v}_2 = \vec{OP_1}$

retta r ha direzione $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$

è data dalla diagonale + corta che si forma dalla differenza vettoriale (regola del parallelogramma).

ⓑ Assegno una direzione e un punto di passaggio (2° metodo)

Fisso un punto P_0 e poi prendo un altro punto P



FORMULA della RETTA PASSANTE per 2 PUNTI:

$$P(t) = \underbrace{t(P_1 - P_0) + P_0}_{\Downarrow}$$

$P_1 - P_0$ = fornisce la direzione della retta.

$t \in \mathbb{R}$: scalare PARAMETRO ⇓ qualcosa in più. ↳ è una VARIABILE

PARAMETRIZZAZIONE: modo di rappresentare la retta.

Nel PIANO $P(t)$ può essere visto come il punto che varia nel tempo e che mi dà un MOTO RETTILINEO.

Piano Ox,y $P(t) = (\underbrace{x(t); y(t)}_{\Downarrow})$

variano entrambe le coordinate in base a t.

Supponiamo che la direzione sia $A = (1,-2)$ e che $P_0 = (3,1)$. ↳ $(x(t), y(t)) = t(1,-2) + (3,1)$

$$P(t) = (t, -2t) + (3,1) = (3+t, 1-2t)$$

$$P(t) \begin{cases} x(t) = t+3 \\ y(t) = 1-2t \end{cases}$$

Normalmente il (t) non viene messo, ma solo x e y negli esercizi

$$\begin{cases} x - t = 3 \\ y + 2t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = x-3 \\ y + 2(x-3) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = x-3 \\ \boxed{y = 1-2(x-3)} \end{cases}$$

→ qui io so che passa per $(3,1)$

$y = 1 - 2x + 6 \quad y = 7 - 2x \quad \boxed{y + 2x - 7 = 0}$

↳ in questa operazione abbiamo perso il punto di passaggio

⇓ possiamo rappresentare il moto di un auto lungo una strada rettilinea

P.e. $0 \leq t \leq 1$ segmento $\vec{P_0P_1}$ $A = P_1 - P_0$

$$P(t) = t(P_1 - P_0) + P_0$$

Applicazione delle formule:

$\boxed{1}$ Come si fa a vedere se 2 rette sono PARALLELE:

r $P(t) = At + P_0$

r' $P'(t) = A't + P_0$

$r // r' \Longleftrightarrow A // A'$

⚠: attento al concetto di parallelismo e coincidenza: c'è differenza*

Es.

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to A$$

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t - 4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \to A'$$

$A(2, -1)$ $A = -A'$

$A'(-2, +1)$ $\Downarrow$

sono paralleli

i punti di passaggio sono ← diversi, ma non è un problema.

*2 RETTE sono PARALLELE se hanno stessa direzione, ma non hanno punto in comune

* 2 RETTE sono COINCIDENTI se hanno STESSA direzione e punto in comune.

$\boxed{2}$ Intersezione di 2 rette $r \cap r' = ?$

Un metodo è quello di utilizzare la forma cartesiana e fare sistema tra le 2 rette.

2 rette con diversa DIREZIONE devono intersecarsi.

Bisogna differenziare i 2 parametri nel sistema

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2u+2 \\ y = u-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+3 \\ x = -2u+2 \\ y = u-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t+1 = -2u+2 \\ t+3 = u-4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

si risolve il sistema trovando prima o t o u.

$$\begin{cases} 2t+1 = -2u+2 \\ u = t+7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2t+1 = -2(t+7)+2 \\ u = t+7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = t+7 \\ 2t = -2t-14+1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = t+7 \\ 4t = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} u = t+7 \\ t = -\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} u = -\frac{13}{4}+7 \\ t = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{15}{4} \\ t = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

ORTOGONALITÀ nel PIANO

$\vec{V}_1 = (a, b)$

$\vec{V}_2 = (b, -a)$ oppure $(-b, a)$

per esempio $\vec{w}_1 = (2, 1) \rightarrow \vec{w}_2 = (1, -2)$

Se faccio prodotto scalare:

$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = (2 \cdot 1) + (-2 \cdot 1) = 2 - 2 = 0$ torna

Nello spazio è molto più difficile che 2 rette si incontrino.

Utilizzo la formula
$P(t) = t(P_1 - P_0) + P_0$ per la retta passante per due punti
e dico che
$P_2 \in r \iff$ esiste $\bar{t}$ tale che
$P_2 = \bar{t}(P_1 - P_0) + P_0 \iff$
$P_2 - P_0 = \bar{t}(P_1 - P_0) \iff \boxed{P_2 - P_0 \parallel P_1 - P_0}$

3 punti sono ALLINEATI $\iff P_1 - P_0 \parallel P_2 - P_0$ questa condizione basta!

Esempio

$P_0 = (1,1,-2)$
$P_1 = (2,0,-1)$
$P_2 = (1,1,1)$

$P_1 - P_0 = (1,-1,1)$
$P_2 - P_0 = (0,0,3)$

non sono allineati

14/03/2013

MATRICI

Notazione: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono CAMPI NUMERICI o SCALARI.
S'introduce il simbolo $\mathbb{K}$ che indica <u>indifferentemente</u> sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$: quindi in un enunciato se c'è $\mathbb{K}$, esso vale sia per $\mathbb{R}$ che per $\mathbb{C}$.

