



**Appunti universitari**  
**Tesi di laurea**  
**Cartoleria e cancelleria**  
**Stampa file e fotocopie**  
**Print on demand**  
**Rilegature**

NUMERO: 567

DATA: 02/07/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Contadin

MATERIA: Meccanica Strutturale + Eserc.  
Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## FORMULARIO MECCANICA STRUTTURALE

### • BARICENTRO

Corpo continuo

$$x_G = \frac{\int_A x dx dy}{\int_A dx dy}$$

$$y_G = \frac{\int_A y dx dy}{\int_A dx dy}$$

A masse concentrate

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N x_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

$a(x,y) = \text{densità } \rho \rightarrow \text{baricentro di massa}$

$$x_G = \frac{\int_A a(x,y) x dx dy}{\int_A a(x,y) dx dy} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = \frac{\int_A a(x,y) y dx dy}{\int_A a(x,y) dx dy} = \frac{S_x}{A}$$

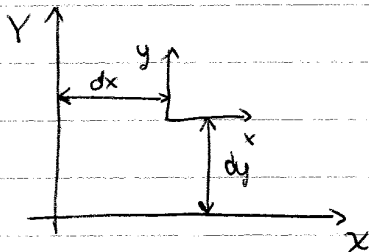
Quando ho un corpo costituito da materiali con due moduli di Young diversi  
 $\Rightarrow$  spezzo e' integro (ho due densità diverse)

### • MOMENTI DEL PRIMO ORDINE

$$S = \int_A (ax + by) dx dy$$

$$a=0 \quad b=1 \quad \Rightarrow S_x = \int_A y dx dy \quad \text{momento statico rispetto all'asse } x$$

$$a=1 \quad b=0 \quad \Rightarrow S_y = \int_A x dx dy \quad \text{" " " " " " } y$$



$$x' = x + dx$$

$$y' = y + dy$$

$$S_{x'} = S_x + dyA$$

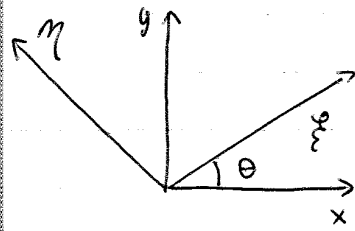
$$S_{y'} = S_y + dxA$$

Se x e y sono baricentrici  $\rightarrow$  momenti statici nulli:

$$S_{x'} = dyA$$

$$S_{y'} = dxA$$

$$\left. \begin{aligned} S_y &= \sum_{i=1}^N x_i A_i \\ S_x &= \sum_{i=1}^N y_i A_i \end{aligned} \right\} \text{ per corpo a masse concentrate}$$



$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

$I_{x'}$  e  $I_{y'}$  hanno, per alcuni valori di  $\theta$ , valori massimo e minimo

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta}\Big|_{\tilde{\theta}} = 0 \quad \frac{dI_{y'}}{d\theta}\Big|_{\tilde{\theta}} = 0$$

↳ per questi valori  $\theta = \tilde{\theta}$

$$\tan 2\tilde{\theta} = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad -\frac{\pi}{2} < 2\tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$$

$\tilde{\theta}$  ci indica di quanto dobbiamo ruotare gli assi per metterli nel riferimento principale di inerzia.

Quando  $\tilde{\theta} = 0^\circ \Rightarrow$  il riferimento scelto è già quello principale

$$\tilde{\theta} = 45^\circ \Rightarrow I_x = I_y$$

Nel riferimento principale di inerzia: (dopo aver calcolato  $\tilde{\theta}$  per sapere di quanto ruotare)

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$I_{x'y'} = 0 \rightarrow$  nel riferimento principale di inerzia il momento centrifugo è nullo

Se  $I_x > I_y$  prendo il primo segno (rispettivamente + e -)

Se  $I_x < I_y$  " " secondo " ( " " - e +)



### RELAZIONI DI EQUIVALENZA

$$\bullet N = \int_A \sigma_{zz} dA \quad (1)$$

$$\bullet M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA \quad (2)$$

$$\bullet M_y^* = \int_A x \sigma_{zz} dA \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = E (K_1(z) + K_2(z) x + K_3(z) y)$$

$$\Rightarrow (1) \quad N = K_1(z) EA + K_2(z) S_y + K_3(z) S_x$$

$$(2) \quad M_x = K_1(z) E S_x + K_2(z) E I_{xy} + K_3(z) E I_x$$

$$(3) \quad M_y = K_1(z) E S_y + K_2(z) E I_y + K_3(z) E I_{xy}$$

### Equazioni della LINEA ELASTICA (trave = linea)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{N}{EA} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dz^2} &= - \frac{M_y}{EI_y} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 v_0}{dz^2} &= - \frac{M_x}{EI_x} \end{aligned} \right.$$

disaccoppiate (sforzi membranari, flessionali, taglianti)  
?

$$\text{Eq. di Navier (rif. centrato)} : \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y^* x}{I_y} = \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3(\tau_{xz} + \tau_{yz})^2} \quad \text{VON MISES}$$

$$\tau_{yz} = \frac{S_x(y) \cdot T_y}{I_x b(y)}$$

$$\tau_{xz} = \frac{S_y(x) \cdot T_x}{I_y b(x)}$$

$$M_\varphi = M_x \cos \theta$$

$$M_\eta = M_x \sin \theta \quad (0 - M_x \sin \theta \text{ in caso di rotazione oraria})$$

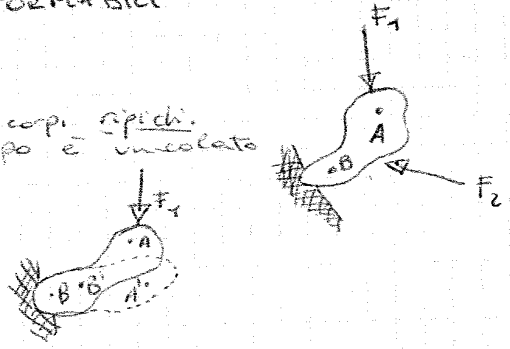
Ciucci  
Piastra  
Travi  
Soletti

EQUAZIONI FONDAMENTALI CONTINUI DEFORMABILI

INTRODUZIONE AL CORPO DEFORMABILE

Nella fisica normalmente consideriamo corpi rigidi.  
 →  $AB = \text{costante}$ , anche se il corpo è vincolato e sottoposto a forze.

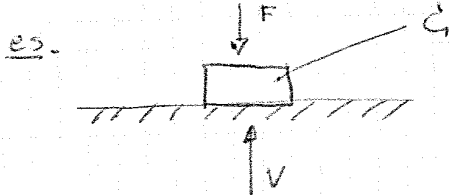
Perciò in un corpo deformabile è un corpo de vincolato e sottoposto a una forza cambia forma.  
 →  $AB \neq A'B'$



Un materiale ha una sua  $E \rightarrow$  elasticità

$E \neq 0$ , es. se  $E$  è piccolo  $\Rightarrow$  grande elasticità.

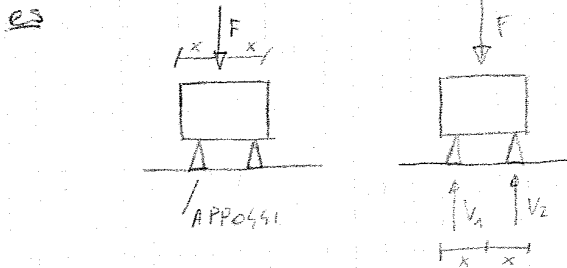
corpo rigido  $\rightarrow E = \infty$



Voglio sapere la forza che il corpo trasmette al suolo.

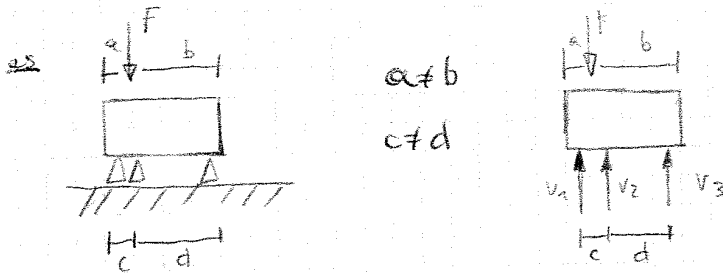
$U = F$

È un corpo rigido  $E = \infty$



$E = \infty \rightarrow$  rigido

$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}$



U reazioni vincolari

$V_1? V_2? V_3?$

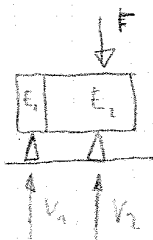
Se riesco a calcolare le forze con le eq della statica è un problema ISOSTATICO.

mentre se come in questo problema non riesco ad utilizzare le eq statiche

$\rightarrow$  IPERSTATICO

L'altra possibilità che ho è calcolare la config deformata  $\rightarrow$  mett in gioco il modo in cui la figura si deforma.

Struttura non omogenea  
 materiali  $\neq$



$V_1$  e  $V_2$  dipendono da  $E$ .

$\rightarrow$  PROBLEMA ELASTICO o PROBLEMA ENID DEI CONTINUI DEFORMABILI

Quindi avremo una serie di punti di applicazione di forze su C →  $\mathcal{L}_A$   
 " " linee " " →  $\mathcal{L}_i$   
 " " superficie " " →  $\mathcal{S}_i$   
 " " volumi " " →  $\mathcal{V}_i$

Analogamente alle forze vi si possono applicare dei vincoli. → Finposte, Singoli

Ni vincoli cinematici  $s(x,y,z)$  è nullo.

IN GENERALE	FORZE	SPOSTAMENTI	NO FORZE NO SPOST.	CONDIZIONI AL CONTORNO ↓ se sono vincoli GEOMETRICO
$P_i$	$P_i^1$	$P_i^2$	$P_i^3$	
$\mathcal{L}_i$	.....	.....		
$\mathcal{S}_i$	.....	.....		

le EQ. FOND. DEI CONT. IN UN DEFORMABILI vedono coinvolto il vettore spostam

$$\vec{s}^D(x,y,z) = \vec{u}(x,y,z)\vec{i} + \vec{v}(x,y,z)\vec{j} + \vec{w}(x,y,z)\vec{k}$$

e  $\vec{\sigma}$  e  $\vec{\epsilon}$ . Quindi saranno della forma  $f(\vec{s}, \vec{\epsilon}, \vec{\sigma}) = 0$

Le eq. diff. e derivate parziali

ESERCITAZIONE 1

- PROPRIETÀ GEOMECCANICHE DELLE STRUTTURE
- CALCOLO REAZIONI VINCOLARI (TRAVASORE)
- ① CALCOLO DIAGRAMMI MNT (SOLLECITAZIONI)
- ② IPERSTATICHE
- ③ VERIFICA SEZIONI

} domande d'esame

PROPRIETÀ GEOMECCANICHE STRUTTORE

E → modulo di Young

Per caratterizzare un corpo → Volume  $V = \int dx dy dz$

massa  $M = \int \rho dx dy dz$

Corpo bidimensionale  
→ ha 3 direzioni  
delle stax  
come di qua



efficienza idemmassabile  $\int_{\mathcal{V}} C(x,y,z) f(x,y,z) g(x,y,z) dV$  (formula generale)

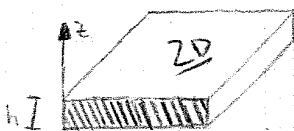
↓ dipende dal materiale      ↓ dipende da teoria di stoff utilizzata.

es.  $C = 1$

$f = x$        $g = x$   
 $f = x^2$        $g = 1$

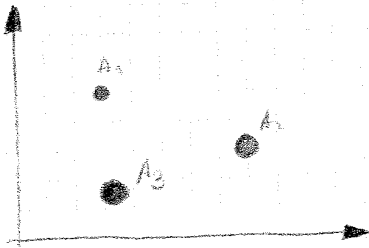
partite  $\int x^2 dx dy dz$      $\int x dx dy dz$      $\int xy dx dy dz$   
 costituiscono momenti statici e d'inerzia.

Struttura bidimensionale → ha 1 dimensione di un ordine  $L$  di quello delle altre  
 → PIASTRE / GUSCI  
 PANNELLI



$\int_{\mathcal{V}} C(z) f(z) g(z) dz$   
 si fa l'integrale sullo spessore

Sistema di masse concentrate



$$\int \Rightarrow \Sigma$$

MOMENTI DI SECONDO ORDINE

$$I = \int_A (ax^2 + by^2 + cxy) dA$$

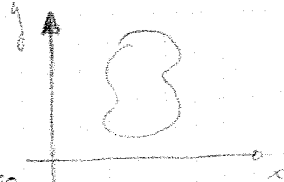
può essere ottenuto da  $f = x+y$   
 $g = x+y$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy dA \rightarrow \text{centrifugo}$$

$$I_x^* = \int (x^2 + y^2) dA \rightarrow \text{polare}$$

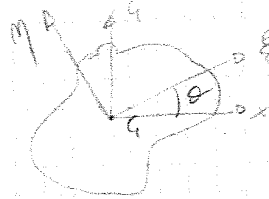


Dati  $S_x, S_y$  si possono trovare momenti statici sia rispetto a zero

$x_G, y_G$  imponendo che il

Dati  $I_x, I_y, I_{xy}, I_x^*$

non centrifugo  $I_{xy} = 0$



Ritornamenti:

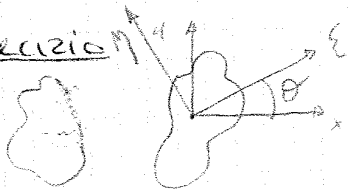
Se il rif passa per G  $\rightarrow$  BARICENTRO

o  $I_{xy} = 0 \rightarrow$  CENTRALE

$\rightarrow$  CENTRALE = BARIC + PRINCIPALE

Se il rif non passa per G e  $I_{xy} = 0 \rightarrow$  PRINCIPALE

ESERCIZIO



$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\eta = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Hip =  $I_x, I_y, I_{xy}$  ( $S_x, S_y$ )

PRINCIPALE = CENTRALE

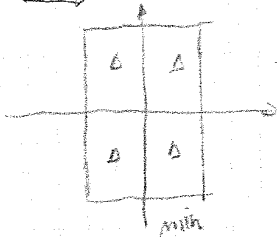
$\theta$  rende  $I_{\xi\eta} = 0$

Soluzione

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi \eta dA = 0$$

$I_{\xi}, I_{\eta}$  sono massimi e minimi per le cui estremità in un set di rif principale.

$\rightarrow$  se è una funz dispari con dominio sim rispetto  $\rightarrow I_{xy} = 0$



è + grande il mom d'inerzia rispetto ad asse x.

$$I_{\eta} = \int \xi^2 dA \quad \frac{\partial I_{\eta}}{\partial \theta} = 0 \quad \boxed{\frac{dI_{\eta}}{d\theta} = 0}$$

Passiamo con frontare a risultati considerando la matrice e calcolare il  $\theta$

$$\begin{matrix} I_x, I_y, I_{xy} \\ I_{\xi}, I_{\eta}, I_{\xi\eta} \end{matrix}$$



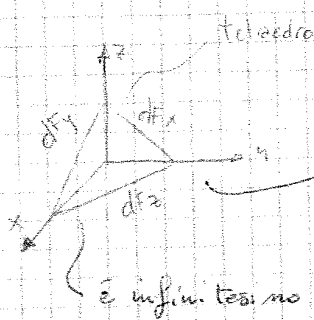
$$\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

oppure  $\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Sono funzioni di  $x, y, z$  e  $t$ .  
 nel tempo ma di non è considerato nella statica.

