NUMERO: 572

DATA: 10/07/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Appicciafuoco

MATERIA: Analisi I

Prof. Tabacco

Anno accademico 2012/2013

Politecnico di Torino

ANALISI I

Teoria

Prof.ssa Anita Tabacco

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 225

- Insiemistica
- Logica

Teoria degli insiemi:

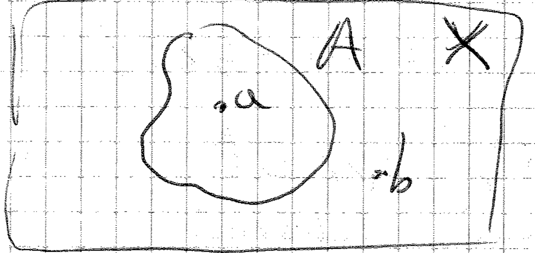
lettere maius. $A, B, C, D \rightarrow$ insieme generale

" minu. $a, b, c \rightarrow$ elemento dell'insieme generale

$a \in A$

$b \notin A$

Rappresentazione grafica $\rightarrow$ diagrammi di Venn



X insieme ambiente

$A \subseteq X$ A <u>non</u> è strettamente incluso in X quindi A potrebbe coincidere con X.

$A \subset X$ A strettamente incluso in X quindi A non coincide con X: esiste almeno un elemento che non appartiene ad A.

$\mathbb{N}$ = insieme numeri NATURALI
$= \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ elencazione

$\mathbb{Z}$ = insieme numeri ~~dei~~ INTERI
$= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ elencazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 225

Insieme ambiente X

" vuoto $\emptyset$ è contenuto in tutti gli altri insiemi:

$\complement X = \emptyset \qquad \complement \emptyset = X$

es. $X = \mathbb{N} \quad A = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ insieme numeri pari

$\complement_{\mathbb{N}} A = \{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ insieme numeri dispari

2 insiemi o +:

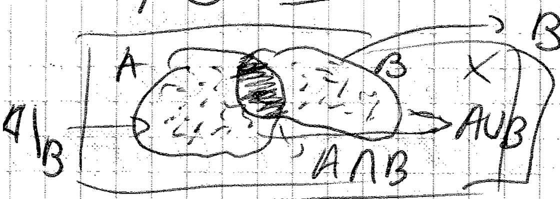
disgiunzione $\vee$ vel

- UNIONE $\rightarrow A \cup B = \{x \in X : x \in A$ oppure $x \in B\}$
- INTERSEZIONE

$\wedge \rightarrow$ congiunzione et

$\hookrightarrow A \cap B = \{x \in X : x \in A$ e $x \in B\}$

$A, B \subseteq X$



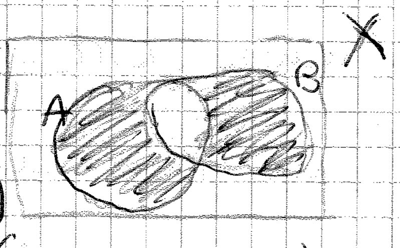
$\setminus \rightarrow$ meno

- DIFFERENZA

$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$

$B \setminus A = \{x \in X : x \in B \wedge x \notin A\}$

Nota: $A \setminus B \neq B \setminus A$



$A \triangle B = B \triangle A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

differenza SIMMETRICA $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1) Proprietà Booleane

$A \cap \complement A = \emptyset \qquad A \cup \complement A = X$

Elementi di Logica

proposizione: affermazione della quale si può dire se è vero o falso. [valore di verità]

Matematica lega + proposizioni ← si indicano con lettere min. p, q, r ...

Connettivi logici:

- negazione: non p = $\neg p$

Se p è vero, $\neg p$ è falso e viceversa.

$p \wedge q$ (p et q) = congiunzione

$p \vee q$ (p vel q) = disgiunzione

vel = vale p o vale q → UNIONE

et = vale p e vale q → INTERSEZIONE

$A = \{x \in X : p(x)\}$ $B = \{x \in X : q(x)\}$

$p(x)$ ↳ variabile } proposizione

$CA = \{x \in X : \neg p(x)\}$ $CB = \{x \in X : \neg q(x)\}$

$A \cap B = \{x \in X : p(x) \wedge q(x)\}$

$A \cup B = \{x \in X : p(x) \vee q(x)\}$

Dimostrazione:

Prop: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale

Dimostrazione x assurdo:

per assurdo suppongo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Quindi posso scrivere che:

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ① $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

② $\boxed{n, m \text{ primi tra loro}}$

quadrato di n° pari è pari per forza

$2 = \frac{m^2}{n^2} \iff m^2 = 2n^2 \iff m^2$ è pari $\iff$ m è un numero pari $\iff m = 2K,\ K \in \mathbb{N} \iff$ $4K^2 = 2n^2 \iff n^2 = 2K^2 \iff n^2$ è pari $\iff$ n è pari.

è assurdo perché nego la contra ipotesi ②, perché arrivo a dire che n e m sono entrambi pari quindi non sono primi tra loro e quindi affermo contemporaneamente $r \wedge \neg r$.

Dire che m e n sono PRIMI tra di LORO vuole dire che non hanno MULTIPLI COMUNI.

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

Es.

$|x| < 1 \iff x \in (-1, 1)$

$-1 < x < 1$

$|x| > 1$

$$\begin{cases} x \geq 0 & x > 1 \\ x < 0 & -x > 1 \\ & x < -1 \end{cases}$$

$-1 \qquad 1$

$x > 1 \vee x < -1$

$x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

b) $|xy| = |x|\cdot|y|$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y\neq 0$

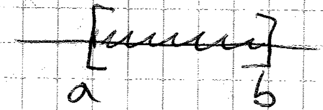
$\big||x|-|y|\big| \le |x-y| \le |x|+|y|$

Estremo inferiore ed estremo superiore

2/10/201

$a, b \in R \qquad a \le b$

$[a,b] = \{x\in R : a \le x \le b\}$



→ intervallo chiuso

$(a,b) = \,]a,b[\, = \{x\in R : a < x < b\}$

→ intervallo aperto

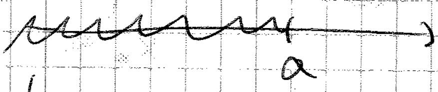
disuguaglianza **stretta**

$(a,b] \quad [a,b)$ → intervalli semiaperti / semichiusi

$\left.\begin{array}{ll}(-\infty, a] & (-\infty, a) \\ [b, +\infty) & (b, +\infty)\end{array}\right\}$ intervalli di semirette

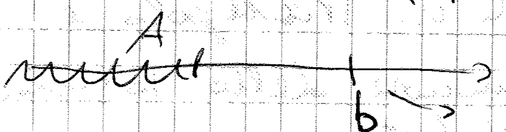
$(-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$ x è strettamente minore di a

$R = (-\infty, +\infty)$



$A \subseteq R$ Insieme limitato

Def: Diremo che A è insieme limitato superiormente se $\exists\, b \in R$ tale che $x \le b$, $\forall x \in A$.



→ è il limite superiore

Esempio

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \quad n \in N \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \right\}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad A \subseteq [0, 1]$

posso essere + messo

ma non appartiene ad A.

b) $A = \{ 2^n : n \in N \} = \{ 1, 2, 4, 8, 16 \dots \}$

$A \subseteq [1, +\infty)$ limitato INFERIORMENTE

c) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in N \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots \right\}$

$0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$, è il migliore dei MAGGIORANTI ma non è dell'insieme: è un ESTREMO SUPERIORE

è il migliore dei MINORANTI ~~ma non~~ ed è dell'insieme: è un MINIMO

$A \subseteq [0, 1]$

Def. Sia A un insieme LIMITATO SUPERIORMENTE, diremo che x_M è il MASSIMO di A se $x_M \in A$ e $x \leq x_M$, $\forall x \in A$.

(a) (b)

$x_M = \max A$

(a) appartiene all'insieme

(b) è un maggiorante

Per dimostrare che il MASSIMO è UNICO, si ragiona per assurdo dicendo che ci siano due MASSIMI:

$x_M = \max A \quad x_M^1 = \max A \qquad x_M \neq x_M^1$

$x_M^1 \in A, \; x \leq x_M^1, \; \forall x \in A$

$x_M < x_M^1$

ASSURDO! CONTRADDIZIONE.

$$\frac{1}{r} > \frac{n+1}{n} \iff \frac{1}{r} > 1 + \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-r}{r}$$

$$\iff n > \frac{r}{1-r}$$

Fai stesso ragionamento per l'esempio (a).

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ $\quad \sqrt{a} \quad \sqrt[3]{a} \quad x^n = a$

↳ se n è pari abbiamo almeno due risultati

↳ se n è dispari abbiamo un solo risultato.

$n! = n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$ $\quad \boxed{0! = 1} \quad \boxed{1! = 1}$ $\quad n$ fattoriale

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ → binomiale → sempre numero naturale

$0 \le k \le n$

$n! = n\cdot(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{1!\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

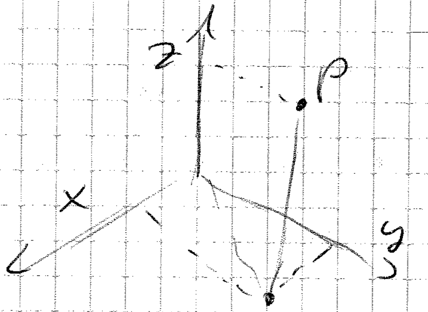
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$ triangolo di Tartaglia

↳ da fare! seguendo la definizione

Esempio:

SPAZIO CARTESIANO

$X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^3$



$P(x,y,z)$ ↳ terna

Esempio:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,+\infty) = \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)$

(x,y,z,q)

In generale: $\mathbb{R}^n$

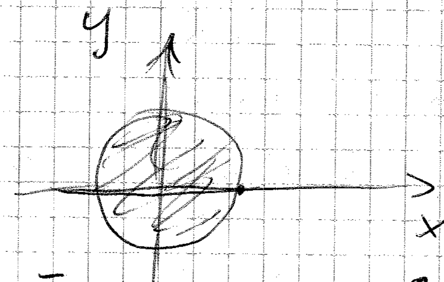
Relazione è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano.