MATRICE: modo di associare a una coppia ordinata di indici, s'intende di numeri interi positivi, compresi tra 2 numeri fissati, ~~associo~~ un elemento di $\mathbb{K}$.

$$m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{RIGA}$$

COLONNA $\leftarrow$ n

Diremo quindi una matrice è composta da n colonne e m righe

terminologia per righe e colonne:

i = indice di riga

j = indice di colonne

$[A]_i$ RIGA indice i

$[A]^j$ COLONNA indice j

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [A]_1 \quad [A]^2$$

Consideriamo l'insieme delle matrici:

$$M_{m,n} = \{ \text{matrici } m \times n \text{ (su } \mathbb{K}) \}$$

$\mathbb{K}$ $\rightarrow$ campo di scalari

Quando si vuole specificare il campo di scalari:

$M_{m,n}(\mathbb{R})$	$M_{m,n}(\mathbb{C})$
su $\mathbb{R}$	su $\mathbb{C}$

Tipi di matrici:

1) Matrici quadrate (di ordine n):

Sono quelle matrici $M_{m \times n}$ che hanno tante righe quante colonne, quindi hanno numero di righe = numero di colonne.

Si indicano M_n con un solo indice

Suddivisioni a blocchi sono utili per i conti!

Le colonne prese da sole sono sottomatrici
Le righe // // // // //

Nelle matrici quadrate:

gli elementi che hanno gli stessi indici formano una DIAGONALE PRINCIPALE.

$A \in M_n$ $\quad \{[A]_{ii}\}$ DIAGONALE PRINCIPALE

insieme delle matrici quadrate

Esempio → $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1 ha indice 1,1
0 // // 2,2
1 // // 3,3

stessi indici

! Non ha senso parlare di diagonale principale nelle matrici non quadrate.

S'introducono le OPERAZIONI per le matrici: vengono utilizzate molto in matematica.

Operazioni tra matrici:

1. LINEARI / VETTORIALI:
stesse operazioni tra vettori.

2. PRODOTTO TRA MATRICI

Sono dette proprietà formali, perché valgono sia per le matrici, che per i vettori che per i numeri.

- PRODOTTO PER SCALARE

Si moltiplica lo scalare per ogni elemento della matrice:

$A \in M_{m,n} \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$[\alpha A]_{ij} = \alpha [A]_{ij}$ $\qquad -4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

- proprietà:

$(P_1) \quad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ DISTRIBUTIVA rispetto alla somma di MATRICI

$(P_2) \quad (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

$(P_3) \quad (\alpha \beta) A = \alpha (\beta A)$

$(P_4) \quad 1 A = A$ moltiplicando x1 la matrice non cambia

Non ha senso chiedersi della commutatività, poiché si scrive sempre lo **scalare** a sx e la matrice a dx. → Scalare sempre davanti

- $0 A = O_{m,n}$
- $\alpha O_{m,n} = O_{m,n}$
- $\alpha A = O_{m,n} \begin{cases} \alpha = 0 \\ A = O_{m,n} \end{cases}$

II CASO: generale

$A_{m \times n}$ $[A]_i$ (riga i-esima) $1 \times n$
$B_{n \times p}$ $[B]^j$ (colonna j-esima) $n \times 1$
sono moltiplicabili

Faccio prodotto riga x colonna!

Definisco matrice prodotto:

$$\underbrace{[AB]_{ij}}_{\text{quale elemento metto nella matrice prodotto}} = \underbrace{[A]_i [B]^j}_{\text{prodotto tra l'elemento della riga } i \text{ della matrice } A \text{ e l'elemento della colonna } j \text{ della matrice } B} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ki} [B]_{kj}}_{\text{utilizzata nelle dimostrazioni}}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2×3 $\quad$ 3×2 sono moltiplicabili

$$\underset{2 \times 2}{AB} = \left[\begin{array}{c|c} 1+3+0 & 2-1-2 \\ \hline 0+15+0 & 0-5+4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -1 \end{bmatrix}$$

• Proprietà:

- NO COMMUTATIVA in generale

① ASSOCIATIVA: $A(BC) = (AB)C$

② ESISTENZA dell'ELEMENTO NEUTRO (quello che normalmente è 1 in matematica)

Matrice identica: I_n

$$[I_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

esempio $I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Questa proprietà è detta anche COMPATIBILITÀ tra le OPERAZIONI → è LINEARE
LINEARITÀ

(3) LINEARITÀ del PRODOTTO:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$ → sembra che non si possa fare, ma invece si può fare

$$M_{m,n} \xrightarrow{\text{trasposizione}} M_{n,m}$$

$$\boxed{M_{1,n} \xrightarrow{\text{trasposizione}} M_{n,1}}$$

La trasposizione applicata ai vettori riga e/o ai vettori colonna, trasforma l'uno nell'altro e viceversa.

I_n → se si prendono i suoi vettori colonna e riga si hanno i VETTORI CANONICI

$$[I_n]^i \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

normalmente si scrivono come vettori colonna ← $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Se si scrive:

${}^t e_1 A_{3,2}$ → scrivere il t a volte è superfluo

$A_{m \times n}$ → $A e_1 = [A]^{i \text{ colonna}}$

${}^t e_1 A = [A]_{i \text{ riga}}$

Se le matrici sono QUADRATE, allora è possibile il prodotto per se stesso.

$$A \in M_n \Longrightarrow A \cdot A = A^2$$

Posso inoltre definire anche $A^n = \underbrace{A \cdots\cdots A}_{n \text{ volte}}$

Date 2 matrici **quadrate** A e B sono **definiti** i 2 prodotti:

$$A \cdot B \quad e \quad B \cdot A$$

Ci si chiede se questi 2 prodotti sono uguali, quindi se vale la COMMUTATIVA.

$$AB \stackrel{?}{=} BA$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} 4+6 & 0+4 \\ 0+12 & 0+8 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{array}{c|c} 4+0 & 8+0 \\ \hline 3+0 & 6+8 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

→ sono diversi i risultati!!!

L'enunciato "il prodotto di 2 matrici è commutativo" è molto falso, perché ~~ci~~ sono solo pochi casi particolari in cui è vero.