Queste sono condizioni necessarie e sufficienti per descrivere  $t_{dA}$  in P.

$t_{dAn} \rightarrow$  elemento intersecando  $dAx, dAy, dAz$  con piano  $L$  di  $n$

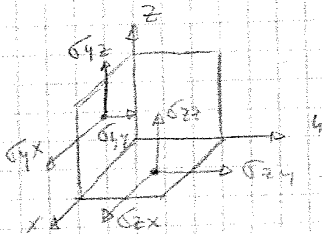


$t_{dAn} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}$   
 $t_x, t_y, t_z \Leftarrow \hat{\sigma}$

le tre forze devono essere in equilibrio, ma le componenti somate nelle varie dimensioni vanno a zero  $\rightarrow$  verificare la eq. cardinali della statica delle traslazioni.

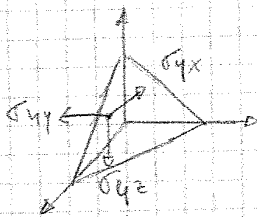
CONVENZIONE DI SEGNO

Una forza è positiva quando esce dal solido e negativa quando entra. Nell'esempio precedente le forze sono uscenti dal solido.



Analogo per altre facce.

questi componenti sono uscenti dalla faccia  $\rightarrow$  sono positivi e concordi agli assi.



nel solido invece le componenti pos sono opposte agli assi perché se no sarebbero entranti.

le forze che agiscono sul tetraedro sono  $d\vec{F}_x, d\vec{F}_y, d\vec{F}_z, d\vec{F}_n$

$t_x dAn = \sigma_{xx} dAx + \tau_{yx} dAy + \tau_{zx} dAz$  (perché le  $\sigma$  sono neg e la  $t$  è positiva uscia dal tetraedro)

posso anche scrivere

$t_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z$

$t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z$

$t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z$

quindi conoscere queste 9 componenti vuol dire conoscere lo stato di tensione del punto.

posso anche usare

$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

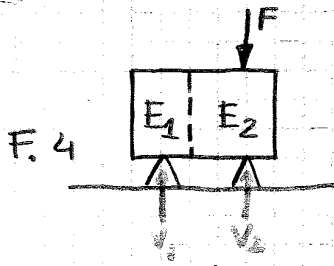
$\hat{\sigma} \hat{t} = \hat{\tau} \rightarrow$  SIMMETRICO

Se conosciamo le componenti speciali di tensione ( $t_{dA}$ ) posso calcolarne  $t_{dAn} = t_x t_y + t_z$  mediante eq. di equilibrio.

$n_x, n_y, n_z$  coseni direttori  $\rightarrow n_x = \frac{dAx}{dAn}, n_y = \frac{dAy}{dAn}, n_z = \frac{dAz}{dAn}$

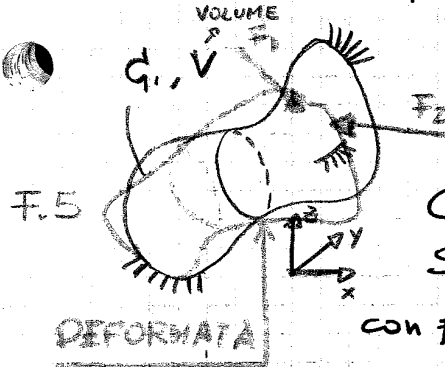
Per risolvere i problemi iperstatici si deve considerare il modo in cui una struttura si deforma.

Se si ha un corpo (F.4) con due elasticità diverse, si hanno reazioni ( $V_1, V_2$ ) diverse, si dice corpo non omogeneo.



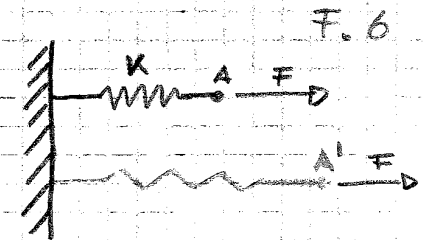
Si deve anche mettere qui in gioco la deformabilità delle strutture. In base a come si deformerà le  $V_1, V_2$  avranno valori diversi.

Questo problema del calcolo nella configurazione deformata è detto "PROBLEMA ELASTICO" o problema fondamentale dei continui deformabili.



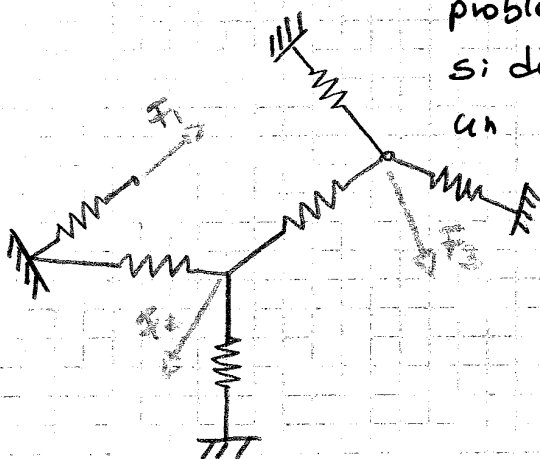
Un problema è calcolare la configurazione deformata anche di corpi 3D.

Considerando una config. come in F.6 si può calcolare la configurazione elastica -



I corpi continui hanno un numero  $\infty$  di punti.

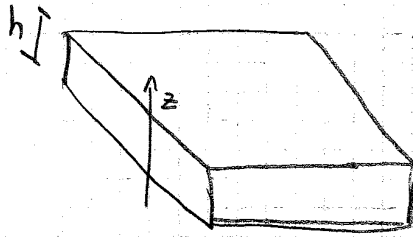
Una situazione complessa come in F.7 è ancora un problema elastico a punti finiti.



si deve vedere un corpo continuo come un problema di F.7 esteso all'infinito.

La soluzione di questo problema si ha passando per le  $k, E$ , modulo di Young delle varie molle.

Alcune strutture si presentano:

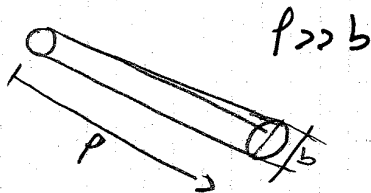


Si dicono 2D quando ci sono 2 dimensioni più grandi rispetto alle 3<sup>o</sup>, si dicono: piastre, pasci, pannelli.

$$\int \varphi_{2D} = \int_h G(z) f(z) g(z) dz$$

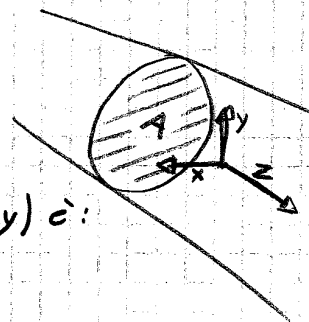
Se  $(G, f, g) = 1 \rightarrow \varphi_{2D} = h$

Si farà spesso riferimento a strutture mono dimensionali:



Una dimensione predomina sulle altre: aste, travi, ...

$$\varphi_{1D} = \int_A G(x,y) f(x,y) g(x,y) dA$$



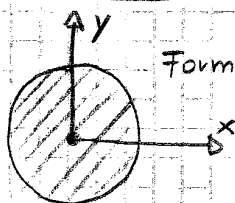
Un momento d'inerzia (rispetto all'asse y) è:

$$G=1 \quad f=x \quad g=x$$

$$\varphi_{10} = \int_A x^2 dx dy$$

Possono anche essere proprietà combinazioni di integrali.

BARICENTRO (Sezioni 2D)



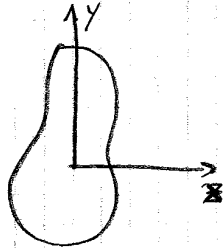
Forma qualunque

La posizione del baricentro:

$$x_A = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$y_A = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Momenti del II ordine:

$$I = \int_A (ax^2 + by^2 + cxy) dx dy$$


$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\text{momento d'inerzia centrifugo})$$

$$I_\varnothing = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (\text{momento " " polare})$$

Come da  $(S_x, S_y) \rightarrow (x_G, y_G)$

da  $(I_x, I_y, I_{xy}, I_\varnothing) \rightarrow$  di questi: solo  $I_{xy} = \int xy dA$  può avere valori  $< 0$ , esistendo un punto in cui  $I_{xy} < 0$  e un punto in cui  $I_{xy} > 0 \Rightarrow \int I_{xy} = 0$ .

Se il riferimento che prendiamo:

PASSA PER  $Q \rightarrow$  BARICENTRICO

" "  $Q, I_{xy} = 0 \rightarrow$  CENTRALE

NON " "  $Q, I_{xy} = 0 \rightarrow$  PRINCIPALE

(CENTRALE = BARICENTRICO + PRINCIPALE)



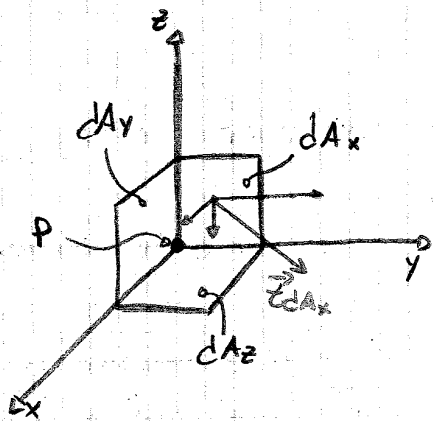
Combinando il piano  $\pi$  cambia anche  $\tau$  e  $\sigma$  perché dipendono da  $\vec{n}$ .

La dipendenza delle aree.

Quindi quanti vettori tensione devo conoscere per definire lo stato di tensione? 3!

Per cui lo stato di tensione non è individuabile da solo 3 componenti ma da 9, è un tensore di ordine 2. queste 9 componenti si dicono: COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE

In un rif. qualunque:



definisco 3 aree sui 3 piani cartesiani.

in ogni area definisco una  $d\vec{F}$  e quindi un vettore  $\vec{t}$  (tensione):

$$\begin{aligned} \vec{t}_{dA_x} &= t_x dA \vec{i} + t_y dA \vec{j} + t_z dA \vec{k} \\ &= \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{xy} \vec{j} + \sigma_{xz} \vec{k} = \\ &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \end{aligned}$$

Si può ripetere il discorso per le componenti delle altre due aree:

$$\vec{t}_{dA_y} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{t}_{dA_z} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}$$

Le si può raccogliere in una matrice:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Queste forze devono equilibrare il capo.

$$t_x dA_n = \sigma_{xx} dA_x + \sigma_{yx} dA_y + \sigma_{zx} dA_z$$

che è l'equilibrio lungo  $x$ , dividendo per  $dA_n$ :

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ t_y = \sigma_{yy} n_y + \sigma_{xy} n_x + \sigma_{zy} n_z \\ t_z = \sigma_{zz} n_z + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{xz} n_x \end{cases}$$

Scrivo condiz. di equilibrio fra le forze

$$\rightarrow z \quad t_z dA_n = \sigma_{xz} dA_x + \sigma_{yz} dA_y + \sigma_{zz} dA_z \quad (\text{facce negative se vedono gli assi entranti})$$

$$\{t_x, t_y, t_z\} = \{n_x, n_y, n_z\} \cdot \hat{\sigma}$$

$$\{t\} = \hat{\sigma}^T \cdot \{n\}$$

$$n_x = \frac{dA_x}{dA_n}, \quad n_y = \frac{dA_y}{dA_n}, \quad n_z = \frac{dA_z}{dA_n}$$

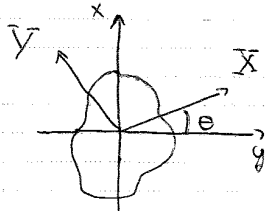
↓  
coseni  
direzioni

Momenti d'inerzia:  $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}$   $d^n$   
 $z^n = 4$

ma  $I_{xy} = I_{yx}$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Direzioni principali

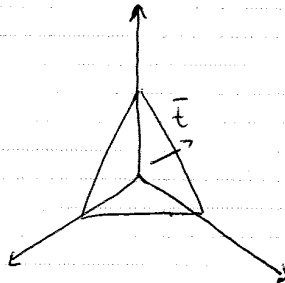


La direz. principale è quella in cui  $I_{xy} = 0$  (assi di simmetria)

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 \\ 0 & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Tra tutti i possibili  $\theta$  ne esiste uno per cui i momenti centrifughi valgono zero

Lo momenti di inerzia principali (non dipendono dal rif. iniziale)



Fra tutte le possibili direzioni  $\bar{n}$  ne esiste una per cui

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{quando } \vec{t} \parallel \bar{n}$$

$$\det = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda[I] & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda[I] & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda[I] \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{per trovare gli autovalori per cui diventa } *)$$

$$= -\lambda^3 + \underbrace{I_1}_{\sigma_1} \lambda^2 + \underbrace{I_2}_{\sigma_2} \lambda + \underbrace{I_3}_{\sigma_3} = 0$$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = \sigma_{11} \\ \lambda_2 = \sigma_{22} \\ \lambda_3 = \sigma_{33} \end{matrix} \right\}$  tensioni principali (non dipendono dall'orientamento iniziale)

$I_1, I_2, I_3$  INVARIANTI

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}$$

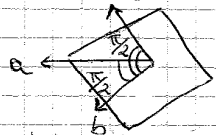
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}$$

DIREZ. PRINCIPALI:  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  (c'è solo trazione o compressione)

→ x  $\hat{x}$   
 → y  $\hat{y}$   
 → z  $\hat{z}$

⇒ eq. indefinite di equilibrio / teorema di reciprocità

affinchè siano indipendenti



forza

- |     |                             |     |                             |     |                            |
|-----|-----------------------------|-----|-----------------------------|-----|----------------------------|
| → x | ① $-\sigma_{yx} dx dz$      | → y | ① $-\sigma_{yy} dx dz$      | → z | ① $-\sigma_{yz} dx dz$     |
|     | ② $+\sigma'_{yx} dx dz$     |     | ② $\sigma'_{yy} dx dz$      |     | ② $\sigma'_{yz} dx dz$     |
|     | ③ $-\sigma_{xx} dy dz$      |     | ③ $-\sigma_{xy} dy dz$      |     | ③ $-\sigma_{xz} dy dz$     |
|     | ④ $+\sigma'_{xx} dy dz = 0$ |     | ④ $+\sigma'_{xy} dy dz = 0$ |     | ④ $\sigma'_{xz} dy dz = 0$ |
|     | ( $f_x$ )                   |     | ( $f_y$ )                   |     | ( $f_z$ )                  |
|     | ⑤ $-\sigma_{zx} dy dx$      |     | ⑤ $-\sigma_{zy} dx dy$      |     | ⑤ $-\sigma_{zz} dx dy$     |
|     | ⑥ $+\sigma'_{zx} dy dx$     |     | ⑥ $\sigma'_{zy} dx dy$      |     | ⑥ $\sigma'_{zz} dx dy$     |

Prendo  $x' \parallel x$  passante per G

- |            |  |                                     |  |                                     |   |
|------------|--|-------------------------------------|--|-------------------------------------|---|
| $\hat{x}'$ | ① $\sigma_{yz} dx dz \frac{dy}{2}$         | $\hat{y}'$                          | ① 0                                      | $\hat{z}'$                          | ① $-\sigma_{yx} dx dz \frac{dy}{2}$     |
|            | ② $+\sigma'_{yz} dx dz \frac{dy}{2}$       |                                     | ② 0                                      |                                     | ② $-\sigma'_{yx} dx dz \frac{dy}{2}$    |
|            | ③ 0  |                                     | ③ $-\sigma_{xz} dy dz \frac{dx}{2}$      |                                     | ③ $\sigma_{xy} dy dz \frac{dx}{2}$      |
|            | ④ 0  |                                     | ④ $-\sigma'_{xz} dy dz \frac{dx}{2} = 0$ |                                     | ④ $\sigma'_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0$ |
|            | } facce $\perp$ a $x' = 0$<br>( $H_{x'}$ ) |                                     | ⑤ $\sigma_{zx} dx dy \frac{dz}{2}$       |                                     | ⑤ 0                                     |
|            |  | ⑥ $-\sigma_{zy} dx dy \frac{dz}{2}$ |  | ⑥ $\sigma'_{zx} dx dy \frac{dz}{2}$ |   |
|            | ⑦ $-\sigma'_{zy} dx dy \frac{dz}{2}$       |                                     |  |                                     |   |

$(\sigma_{yz} + \sigma'_{yz}) = (\sigma_{zy} + \sigma'_{zy})$

$\hat{\sigma}' = \hat{\sigma}$

- x  $0 = 0$
- $\hat{x}'$   $2\sigma_{yz} = 2\sigma_{zy}$  ⇒  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$
- $2\sigma'_{yz} = 2\sigma'_{zy}$  ⇒  $\sigma'_{yz} = \sigma'_{zy}$       teorema di reciprocità

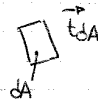
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i \neq j$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{Simm} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

da 9 a 6 componenti

Il teorema di reciprocità non vale se le facce non sono ortogonali





Se  $P \in$  alla superficie

$$\begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \\ t_z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se non c'è carico} \\ \text{OMOGENEA} \end{array}$$

$$\begin{cases} t_x = f_x \\ t_y = f_y \\ t_z = f_z \end{cases} \quad \text{NON OMOGENEA}$$

CONDIZIONI AI LIMITI

$\vec{u}$   $\vec{\sigma}$   $\vec{e}$   $\rightarrow$  eq. fondamentali corpi deformabili

Se passo da una faccia ad un'altra vicina ad un incremento di tensione normale, che può essere equilibrata solo da tensioni di taglio.