$R \subseteq X \times Y$

Esempio

$\mathbb{R} = X = Y$

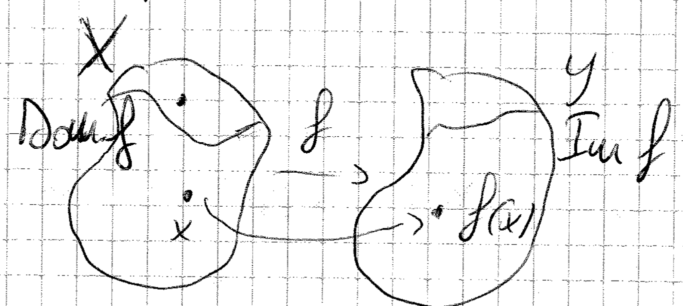
$R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$



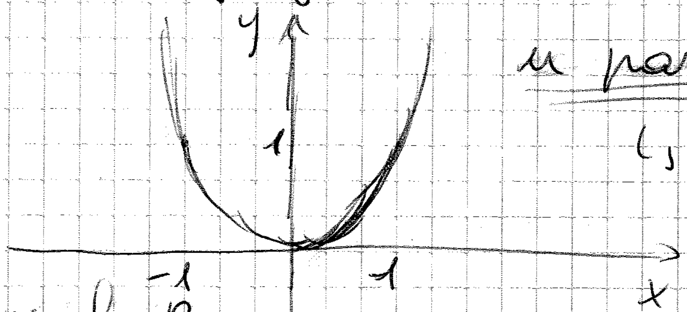
Def.: una funzione f è una relazione in cui ogni elemento di X è in relazione con al più un elemento di Y.

$f: X \to Y$

$x \to f(x)$



Es. $y = f(x) = x^n$, $n \geq 1$

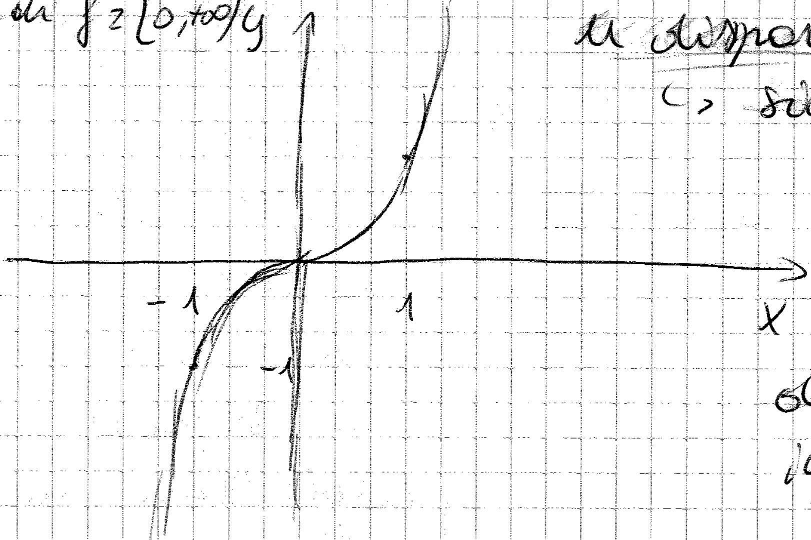


n pari $f(x) = f(-x)$

↳ simmetrica rispetto all'asse y.

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [0, +\infty)$



n dispari

↳ simmetrica rispetto all'origine.

$f(x) = -f(-x)$

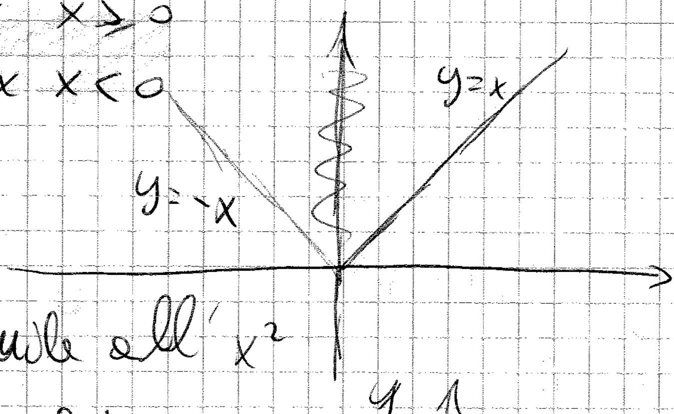
dom $f = \mathbb{R}$

im $f = \mathbb{R}$

Es.

Funzioni possono essere descritte con formule implicite ed esplicite.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



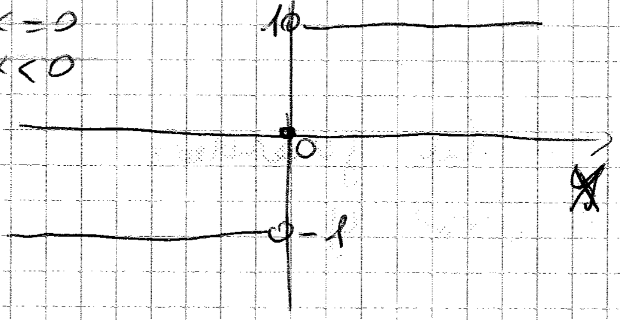
dom $f = \mathbb{R}$

im $f = [0, +\infty)$

↳ è simile all' x^2

Es.

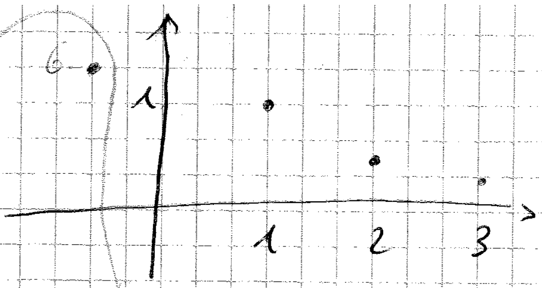
$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



dom $f = \mathbb{R}$

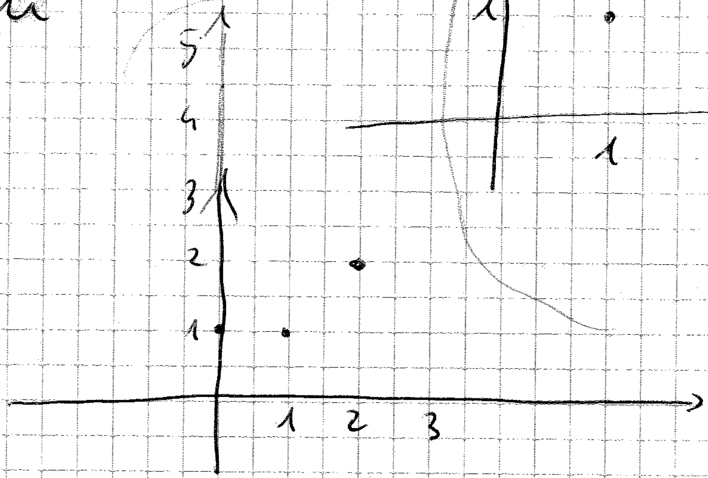
im $f = \{1, 0, -1\}$

Es. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad n \geq 1$



Es.

$a_n = n!$

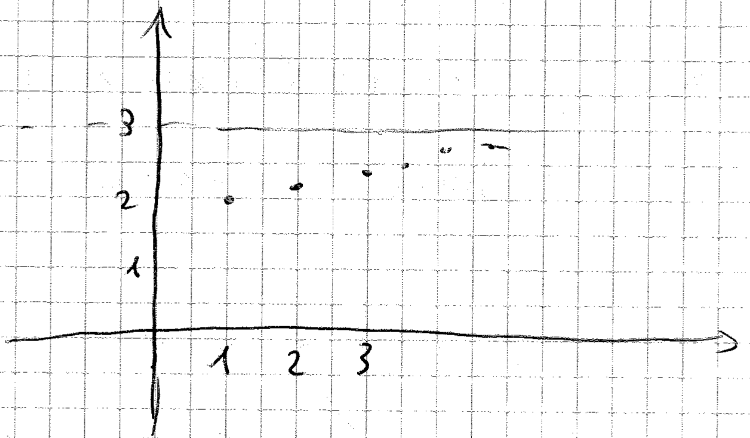


Es.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad n \geq 1$

$a_1 = 2$

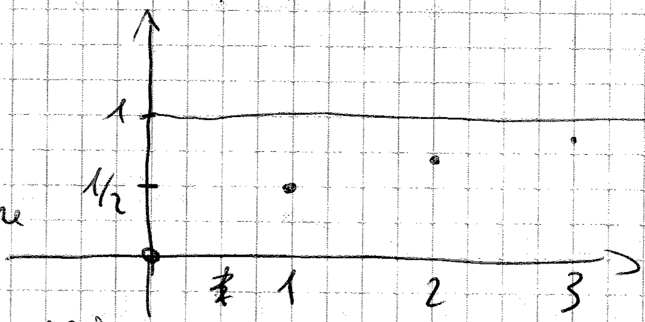
$a_2 = \frac{9}{4}$



Es.

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad n \geq 0$

denominatore sarà sempre + grande del numeratore quindi non arriverà mai all'unità



Es.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\longrightarrow$ teorema di Pitagora

$\text{dom } f = R^2$ $\qquad \text{im } f = [0, +\infty)$

$f(x,y) = (y, x)$

$f : R^2 \longrightarrow R^2$

Ogni proprietà dell'insieme è data dalla funzione.

Def: $A \subseteq \text{dom} f$, $f(A) \subseteq \text{im} f$

Se $f(A)$ è limitato sup/inf. diremo che la funzione è limitata = =

$\sup\limits_{x \in A} f = \sup f(A) < +\infty$ f è superiormente limitata

$\inf\limits_{x \in A} f = \inf f(A) > -\infty$ f è inferiormente limitata

$-\infty < \inf f(A) \leq \sup f(A) < +\infty$ } f è LIMITATA

MASSIMO

$\max f(A) = M$
$= \max f(x)$ $x \in A$

1) $\exists x_M \in A : f(x_M) = M$

2) $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$

$\min f(x)$ $x \in A = f(x_m) = m$

MINIMO

$m \leq M$

~~$x_m \leq x_M$~~

Es.