In generale: PRODOTTO TRA MATRICI QUADRATE NON è COMMUTATIVO!

Infatti il prodotto notevole $(A+B)^2$ nelle matrici non è più notevole perché non ho il doppio

$$\begin{bmatrix} x-z & y-t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-t=0 \\ 2x+2z=0 \\ 2y+2t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z=1 \\ 2x+2z=0 \to x+z=0 \end{cases} \qquad x=\frac{1}{2} \quad z=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y-t=0 \\ 2y+2t=1 \to y+t=1 \end{cases} \qquad y=\frac{1}{4} \quad t=\frac{1}{4}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1/2 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Quindi: esistono matrici che soddisfano la condizione del reciproco e oltre no. ~ + difficile dei numeri: bisogna sapere quando una matrice è invertibile o meno perché sia cancellata.

Legge della cancellazione: $\cancel{A}B=\cancel{A}C$

$$\boxed{\text{Def.: } \underbrace{A \in M_n}_{\text{matrice quadrata}} \text{ A si dice } \underline{\text{invertibile}} \text{ se esiste } B \in M_n \text{ tale che } AB=BA=I_n.}$$

Ci sono 2 condizioni imposte nella definizione:
$AB=BA$ e $AB=I_n$
In realtà ne basterebbe una per l'invertibilità, $AB=I_n$, perché il fatto che $AB=BA$ viene di conseguenza: se sono invertibili allora commutano.

Si definisce $\boxed{GL_n = \{A \text{ invertibile } m \times n\}}$ insieme delle matrici invertibili

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 302

(4) ${}^tA \in GL_n$ e $({}^tA)^{-1} = (A^{-1})^t$

(2) Verifica: $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1}$
$= I_n I_n = I_n$

- $I_n \quad I_n^{-1} = I_n$
- $-I_n \quad (-I_n)^{-1} = -I_n$
- $I_n + (-I_n) = I_n - I_n = O_n \longrightarrow$ non è invertibile!!!

Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ è invertibile? No!

$A \cdot B = I_n$ perché A sia invertibile

ma $[AB]_{22} = [A]_2 [B]^2 = 0[B]^2 = 0$

mentre secondo la definizione di invertibilità:
$[AB]_{22} = 1 \neq 0$.

Quindi A NON è invertibile!

Deduzione:

se una matrice ha 1 riga o colonna formata da zeri allora NON è INVERTIBILE.

⚠ Questa deduzione non implica il fatto che tutte le matrici senza zero sono invertibili. ↳ non è così!

Se una matrice non ha zeri può essere invertibile come no.

che non sono sulla stessa riga dell'elemento in questione né sulla // colonna // // //.

Dopodiché si sommano in base alla parità della posizione dei 3 elementi:

Se è in posizione PARI il segno è +
// // // // DISPARI // // // −

N.B.: per i segni basta alternare: se prima avevo un + dopo avrò un −.

Se si prendeva la 2° riga:

$$\det A = -0 \det\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{bmatrix} + 1 \det\overset{-8}{\begin{bmatrix}2 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}} - 2\det\overset{-16}{\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}} =$$

$= -24 \rightarrow$ trovo stesso risultato ed era + veloce per il calcolo

Stessa cosa per la 3° riga

N.B.: per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 o superiore conviene sempre scegliere la riga dove ci sono + zeri.

$n = 4 \longrightarrow$ utilizzo lo stesso metodo del $n = 3$.

Questo metodo è detto SVILUPPO di Det A rispetto alla RIGA i.

Osservazione:

$\det I_n = 1$ $\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\ \vdots & & & & &\ddots\end{bmatrix}$

$\det O_n = 0$

$$A \in G.L._n \Longleftarrow \det A \neq 0$$

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow A \in G.L._n$$

Se una matrice ha determinante $= 0$ NON è INVERTIBILE.

Se una matrice ha determinante $\neq 0$, essa è INVERTIBILE.

Dimostrazione:

$A \in M_n \qquad \det A \neq 0$

A_{ij} è la sottomatrice ottenuta eliminando la riga $[A]_i$ e la colonna $[A]^j$.

$$[B]_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ij})}{\det A}$$ è una matrice

Vale sperimentalmente che $AB = BA = I_n$

Quindi $A \in G.L._n$ e $B = A^{-1}$.

Questa dimostrazione non è utile per i conti; solo fino a $n=2$, dopo è un casino!

Applicazione utile per le matrici 2×2

Ip: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ verificare che $\det A = ad - bc \neq 0$

T

Formula per calcolare l'inversa di una matrice quadrata 2×2.

E

$$A \xrightarrow[\text{riga}\quad\text{scalare}]{(3)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Le 2 righe che non ho modificato le riscrivo equivalente e poi quella che ho cambiato la scrivo modificata.

Cambio una sola RIGA

Se faccio $A' \xrightarrow{(3)+3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = A$

è un' OPERAZIONE REVERSIBILE

- II TIPO: SCAMBIO DI RIGHE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\longleftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A'$$

Se riapplico $(2)\longleftrightarrow(3)$ torno alla matrice A. $\longrightarrow$ OPERAZIONE REVERSIBILE

- III TIPO: moltiplicare x uno SCALARE NON NULLO una RIGA.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{scalare}\ \rightarrow\ \text{riga}]{2(1)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Se moltiplico per l'inversa dello scalare torno alla matrice originaria.), OPERAZIONE REVERSIBILE.

$$A' \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} A$$

Nelle operazioni elementari la notazione può essere di 2 tipi per indicare la riga:
o scrivo "R_3" oppure "(3)", ma il prof utilizza l'ultima

Def: $A \in M_{m,n}$ $A \neq O_{m,n}$; A si dice matrice a scala se esiste r, $1 \leq r \leq m$ tale che:
↳ indice di riga

① $[A]_i \neq 0$ per $1 \leq i \leq r$ e $[A]_i = 0$ per $i > r$

Oss: una matrice a scala se ha delle righe nulle, queste si troveranno in fondo: fino a un certo indice r ci sono le righe non nulle, dopo quelle nulle.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre se $r = m$ non ci sono righe NULLE.