Eq. sul contorno

S superficie esterna di G

$P \in \text{ke} \quad \vec{t}_{dA} = \hat{\sigma} \vec{n} = 0$

2D  $\hat{\sigma} : 2 \times 2 \quad d^2 = 4$

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{stati di tensione con carattere ASSIOMATICO}$$

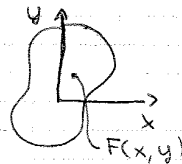
Funzioni di tensione

$F(x,y)$  tale che

$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$



Se si sostituiscono in \*  
debbono valere anche per il contorno

$-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} = 0$

$\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33}$  tensioni normali

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \tau_{max} \quad \tau_{min} \quad (\pm 45^\circ)$

L'angolo di cui devo girare il sistema per trovare le tensioni tangenziali massime e minime

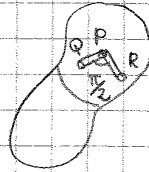
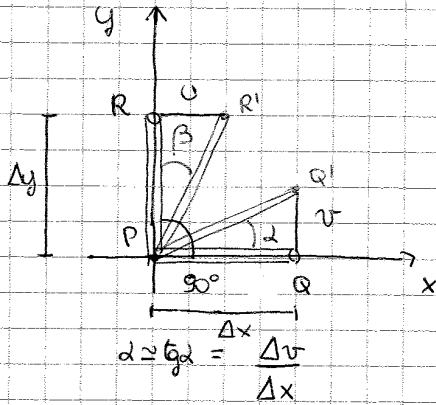
Considerando le altre componenti:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma = E \epsilon$$



$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\beta = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = (\alpha + \beta) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

(degli spostamenti)

Le funzioni devono essere continue e derivabili per soddisfare le eq. di compatibilità

descrivere la

deformazione => derivata

Le tensioni normali provocano le deformazioni lineari

$\sigma$   
 $\epsilon_{xx}$   
 $\epsilon_{yy}$   
 $\epsilon_{zz}$

$\gamma$   
 $\gamma_{xz}$   
 $\gamma_{yz}$   
 $\gamma_{xy}$

deformazioni ingegneristiche

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \epsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \epsilon_{yz}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \epsilon_{xy}$$

• Stato di def. piano

$$\begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix} \quad E_{zz} = 0$$

• Stato di def. monodimensionale

$$\hat{\epsilon} = [E_{yy}]$$

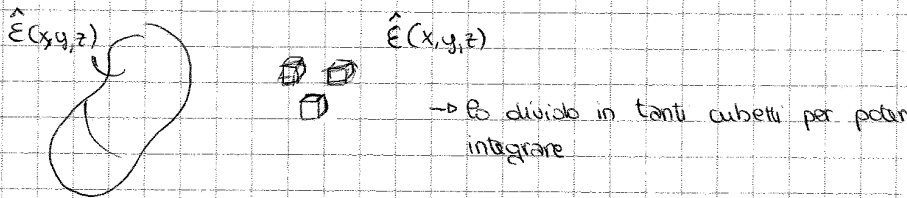
Non hanno riscontro nella fisica, sono astrazioni

Eq. di compatibilità o congruenza

Gi dicono quali sono le condiz. per poter calcolare gli spostamenti note le deformazioni

Hp. Conosco  $\hat{\epsilon}$   
 $\Rightarrow$  calcolo  $\{s\}$

Condizioni di integrazione degli spostamenti per avere funz. continue



Deformando e rimettendo i cubetti insieme non si devono essere buchi  $\rightarrow$  deformaz. continua  $\rightarrow$  spostamenti continui

$$R_x: \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \rightarrow \text{def. compatibili}$$

$$R_y: \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \delta_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$R_z: \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \delta_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$R_{xy}: \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x \partial y}$$

$$R_{yz}: \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$R_{xz}: \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial x \partial z}$$

Eq di Von Karman

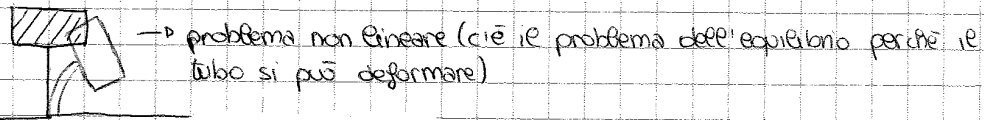
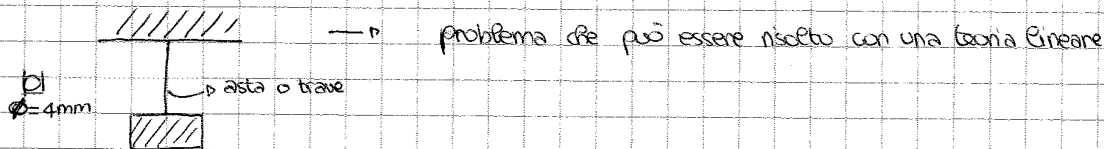
$E_{xx} \approx E_{xx}^{VK} = u_{,x} + \frac{1}{2} \omega_{,x}^2$  non sono lineari solo i termini in  $\omega$

$E_{yy} \approx E_{yy}^{VK} = v_{,y} + \frac{1}{2} \omega_{,y}^2$

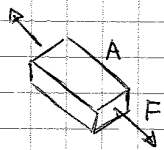
$E_{xy} \approx E_{xy}^{VK} = u_{,y} + v_{,x} + \omega_{,x} \omega_{,y}$

Si usano nelle trave di travi, piastre, gusci supponendo  $E_{zz} = 0 = \gamma_{xz} = \gamma_{yz}$

Esempio



$\hat{\sigma} \leftrightarrow \hat{\epsilon}$  il legame tra queste due quantità si chiama eq. costitutiva, relazione fisica o legge di Hooke

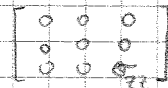


TRAZIONE

Hip: stato di tensione 1D, l'unica tensione è quella normale e la indico con  $\sigma$ . È un'astrazione perché ci saranno tensioni anche nelle altre direzioni ( $\sigma_z$ )



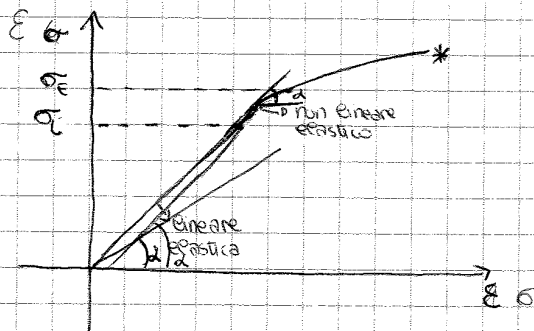
non fa considero  $\sigma \ll \sigma$



Stato di deformazione normale  $\epsilon$  ( $\epsilon_{zz}$ )

- ①  $\sigma = f(\epsilon)$  scrittura di rigidità
  - ②  $\epsilon = g(\sigma)$  scrittura di deformabilità
- } relazioni costitutive

Considerando una lega leggera con stato di tensione 1D



forza F che produce il vettore di tensione  $t_{ij}$

Sulla sezione del corpo  $\sigma$  costante



$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0$

$\sigma = \frac{F}{A(\text{sezione})}$

Se  $\sigma$  è costante anche  $\epsilon$  è costante

La curva dipende dai materiali



$$[C] = \begin{matrix} & \begin{matrix} xx & yy & zz & xz & yz & xy \end{matrix} \\ \begin{matrix} xx \\ yy \\ zz \\ xz \\ yz \\ xy \end{matrix} & \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \end{matrix}$$

è simmetrica (per il teorema di Betti)

→ le componenti diventano 6

\* Se il materiale è isotropo gli sforzi normali sono disaccoppiati da quelli taglienti e viceversa

• Se io deformato a taglio un materiale isotropo subisce solo la def. che ho applicato ⇒ G modulo di elasticità a taglio  
 ↳ non vale per le tensioni normali

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \rightarrow \text{matrice diagonale}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1+2\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1+2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix}$$

se io schiaccio o tiro in una direzione ho deformazioni anche nelle altre direzioni ⇒ EFFETTO POISSON

Scrivo la matrice tramite  $\lambda$  e  $G$  → coeff di Poisson

$\lambda, G, E, \nu$  → mu (modulo di Poisson)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

CONSERVATIVA

$$\sigma_{xx} = (1+2G)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{zz}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-2\nu} \quad \sigma = E\epsilon$$

$$C_{11}^* = (1+2G)$$

$$C_{12}^{**} = E$$

coeff di errore

↓  
scrivere per 10 materiali diversi

$E, \lambda, G, \nu, C_{11}^*, C_{12}^{**}$  diff. percentuale PLAIN STRAIN

Formulazione agli spostamenti :  $u, v, w$  incognite  
 // alle tensioni :  $\{\sigma\}$  incognite  
 // mista

Scrivere le 3 equazioni diff. per trovare  $u, v, w$

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = p_x$$

devo trasformarla con incognite  $u, v, w$

$$\sigma_{xx} = (1+2G)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} + \lambda\epsilon_{zz}$$

$$\epsilon_{xx} = u_{,x}$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y}$$

$$\epsilon_{zz} = w_{,z}$$

equazioni NEL PUNTO

facoltativo su ai limiti

$$\Rightarrow \sigma_{xx,x} = (1+2G)\epsilon_{xx,x} + \lambda\epsilon_{yy,x} + \lambda\epsilon_{zz,x}$$

$$\epsilon_{xx,x} = u_{,xx}$$

$$\epsilon_{yy,x} = v_{,yx}$$

$$\epsilon_{zz,x} = w_{,zx}$$

$$\left. \begin{cases} \dots & = p_x \\ \dots & = p_y \\ \dots & = p_z \end{cases} \right\}$$

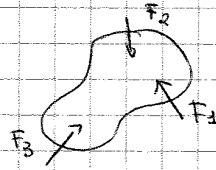
$$L_{def} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix} dv$$

↓  
se sono dipendenti

Lavoro esterno

$\vec{F}_i$  Forze concentrate  $i = 1, \dots, N_c$

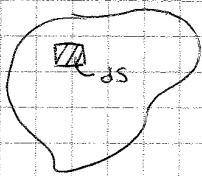
$\vec{s}_i$  spostamento in  $i$  (nella direz. della forza)



$$L_e = \sum_{i=1}^{N_c} \vec{F}_i \cdot \vec{s}_i + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{S_j} \vec{F}_{S_j} \cdot \vec{s} dS + \sum_{k=1}^{N_v} \int_{V_k} \vec{F}_{V_k} \cdot \vec{s} dv + \text{forze di linea}$$

forze nel punto      forze di superficie      forze di volume

Forze applicate sulla superficie



$\vec{F}_{S_j}$  = forze di superficie

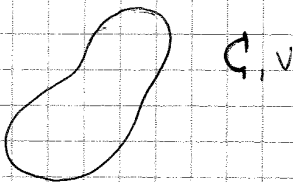
$j = 1, \dots, N_s$

$$\sum_{j=1}^{N_s} \int_{S_j} \vec{F}_{S_j} \cdot \vec{s} dS$$

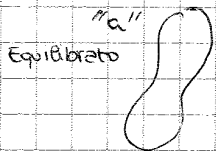
Lavoro esterno = energia forze esterne

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

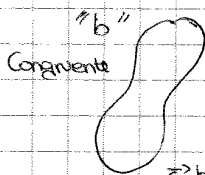
Lo utilizzeremo nelle strutture iperstatiche  $\Rightarrow$  congruenza della deformazione



Forze applicate  $\rightarrow \vec{\sigma}^1$   
Spostamenti  $\rightarrow \vec{\epsilon}^2$

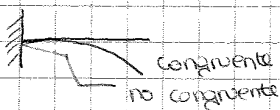


$\vec{F}_i^a, \vec{F}_s^a, \vec{F}_v^a, \vec{F}_e^a$   
in equilibrio con  $\vec{\sigma}_a^1$



$\vec{s}^b$   
 $\vec{\epsilon}^b$  congruenti  
sia sulla sup. che nel corpo

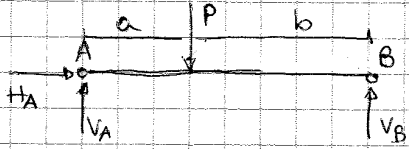
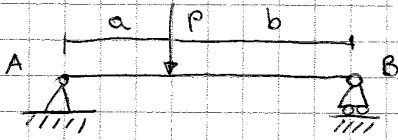
- ① "a" e "b" sono due sistemi indipendenti
- ② "a" è equilibrato
- ③ "b" è congruente