Parte intera = non ha max né min
$(-\infty, +\infty)$ funzione illimitata

Mantissa = ha min (0) ma non max
funz. limitata $[0, 1)$

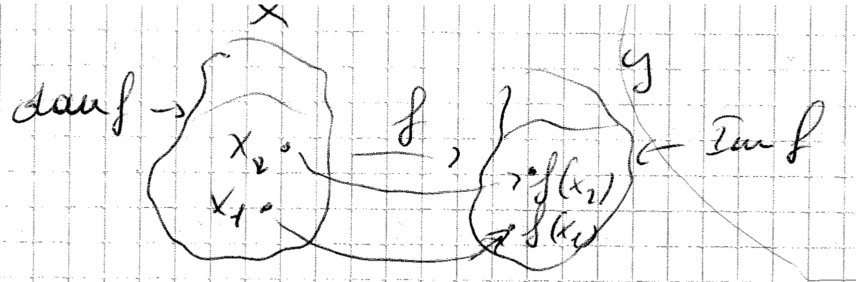
$\inf f = \min f = 0$ $\sup f = 1$

$x_m = z \in \mathbb{Z}$ -> un punto di minimo sull'asse x

Segno x: è limitata

$\inf f = \min f = -1$ $x_m = x > 0$

$\sup f = \max f = 1$ $x_M = x < 0$



f iniettiva $\quad y \in \operatorname{im} f \quad f^{-1}(y) = \{x\}$

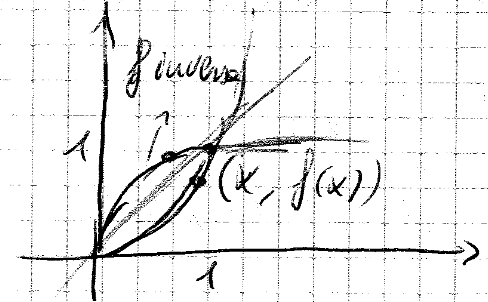
è definita la funzione inversa

$f : \operatorname{dom} f \to \operatorname{im} f \;,\; f^{-1} : \operatorname{im} f \to \operatorname{dom} f$

$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f \;,\; \operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f$

$f(x) = x^2 \quad \exists\, f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



$(x, f(x)) \to$ funzione

$(f(x), x) \to$ funzione inversa

$(y, f^{-1}(y))$

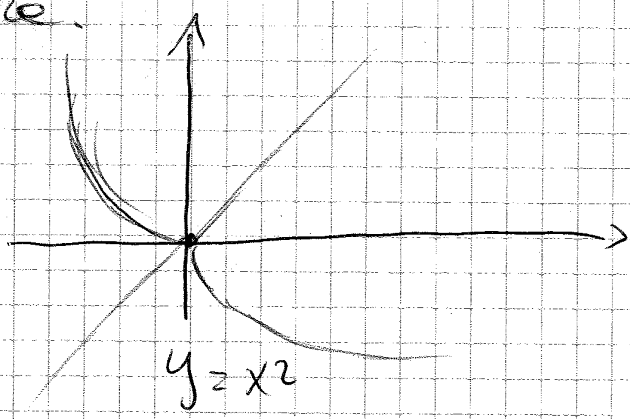
Per ottenere la ~~inversa~~ funzione inversa basta tracciare la bisettrice e poi fare a specchio la simmetria.

$f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$

$x \longmapsto -\sqrt{x}$



$y = x^2$

$x = -\sqrt{y}$

Va sempre considerato l'intervallo ⚠

~~Monotonia~~

Mantissa è crescente nei vari intervalli $[0,1)$, $[1,2)$.

La monotonia mi dà l'iniettività su I.

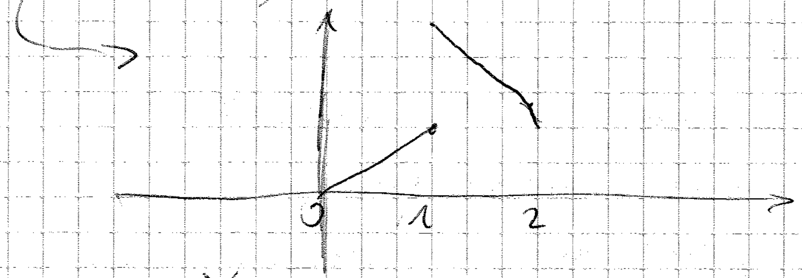
Def: f strettamente monotona su I $\Longrightarrow$ f iniettiva su I.

Dim: f strettamente decrescente oppure crescente

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{oppure} \\ x_2 < x_1 \end{cases} \Longrightarrow$$

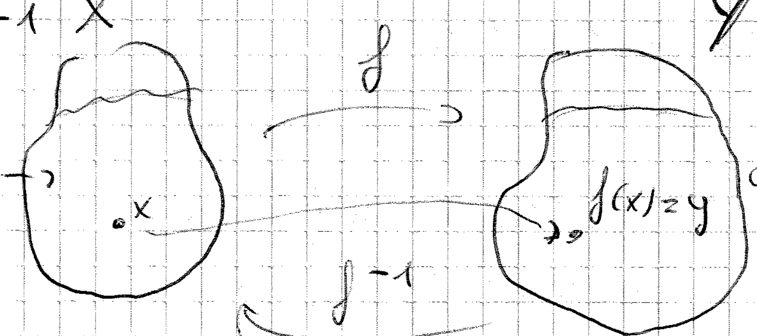
$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ \text{oppure} \\ f(x_2) > f(x_1) \end{cases} \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

~~f iniettiva $\Longrightarrow$ f strett. monotona~~



09/10/2012

im f^{-1} = dom f



im f = dom f^{-1}

Siamo nell'ipotesi che f è BIIETTIVA senò non avremmo la f^{-1}

f: dom $f \subseteq X \longrightarrow$ im $f \subseteq Y$

f^{-1}: dom $f \subseteq Y \longrightarrow$ im $f \subseteq X$

Le funzioni inverse mantengono le PROPRIETÀ delle funzioni originali.

Funzione periodica:

$p > 0 \quad f(x) = f(x+p) \quad \forall x \in \text{dom} f$

p ↓ periodo dell'intervallo

↓ numero fissato

$= f(x+kp) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Funzione sen x mai è iniettiva, perché periodica

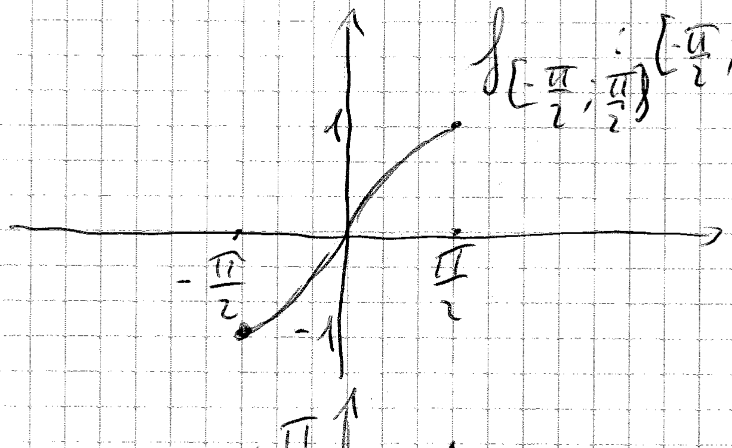
Es.

$y = f(x) = \text{sen}\, x \qquad -1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \rightarrow$ è suriettiva $\qquad |\text{sen}\, x| \leq 1$

Ho infiniti modi di andare a restringere l'intervallo perché sen x diventi iniettiva e quindi BIETTIVA.

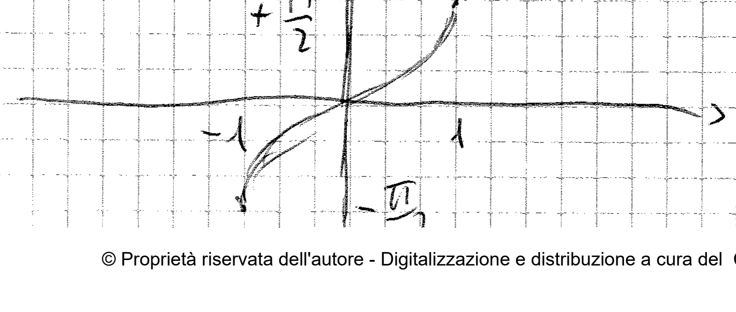
C'è un modo particolare di restringere l'intervallo: si definisce funzione ARCOSENO



$f_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$

↓

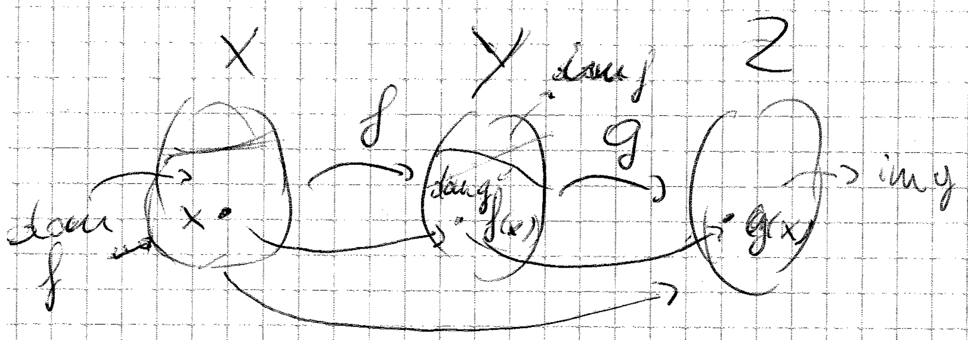
è la funzione inversa della sen x ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



$g(x) = f^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$

$g: [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Composizione di funzioni:



composizione

$g \circ f$ (g composto f) = prima applico la funzione f e poi applico la g.

Ci sono dei punti nell'im f che non appartengono a dom g; per proseguire nella composizione i punti dell'im f devono stare dentro il dom g.