② Se $1 \leq \underbrace{i < k}_{\text{indici di riga}} \leq r$ allora $j(i) < j(k)$

↳ 1° elemento non nullo che troviamo nelle varie righe si sposta via via verso dx.

Esempio
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r = 3$$

Primi elementi non nulli si chiamano PIVOTS
$[A]_{i,j(i)} = P_i$ pivots (leggi "pivò")

⚠ ESISTONO SOLO x le MATRICI A SCALA

Proprietà:

1. A a scala si dice NORMALIZZATA se i PIVOTS sono tutti $= 1$
↳ si utilizzano O.E. del III tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{NORMALIZZATA di} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

⚠ Una volta passati alla forma a scala e compaiono i PIVOTS, il NUMERO dei PIVOTS NON CAMBIA, si mantiene COSTANTE anche quando passo alla forma normalizzata.
Quindi il NUMERO DEI PIVOTS lo si vede già nella forma a scala.

Def: Se $A \in M_{m,n}$ $A \neq O_{m,n}$ il NUMERO di PIVOTS di A_{SRN} si dice RANGO di A
$\Downarrow$
$r(A)$ = indice di righe non nulle

Poniamo $r(O_{m,n}) = 0$

Per calcolare il rango di una matrice si utilizza questa definizione, a differenza dell'inverso.
$\Downarrow$
definizione operativa

→ basta portare la matrice in forma a scala e da lì conto il n° di righe non nulle, trovando quindi il rango.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 operazioni

Rango al massimo può essere tre, qui è 1, perché ha un solo PIVOTS.

Per determinare il rango bisogna trasformare la matrice in matrice a scala.

Prendo $\underset{n\times n}{A} \xrightarrow{O.E.} A'$

vale che: $A' = EA$

Se prendo $\underset{n\times n}{A}$ $\quad A' = EA$ e $\det A' = \det E \cdot \det A$

Prendendo O.E. e applicandola a I_n ottengo E. $\quad I_n \xrightarrow{O.E.} E$

Caso O.E. I tipo: si ha che $\det E = 1$

$$\boxed{\det A = \det A'}$$

II tipo: $\det E = -1$ $\quad$ Scambio di RIGHE

$\Downarrow$

$$\boxed{\det A' = -\det A}$$

$\longleftarrow$ il segno del determinante cambia

III tipo:

se è $I_n \xrightarrow{\alpha(i)} E$ $\quad \alpha \neq 0$ $\quad \det E = \alpha$

$$\boxed{\det A' = \alpha \det A}$$

Le O.E. del II e III tipo non sono tanto da usare per il calcolo del determinante quanto + come proprietà dei determinanti.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^{n} \det A}$$

n° delle righe

vuol dire moltiplicare tutte le righe per α

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 302

Con le O.E. I tipo lascio invariato il determinante: $\det A = \det A'$

servono per far apparire gli zeri così da semplificare la matrice e calcolare più facilmente il determinante.

Con le O.E. II tipo si ha scambio di righe:

Ricorda: ogni volta che scambio righe CAMBIA il segno.

Le O.E. III tipo sono sconsigliate per il calcolo del determinante.

Importante: det E NON è MAI ZERO quindi siamo sicuri che E è invertibile e che il det A e il det A' rimangono invariati..., se era diverso da zero all'inizio rimane tale anche alla fine; se era uguale a zero all'inizio rimane zero anche alla fine.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det A = -3$ perché ho 2 zeri ed è invertibile perché $\det A \neq 0$.

Domanda:
Se una matrice è invertibile, posso calcolare l'inverso in maniera + veloce?

Attraverso le matrici elementari

$A \in G.L._n \iff \det A \neq 0$
$A \in G.L._n \iff r(A) = n$ } 2 CRITERI d'INVERTIBILITÀ equivalenti

non corrispondono però alla ~~definizione~~ di invertibilità.

Nel 1° caso, $r(A)=n$ si ha:

$$(E_k E_{k-1} \dots E_1)A = I_n \implies \underset{\substack{\parallel \\ \text{inversa}}}{A^{-1}} = E_k \dots E_1$$

Modo x trovare inversa:

$$E_1 [A | I_n] = [E_1 A | E_1]$$

opero sia a destra che a sinistra.

Se ho n.e. $k=3$ di matrici E:

$$[\underset{\substack{\parallel \\ A_{SRN} = I_n}}{E_3 E_2 E_1 A} | E_3 E_2 E_1] = [I_n | \underset{\substack{\parallel \\ A^{-1}}}{E_3 E_2 E_1}]$$

Devo partire dalla matrice A associata matrice identica, fare tutte le operazioni elementari per rendere A ridotta a scala normalizzata;
Se A_{SRN} coincide con $I_n \implies$ a destra comparirà l'inversa.
Se invece nell'A_{SRN} compare una riga nulla
$\implies$ A non è invertibile.

Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ gli associo l'I_n $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ poi opero con O.E.

$\xrightarrow{(2)-2(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right]$ vedo già che la matrice è invertibile perché diventa già a scala.

se invece entrambi hanno det = 0 allora il rango è uguale a 2: se $a = 1$ e $b = 0$ $r(A) = 2$.