I punti di B si muoveranno in maniera proporzionale a  $\theta^b$

$$\delta^b = \theta^b (a+b)$$

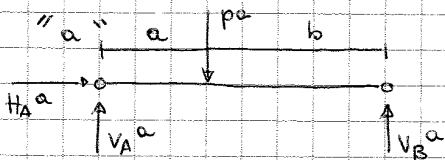
Esempio



$V_B?$

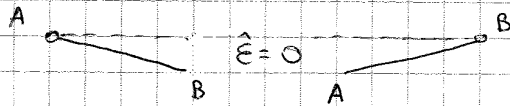
uso la condizione di equilibrio per il sistema "a"

sistema "a"  $\Rightarrow$  REALE



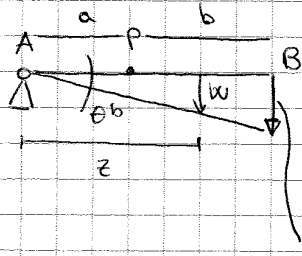
"b"  $\Leftarrow$  congruente

$$\hat{\epsilon} \neq 0$$



Ci sono infinite configurazioni, mentre la def. reale è una soltanto

$$L_e^{ab} = Pa + V_A^a + V_B^a + H_A^a$$



$$\hat{\epsilon}^b = 0$$

$$w^b = \theta^b z$$

variazione

siamo nella linearità, piccole trasformazioni

$$L_i^{ab} = \int_0^L \sigma_{xx}^a \epsilon_{xx}^b + \dots$$

$$L_i^a = 0 \quad L_e^a = 0$$

$w_A^b = 0$   $\rightarrow$  in A è incernierato quindi non si sposta

$$w_P^b = a\theta^b$$

$$w_B^b = (a+b)\theta^b$$

$$L_e^{ab} = -Pa w_P^b + V_A^a w_A^b + V_B^a w_B^b + H_A^a w_B^b = 0$$

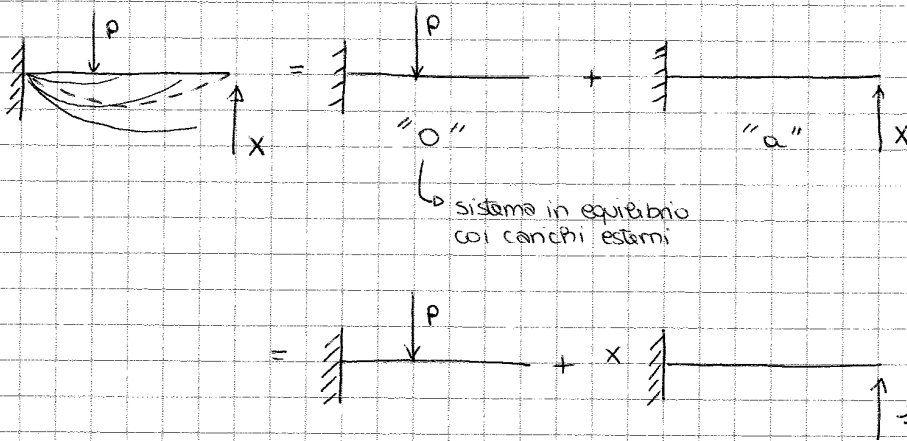
$L_P$  assialmente non si sposta

$$V_B^a = \frac{aP}{(a+b)}$$

$\rightarrow$  ottengo lo stesso risultato impostando un'equazione di equilibrio di momento intorno ad A

- Condizione di equilibrio  $\Rightarrow$  FORMA AGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI
- " " congruenza  $\Rightarrow$  " ALLE FORZE VIRTUALI

L'iperstaticità è una caratteristica non della struttura ma delle direzioni di equilibrio



Applico la sovrapp. degli effetti al sistema reale "b"

↳ sistema in equilibrio coi vincoli esterni

$$"b" = "0" + x "a"$$

$$V_A^b = V_A^0 + x V_A^a \rightarrow \text{questa somma vale per qualsiasi proprietà tra i due sistemi}$$

$$\delta_i = \int_V \{E^a\}^T \{0^b\} dV = 0$$

$$\frac{d}{dz} \delta_i^{ab} = \frac{1^a}{EA} \frac{s_b^a}{dz} + H^a \frac{s_b^a}{A^a} + V^a \frac{s_b^a}{AV} + M^a \frac{s_b^a}{AM^a} = 0 \rightarrow \text{La condizione di congruenza è lo spostamento} = 0$$

↳ metto le forze che agiscono su "a"

↳ essendo un momento non ho uno spostamento ma una rotazione

$$\epsilon^b = \epsilon^0 + x \epsilon^a$$

$N, M, T$  ↳ tagli  
↳ momento flettente  
↳ spazio di taglio  
 $N(z) \quad M(z) \quad T(z) \Rightarrow$  caratteristiche di sollecitazione

TRAVE, caso piano 
$$L_i^{ab} = \int_0^l \left( \frac{N^a N^b}{EA} + \frac{M^a M^b}{EI} + \frac{T^a T^b}{GA} \right) dz \approx \int_0^l \frac{M^a M^b}{EI} dz \quad (\text{si trascurano gli altri contributi})$$

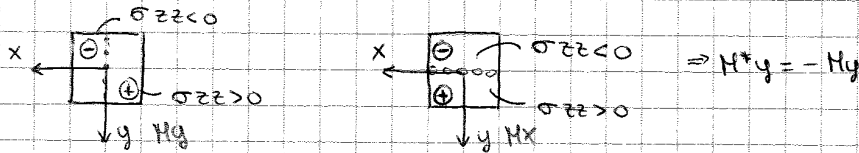
$$\int_0^l \frac{M^a M^b}{EI} dz = 0 \rightarrow \text{prendendo l'esempio precedente}$$

$$M(z)^b = M(z)^0 + x M(z)^a$$

$$\int_0^l \frac{M^a (M^0 + x M^a)}{EI} dz = 0 \Rightarrow x = - \frac{\int_0^l \frac{M^0 M^a}{EI} dz}{\int_0^l \frac{M^a M^a}{EI} dz} \quad (M^0)$$

Devo quindi saper calcolare  $M^a(z); M^0(z); N^a(z), N^0(z)$  tramite i diagrammi  $N, M, T$ .

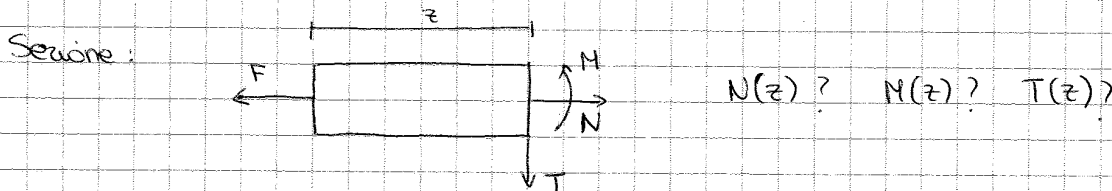
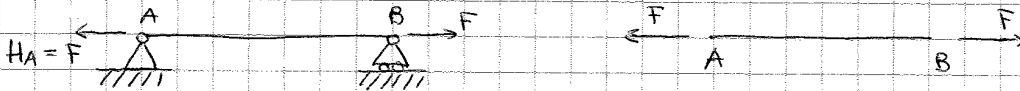
$M_x$  positivo se orientato secondo la terna destrorsa.  
 $M_y = -M_x$  (orientato in modo opposto rispetto alla terna destrorsa)



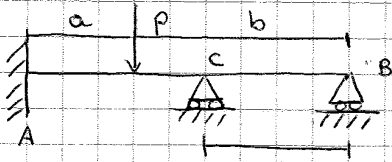
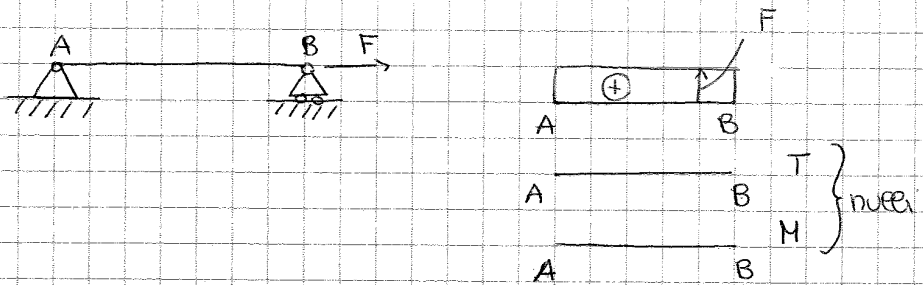
Il momento è positivo se le fibre dalla parte delle  $x$  o delle  $y$  positive sono trazionate  
 $T_x$  e  $T_y$  saranno positivi se:
 

- su faccia positiva saranno concordi con gli assi
- su faccia negativa saranno discordi con gli assi

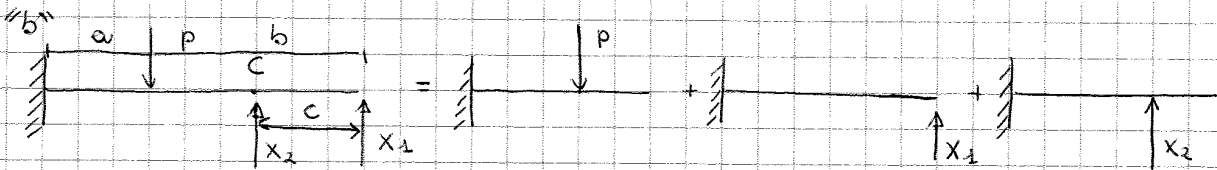
Esempio



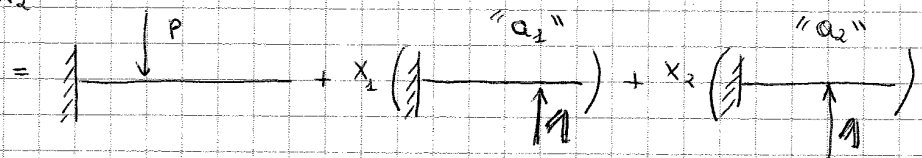
$N = F$   
 $T = 0$   
 $M = 0$



Struttura 2 volte iperstatica  
 $\rightarrow$  applico 2 volte i carichi virtuali.



"b" = "0" + "X1" + "X2"



"b" = "0" +  $X_1$  "a1" +  $X_2$  "a2"

Considerando lo spostamento  $w_H = w_H^0 + X_1 w_H^{a1} + X_2 w_H^{a2}$

$$L_e^{ab} = L_i^{ab} \Rightarrow \begin{cases} L_e^{a1b} = L_i^{a1b} \\ L_e^{a2b} = L_i^{a2b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \end{cases}$$

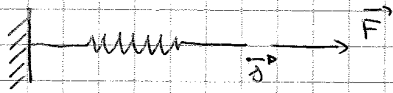
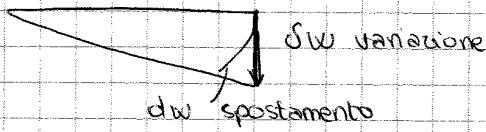
$$y = x \quad y = 2x$$

$$\delta y = \delta x \quad \delta y = 2 \delta x$$

→ La variazione opera come una derivata

$$y = x^2 \quad y = 3x^2 + 2x$$

$$\delta y = 2x \delta x \quad \delta y = 6x \delta x + 2 \delta x$$



$$\pi_{tot} = \pi_i - \pi_e$$

↓ energia interna      ↓ lavoro delle forze esterne

$$\pi_i = \frac{1}{2} K \delta^2$$

$$\pi_e = F \cdot \delta$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad K \delta = F$$

$$L_i = \pi_i \quad \Rightarrow \quad \delta L_i = \frac{1}{2} K 2 \delta \delta = K \delta \delta$$

$$L_e = \pi_e \quad \Rightarrow \quad \delta L_e = F \delta \delta$$

$$DLV : \delta L_e = \delta L_i$$

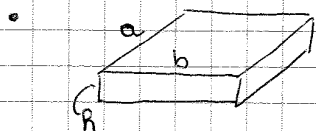
$$K \delta \delta = F \delta \delta \quad \Rightarrow \quad \delta \delta (K - F) = 0$$

↓  
variazione

## TEORIA DELLE STRUTTURE

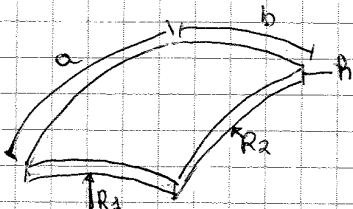
Rinuncia allo studio di corpi 3D nella loro forma reale e li assomiglia a forme standard  
 ⇒ STRUTTURE

Corpo tridimensionale → quando le sue dimensioni a, b, c nelle 3 dimensioni principali del corpo sono dello stesso ordine di grandezza



$a \gg h, b \gg h$       2D  
 PANNELLO PIANO / LASTRA / PARETE SOTTILE

• quando il pannello è incurvato posso individuare dei raggi di curvatura



$\frac{a}{R} \gg 1, \frac{b}{R} \gg 1$       2D  
 GUSCIO / PARETE SOTTILE DOTATA DI CURVATURA

Per eliminare una coordinata esprimo a priori la dipendenza da essa  $\Rightarrow$  le incognite non dipendono più dalle 3 coordinate

$$u(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n=\infty} z^i u_i(x, y)$$

Come base della sommatoria posso scegliere al posto delle potenze una qualsiasi funzione di  $z$  (sen, cos, polinomi di Legendre)  $\Rightarrow$  esistono infinite forme delle strutture

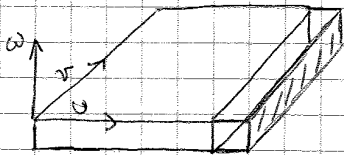
Il punto chiave è capire l'importanza relativa di ognuno dei termini della sommatoria

Il metodo asintotico produce forme per un fissato ordine di esattezza sfruttando il principio dei piani virtuali

### • METODO ASSIOMATICO

Al posto di introdurre un'espansione infinita viene ASSUNTA un'espansione

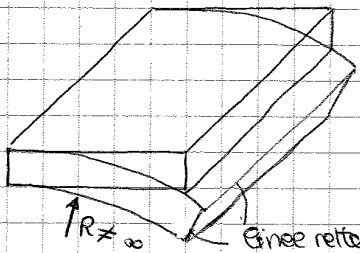
Nel caso di una piastra:



$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad F_0(z) = 1$$

↳ **TEORIA MEMBRANALE**: La piastra si muove come una membrana, le deformazioni sono apprezzabili solo nel piano della membrana

Alternativi posso introdurre una ROTAZIONE



$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z \bar{\Phi}_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z \bar{\Phi}_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) + z \bar{\Phi}_z(x, y) \end{cases} \quad \begin{aligned} F_0(z) &= 1 \\ F_{1,2}(z) &= z \end{aligned}$$

Le Einee di spessore ruotano e traslano

↳ **TEORIA della FLESSIONE della PIASTRA (REISSNER-MINDLIN)\***

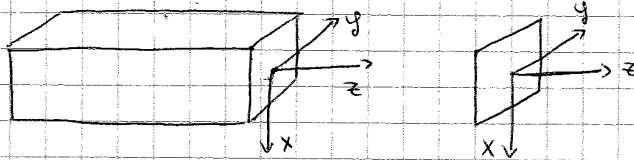
\* Nella teoria di Reissner-Mindlin questo termine non c'è, ma col metodo asintotico si trova che esso ha la stessa importanza degli altri due, quindi la teoria R-M è **ASINTOTICAMENTE SCORRETTA** (presumono un  $\mu$  costante). Questo termine viene comunque trascurato perché porterebbe a calcoli algebricamente complessi.

Non esiste comunque nessun corpo che flettendo mantenga uno spessore costante  $\rightarrow$  può valere quando lo spessore diventa sottile.