$f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom}\, g) = \text{dom}(g \circ f)$ Controimmagine di Y

$g(\text{im} f \cap \text{dom}\, g) = \text{im}(g \circ f)$

Esempio

$f(x) = 2+x$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x}$ → iperbole

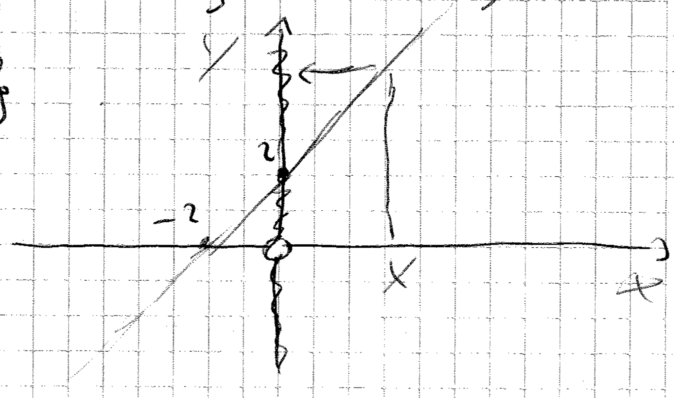
$g \circ f(x) = g(2+x) = \frac{1}{2+x}$ $\qquad x \neq -2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$

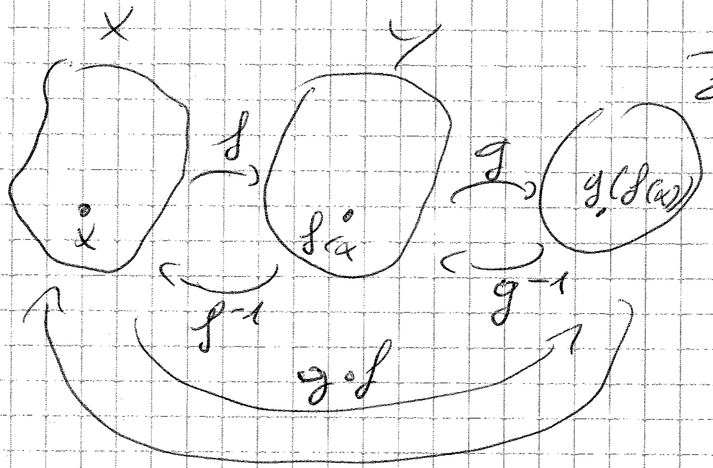
$\text{im} f \cap \text{dom}\, g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

→ controimmagine di Y

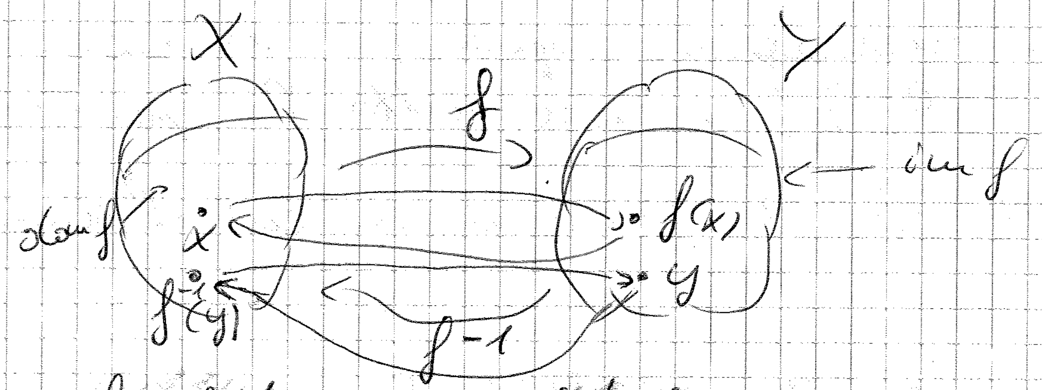


$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ la funzione inversa della composta è uguale alla composizione delle funzioni inverse



$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$$

$$(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$$



$f\circ f^{-1}(y) = y$ $\quad f^{-1}\circ f(x) = x$

$f\circ f^{-1}: \operatorname{im} f \to \operatorname{im} f$ $\quad f^{-1}\circ f: \operatorname{dom} f \to \operatorname{dom} f$

Sono entrambe funzioni IDENTITÀ, ma una è nell' ~~dom~~ im f e l'altra è nel dom f.

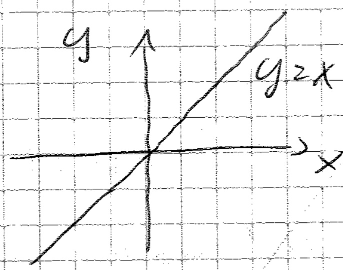
Es. $\cancel{f(x) = a^x \quad f^{-1}(x) = \log_a x}$

$\cancel{f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(a^x) = x = \log_a a^x}$

$\cancel{\operatorname{dom}(f^{-1}\circ f) = \mathbb{R}}$

Composizione della funzione con funzione inversa.

$f \circ f^{-1} = id \to$



Esempio

$f(x) = \log x$

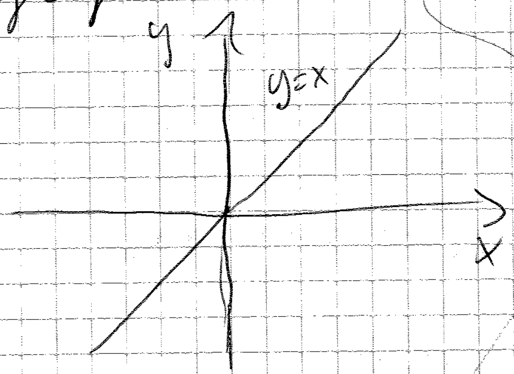
$f^{-1}(x) = e^x$

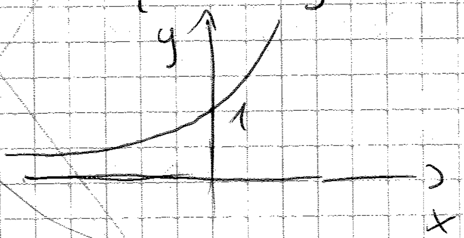
$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = \log e^x = x \log e = x$

bisogna imporre il dominio

$dom = \{e^x > 0\} = \mathbb{R}$

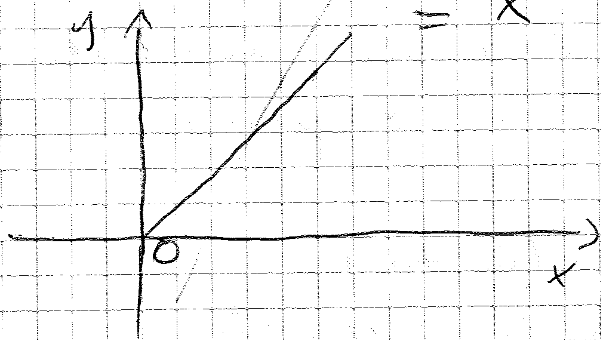
grafico



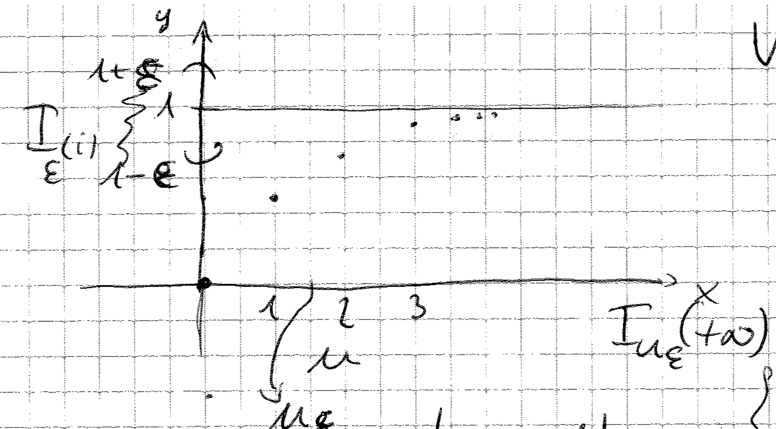


$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = e^{\log x} = x$

$dom = \{x > 0\} = (0, +\infty)$



Non è proprio vero che dà l'identità



Voglio far vedere che questa successione ~~sost~~ tende a 1, fisso un intorno di 1 trovo un indice della successione per cui tutti gli altri indici stanno nell'intorno.

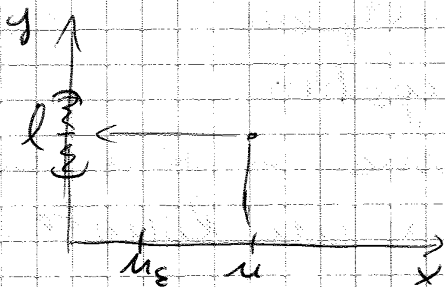
$|a_n - 1| < \varepsilon$

per quanto io fissi un intervallo piccolo, si trova una successione di termini che si avvicinano sempre più al limite della successione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq n_0 : \forall n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$$

$$\forall I_\varepsilon(1), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Longrightarrow a_n \in I_\varepsilon(1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$



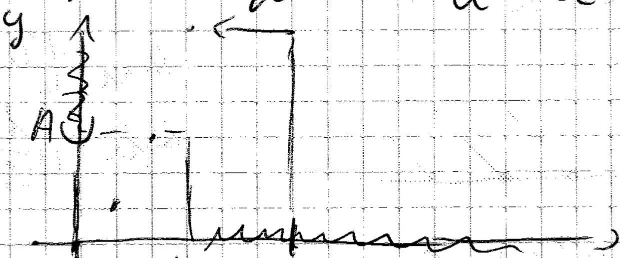
Def. $\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall I_\varepsilon(l), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Longrightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$$

Non tutte le successioni convergono (= sono limitate), esempio $a_n = n^2$

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$$



$\forall A > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon$

$\Longrightarrow n^2 > A$

$n > [\sqrt{A}] + 1 = n_\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \{a_n\} \text{ CONVERGE} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ DIVERGE} \\ \nexists & \{a_n\} \text{ indeterminata} \end{cases}$$

Per avere una condizione di limite determinato basta che ci sia una condizione di MONOTONIA.

f crescente su I

$\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ crescente   successioni

(a) $\forall n_1, n_2$ con $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$

(b) $\forall n \geq n_0$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$

n_1 n_2

questa condizione implica quella successiva (b).

Ciò si può ripetere per la DECRESCENTE

Teorema

Una successione $\{a_n\}$ crescente o converge o diverge.

↳ si può ripetere per la DECRESCENTE.

~~Se una~~

(1) Se inoltre $\{a_n\}$ è limitata (super.) allora converge e $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n \geq n_0} \{a_n\}$

(2) Se non è limitata (super.) allora DIVERGE a $+\infty$.

Chiaramente una successione crescente non ha limite $= -\infty$.

② Se non è limitata inferiormente allora diverge a $-\infty$.

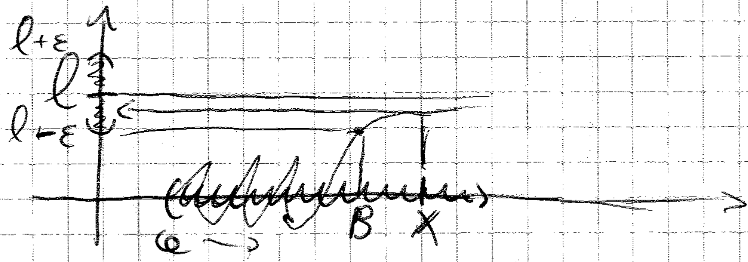
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall I_\varepsilon(l), \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$$

Per le successioni ha senso chiederci solo al crescere dell'indice.