EQUAZIONI LINEARI

Prendiamo le seguenti equazioni lineari

$2x + y = 1$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$

$x + 2y - 3z = 0$

Equazioni lineari sono equazioni 1° grado con incognite che compaiono solo al grado 1 con un termine noto.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

dove a_i coeffi $\in \mathbb{K}$

b termine noto $\in \mathbb{K}$

x_i incognite (variabili) $\Rightarrow$ sono dei segnaposti perché se scelgo n-incognite le sostituisco con numeri succ...

Eq in n incognite le soluzioni sono n-uple ordinate in $\mathbb{K}$ $(x_1, \dots, x_n)$.

ho 2 fatti: o l'espressione è uguale a b o non lo è.

In generale le coppie ordinate formano un insieme chiamato prodotto cartesiano.

n.e. $\quad n = 2$ le soluzioni stanno in $\mathbb{K} \cdot \mathbb{K} = \mathbb{K}^2$

$n = 3$ // // // // $\mathbb{K} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{K} = \mathbb{K}^3$

$n = n$ // // // // $\mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{K}_2 \cdot \dots \mathbb{K}_n = \mathbb{K}^n$

Esempio

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

sistema a 2 equazioni e 3 incognite

Formalmente bisognerebbe sempre dire considero l'equazione a tot incognite o il sistema a tot incognite tale e... avere un dato iniziale che il problema ci dà per risolvere il problema, perché sennò è ambiguo: infatti se vedessi nel sistema solo l'equazione lineare $x-y=0$ allora ambiguamente direi che è a 2 incognite quando invece il sistema è a tre quindi andrebbe formalmente scritto $x-y+0z=0$ per far capire che sono 3 le incognite che cerco.

Risolviamo il sistema con le matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x-y+0z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

si utilizzano le matrice e il prodotto tra matrici

$A = \{a_{ij}\}$ MATRICE DEI COEFFICIENTI

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ VETTORE TERMINI NOTI

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ VETTORE INCOGNITO

Quindi scrivo il sistema

$$S: \boxed{AX=B} \Rightarrow \text{ricorda } ax=b$$

+ rapido da scrivere e si può applicare la deduzione allo studio dei sistemi: ciò che serve di meno x il sistema è X, vettore incognite; infatti a questo punto metodo vuole che si prendono le variabili che hanno come coefficiente i pivots e le altre le porto di là:

$$\begin{cases} x = -z - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \text{coefficienti di pivots}$$

x, y sono dette variabili dipendenti: ossia le variabili che hanno PIVOTS come coefficienti.

z, t sono dette variabili indipendenti, quindi significa che do io a loro un valore.

Le soluzioni allora saranno ∞

$$\left.\begin{cases} x = -z - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \end{cases}\right\} \text{RISOLVENTI: le soluzioni del sistema}$$

Si conta l'infinito ∞, cioè si dice di quante soluzioni infinite è il sistema.

In questo caso le sol sono ∞^2 → rappresenta il n° di variabili indipendenti

Sol: ∞^m dove m: numero di variabili indipendenti

infatti ho 2 modi infiniti per avere le soluzioni:

ho 1 modo infinito di soluzioni con la incognita z

" " " " " " " y

Sistema può avere soluzioni:
- 1 DETERMINATO
- ∞ INDETERMINATO
- 0 IMPOSSIBILE

Esempio

$$S: \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y+3z=1 \end{cases} \quad M_S: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{O.E.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x=-1/3 \\ y=0 \\ z=1/3 \end{cases} \quad Sol(S) = \left\{\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \text{impossibile}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

la differenza tra le 2 matrici è che il n° dei pivots è diverso: nel 1° caso ce n'è uno in più, mentre nel 2° caso ce ne sono 2; nel 1° caso il rango è cresciuto, mentre nel 2° caso è rimasto a 2 e non cresce.

Teorema di Rouché-Capelli

Sia $S: AX=B$ sistema lineare con m equazioni e n incognite allora S è RISOLUBILE se e solo se $r(A)=r(M_S)$.

→ serve per poter separare le 2 grandi categorie di sistemi.

In tal caso se $r(A)<n$ S è indeterminato con $\infty^{n-r(A)}$ soluzioni;

Se $r(A)=n$ allora S è determinato.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 302

$$\begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE delle SOLUZIONI

Soluzioni di S_0 *

Soluzione di S nel caso $z = t = 0$

Soluzioni di S

Esempio

Prendiamo di nuovo il sistema S ma con 2 variazioni:
- cambio i termini noti

$$S_0 \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+2z+t=0 \\ 3x+3z+t=0 \end{cases}$$

→ dicesi SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO a S:

$S_0 = AX = 0$ è RISOLUBILE

S_0 INDETERMINATO con ∞^2 soluzioni. in questo caso con $r(S_0) = 2$.

solo nel caso dei RISOLUBILI

forma ridotta a scala di S_0 ← $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

* in S_0 i termini noti vanno via.

Teorema:

Sia $S: AX=B$ sistema risolubile e sia $S_0: AX=0$, sistema omogeneo associato a S. Se $\overline{X} \in Sol(S)$ allora le soluzioni di S sono TUTTI e SOLI i vettori di $\mathbb{K}^n$ del tipo $Y+\overline{X}$ con $Y \in Sol(S_0)$.

Per trovare il 2° elemento delle soluzioni, bisogna prendere A sostituire la 2° colonna con la colonna dei termini noti, calcolare il determinante e dividere per il determinante di A.
Analogo procedimento per il 3° elemento del vettore soluzioni, solo che devi sostituire la 3° colonna con quella dei termini noti.

Esempio

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y + az = b \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$ questo non è un particolare sistema, ma è una famiglia di sistemi da 2 parametri.

Domanda standard: studiare il sistema al variare di a e b.
Se sistema è quadrato c'è una serie di passaggi da fare:

1° PASSAGGIO: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ Costruire la M_S.