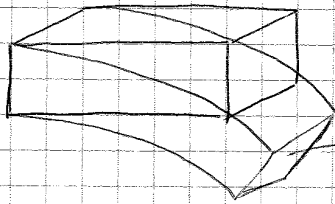
▷  $E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \bar{\Phi}_z(x, y) = 0$  non è possibile (se vi è una tensione automaticamente se ne creano anche altre)



# TRAVE



- Teoria membranale : 
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(z) \\ v(x,y,z) = v^0(z) \\ \omega(x,y,z) = \omega^0(z) \end{cases} \quad (\text{ASTA})$$



La sezione rimane piano

deformazioni sul piano della sezione

- Teoria flessionale : 
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(z) + x \bar{\Phi}_x(z) + y \bar{\Phi}_y(z) \\ v(x,y,z) = v^0(z) + x \bar{\Phi}_y(z) + y \bar{\Phi}_x(z) \\ \omega(x,y,z) = \omega^0(z) + x \bar{\Phi}_y(z) + y \bar{\Phi}_x(z) \end{cases}$$
  - Le 3  $\bar{\Phi}$  non sono uguali
  - 3 incognite in 3D
  - 3 incognite in 1D
  - rotazione della normale

Poiché la sezione ha dimensioni trascurabili rispetto la lunghezza della trave posso introdurre l'ipotesi di sezione rigida  $\Rightarrow$  TRAVE DI TIMOSHENKO (analoga alla piastra di R-M)

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(z) \\ v(x,y,z) = v^0(z) \\ \omega(x,y,z) = \omega^0(z) + x \bar{\Phi}_x(z) + y \bar{\Phi}_y(z) \end{cases}$$

- Ipotesi di Timoshenko :
- sezione rigida ( $a = cost, b = cost$ )
  - nella deformazione la sezione rimane piano
  - " " " " " normale all'asse  $z$  deformato
- $\Rightarrow$  sono nulli gli scivimenti a taglio

Introducendo questa ipotesi si passa alla teoria di EULER-BERNOULLI

$$\tau_{xz} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_x = - \frac{\partial v^0}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_y = - \frac{\partial v^0}{\partial z}$$

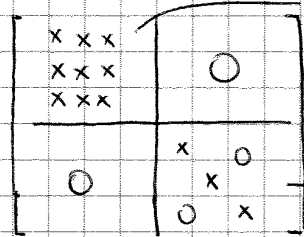
La teoria di Timoshenko è asintoticamente inconsistente



Se lo spostamento  $\hat{e}$  è costante  $\rightarrow$  anche  $\hat{e}_a$  def. (rapporto tra gli spostamenti)  $\hat{e}$  è costante

Se invece utilizzo la legge di Hooke per trovare  $\hat{\sigma}$

$\hat{\sigma}$

$\sigma_{xx} \neq 0$	$\tau_{xz} = 0$	 <p style="font-size: small;">                 significa che se lo tiro nascono tensioni su tutte le facce                  se lo torco non nascono altre tensioni             </p>
$\sigma_{yy} \neq 0$	$\tau_{yz} = 0$	
$\sigma_{zz} \neq 0$	$\tau_{xy} = 0$	

Non ho def. di taglio perché lo spostamento  $w$  varia solo in  $z$

Ho def. di taglio quando uno spostamento in una direzione provoca effetti anche in altre direzioni.

Secondo le precedenti ipotesi (1D membranate)  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}) \ll \sigma_{zz}$

- $\Rightarrow$  ①  $E_{zz} = \epsilon_{zz}^0(z)$
- ②  $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0(z)$
- ③  $w = w^0(z)$

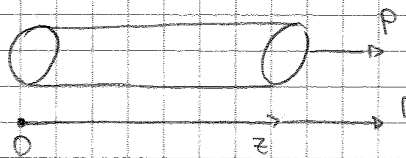
$S \rightarrow w$        $\hat{\sigma} \rightarrow \sigma_{zz}$        $\hat{E} \rightarrow E_{zz}$

Introduciamo l'approssimazione  $\sigma_{zz} \cong E E_{zz}$  (versione semplificata)

$$\sigma_{zz} \uparrow = (1 + 2G) E_{zz}$$

Correzione relativa ad uno stato di tensione piano  $\rightarrow$  PLAIN STRAIN

La rigidezza minima è solitamente quella esatta: abbiamo  $E < 1 + 2G$  quindi usiamo  $E$  in plain strain serie a correggere l'approssimazione

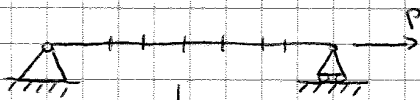


Ho solo un grado di libertà, non posso quindi disegnare con l'incastro perché altrimenti avrei anche flessione e l'asta non può flettere (diventerebbe una trave). Posso solo mettere un carico concentrato o distribuito lungo l'asse



$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$$

$$E_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$$



sezionando la  $z$  è costante

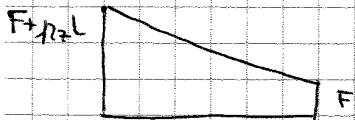
$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A} \equiv \left| \vec{F} \right|_{dA}$$

$$E_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{P}{EA}$$

$$E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{P}{EA}$$

Se invece abbiamo  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow F$



con  $\mu z = \text{costante}$

$$\frac{dW}{dz} = E_{zz} = \frac{\mu z L - \mu z^2}{EA}$$

$$W(z) - W(0) = \int_0^z \left( \frac{\mu z L - \mu z^2}{EA} \right) dz$$

$$W(z) = W(0) + \frac{\mu z L}{EA} z - \frac{1}{2} \frac{\mu z^2}{EA}$$

$\Rightarrow$  CORRENTE  $\cong$  ASTA

$\downarrow$   
elemento posto sul  
cassone d'aria

Se conosco diagramma  $(N)$  posso determinare  $w_z$ ,  $\sigma_{zz}$  e  $E_{zz}$  direttamente

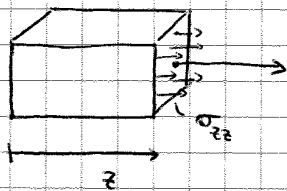
$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$

$$E_{zz} = \frac{N}{EA}$$

$$w(z) - w(0) = \int_0^z \frac{N}{EA} dz$$

La rigidità membranale

### EQUILIBRIO



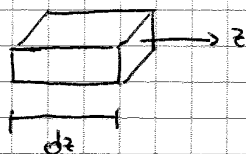
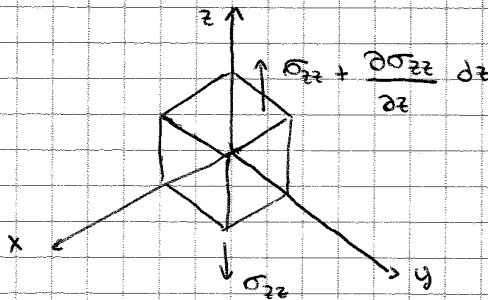
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Lo sforzo normale equivale a questa distribuzione di  $\sigma_{zz}$ .

l' unica equazione di equilibrio che mi rimane  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$

$$q_z = \left[ \frac{N}{\text{mm}^3} \right]$$



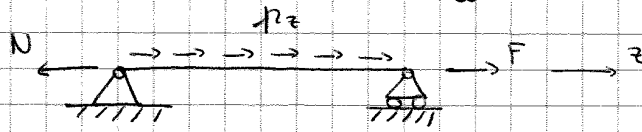
$$-N + N + \frac{dN}{dz} dz = 0$$

$$\boxed{\frac{dN}{dz} = 0}$$

condizione di  
equilibrio lungo z

PLV PER SCRIVERE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

$$L_i^{ab} = \int_V \{\sigma^a\}^T \{\epsilon^b\} dV = \int_V \{\epsilon^b\}^T \{\sigma^a\} dV = \boxed{\sigma_{i,j,i} = 0}$$



CONDIZIONI AL CONFINO :

$$\begin{matrix} z=0 & w=0 \\ z=L & N=F \end{matrix}$$

CONDIZ. CINEMATICA  
Non conosciamo le reazioni vincolari

Necessarie per risolvere  $N_z = -p_z$   
 $EA \frac{d^2 w}{dz^2} = -p_z$

CONDIZ. MECCANICA  
Non conosciamo gli spostamenti

In una struttura 1D il contorno è costituito da 2 punti

$$\left. \begin{matrix} 3D \rightarrow 2D \\ 2D \rightarrow 1D \\ 1D \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \text{ quando considero il contorno}$$

$$N(0) = F + p_z \cdot L$$

$$L_i^{ab} = L_e^{ab} \quad \text{cambio notazione} \quad L_i^{ab} = \delta L_i^{ab} \quad L_e^{ab} = \delta L_e^{ab}$$

"a" equilibrato      "b" congruente

$$\delta L_i^{ab} = \int \delta \epsilon^b \sigma^a dV$$

L "b" deve essere congruente  
→ il sistema virtuale è quello  
dove c'è  $\delta$

Quando invece le forze sono virtuali (sistema iperstatico)  
scrivo  $\delta \sigma^a$

$$\delta L_i = \int \delta \epsilon \sigma dV$$

$$\delta L_e = F \delta w(L) + \int_0^L p_z \delta w(z) dz \rightarrow \text{considero le forze applicate}$$

$$\delta L_i = \int \delta \epsilon \sigma dV = \int \sigma \frac{d \delta w}{dz} dV \quad \text{poiché } \epsilon = \frac{dw}{dz} \rightarrow \delta \epsilon = \frac{d}{dz} \delta w$$

Dato che  $dV = A dz$  ;  $N = \int \sigma dA \Rightarrow$  da  $L_i$  posso ricavare  $N$

$$\delta L_i = \int N \frac{d}{dz} \delta w dz = - \int \frac{dN}{dz} \delta w dz + N(L) \delta w(L) - N(0) \delta w(0)$$

per Gauss {  $\int \frac{dN}{dz} \delta w dz$  valore sul dominio condizione di equilibrio       $N(L) \delta w(L) - N(0) \delta w(0)$  valore sul contorno

→ sono uguali

$$- \int_0^L \frac{dN}{dz} \delta w dz + N(L) \delta w(L) - N(0) \delta w(0) = F \delta w(L) + \int_0^L p_z \delta w dz$$

Quindi il PLV diventa

$$\int_0^L (-N_z - p_z) \delta w dz = 0 \rightarrow \boxed{N_z = -p_z} \rightarrow \text{equazione indefinita di equilibrio nel punto}$$

La novità rispetto alla funzione forte è che possiamo derivare per  $dz$ , infatti in questa forte avevamo  $\frac{d}{dz} \delta w$ .

$$\delta L_e = \delta L_i$$

$$\delta L_e = F_A \delta w_A + F_B \delta w_B = \{\delta w\}^T \{F\}$$

$$\{\delta w_A, \delta w_B\} \quad \{F_A, F_B\} = \{F\}^T$$

$$\delta L_i = \int_V \delta \epsilon_{zz} \sigma_{zz} dV = \int_V \delta \epsilon_{zz} E \epsilon_{zz} dV = \int_V \{\delta w\}^T [B]^T E [B] \{w\} dV$$

Lo ho scritto tutto in funzione della deformazione

$$\delta L_i = \{\delta w\}^T \left( \int_V [B]^T E [B] dV \right) \{w\}$$

$$[K] = \int_V [B]^T E [B] dV \Rightarrow \delta L_i = \{\delta w\}^T [K] \{w\}$$

APPLICHO PLV  $\Rightarrow \{\delta w\}^T [K] \{w\} = \{\delta w\}^T \{F\}$

$$\Rightarrow \boxed{[K] \{w\} = \{F\}}$$

↑  
numeri

Ho portato il sistema alla scrittura della forza elastica di una molla

$$[K] = \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} A dz \Rightarrow \frac{EA}{L^2} \quad ?$$

$$\Rightarrow [K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRICE DI RIGIDEZZA PER L'ASTA}$$

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ w_B \end{Bmatrix}$$

↳ SIMMETRIA SINGOLARE  
 $\Rightarrow \det = 0$

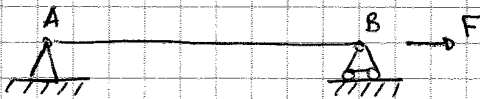
Scrittura esplicita:

$$F_A = \frac{EA}{L} (w_A - w_B)$$

$$F_B = \frac{EA}{L} (-w_A + w_B)$$

Infatti  $F_A$  e  $F_B$  sono uguali ma cambiate di segno

Esempio



imposto (noto)

$$w_A = 0$$

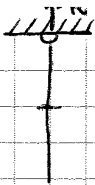
$$F_A = ?$$

$$w_B = ?$$

$$F_B = F \text{ imposto (noto)}$$

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_A = -\frac{EA}{L} w_B & \Rightarrow w_B = \frac{FL}{EA} \\ F = +\frac{EA}{L} w_B & \Rightarrow F_A = -F \end{cases}$$



Asta caricata solo del suo peso  
 $\rho$  a seconda del materiale  
 $\sigma_R$  tensione di rottura

$$\sigma_R = \frac{N}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho L A g}{A}$$

Quanto può essere lunga quest'asta?  
 $R = R(L, \rho)$

Quando  $\sigma = \sigma_R = \frac{N}{A}$  (all'incastro)

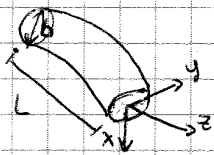
$$L_R = \frac{\sigma_R}{\rho \cdot g} = \frac{N}{\rho A g}$$

$\Rightarrow L = L_R$  lunghezza rottura

Aggiungere alla tabella  $\sigma_R$  e  $L_R$

## TRAVE

Elemento unidimensionale flessionale



$L \gg b \Rightarrow 1D$

$$u(x, y, z) = \sum_i F_i(x, y) u_i(z)$$

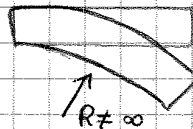
$$v(x, y, z) = \sum_i F_i(x, y) v_i(z)$$

$$w(x, y, z) = \sum_i \underbrace{F_i(x, y)}_{\text{funzioni note}} \underbrace{u_i(z)}_{\text{nuove incognite}}$$

Da problema 3D a 1D  $\Rightarrow$  espansione assiomatica

Asta  $\Rightarrow$  memorabile  $\Rightarrow w$  dipende solo da  $z \Rightarrow$  non si modifica lo stato di tensione lungo la sezione

La trave può anche flettersi:



trave flessionale:

$$w(x, y, z) = w^0(z) + x \Phi_x(z) + y \Phi_y(z)$$

ci devono essere almeno questi due termini lineari

Per risolvere il problema della trave:  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z)$

$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z)$

$\hat{J}^D = \hat{J}^D(N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z)$

Con le 3 condizioni il campo di spostamento diventa:

$$\textcircled{3} \quad w(x,y,z) = w^0(z) - x \frac{\partial u^0}{\partial z} - y \frac{\partial v^0}{\partial z}$$

$$\begin{cases} u = u^0 \\ v = v^0 \\ w = w^0 - x u^0_{,z} - y v^0_{,z} \end{cases}$$

Rimane soltanto  $\epsilon_{zz} \neq 0 \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w^0}{\partial z} - x \frac{\partial^2 u^0}{\partial z^2} - y \frac{\partial^2 v^0}{\partial z^2}$

$\begin{matrix} N \\ \uparrow \\ CA \end{matrix}$ 

 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{CURVATURE}}$

$$\epsilon_{zz} = k_1(z) + k_2(z)x + k_3(z)y$$

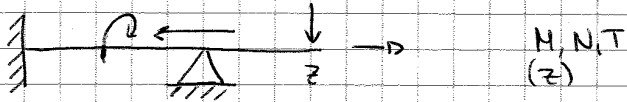
$$k_1(z) = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dz}$$

$$k_2(z) = - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$k_3(z) = - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$