Funzioni

$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

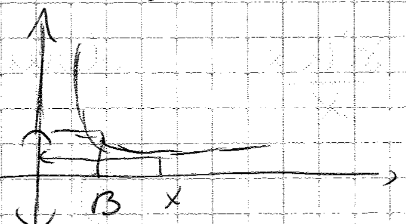


$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 :$
$\forall x \in \operatorname{dom} f$ e $x > B \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\iff \forall I_\varepsilon(l), \exists I_B(+\infty) : \forall x \in \operatorname{dom} f \cap I_B(+\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$ def. con intorni

Esempio

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = l$

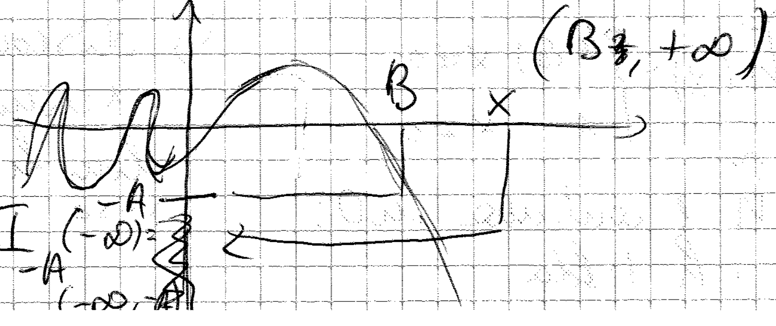


$\varepsilon > 0$, $\exists ?\ B > 0$ tale che

$\forall x > B \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \to \frac{1}{x} < \varepsilon \quad x > \frac{1}{\varepsilon} = B$

Basta trovarne uno, non c'è bisogno di trovare il migliore.

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Def: f definita in $I(x_0)$ — CONTINUITÀ

↳ raggio non ha importanza

f è continua in x_0
se per ogni intorno
$I_\varepsilon(f(x_0))$, esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che ogni
x nel dominio di f e in $I_\delta(x_0)$ soddisfi $f(x)$
appartiene a $I_\varepsilon(f(x_0))$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall I_\varepsilon(f(x_0)), \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \cap I_\delta(x_0) \Longrightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$.

Def.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall I_\varepsilon(l), \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Discontinuità eliminabile:
- caso in cui il lim non è incluso nella funzione
es. $g(x)$ e $h(x)$

Es $f(x) = \sin x \quad x_0 \in \mathbb{R}$

Do per scontato $|\sin x| \leq |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ↳ formule di prostaferesi

$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| =$

$= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \overset{*}{\leq}$

$2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$

$\boxed{\delta = \varepsilon}$ $\quad |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$

$^*\cos\frac{x+x_0}{2}$ ↳ è ≤ 1 ~~quindi lo posso~~

$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

Fare esercizio con il coseno.

16/10/2012

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall I_\varepsilon(\ell), \exists I_A(\pm\infty) : \forall x \in I_A(\pm\infty)$

$\implies f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall I_\varepsilon(\ell), \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \mathrm{dom}$

$\cap I_\delta(x_0) \implies f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

f continua in $x_0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

↳ non è la definizione, ma solo un metodo di verifica.

(a) polinomi: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ↳ dominio in $\mathbb{R}$

(b) $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ↳ dominio in $\mathbb{R} \setminus$ i punti in cui $Q_m(x)$ si annulla

(funzioni razionali)

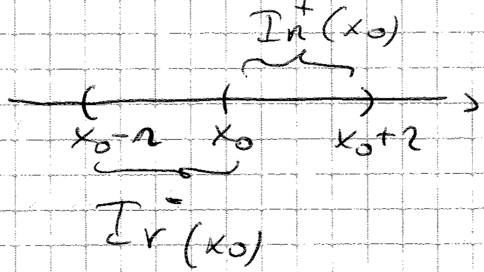
(c) funzioni esponenziali a^x

(d) funzioni log. $\log_a x$

(e) funzioni seno, coseno, le loro commutate (tan), le loro inverse (arcsen, arccos)

$I_r^+(x_0) = [x_0, x_0+r] \to$ intorno DESTRO

$I_r^-(x_0) = [x_0-r, x_0] \to$ intorno SINISTRO



$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ } discontinuità di 2° tipo

$x \in I_r^+(x_0)$ $|x-x_0| = x-x_0 < r$ perché $x > x_0$

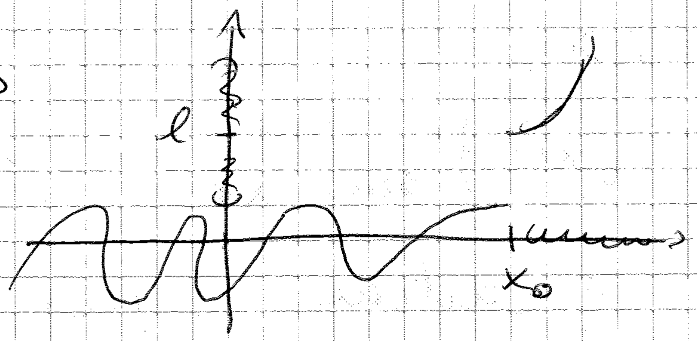
$x \in I_r^-(x_0)$

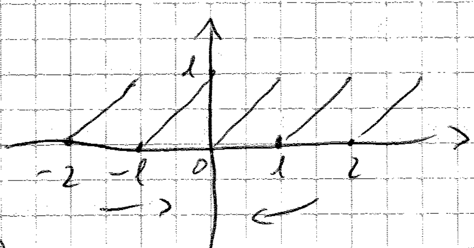
$|x-x_0| = x_0-x < r$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \forall x \in \text{dom} \wedge$

$0 < x-x_0 < \delta \implies |f(x)-l| < \varepsilon$





$\lim_{x\to n^+} M(x) = 0$

$\lim_{x\to n^-} M(x) = 1$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

f è continua da destra in $x_0 \iff$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f è continua da sinistra in $x_0 \iff$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Salto nella mantissa è -1:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0 \quad - \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = 1 \longrightarrow -1$

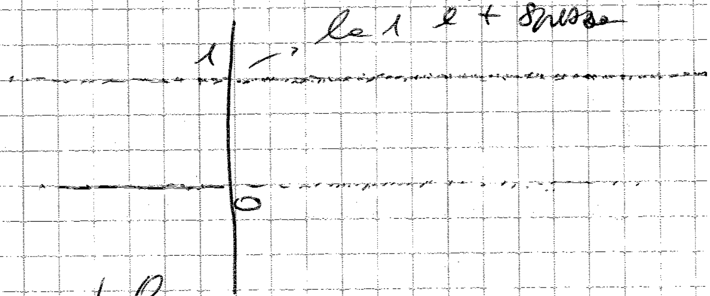
Salto nel segno è 2:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 1 \quad - \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -1 \longrightarrow 2$

Esempio

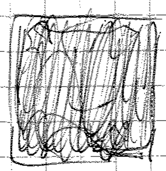
funzione di Dirichlet (tedesco) → è patologica

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$

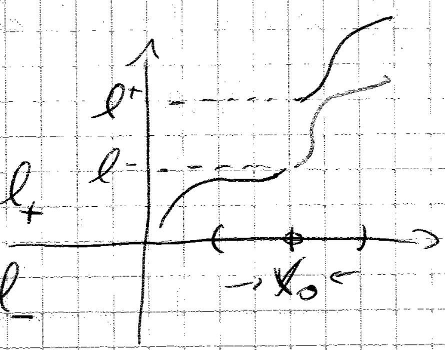
funzione di Peano: patologica



Teor: f definita in $I(x_0)\setminus\{x_0\}$ → ma mi interessa cosa fa in x_0

f crescente in $I(x_0)\setminus\{x_0\}$

$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x_0)$ $\qquad l^- \leq l_+$



$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x)$ sup $\qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_-$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$ inf $\qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l^+$

Limiti e teoremi

22/10/201

(Punto) $c = x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$ i vari modi in cui io lo posso definire

x_0^+: limite dx

x_0^-: limite sx

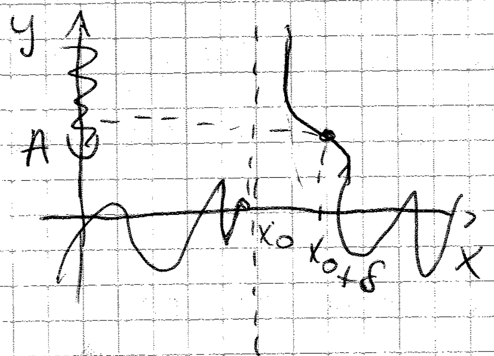
$+\infty, -\infty$: hanno senso solo nel calcolo di limiti

f, g, h etc (funzioni) definite in $I_{(c)} \setminus \{c\}$ → non mi interessa che la funzione sia definita anche in c.

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \iff$$

$$\iff \forall I(l), \exists I_{(c)} : \forall x \in \operatorname{dom} f \cap I_{(c)} \setminus \{c\} \implies$$

$$\implies f(x) \in I(l)$$



$l = +\infty$

$c = x_0^+$

Teor (di unicità del limite)

Se una funzione f ammette limite per $x \to c$, allora esso è unico.

Dim: x assurdo → supponiamo che

$$\underbrace{\lim_{x \to c} f(x) = l \neq l' = \lim_{x \to c} f(x)}$$

cioè esistono 2 limiti diversi.

non c'è bisogno di dire se l e l' sono finiti o infiniti.

$l \neq l'$, $\exists I(l), I(l')$ tali che

$I(l) \cap I(l') = \emptyset$

Teor (algebra dei limiti)

$\lim_{x\to c} f(x) = l$, $\lim_{x\to c} g(x) = m \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x\to c}(f(x)\pm g(x)) = l \pm m$ somma e differenza

$\Longrightarrow \lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = lm$ prodotto

$\Longrightarrow \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l}{m}$ $g(x)\neq 0$ in $I_{(c)}\setminus\{c\}$ quoziente

⚠ Sempre nei casi determinati

Se lo pensiamo in termini di continuità: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

f, g sono continue in x_0.

Fai esercizi con le dimostrazioni sul teorema alg. dei limiti

$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = f(x_0)\pm g(x_0)$

$\Longrightarrow f\pm g$ è continua in x_0

e così anche per fg e per $\frac{f}{g}$ con $g(x_0)\neq 0$ ← chiedo solo questo.

Continuità è un caso particolare della algebra dei limiti.