2° PASSAGGIO: uso il teorema di Cramer che mi dice che il sistema sarà determinato se la matrice dei coefficienti è invertibile, ossia ha det ≠ 0.
→ quindi studio la matrice dei coefficienti al variare di a, quando $a \neq 0$ e $a = 0$ e statisticamente $a \neq 0$ quindi è determinato.

Calcolo il determinante $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -a$

$1 - a + 0 - 1(1)$

(S_2) associativa $v+(v'+v'')=(v+v')+v''$

(S_3) Esiste $0_V \in V$ tale che $v+0_V=v$ per ogni $v\in V$.

(S_4) Per ogni v esiste $-v\in V$ tale che $v+(-v)=0_V$

(P_1) $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ distributività rispetto ai numeri.

(P_2) $\alpha(v+v')=\alpha v+\alpha v'$ distributività rispetto ai vettori

(P_3) $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$ associatività

(P_4) $1v=v$ elemento neutro $\Rightarrow$ sembra banale ma è IMPORTANTE!!!

Ho così elencato una **LISTA DI ASSIOMI** che definisce un insieme particolare chiamato SPAZIO VETTORIALE, su $\mathbb{K}$.

Quindi tutti quegli insiemi che possiedono tutte queste proprietà vengono definiti spazi vettoriali.

gli elementi $v\in V$ sono vettori $\rightarrow$ elementi dello SPAZIO VETTORIALE

N.B.: durante il corso si è parlato di vettori applicati, vettori colonna, vettori riga; per non confonderso sui vari argomenti quando si parla di "vettori" senza aggettivo vuol dire che stiamo parlando di SPAZIO VETTORIALE, se invece è accompagnato dal rispettivo aggettivo si parla del rispettivo argomento, matrici, vettori applicati etc.

Notazione x SPAZIO VETTORIALE: SV.

$F(I)$ è uno SV su $\mathbb{R}$ perché:
qualsiasi intervallo
sto
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(5) POLINOMI a coefficienti in $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}_{[x]}$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$

- $p(x) + q(x)$
- $\alpha p(x)$

sono S.V. su $\mathbb{K}$ ma non della categoria che ci interesse nel corso.

(6) Insieme $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \quad x > 0\}$

$x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x \oplus y = xy$ chiamo somma il prodotto.

$\alpha \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot x = x^\alpha$ chiamo prodotto l'elevamento a esponente.

$0_V = 1$ elemento nullo

$\ominus x = \frac{1}{x}$ $\quad (\mathbb{R}^+, \oplus \odot)$ è uno SV su $\mathbb{R}$

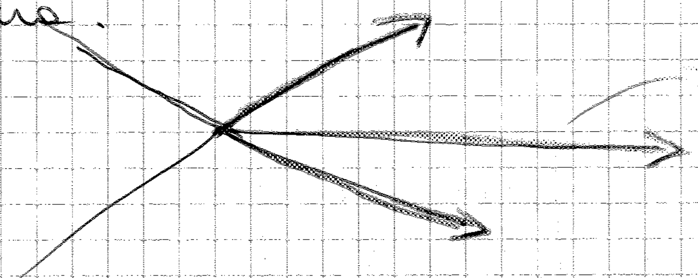
quindi $\mathbb{R}^+$ con le operazioni tradizionali in $\mathbb{R}$ non è possibile definirlo SV su $\mathbb{R}$; se però un'invento delle nuove operazioni allora posso definirlo SV su $\mathbb{R}$.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Def. Sia V un SV su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme U si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se $U \neq \emptyset$ e U è uno SV su $\mathbb{K}$ con le operazioni di V. insieme vuoto

Per farlo diventare un SSV, lo ampio con il prodotto per lo scalare α e includo lo 0. 1, Prendo tutti gli $\alpha\vec{v}$, che sono la retta passante per OP, manca solo la ② prendo allora un altro scalare β e si ha
$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v} = (\alpha+\beta)\vec{v}$.

L, Ho così un SSV, ma NON x la SOMMA dei due vettori, perché ho la REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA che mi dà un altro vettore non definito dal SSV delle 2 rette; quindi è un SSV per il prodotto ma non per la somma, si dice che non è chiuso rispetto alla somma.



non è incluso nelle 2 rette.

Il problema è rimuovere nell'insieme!

Notazione: $\{0\}$ SOTTOSPAZIO NULLO

X CONVENZIONE V si considera come SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI SE STESSO.

In generale se $U \subseteq V$ $U \neq V$ U si dice SSV PROPRIO.

ⓑ MATRICI $M_{m,n}$

⚠ MATRICI a scala non sono un SSV nemmeno quelle normalizzate.

- MATRICI ANTISIMMETRICHE : SSV di M_n

$A_n = \{ A \in M_n : A = -{}^tA \}$ matrici quadrate

Esempio caso 2x2 $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

Invece NON sono SSV:

- MATRICI INVERTIBILI : $G.L._n$

non sono SSV perché la somma non dà una matrice invertibile e inoltre $O_n \notin G.L._n$.

ⓒ FUNZIONI $F(I)$

Si prenda I intervallo:

- FUNZIONI CONTINUE $C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ continue} \} \subseteq F$

sono un SSV: la somma di funzioni continue mi dà una funzione continua; il prodotto di funzioni continue mi dà " " !

- FUNZIONI DERIVABILI: $C^r(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ derivabili} \} \subseteq F(I)$

sono un SSV

- EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE A COEF. COSTANTI:

$$y'' + y = 0$$

L'insieme delle SOLUZIONI è un SSV di $F(\mathbb{R})$

$$Sol(y'' + y = 0) = A\cos t + B\sin t$$

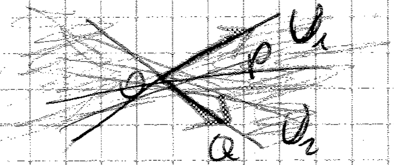
ⓓ POLINOMI: $[\mathbb{K}[x]]$

Sottoinsieme $\mathbb{K}_d[x]$ di grado $\leq d$

$U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$ $\quad U_1 + U_2$ è SSV.