Esempio



$$k_1 = w^0_{,z} = k_1(N, T, M, \dots)$$

$$k_2 = -u^0_{,zz} = k_2(\dots)$$

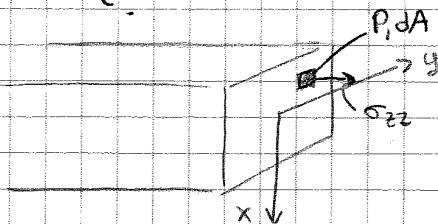
$$k_3 = -v^0_{,zz} = k_3(\dots)$$

$$\hat{\epsilon} \equiv \epsilon_{zz}$$

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma_{zz} \quad \sigma_{zz} \gg \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$$

$\boxed{\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}}$   $\rightarrow$  passo alle tensioni per esprimere  $K$  tramite le caratteristiche di sollecitazione

$\hat{\epsilon}?$



$$dF = \sigma_{zz} dA$$



$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = ([C]_{\text{trave E.B.}}) \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\partial W}{\partial z} = W_{,z}^0 \\ K_2 = -\frac{\partial^2 U^0}{\partial z^2} = -U_{,zz}^0 \\ K_3 = -\frac{\partial^2 V^0}{\partial z^2} = -V_{,zz}^0 \end{cases}$$

$$K_1 = C_{11}^{-1} N + C_{12}^{-1} M_y + C_{13}^{-1} M_x$$

$$K_2 = C_{21}^{-1} N + C_{22}^{-1} M_y + C_{23}^{-1} M_x$$

$$K_3 = C_{31}^{-1} N + C_{32}^{-1} M_y + C_{33}^{-1} M_x$$

Se prendiamo come riferimento il baricentro della trave:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_y & I_{xy} \\ 0 & I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix}$$

centrale  
Nel sistema baricentrico si ha disaccoppiamento tra sforzi membranari e sforzi flessionali

Riferimento CENTRALE (baricentrico + principale)

$$N = EA K_1$$

$$M_y = EI_y K_2$$

$$M_x = EI_x K_3$$

È tutto disaccoppiato → matrice diagonale

$$K_1 = \frac{N}{EA} \quad K_2 = \frac{M_y}{EI_y} \quad K_3 = \frac{M_x}{EI_x}$$

Riferimento PRINCIPALE → si annulla  $I_{xy}$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \frac{N}{EA} + \frac{M_y}{EI_y} x + \frac{M_x}{EI_x} y \\ \sigma_{zz} &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \end{aligned} \right\} \text{RELAZIONE DI NAVIER: } \epsilon_{zz} \text{ e } \sigma_{zz} \text{ scritte in funzione delle caratteristiche di sollecitazione}$$

non dipende dal materiale (tranne nell'iperstatico)

Scrivere relazione di Navier per sistema baricentrico, principale, qualsiasi → calcolo sistema 3x3 e farci il inverso

$$\sigma_{zz} = a + bx + cy \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} a &= f(N, M_x, M_y, A, S_x, S_y, I_x, I_y, I_{xy}) \\ b &= \frac{1}{I_y} M_y \\ c &= \frac{1}{I_x} M_x \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} \rightarrow \text{fibre tutte tese o tutte compresse}$$



$$\sigma_{zz} = \frac{My}{I_y} x \rightarrow \text{alcune fibre sono tese e altre compresse}$$



Con sforzo normale assegnato per diminuire  $\sigma_{zz}$  devo aumentare l'area.  
Per avere invece un grande momento di inerzia sposto l'area il più lontano possibile dall'asse neutro

Longherone  $\rightarrow$  struttura che resiste alla flessione dell'ala

In un riferimento qualsiasi non abbiamo flessione semplice

$$\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}, \hat{\nu}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$k_1 = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EA} = w'_{,z}$$

$$k_2 = -\frac{\partial^2 u^0}{\partial z^2} = \frac{My}{EI_y}$$

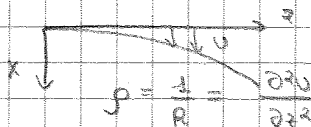
$$k_3 = -\frac{\partial^2 v^0}{\partial z^2} = \frac{Mx}{EI_x}$$

$$\begin{cases} U = U^0 \\ V = V^0 \\ W = W^0 - xU'_{,z} - yV'_{,z} \end{cases}$$

$\rightarrow$  Caso sistema centrale (eq di NAVIER)

$$w(z) - w(0) = \int_0^z \frac{N(z)}{EA} dz \quad \text{ASTA}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \text{rotazione} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \text{curvatura}$$



$$\frac{d^2 u^0}{dz^2} = -\frac{My}{EI_y}$$

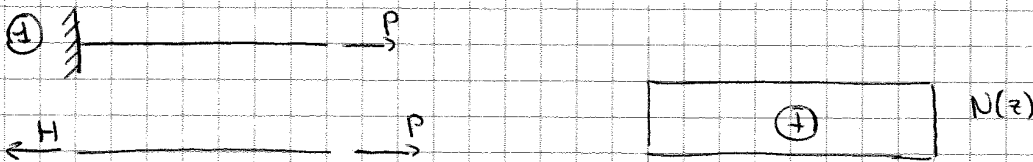
$$\frac{d^2 v^0}{dz^2} = -\frac{Mx}{EI_x}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$$

equazioni della LINEA ELASTICA  $\rightarrow$  vedo la trave come una linea  
Sono disaccoppiate solo in un riferimento CENTRALE  $\rightarrow$  vale la linea elastica  
Permettono di determinare lo spostamento dell'asse della sezione se applico M



Esempio



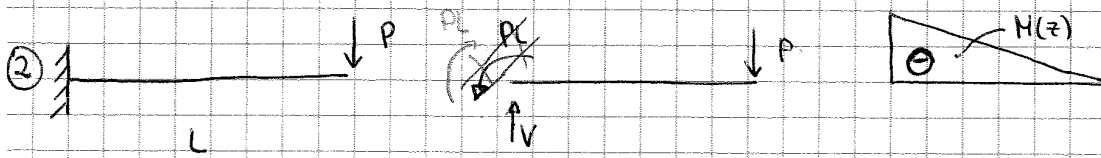
$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

Scegliamo  $A^*$  e abbiamo la rottura per trazione quando  $\sigma_{zz} = \sigma_R$

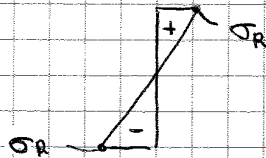
$$A^* \rightarrow \sigma_R$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A} \rightarrow A^* = \frac{P}{\sigma_R}$$

Ho dimensionato la struttura trovando l'area minima in grado di sopportare quel carico



$$\sigma_{zz} = \frac{M_y x}{I_y}$$

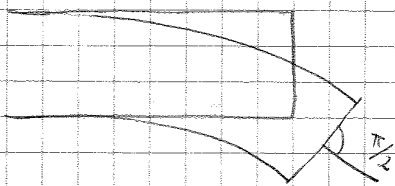


La trave si rompe dove  $M_y$  e  $x$  sono più grandi (quando la sez. è costante)

Se la sezione non è costante  $\rightarrow$  calcolo ad esempio la sezione in  $z=0$  e in  $z=L$

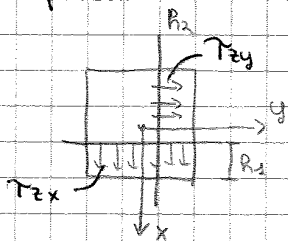
Distribuzione ideale delle sezioni  $\rightarrow$  quando  $\sigma_{zz}$  diventa  $\sigma_R$  contemporaneamente in  $z$  tutte le sezioni

Un limite della teoria di Eulero-Bernoulli è che non possiamo introdurre il taglio poiché  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ .



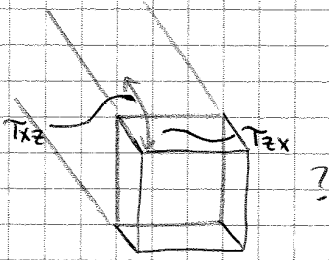
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} = 0 = G \delta_{xz} \\ \sigma_{yz} = 0 = G \delta_{yz} \end{aligned} \right\} \text{ per Eulero-Bernoulli}$$

Se sono presenti le tensioni di taglio

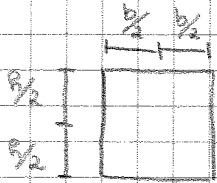


$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \sigma_{xz} \\ \tau_{yz} &= \sigma_{yz} \end{aligned}$$

$\tau_{xz} = \tau_{xz}(z) \Rightarrow$  sono costanti sulla sezione  
 $\tau_{yz} = \tau_{yz}(z)$

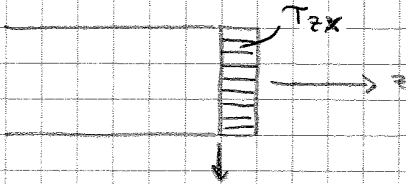


Nei corpi devo soddisfare le equazioni indef. di equilibrio. Sul bordo quelle al contorno



$$\tau_{xz} = 0 \pm \frac{b}{2}$$

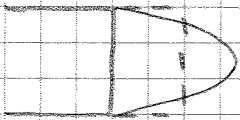
$$\tau_{yz} = 0 \pm \frac{b}{2}$$



$$T_x = \int \tau_{zx} dA \Rightarrow T_x = \tau_{zx} A$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{A} \quad \tau_{yz} = \frac{T_y}{A}$$

risultato della teoria di Timoshenko



distribuzione delle tensioni di taglio secondo Timoshenko

distribuz. reale del taglio  $\rightarrow$  valgono le equazioni dei continui deformabili

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \text{parabola}$$

Per simulare la fisica reale nell'equazione  $w(x,y,z)$  dovrai arrivare a termini di terzo grado

Introduco FATTORE CORRETTIVO DEL TAGLIO  $\chi$ :

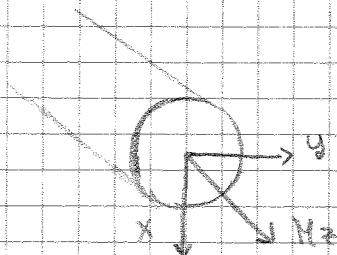
$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{A \chi_x}$$

$$\tau_{yz} = \frac{T_y}{A \chi_y}$$

$$A \chi_x = A_x$$

$$A \chi_y = A_y$$

In questo modo la distribuzione del taglio reale viene a coincidere con quella di Timoshenko.



Ruota rigidamente  $\rightarrow$  la sezione non si deforma  
 Non si INGOSSA

Relazioni geometriche + Legge di Hooke

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \sigma_{zz} \text{ è un piano sulla sezione nel caso di materiale omogeneo}$$

Se  $\sigma_{zz}$  derivate rispetto alle tre componenti sono nulle

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = K_0(z) + K_1(z)x + K_2(z)y \quad \rightarrow \text{relazione di Navier trovata in altro modo dove però } K_0, K_1, K_2 \text{ sono funzioni lineari di } z$$

$$\begin{aligned} K_0(z) &= K_{00} + K_{01}z \\ K_1(z) &= K_{10} + K_{11}z \\ K_2(z) &= K_{20} + K_{21}z \end{aligned}$$

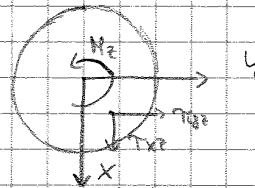
Eq. di compatibilità + Legge di Hooke

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu} (x K_{21} - y K_{11}) + K_3(z) \rightarrow \text{rotore di } \gamma \text{ funzione lineare di } xy \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \rightarrow \text{divergenza di } \gamma \text{ funzione di } xy \text{ e costante rispetto a } z \end{cases}$$

$$\tau_{xz} dy = \tau_{yz} dx$$

Proviamo a collegare le  $K$  alle caratteristiche di sollecitazione:

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma_{zz} dA & M_x &= \int y \sigma_{zz} dA \\ M_y &= \int x \sigma_{zz} dA \\ \tau_x &= \int \tau_{xz} dA & \tau_y &= \int \tau_{yz} dA \end{aligned}$$



$$M_z = \int (-y \tau_{xz} + x \tau_{yz}) dA$$

Ho 7 costanti ( $K$ ) e 6 caratteristiche di sollecitazione, e vorremmo trovarle 6 costanti  $\Rightarrow K_0, K_1, K_{20}, K_{21}, K_{30}, K_{31}$

Il problema di St. Venant è scrivere le eq. di  $K$  in funzione delle caratteristiche di sollecitazione

$$\begin{Bmatrix} K_0 \\ K_{10} \\ K_{11} \\ K_{20} \\ K_{21} \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{eq. costitutive} \\ \text{di St. Venant} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ \tau_x \\ \tau_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \textcircled{H} \rightarrow \text{torsione}$$

Introducendo le precedenti espressioni nell'eq. del rotore, con

$$\sigma_{xz} = G \gamma_{xz}$$

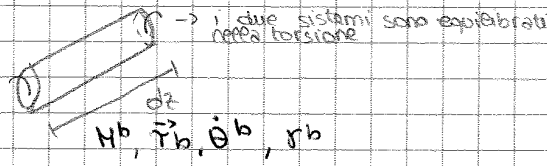
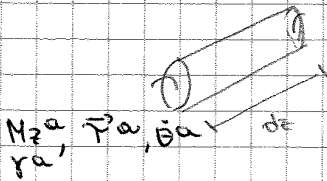
$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_3 = 2G\dot{\theta}}$$

$\rightarrow$  vale anche se la sezione si ingobbia  
 $K_3$  è una costante per la  $\dot{\theta}$

Per legarla alle caratteristiche di sollecitaz. devo scrivere una funz. del momento torcente e ottengo l'eq. costitutivo  $\downarrow$   
 $f(Mz)$

Cerco l'espressione utilizzando PLV



$$L_{iab} = L_{eab}$$

Prendo un solido di lunghezza elementare dz

$$L_{eab} = M^a \theta^b = M^a \dot{\theta}^b dz$$

$$L_{iab} = \int_A \underbrace{\gamma^a}_{\text{velocità tangenziale totale}} \gamma^b dA dz = \int_A \frac{\gamma^a \gamma^b}{G} dA dz$$

Relazione tra  $\gamma$  ed  $M$  :  $\gamma = \gamma \Big|_{Mz=1}$       $Mz = \gamma * H_z$

$$\gamma^a = \gamma \Big|_{Mz=1} \quad M_z^a = \gamma * H_z^a \quad \gamma^b = \gamma \Big|_{Mz=1} \quad M_z^b = \gamma * H_z^b$$

$$\Rightarrow L_{iab} = \int_A \frac{M_z^a M_z^b}{G} (\gamma^*)^2 dA dz$$

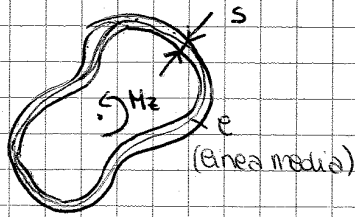
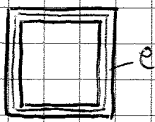
Introduco  $I_t \equiv J_t \rightarrow$  modulo torsionale =  $\frac{1}{\int_A (\gamma^*)^2 dA} = [m^4]$

Non è una proprietà della sezione, viene  $m^4$  perché abbiamo assunto  $\sigma_{zz}$  piana. È una proprietà di come si distribuiscono le tensioni sulla sezione, quindi cambia a seconda delle sezioni.