Teor di permanenza del segno:

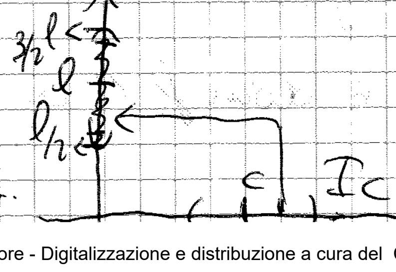
Se $\lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \Longrightarrow \exists I_{(c)} : f(x) > 0, \forall x \in I_{(c)}\setminus\{c\}$

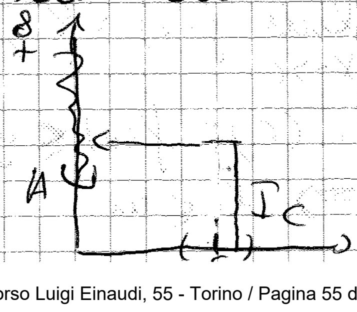
(<0) non si può invertire la freccia (<0)

Segno della funzione permane nel limite.

Dim:

Scelte arbitrarie $\frac{l}{2}, \frac{3}{2}l$ ...





Dim: $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$

$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = m - l \geq 0$

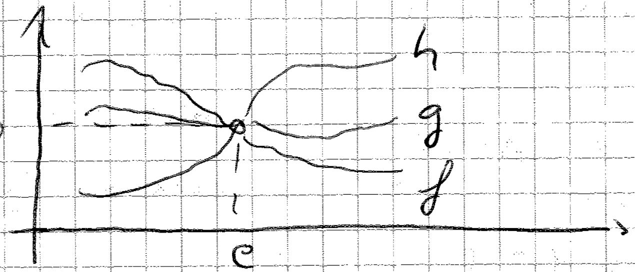
ho applicato la def. di limite e l'algebra dei limiti

Teor (secondo teor del confronto caso finito) }, teorema del DOPPIO CONFRONTO / 3 carabinieri, The squeeze/sandwich theorem

ho 3 funzioni $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

$\exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l \in \mathbb{R}$ numero reale l

$\Longrightarrow \lim_{x \to c} g(x) = l$



Dim: uso la definizione di limite

$\lim_{x \to c} g(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists I_g(c) : \forall x \in I(c) \cap I_g(c) \setminus \{c\} \Longrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$ } questa è la mia tesi

Dim: fissato $\varepsilon > 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists I_f(c) : \forall x \in I(c) \cap I_f(c) \setminus \{c\} \Longrightarrow \boxed{l - \varepsilon < f(x) < l}$

$\exists I_{h(c)} : \forall x \in I(c) \cap I_h(c) \setminus \{c\} \Longrightarrow l - \varepsilon < \boxed{h(x) < l + \varepsilon}$

Definisco $I_g(c) = I_f(c) \cap I_h(c)$

quindi ho trovato che il lim $g(x)$ è quello degli altri 2.

$\forall x \in I_g(c) \cap I(c) \setminus \{c\}$

$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon \Longrightarrow l - \varepsilon < g(x) < l$

Corollario:

valore di maggiorazione

Se f è limitata in $I(c)\setminus\{c\}$ — $\exists M>0$ $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in I(c)\setminus\{c\}$

$$\lim_{x\to c} g(x)=0 \implies \lim_{x\to c} f(x)(g(x))=0$$

↳ infinitesimo ↳ prodotto di un infinitesimo per cui $f(x)$ limitata

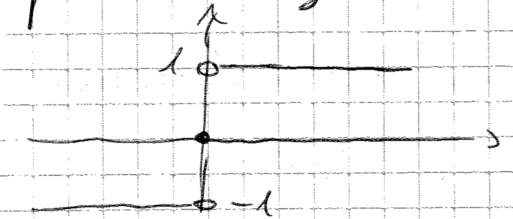
Dim:

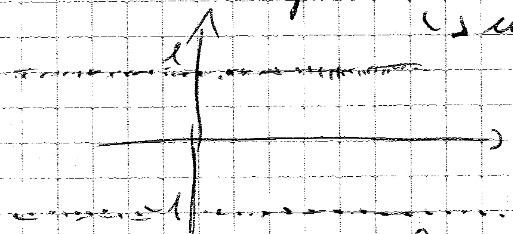
$$\lim_{x\to c} g(x)=0 \iff \lim_{x\to c}|g(x)|=0$$

$$\cancel{\lim_{x\to c} g(x)=l \iff \lim_{x\to c}|g(x)|=|l|}$$

esempio ↳ esempio funzione di Dirichlet ↳ non è limitata

funzione segno





$|g(x)|=1$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{R}\\ -1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\setminus\{\mathbb{R}\}\end{cases}$$

Th $\lim_{x\to c}|f(x)g(x)|=0$

$$0\leq|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\leq\overbrace{M|g(x)|}^{h(x)}$$ → ho maggiorato.

→ 0 ←

È il generale del teorema $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Teor (2° teorema del confronto caso infinito)

$l=+\infty$ → mi basta solo che quella sotto vada a $+\infty$ ($f(x)\leq g(x)$)

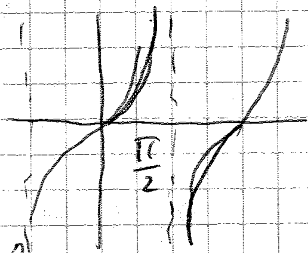
$$\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$$

$$f(x)\leq g(x),\ \forall x\in I(c)\setminus\{c\} \implies \lim_{x\to c} g(x)=+\infty$$

$$= \begin{cases} \pm\infty & n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

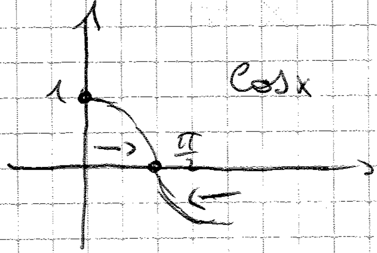
guarda il caso $-\infty$

$\left.\begin{matrix} n=m \\ n<m \end{matrix}\right\}$ = nel caso $-\infty$



Es. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty$

$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sin x = 1$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^-$ → fa zero avvicinandosi con valori negativi



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ → fa zero per valori positivi

Esempio

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\sin^2 x \neq \sin x^2$ ⚠

Dim: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)$ → $\frac{1}{2}$

Imparo la tabella del libro pag. 104

Calcolo di limiti 23/10/2012

Come trattare la composizione di funzioni

Teor (di sostituzione)

(Suppongo di avere una funzione) $\lim_{x \to c} f(x) = l$, considero una 2° funzione g definita in $I(l)$:

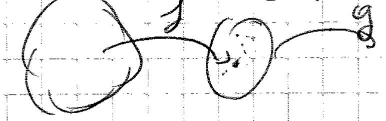
1) $l \in \mathbb{R}$, g sia continua in l

2) $l = \pm\infty$, $\exists \lim_{y \to l} g(y) = L$

} Hp

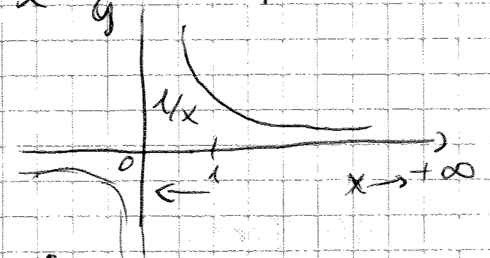
Oss. 1') se in $I(c)$, f assume infiniti valori diversi da l e se $\lim_{y \to l} g(y) = l$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$$



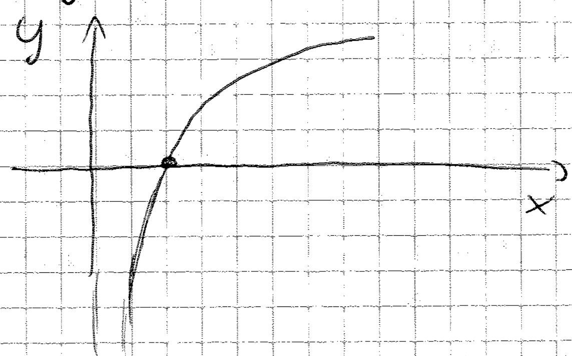
Es. $\lim_{x \to +\infty} \log \sin \frac{1}{x} =$

$\frac{1}{x} \to 0$ quando $x \to +\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0} \sin y =$



$\frac{1}{x} \to 0^+ \quad \sin \frac{1}{x} > 0 \ \forall x > 1$

$y = \cancel{1} \sin \frac{1}{x}$



$= \lim_{y \to 0} \log y = -\infty$

Successione

$\{a_n\} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$n \xmapsto{a} a_n \xmapsto{g} g(a_n)$ $\quad g$ continua in l

$\lim_{y \to l} g(y) = L \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} g(a_n) = L = g(l)$

Se trovo 2 successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = l$ con $g(a_n) \to m_1 \neq m_2 = \lim_{n \to \infty} g(b_n)$

$\Longrightarrow \lim_{y \to l} g(y)$ **non** esiste

$a \neq 0 \quad y = \frac{x}{a} \quad$ se $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$ se $a > 0$

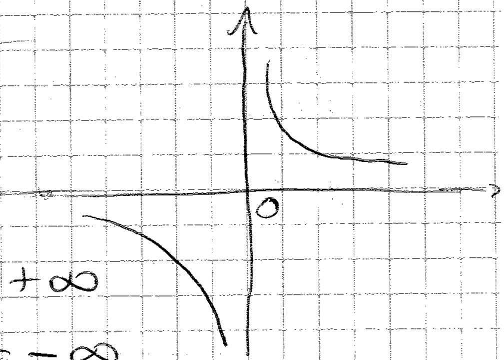
$\to -\infty$ se $a < 0$

$$= \lim_{y \to \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = \left[\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = \quad g(z) = z^a$$

$$= e^a$$

Es. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{-6} \qquad a = -2$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$



$y = \frac{1}{x}$ se $x \to 0^+ \Rightarrow y = +\infty$

$x \to 0^- \Rightarrow y = -\infty$

$$= \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

guarda che succede se metto $\frac{a}{y}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{1/x} = \log_a \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

$$= \log_a e = \frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

$a \log b = \log b^a$

cambiamento di base

Se $a = e \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log e = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \qquad a > 0, a \neq 1$$

$y = a^x - 1 \Longleftrightarrow a^x = 1 + y \Longleftrightarrow x = \log_a (1+y)$

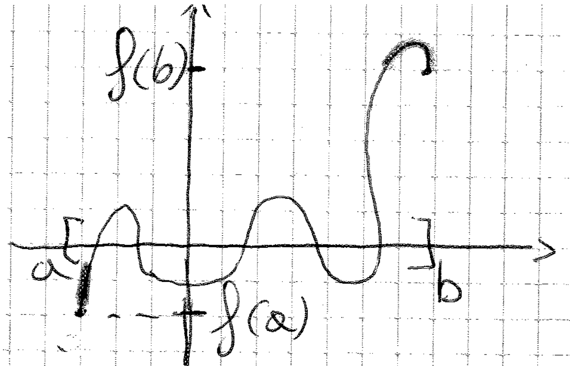
se $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a (1+y)} = \log a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Limiti notevoli

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$
$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{x} = m$	$(a > 0)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{p}{q}$	$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a^{*}$ $(a>0)$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \pi x}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \pi x}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
$\lim_{x \to 0} \frac{a^{px} - 1}{a^{qx} - 1} = \frac{p}{q}$	$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a$

$* = \frac{1}{\log_a e} = \frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$ cambiamento di base

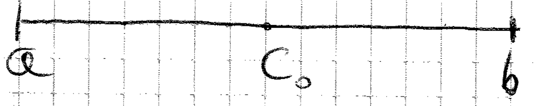


Se f è strettamente monotona, allora lo zero è unico

N.B. la funzione può avere immagine definita oltre f(b) e f(a) vd. grafico

Dim: Dimostrazione costruttiva

lavoro sull'intervallo $[a, b]$



Divido l'intervallo in 2.

$$f(c_0) = \begin{cases} > 0 \to \text{considererò l'intervallo } [a, c] \\ = 0 \to \text{caso migliore} \\ < 0 \to \text{considererò l'intervallo } [c, b] \end{cases}$$

Itero questo procedimento fino a trovare lo zero della funzione iterando una successione di intervalli.