Esempio:

Prendo 2 vettori applicati nello spazio



Nello spazio $\underbrace{U_1 + U_2}$ = PIANO

risulta come il minimo SSV meno di così non si può

sono tutte le possibili somme

$U_1 \cup U_2 \subseteq$ PIANO

Quando $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ si parla di somma diretta $U_1 \oplus U_2$

Si possono definire la somma di 3 o 4 e così via SSV.

Esercizio:

Trovare qual è la somma delle matrici simmetriche e quelle antisimmetriche:

$S_n + A_n = ?$ se sono $\oplus$? Sì

Trovare qual è la somma delle matrici triangolari superiori e inferiori:

$T_n^+ + T_n^- = ?$ se sono $\oplus$? No

$\Downarrow$

danno tutte le matrici 2×2

ma non è SSV. Quindi $\overline{U} \cup \overline{W}$ NON è SSV perchè se passo alla somma vettoriale $\vec{v}+\vec{w}$ NON appartiene più all'UNIONE dei 2 SSV perchè per la regola del parallelogramma ho un altra retta. ⤷ $\vec{v}+\vec{w} \notin \overline{U} \cup \overline{W}$

Allora prendo anche tutte le somme vettoriali degli elementi dei sottoinsiemi e allora ottengo:

$$\overline{U} + \overline{W} = \{ \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$ è un PIANO che passa per O, P, Q

Somma di 2 SSV dà SSV + grande di quelli precedenti, contiene l'UNIONE.

i 2 vettori sono ottenuti da un procedimento costruttivo ⤷ posso infatti chiamare $\overline{U}$ SSV GENERATO da $\{\overline{v}\}$ e $\overline{W}$ SSV 〃 〃 $\{\overline{w}\}$

quindi $\overline{U}+\overline{W}$ SSV GENERATO da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ } si parla così di GENERATORI di SSV

Generalizziamo il concetto e quindi ci si stacca dall'argomento dei vettori applicati.

Sia V SV su $\mathbb{K}$ e $U = \{V_1, \dots, V_k\} \subseteq V$ insieme finito di vettori e prendo $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$

il VETTORE $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + \dots + c_kV_k$

si dice COMBINAZIONE LINEARE (CL) di $V_1, \dots, V_k$ con coefficienti $c_1, \dots, c_k$

Se $U = L(v_1, \dots, v_k)$, V si dice FINITAMENTE GENERATO.

Esempio negativo:

Ricorda:
SPAZIO VETTORIALE si può considerare SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI SE STESSO.

- Spazio dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ NON è finitamente generato, non è uno spazio ottenuto come C.L. di un numero finito di vettori, perché se supponessimo x assurdo che $\mathbb{K}[x] = L(p_1(x), \dots, p_k(x))$ ossia che tutti i polinomi siano ottenuti con combinazione lineare di questi k polinomi.

$d_1 \qquad d_k$

Proprietà della somma dei polinomi:
Si sommano i polinomi con lo stesso grado.

Ogni polinomio avrà il suo grado.

$d_{MAX} = MAX\{d_1 \dots d_k\}$ — d_{MAX} = massimo grado a cui un polinomio può arrivare.

tutti i polinomi avranno grado minore o uguale a d_{MAX}: ogni CL di $p_1(x), \dots, p_k(x)$ ha grado $\leq d_{MAX}$. Allora $x^{d+1} \notin L(p_1, \dots, p_k)$.

Si arriva così a un assurdo!!!

- Funzioni:
• equazioni differenziali ⟹ NON sono FINITAMENTE GENERATI.

$\mathbb{K}^n = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$

Teor: Se V è finitamente GENERATO allora ogni SSV di V lo è.

Prop: Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$

$\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq V$

Se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{V})$ allora: ① $\mathcal{L}(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(\mathcal{V})$

2° insieme è formato da elementi che sono combinazione lineare del 1°.

② $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

1) Se io faccio somme di due combinazioni lineari rimane una combinazione lineare.

② Se io ho un insieme V con uno spazio generato da dei generatori dati e ci aggiungo degli ~~elementi~~ elementi che sono c.l. di quelli originari, il mio spazio non aumenta.

Esempio

$\mathbb{R}^3$ $\mathcal{L}(v_1, v_2)$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2$

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$ famiglia di vettori che dipende da c_1 e c_2

Se prendo $v_3 = v_1 + v_2$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

è combinazione lineare degli altri 2 $\Rightarrow \mathcal{L}(v_1 v_2 v_3) = \mathcal{L}(v_1 v_2)$

perché v_3 è generato dalla somma di v_1 e v_2 $- \overbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3} = \overbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 (v_1 + v_2)}$

$= (c_1 + c_3) v_1 + (c_2 + c_3) v_2$

Def: dato V SV su $\mathbb{K}$, $\bar{U} = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$

si dice <u>INSIEME LIBERO</u> se ogni v_i non è C.L. degli altri v_j $j \neq i$.

Si dice anche che i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono <u>linearmente indipendenti (LI)</u>.

⚠ è una PROPRIETÀ degli INSIEMI, <u>NON</u> dei vettori.

Esempi:

① Vettore 0, nullo <u>NON</u> può appartenere a un insieme libero: perchè il vettore zero è combinazione lineare di qualsiasi vettore.

Comunque dati $v_1, \dots, v_k$

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k$$

VETTORE NULLO DISTRUGGE la LIBERTÀ dell'insieme.

② Se $V \neq 0$ l'insieme dato da V solo: $\{V\}$ è libero.