$L_{iab} = L_{eab} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{Mz}{GI_t}}$  collegato alla  $K_3 \Rightarrow$  eq. costitutiva

$\frac{\partial \theta}{\partial z}$   $\rightarrow$  II FORMULA DI BREDT

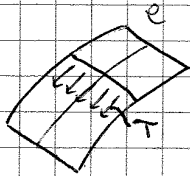
• SEZIONE A PARETE SOTTILE CHIUSA



$$\frac{e}{s} \gg 1$$

Applico momento torcente  $M_z$

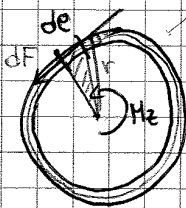
FLUSSO TAGLIANTE  $q = \int \tau ds$



Poiché la parete è sottile parlo di flusso di taglio

$de$  è la base di un rettangolo, io però considero solo il triangolo che spazza un'area  $\frac{s^2}{2}$ , quindi in  $M_z$  diventa poi  $2s^2$

Calcolo sul generico tratto  $de$  la forza che agisce  $dF$   
 $dF = qde$



Sforzi tangenziali agenti su  $de$   $\begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases} \rightarrow$  c'è solo momento torcente

$$M_z = \int_e r dF = \int_e r q de = q \int_e r de$$

Non ho tensioni lungo  $z \Rightarrow \sigma_{zz} = 0$

$$M_z = q 2s^2$$

↓  
Area cerchio

$$q = \frac{M_z}{2s^2} \quad \text{I relazione di Bredt}$$

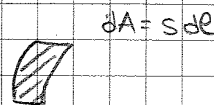
$$\theta = \frac{M_z}{GI_t} \quad \text{II relazione di Bredt}$$

$$I_t = \frac{1}{\int r^2 dA} \Big|_{M_z=1}$$

$$\tilde{\tau} = \frac{q}{s} \quad \text{tensione media} = \frac{M_z}{2s^2 s}$$

$$\tilde{\tau} \Big|_{M_z=1} = \frac{1}{2s^2 s}$$

$$\Rightarrow I_t = \frac{1}{\int \left( \frac{1}{2s^2 s} \right)^2 dA} = \frac{4s^2 s}{e}$$



Mentre i momenti di inerzia variano con  $e$ , qui variano con  $s^3$ , quindi conviene mettere le aree le più lontano possibile dall'asse neutro?

It è legato ad  $N_z$

Collegato ad  $(N)$

$$I_N = \frac{1}{\int_A \sigma_{zz}^2 \Big|_{N=1} dA} = A \rightarrow \text{E' area della sezione non e' una}$$

proprietà geometrica ma una proprietà della distribuzione delle tensioni

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{N=1} = \frac{1}{A}$$

Collegato ad  $(M_x)$

Calcolare per esercizio

$$I_{M_x} = \frac{1}{\int_A \sigma_{zz}^2 \Big|_{M_x=1} dA} = I_x$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{M_x=1} = \frac{1}{I_x} y$$

Collegato ad  $(M_y)$

$$I_{M_y} = \frac{1}{\int_A \sigma_{zz}^2 \Big|_{M_y=1} dA} = I_y$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_{zz} \Big|_{M_y=1} = \frac{1}{I_y} x$$

Quando ho taglio  $\rightarrow T_x, T_y$

$$K_3 = 0, K_0 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = \frac{v}{1+v} (K_1 x - K_2 y) \\ \sigma_{yz} = \frac{dy}{dx} \\ \sigma_{xz} = \frac{dx}{dy} \\ \sigma_{zz} = K_1 x + K_2 y \end{cases}$$

Eq. di St. Venant nel caso del taglio

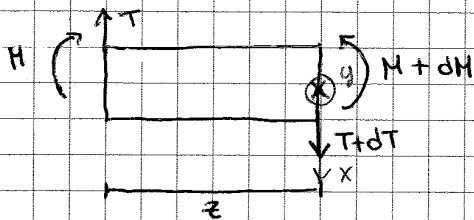
$$\sigma_{zz} = \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \quad ?$$

$$K_1 = K_0 + K_{11} z$$

$$K_2 = K_0 + K_{21} z$$

$$K_{11} = \frac{\partial K_1}{\partial z}$$

$$K_{21} = \frac{\partial K_2}{\partial z}$$



$$dT = \frac{dM}{dz}$$

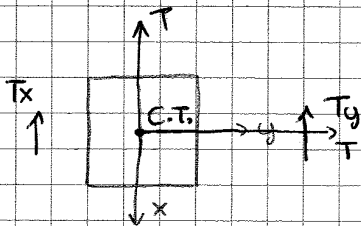
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial M_y}{\partial z} \frac{x}{I_y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{y}{I_x} = T_x \frac{x}{I_y} + T_y \frac{y}{I_x}$$

$$\int_e \tilde{T}_{xz} dA = - \int_{A_{S_1}} \left( \frac{T_x}{I_y} x + \frac{T_y}{I_x} y \right) dA$$

$$\Rightarrow \int_e \tilde{T}_{xz} dA = - \left( \frac{T_x S_y}{I_y} + \frac{T_y S_x}{I_x} \right) \rightarrow \text{soluzione che non ci dà le tensioni di taglio ma l'estensione media}$$

$S_x, S_y$  non sono i momenti statici della sezione. Sono integrati da fare su  $A_{S_1}$  e non sulla sezione complessiva.

### CENTRO DI TAGLIO



che contiene il centro di taglio, direzione in quale applicando il taglio non produce torsione

$$T = T_x \bar{i} + T_y \bar{j}$$

Se la sezione ha assi di simmetria il centro di taglio si trova nell'intersezione di essi.

Se la sez. non ha assi di simmetria il centro di taglio può anche essere fuori dalla sezione.

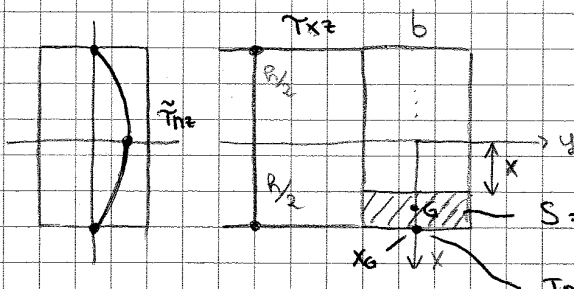
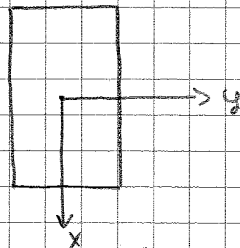
La sua posizione dipende da come la sezione si deforma  $\Rightarrow$  distribuzione di  $T_{xz}$  e  $T_{yz}$  e dove passano le loro risultanti.

Per trovarlo devo conoscere le tensioni di taglio, applicando la teoria precedente che ha tra le ipotesi un n.g. centrale di inerzia so già che il centro di taglio si trova nell'intersezione degli assi di simmetria.

### Esempio

$$T_x \neq 0 \quad T_y = 0$$

$$q = \tilde{T}_{xz} b = - \frac{T_x S_y}{I_y} = - \frac{T S}{I}$$



$$S = \int_A x dA$$

In questo punto S vale zero, quindi  $T_{xz}$  parte da zero  $\rightarrow$  soddisfa le condizioni ai limiti

$$\tilde{T}_{xz} = - \frac{1}{b} \frac{T S}{I}$$

$$S = A_{S_1} \cdot x_G \quad \text{opp. } \frac{1}{2} (b-x) \cdot x$$

$$b \left( \frac{b}{2} - x \right) \rightarrow \frac{1}{2} (b-x) \cdot x$$

S funzione parabolica per la x

$$(\tilde{T}_{xz})_{\max} \Rightarrow x = 0$$



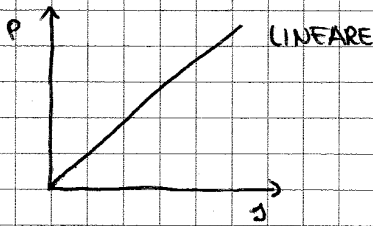
## ASTA CARICATA DI PUNTA

Problema di STABILITÀ → se mi allontanano da questa configurazione sono in una situazione di maggior pericolo  
 se c'è equilibrio ↙

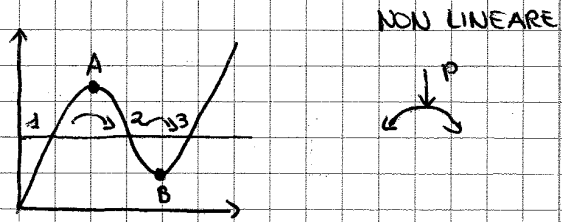
La configurazione può essere stabile, instabile o indifferente a seconda se perturbandola si scosta facilmente o meno dalla posizione di equilibrio.

$u, x$   $u^2$  von Karman  $\Rightarrow E_{xx} = u, x + \frac{1}{2} w, x^2$

MULTIPLICITÀ DELLA SOLUZIONE  $u^2, v^2, \omega^2 \Rightarrow$  devo avere un problema non lineare  
 Per parlare di stabilità devo avere un problema non lineare

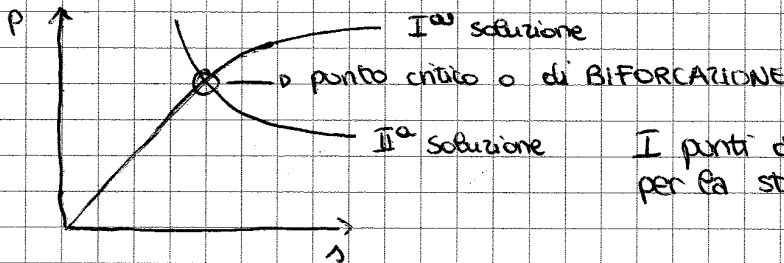


Non ha senso parlare di stabilità

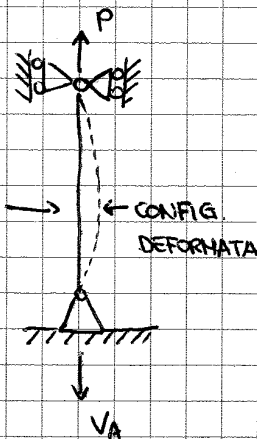


perturbando l'equilibrio posso passare da una config. all'altra di equilibrio (1 → 2 → 3)

- punti particolari in cui inizio ad avere molteplicità di soluzione → PUNTI CRITICI



I punti di biforcazione sono un pericolo per la stabilità della struttura



Problema di equilibrio STABILE → andando a perturbare il carico la raddrizza. Per la stabilità devo considerare la config. deformata.

$$\sigma = \frac{P}{A} < \sigma_{cr}$$

$$A = 10 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{cr} = 360 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{max} = 10 \cdot 360 = 3600 \text{ N}$$

↳ Non dipende dalla lunghezza dell'asta

Problema dell'asta tirata → TRAZIONE



$$P = P(u)$$

l'equaz. di equilibrio è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea  
 →  $u=0$  è sempre una soluzione

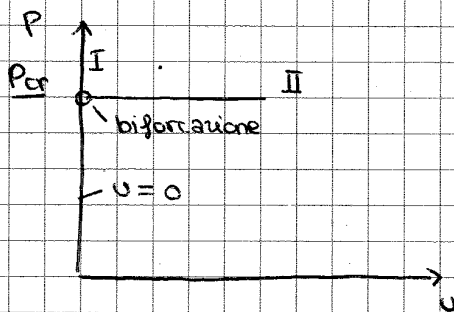
Una possibile soluzione:  $u = \bar{U} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$

$m = \text{n}^\circ \text{ di onde}$   
 $\bar{U} = \text{ampiezza}$

Sostituendo nell'equazione:  $-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \bar{U} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) + \frac{P}{EI} \bar{U} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) = 0$

$$P = \frac{EI}{L^2} (m\pi)^2 \rightarrow \text{soluzione che soddisfa l'equazione che non dipende da } u \text{ e dall'ampiezza. Ci sono valori del carico che soddisfano l'equaz. anche per } u \neq 0 \text{ e } \bar{U} \neq 0.$$

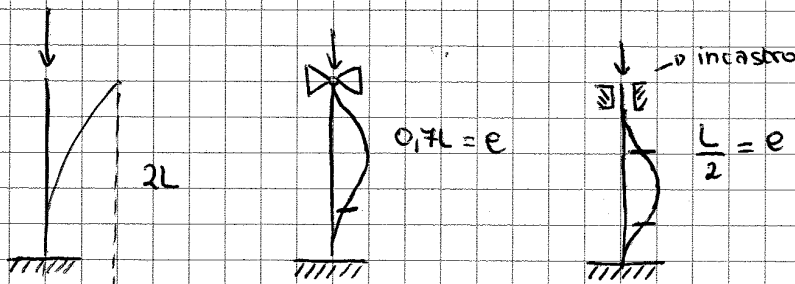
se  $m=1$   $P_{cr} = \frac{EI \pi^2}{L^2}$



fino a  $P_{cr}$  l'unica soluzione è  $u=0$ , dopo abbiamo  $\bar{U} \rightarrow \infty$   
 Per ogni  $m$  ho un  $P_{cr}$  ma io considero quello più piccolo

Affinché l'asta non si rompa  
 $\sigma < \sigma_R$   
 $P < P_{cr}$

Considerando ora una trave incastrata:

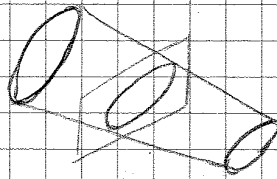


$e = \text{lunghezza libera di flessione}$

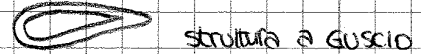
$$P_{cr} = \frac{EI \pi^2}{e^2} \rightarrow \text{mettendo } e^2 \text{ trovo le soluzioni per tutti i casi}$$

## SEMIGUSCIO IDEALE

È una combinazione di tipologie strutturali.  
Modello sviluppato per le strutture a GUSCIO RINFORZATO.



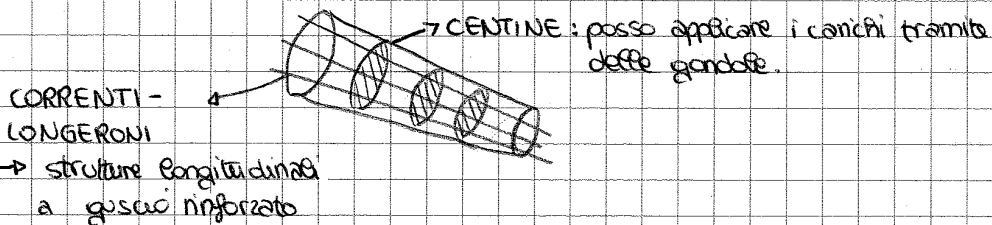
Non sarà piena ma a parete sottile  
⇒ se sono presenti inflessioni



Come si può lavorare all'interno? Quanto deve essere lo spessore?

La funzione di  $x, y, z$   
⇒  $t(x, y, z)$

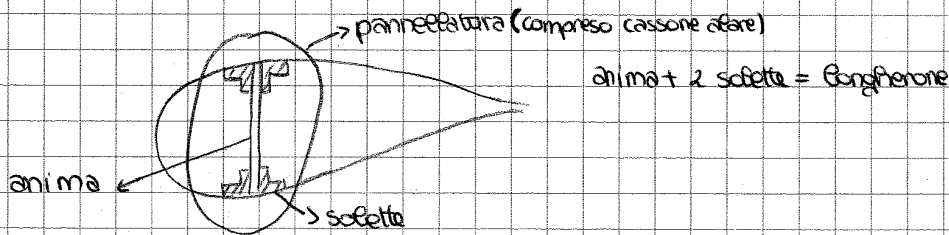
Problemi legati alla presenza di carichi concentrati e fessure ⇒ si cerca quindi di RINFORZARE il guscio ideale con degli elementi di irrigidimento detti CENTINE



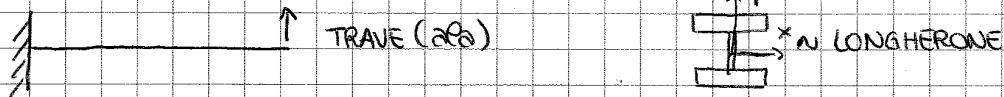
Nella fusoliera: centine → ordinate, Longeroni → correnti

Nel linguaggio aeronautico il semiguscio ideale rinforzato viene chiamato P.L.A.