Suppongo $a = a_0$, $b = b_0$ $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

$$c = \frac{a+b}{2} \quad f(c) = \begin{cases} > 0 \to [a, c] \quad a = a_1 \quad c = b_1 \\ = 0 \to \text{ho finito la dim.} \\ < 0 \to [c, b] \quad c = a_1 \quad b = b_1 \end{cases}$$

lunghezza dell'intervallo

$[a, b] = b - a$

lunghezza dei semintervalli $= \frac{b-a}{2}$

$$[a_0, b_0] > [a_1, b_1] > [a_2, b_2] > \dots > [a_n, b_n]$$

2° passo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad f(c_1) = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad [a_2, b_2]$$

La dimostrazione del corollario si fa attraverso il fatto che nel $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ si trova un intorno in cui ci sono punti **negativi**, e che nel $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si trova un intorno di valori **positivi**.

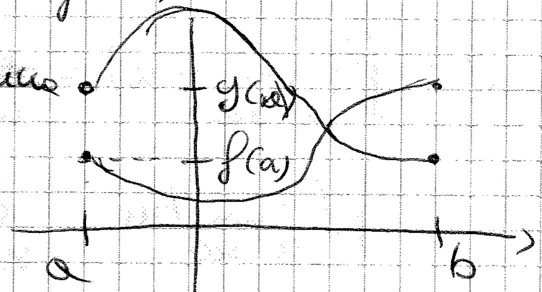
Cor: $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I intervallo

$\Longrightarrow f(I) = J$ intervallo $\quad f : I \to J$.

Cor: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$

$\Longrightarrow \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = g(x_0)$

Dim: $h(x) = f(x) - g(x)$ continua su $[a,b]$



$h(a) = f(a) - g(a) < 0$,

$h(b) = f(b) - g(b) > 0$

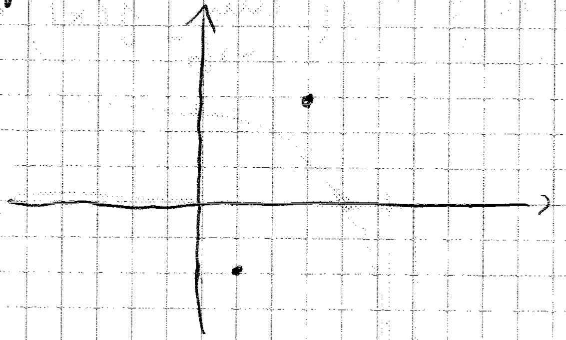
$\Longrightarrow \exists x_0 \in (a,b) : h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$

$\Longrightarrow f(x_0) - g(x_0)$

Es: $f(x) = x^5 + x^3 - 5 \quad \mathbb{R}$

$x^5 - x^3 - 5 = 0 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

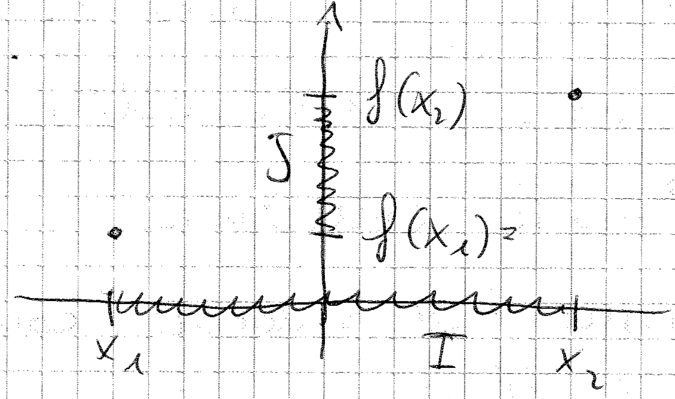
Parlo dello zero perché è strettamente monotona



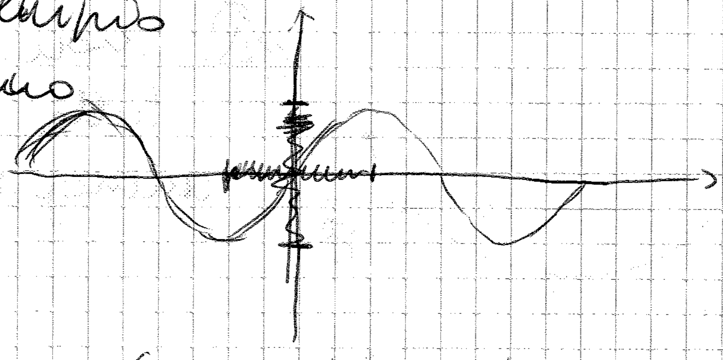
$\Longrightarrow \exists x_0 : f(x_0) = g(x_0) = z$

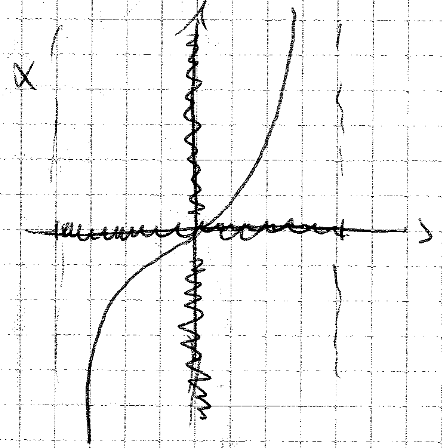
Proprietà intrinseca di un intervallo:
presi qualunque punti il segmento che li unisce è costituito completamente da punti dell'intervallo.

Serve per dimostrare che l'im è un intervallo.



Esempio
Seno





Teor (di Weierstrass)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ f assume valore minimo m e assume valore massimo M e $f([a,b]) = [m, M]$

$\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) = m \quad f(x_M) = M$

Questo teorema mi dà tutta l'immagine della funzione, mi dice che l'immagine è un intervallo, che esistono gli estremi della funzione e che sono max e min della funzione.

Numeri reali puri sono determinati dalla relazione parte immaginaria = 0.

$z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + i y_1$

$z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + i y_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) =$

$= x_1(x_2 + i y_2) + i y_1 (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 +$

$+ \overset{=-1}{i^2} y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + z_2 + z_3$ associativa

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ commutativa

Es.

$(7 - 5i)(2 + 4i) + 2i = 14 + 20 + 28i - 10i + 2i =$
$= 34 + 20i$

$z + 0i = z \qquad 0z = 0$

$z(1 + 0i) = z$ identità

opposto di z $\qquad z + (-z) = 0$

Differenza non è altro che la somma del numero con l'opposto di un altro numero

$z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2$

$|z| \geq 0$

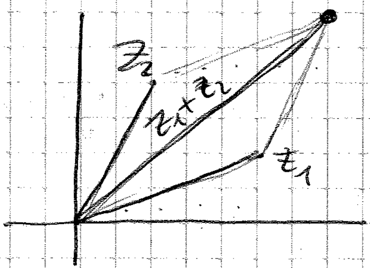
$|z|^2 = (\underbrace{Re\, z}_{x})^2 + (\underbrace{Im\, z}_{y})^2 \longrightarrow (Re\, z)^2 \leq |z|^2$

$(Im\, z)^2 \leq |z|^2$

$Re\, z \leq |Re\, z| \leq |z| \qquad Im\, z \leq |Im\, z| \leq |z|$

Disuguaglianza triangolare

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(x+iy)}} = \overline{(x-iy)} = x+iy = z$ fare il coniugato del coniugato

$|\overline{z}| = |x-iy| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |z|$

$\overline{z_1+z_2} = x_1+x_2-i(y_1+y_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

$z = x+iy \qquad \overline{z} = x-iy$

$z+\overline{z} = 2x \qquad z-\overline{z} = 2iy$

$Re\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \qquad Im\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Esempio

$\dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i} = -i \qquad \boxed{\dfrac{1}{i} = -i}$

$i^2 = -1 \qquad i^3 = i \cdot i^2 = -i \qquad i^4 = 1$

$i^{71} = \underbrace{i^{68}}_{1} \cdot i^3 = -i \qquad i^{256} = 1$

Conviene sempre ricondurre le potenze a una potenza di 4.

Es. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \underbrace{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$ =

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

modulo → mando solo r

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$

$\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)}$

$\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$

$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

$\arg\bar{z} = -\arg z$

$$\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2}{r_2 r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$ $\quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

$\boxed{\text{Formula di Eulero}}$

3° modo di definire il n° complesso

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$

Conseguenza: f. di De Moivre

$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$z^n = w$

Assegnato $w = \rho e^{i\varphi}$ si vuole trovare $z = re^{i\theta}$

trovare le radici n-esime

$$\Rightarrow r^n \cdot e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} \iff \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$az^2 + bz + c = 0$

$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ → lo posso sempre utilizzare.

Se $\Delta > 0$ → ho i Reali

Se $\Delta < 0$ → ho i complessi e dovrò utilizzare i.

$\pm 2i = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2(\pm i)$

<u>Teorema</u> <u>fondamentale</u> <u>dell'</u> <u>algebra</u>:
qualsiasi polinomio (di grado n) ammette una radice complessa.