③ $\{v, w\}$ è libero $\Longleftrightarrow$ v, w <u>NON</u> sono multiplo uno dell'altro.

Da 3 vettori in su le cose sono meno ovvie.

Altra definizione equivalente a quella di INSIEME LIBERO: (Non ha COPYRIGHT come quella di MATRICE INVERTIBILE).

Prop/def: $\{v_1, \dots, v_k\}$ è libero se e solo se l'

In generale: se un insieme NON è LIBERO può essere espresso da quei vettori in molti modi.

Per esempio:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1+2c_2+3c_3=6\\ c_1+c_3=2\\ c_1-c_2=0\end{cases}$$

ho ∞ soluzioni.

Def: Sia V SV su $\mathbb{K}$ $V\neq\{0\}$ V fin. GENERATO

Un insieme LIBERO e ORDINATO di generatori di V si dice BASE di V.

d'ora in poi sottointeso nella voce "V SV su $\mathbb{K}$"

BASI

Un insieme per essere una BASE: dev'essere:

- GENERATORE di V
- LIBERO
- ORDINATO $\Longrightarrow$ se scambio l'ordine dei vettori ho BASI DIVERSE.

Prop: Ogni V SV su $\mathbb{K}$ (FIN. GENERATO) AMMETTE una BASE.

Prop: ① Ogni insieme libero di V è contenuto in una BASE.

② Ogni insieme di generatori di V contiene una BASE.

① Se prendo insieme libero e gli aggiungo vettori che non sono c.l. di altri, a un certo punto il processo

Quindi è un insieme di generatori e una BASE

$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$\mathbb{K}^n = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$ $\{e_1, \dots, e_n\}$ è LIBERO

e si dice BASE CANONICA di $\mathbb{K}^n$ e la dim $\mathbb{K}^n = n$.

Quando si parla di BASE CANONICA si parla di vettori canonici $(e_1, \dots, e_n)$.

D'ora in poi tutte le basi hanno n elementi: se mi danno lo spazio in $\mathbb{R}^3$ e mi chiedono se l'insieme ~~su~~ $\mathbb{R}^3$ è una base, devo accertarmi che questo ~~~~ abbia 3 elementi come dimensione, altrimenti non lo è (una base).

Esempio: le matrici E_{ij} $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i, j)

sono BASE di $M_{m,n}$ e ha $\dim M_{m,n} = m \cdot n$

Esempio:

$\mathbb{K}_d[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2, \dots x^d)$ polinomi

sono linearmente indipendenti

$\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ LIBERO $\Longrightarrow$ BASE

$\dim \mathbb{K}_d[x] = d+1$

Esempio:

$Sol(y'' + y = 0)$ $\{\cos x, \sin x\}$ è libero perché il coseno e il seno non sono l'uno il multiplo dell'altro. $\Longrightarrow$ BASE

Esempio: Matrici 2×2 M_2

si prendono la triangolare inf e la triang. sup

T^- T^+ $\qquad T^+ \cap T^- = \Delta \rightarrow$ diagonali

$$\begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$\Delta = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ Uso l'estensione una base come

n.e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← procedimento: aggiungo un nuovo vettore nella combinazione lineare

$T^+ = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \rightarrow$ ho ottenuto T^+

$T^- = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \rightarrow$ ho " T^-

Sono tutti e tre liberi $\Longrightarrow$ BASI

dim $\Delta = 2 \rightarrow 2$ generatori

" $T^+ =$ dim $T^- = 3$

ottengo tutte le matrici 2×2

$$\underbrace{T^+ + T^-}_{\text{SPAZIO SOMMA}} = M_2$$

SPAZIO SOMMA dato dalle triangolari inf. e " " sup

Osservazione:

$$\underset{4}{\dim (T^+ + T^-)} + \underset{2}{\dim (T^+ \cap T^-)} = \underset{3\ +\ 3}{\dim T^+ + \dim T^-}$$

Si nota che la dimensione della somma <u>**NON**</u> è UGUALE alla somma delle dimensioni.

TEOREMA di GRASSMANN

dato V SV su $\mathbb{K}$ e presi $U_1, U_2 \subseteq V$ SSV

$$\boxed{\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2}$$

Se la SOMMA è DIRETTA, cioè $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ SPAZIO VETT. NULLO

x_1, x_2, x_3 è un insieme libero $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 1c_3 = 0 \end{cases}$ è determinato $\to$ UNICA SOLUZIONE $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

per il Teorema di Rouché $\Longleftrightarrow$
Capelli: $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq$ n° delle incognite
quindi non è libero

SINTESI LEZIONE PRECEDENTE 05/04/2013

Prop: $U = \{\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{\Downarrow \text{ generatori del SSV}}\} \subseteq \mathbb{K}^n$

(1) $x \in \mathbb{K}^n$, $x \in \mathcal{L}(U)$ (x è c.l. di $x_1, \dots, x_k$) $\Longleftrightarrow r(\underbrace{[x_1 \dots x_k]}_{\Downarrow}) = r(\underbrace{[x_1 \dots x_k\, x]}_{\Downarrow})$

matrice formata dai vettori messi in colonna — matrice formata dai vettori + vet.

Notazione:
$[x_1 \dots x_k] \Longrightarrow$ matrice $n \times k$ con colonne $x_1\, x_k$.

Se il rango non cambia, quello è una combinazione lineare. $\rightarrow$ se invece cambia il vettore x non è più combinazione lineare

(2) insieme U è libero $\Longleftrightarrow \underbrace{r([x_1 \dots x_k]) = k}$
il rango della matrice formata dai vettori dati è uguale al numero dei vettori stessi.

(3) U è una BASE $\Longleftrightarrow k = n$ e $[x_1 \dots x_n]$ di $\mathbb{K}^n$ è INVERTIBILE.