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1) P_{n-1}(x)$

z è una radice $P(z) = 0$ $\qquad = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

$\Downarrow$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$

$\bar{z}$ è una radice

$P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_1 \bar{z} + a_0 = \bar{a}_n + \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 =$

$= \overline{a_n z^n + a_1 z + a_0}$

Se ho una radice ho anche la sua coniugata:
ho sempre una coppia di n° complessi → perchè c'è il coniugato

$\underbrace{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}$

↳ trinomio di secondo grado

$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$

$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)\dots(a+b)}^{n \text{ volte}}$

$(a+b)^0 = 1 \qquad 1$

$(a+b)^1 = a+b \qquad 1 \quad 1$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad 1 \quad 2 \quad 1$

$\mathbb{C}$ Numeri complessi

N° complessi sono un ampliamento dell'insieme $\mathbb{R}$, poiché in esso non sono risolvibili alcune equazioni:

esempio $x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$ non è definita nel campo $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Numero complesso (z) può essere indicato in 3 modi:

1. Forma cartesiana/algebrica:

$z = x + iy$

$x = Re\{z\}$ = parte reale di z

$y = Im\{z\}$ = parte immaginaria di z

uso: somma e differenza, prodotto e quoziente

2. Forma polare/trigonometrica:

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ MODULO di z $\boxed{\text{sempre} \geq 0}$ perché è una DISTANZA

↳ distanza del punto dall'origine

θ = angolo = argomento di z / $\arg z$

$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ se $z \in$ 1° o 4° quadrante

$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$ se $z \in$ 2° o 3°

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $y>0$, $x=0$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$ $y<0$, $x=0$

uso: prodotto, quoziente, potenze, radici

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 225

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar z}{\bar z} = \frac{\bar z}{z\cdot\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2} \qquad z\cdot\bar z = x^2+y^2 = |z|^2$$

$$\bar{\bar z} = \overline{\overline{(x+iy)}} = \overline{(x-iy)} = x+iy = z$$ coniugato del coniugato

$$|\bar z| = |x-iy| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |z|$$

$\overline{z_1+z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$ somma dei coniugati

$\overline{z_1-z_2} = \bar z_1 - \bar z_2$ differenza " "

$\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \cdot \bar z_2$ prodotto " "

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar z_1}{\bar z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ quoziente " "

$z+\bar z = 2x \qquad z-\bar z = 2iy$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar z}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar z}{2i}$$

$|z| \geq 0 \; ; \quad |z| = 0 \iff z = 0$

$|z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \longrightarrow (\mathrm{Re}\, z)^2 \leq |z|^2$

$(\mathrm{Im}\, z)^2 \leq |z|^2$

$\mathrm{Re}\, z \leq |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

$\mathrm{Im}\, z \leq |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ disuguaglianza triangolare

Somma:

$z_1+z_2 =$ somma delle parti reali + somma delle parti immaginarie

Modo 1: $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = x_1+x_2+i(y_1+y_2)$

Proprietà: commutativa $z_1+z_2 = z_2+z_1$

associativa $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$

Modo (2): $\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right)$

Modo (3): $\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ modulo del quoziente

$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ argomento del quoziente

Potenza e Radice

z^n = non si utilizza il metodo con la forma cartesiana

Modo (2): $\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$

Modo (3): $\rho^n e^{in\vartheta}$

Formula di De Moivre:

$e^{in\vartheta} = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$

Calcolare la radice n-esima:

(1) Trasformo n° $\mathbb{C}$, z, nella forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$.

(2) Estendo l'argomento a multipli di 2π con la costante $k \in I$:

$z = \rho e^{i(\vartheta + 2k\pi)}$

(3) Metto $\cancel{z}$ sotto l'esponente richiesto e calcolo

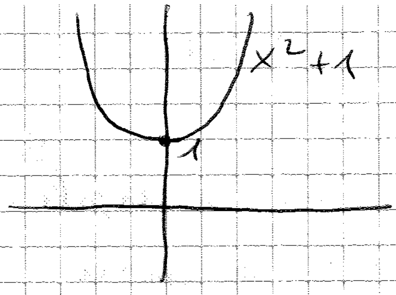
(4) Ho n-soluzioni, ossia a seconda di che numero è l'esponente n.

Pongo $k = 0, 1 \dots n-1$ e trovo le soluzioni

$$\lim_{x\to 0} M(x^2+1) = 0$$

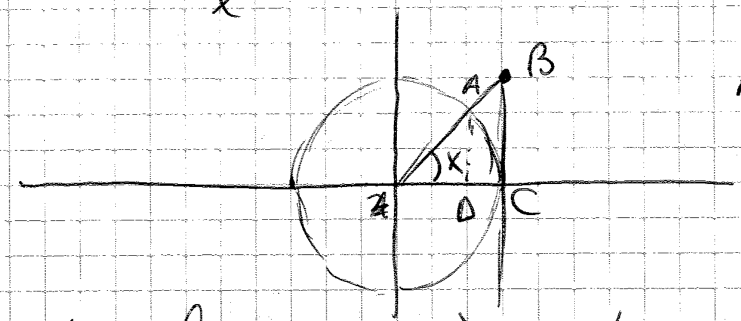
$x \to 0 \quad x^2+1 \to 1^+$

$= M(1^+) = 0$



Es.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - tg x}{x^2} = \left\{ \frac{1}{x}\left(\cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{tg x}{x}}\right) \right. \text{ non farlo!}$$



$\overline{AD} = \sin x \qquad \widehat{AC} = x$

$\overline{BC} = \tan x$

Quando il raggio è unitario l'angolo sotteso dall'arco è uguale ai radianti al perimetro della circonferenza: $2\pi = 2\pi \rightarrow$ relazione biunivoca di 1:1.
Per questo non si utilizzano i gradi, perché questa relazione non è soddisfatta coi gradi.

$$\overline{AD} < \widehat{AC} < \overline{BC}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\underbrace{\frac{\sin x - \tan x}{x^2}}_{\to 0} < \frac{x - \tan x}{x^2} < \underbrace{\frac{\tan x - \tan x}{x^2}}_{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - tg x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\sin x}_{\to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - tg x}{x^2} = 0$$

$l = \infty \implies \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \emptyset \quad g = o(f), x \to c$

Es.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \sin x \sim x, \ x \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = \emptyset \implies \sin x = o(x), \ x \to +\infty$

funzione continua, è trascurabile rispetto a x. → non ha peso.

$\sin x = o(\tan x) \quad x \to \frac{\pi}{2}$

infatti $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \emptyset$

$\cos x \asymp 2x - \pi \ , x \to \frac{\pi}{2}$ infatti $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} =$

faccio sostituzione di variabile

$x - \frac{\pi}{2} = t \quad \& \ x = t + \frac{\pi}{2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{2t} = \lim_{t \to 0} - \frac{\sin t}{2t} = -\frac{1}{2}$

Proprietà dei simboli di Landau:

Per $x \to c$ si ha:

$f \asymp g \implies f = O(g)$ è la proprietà + debole

$f \sim g \implies f = O(g)$

$f = o(g) \implies f = O(g)$

$f \sim g \implies f \asymp g$

$f \asymp g \implies f \sim lg$ infatti

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \implies \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l g(x)} = 1$

Confronto di monomi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0, \quad n > m$$

$x^n = o(x^m)$, $x \to 0$, se $n > m$
è trascurabile

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to \pm\infty} x^{n-m} = 0 \quad n < m$$

$x^n = o(x^m)$, $x \to \pm\infty$ se $n < m$

Algebra degli 'o':

Se $x \to 0$, si ha:

$\Rightarrow o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$ non mi dà niente di più.

$\Rightarrow o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$ con $p = \min(n, m)$

esempio

$o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$ $\quad n > m$

$f = o(x^n)$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ $\quad g = o(x^m)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)\, x^n}{x^m\, x^n} = 0$$

$\Rightarrow o(\lambda x^n) = o(x^n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \varphi(x)\, o(x^n) = o(x^n)$, se φ è limitata in un intorno di $x = 0$

$\Rightarrow x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$

$f = o(x^n) \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^m f(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} =$

Es. $f(x) = e^{3x^2} \quad x \to 0$

$t = 3x^2 \qquad e^t = 1 + t + o(t), \; t \to 0$

$e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + o(x^2), \; x \to 0$

Es. $f(x) = \sqrt{1-5x} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \quad t = -5x$

$= 1 - \frac{5}{2}x + o(x), \; x \to 0$

Es. $\log(1-2x^3) = -2x^3 + o(x^3), \; x \to 0$

$t = 2x^3$

Es. $x \sin 4x = x(4x + o(x)) = 4x^2 + o(x^2), \; x \to 0$

~~Teor (principio di sostituzione)~~

a) $x^\alpha = o(e^x) \qquad x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \alpha > 0$

↳ esponenziale vince sempre

b) $e^x = o(|x|^\alpha) \qquad x \to -\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\log x = o(x^\alpha) \qquad x \to +\infty \quad \forall \alpha > 0$

d) $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad x \to 0^+ \quad \forall \alpha > 0$

} il log perde sempre

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0$

Teor (principio di sostituzione)

$f \sim \tilde{f}, \quad g \sim \tilde{g}, \quad x \to c$

(↳ se il $\lim_{x \to c} \frac{f}{\tilde{f}} = 1$ ↘ se il $\lim_{x \to c} \frac{g}{\tilde{g}} = 1$)

$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \tilde{g}(x)$

Es. $3\log(1+x^2) \sim 3x^2$

$\sqrt{1+2x}-1 \sim \frac{1}{2}\cdot 2x = x$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x} = 0$$

Es. $e^{5x}-1 \sim 5x \quad x\to 0$

$\tan x^3 = \frac{\sin x^3}{\cos x^3} \sim \sin x^3 \sim x^3 \quad x\to 0$

$\cos x^3 \to 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \qquad t = \frac{1}{x^2}$$

$\sqrt[3]{1+t}-1 \sim \frac{1}{3}t \quad t\to 0$

$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1 \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} \quad x\to +\infty$

$$L = \lim_{x\to +\infty} x\cdot\frac{1}{3x^2} = 0$$

Es. $$L = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-5\log(1+3x^3)}{x^2+2\sin x}$$

$-5\log(1+3x^3) = o(2x^2) \quad x\to 0$

infatti $\lim_{x\to 0} \frac{-5\log(1+3x^3)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-15x^3}{2x^2} = 0$

$x^2 = o(2\sin x)$

infatti $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2\sin x} = 0$$