## ALA MONOLONGHERONE

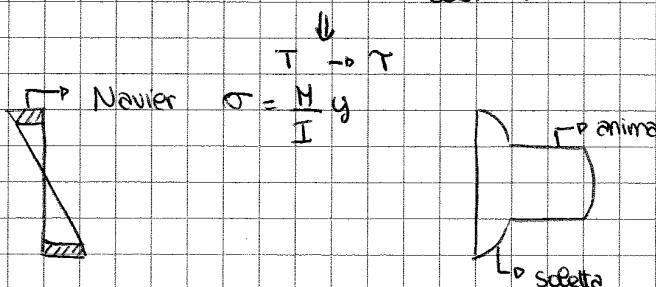
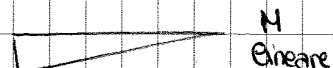
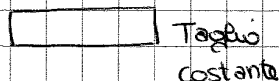


Per studiare la resistenza possiamo considerarla come una trave

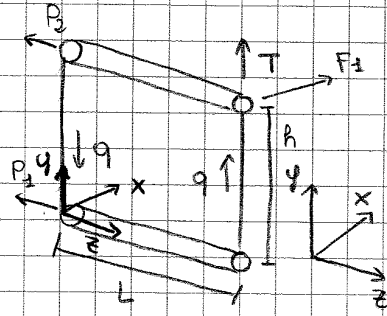


$$\sigma = \sigma_{zz}$$

$$\tau = \tau_{xz}, \tau_{yz}$$



Come risolvere la struttura?

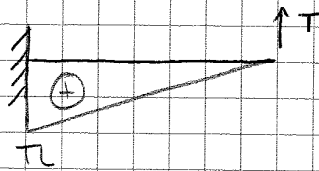


$q, P_1, P_2$   
 Se risolvo il problema solo con le eq. della statica  $\Rightarrow$  SEMIGUSCIO PURO

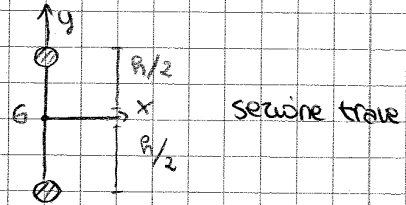
Equazioni di equilibrio

- $\rightarrow x$       $0 = 0$       $P_1 = 0$      e' ala non può resistere a forze lungo x
  - $\uparrow y$       $qh = T \Rightarrow q = \frac{T}{h}$
  - $\downarrow z$       $P_1 + P_2 = 0 \Rightarrow P_1 = -P_2 = \frac{TL}{h}$
  - $x \curvearrowright$       $TL = -P_2 h \Rightarrow P_2 = -\frac{TL}{h}$       $\rightarrow$  perché  $P_2$  in realtà dovrebbe essere in compressione
  - $y \curvearrowright$       $0 = 0$
  - $z \curvearrowright$       $0 = 0$
- } tutte le forze sono // agli assi o non hanno braccio

TRAVE A SEMIGUSCIO



$\sigma = \frac{M}{I} y$

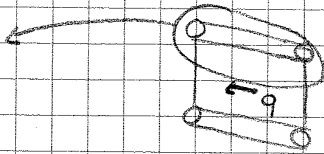
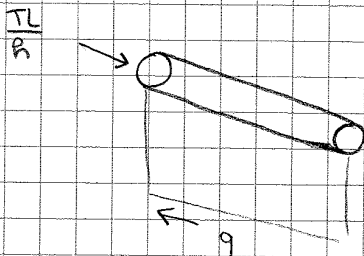


$I = 2A \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{2}$

$\sigma = \frac{TL}{\frac{Ah^2}{2}} \cdot \frac{h}{2}$

$\Rightarrow P = \sigma A = \frac{TL}{h}$       $q?$

La soluzione di Navier in accordo con quella trovata prima

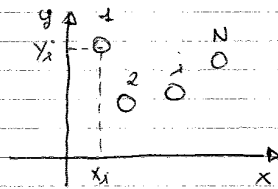


$\frac{TK}{h} = qk$   
 $\Rightarrow q = \frac{T}{h}$

La trave a semiguscio è preferibile perché più affidabile come struttura

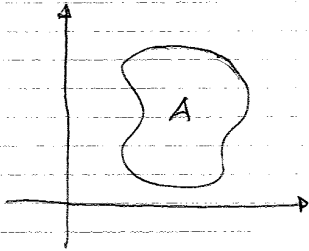
Esercitazione 1

BARICENTRO



$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^N x_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$



$$X_G = \frac{\int_A x \, dx \, dy}{\int_A dx \, dy}$$

$$Y_G = \frac{\int_A y \, dx \, dy}{\int_A dx \, dy}$$

definite come proprietà geometrica

$a(x,y) \rightarrow$  densità  $\rho \rightarrow$  baricentro di massa

$$X_G = \frac{\int_A a(x,y) x \, dx \, dy}{\int_A a(x,y) \, dx \, dy} = \frac{S_y}{A}$$

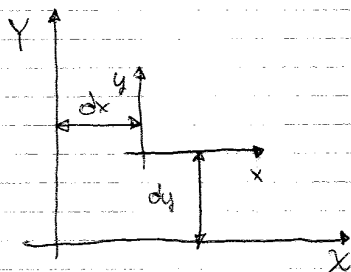
$$Y_G = \frac{\int_A a(x,y) y \, dx \, dy}{\int_A a(x,y) \, dx \, dy} = \frac{S_x}{A}$$

MOMENTI DEL I ORDINE

$$S = \int_A (ax + by) \, dx \, dy$$

se  $a=0$   $b=1$   $S_x = \int_A y \, dx \, dy$  momento statico rispetto all'asse x

se  $a=1$   $b=0$   $S_y = \int_A x \, dx \, dy$  " " " " y



$$X = x + dx$$

$$Y = y + dy$$

$$S_x = S_x + dy A$$

$$S_y = S_y + dx A$$

xy baricentrica

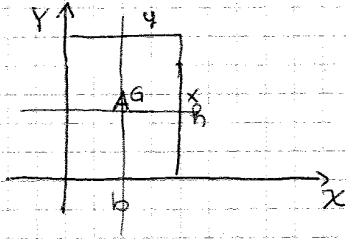
$$S_x = dy A \quad S_y = dx A$$

$$2\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad I_x = I_y \rightarrow \theta = 45^\circ \quad \text{per trovare gli assi principali di inerzia}$$

RIF. CENTRALE DI INERZIA

Rif. principale di inerzia con  $O \equiv G$

Momenti di inerzia massimo e minimo assoluti:



$$x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{2}$$

$x, y$  assi baricentri della sezione

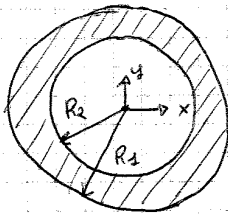
$$I_x = \int_A y^2 dx dy = \left( \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \right) \left( \int_{-h/2}^{h/2} dx \right) = \left( \frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) \cdot h = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2 dx dy = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_x = I_{x'} + d_y^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot bh$$

$$I_y = I_{y'} + d_x^2 A = \frac{b^3 h}{12} + \left( \frac{b}{2} \right)^2 bh$$

Esercizio 1



$I_x ? I_y ? I_{xy} ? I_p ?$

$$\int_D f dx dy = \int_{D_1} f dx dy - \int_{D_2} f dx dy$$

$$D = D_1 - D_2$$

$$I_{1x} = \int_{A_1} y^2 dx dy = \int_{A_1} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

$$I_{1x} = \left( \int_0^{R_1} r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) = \frac{\pi}{4} R_1^4$$

$$I_{2x} = \int_{A_2} y^2 dx dy = \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left( \int_0^{R_2} r^3 dr \right) = \frac{\pi}{4} R_2^4$$

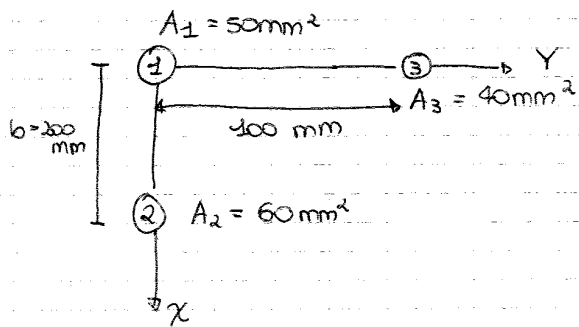
$$I_x = I_{1x} - I_{2x} = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4)$$

$$I_y = I_x \quad I_{xy} = 0$$

$$I_{1p} = \int_{A_1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{A_1} r^2 dr d\theta = \left( \int_0^{R_1} r \cdot r^2 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{4} 2\pi R_1^4 = \frac{\pi}{2} R_1^4$$

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} R_2^4$$

$$I_p = I_{1p} - I_{2p} = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4)$$

Esercizio 3

	$x_i$	$y_i$	$A_i$	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	0	0	50	0	0
2	200	0	60	12000	0
3	0	100	40	0	4000

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i A_i}{A} = \frac{0(50) + 200(60) + 0(40)}{150} = 80 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i A_i}{A} = \frac{0(50) + 0(60) + 100(40)}{150} = 26,67 \text{ mm}$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 A_i (y_i - y_G)^2 = 2,9333 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - x_G)^2 = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - x_G)(y_i - y_G) = -3,2 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow \tilde{\theta} = -14^\circ 35'$$

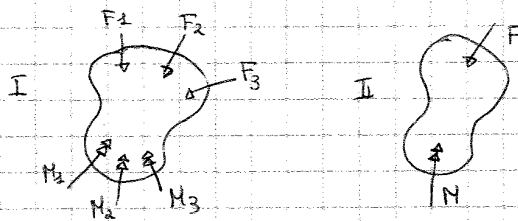
$$I_{\tilde{x}} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 2,1004 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{\tilde{y}} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 1,5233 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

**MOMENTO:**  $M^o = \vec{F} \wedge \vec{AP}^o$   $M = F \cdot AP \cdot \sin \alpha$   
**COPIA:**  $C = F \cdot d$  → distanza fra le due forze

Esercitazione 2

RISULTANTE DI FORZE



$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{F}_i^I &= \sum \vec{F}_i^{II} \\ \sum \vec{M}_i^I &= \sum \vec{M}_i^{II} \end{aligned} \right\} \text{Sistemi EQUIVALENTI}$$

I se applicata in un punto opportuno mi darà un momento pari alla somma dei momenti applicati al sistema I

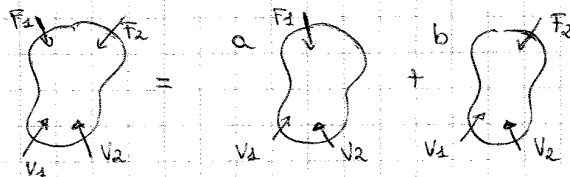
Se  $\sum F_i = 0$  e  $\sum M_i = 0 \Rightarrow$  EQUILIBRIO

Equaz. cardinali della statica

$$\left( \begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum F_{iz} = 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \sum M_{ix} = 0 \\ \sum M_{iy} = 0 \\ \sum M_{iz} = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{Equilibrio}$$

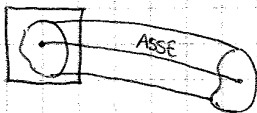
⊗ per il piano

SOVRAPP. DEGLI EFFETTI



$$\begin{aligned} V_{1a} &= V_{1a} + V_{1b} \\ V_{2a} &= V_{2a} + V_{2b} \end{aligned}$$

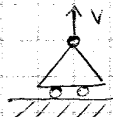
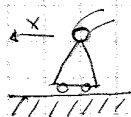
TRAVE



Se dimensioni dell'area di sezione sono di almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto alla lunghezza

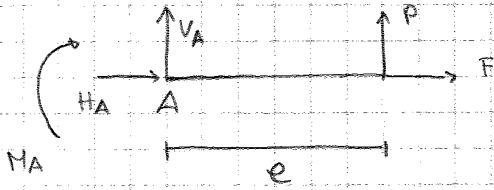
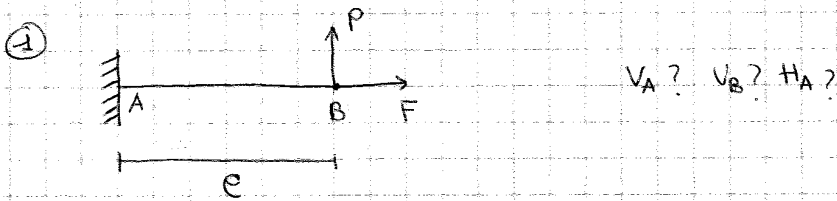
VINCOLI NEL PIANO → dispositivi che tolgono gradi di libertà alle strutture

• Carrello o appoggio semplice



tolgono 1 grado di libertà

Esercitazione 3

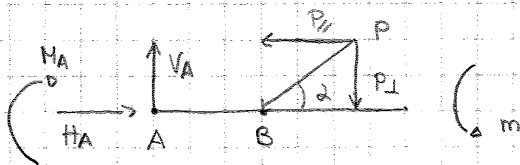
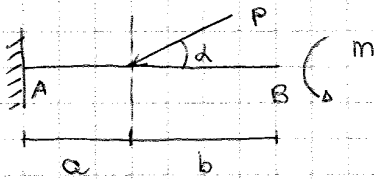


↑)  $V_A + P = 0 \Rightarrow V_A = -P$

→)  $H_A + F = 0 \Rightarrow H_A = -F$

↺)  $M_A - Pe = 0 \Rightarrow M_A = Pe$

②

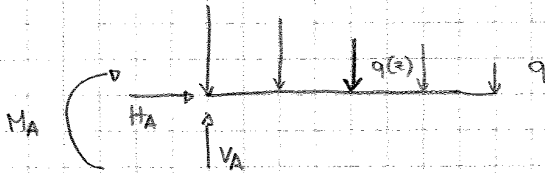
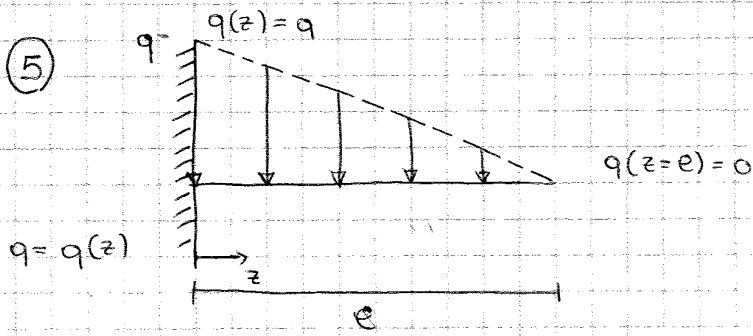


↑)  $V_A - P_{\perp} = 0 \Rightarrow V_A = P_{\perp} \Rightarrow V_A = P \sin \alpha$

→)  $H_A - P_{||} = 0 \Rightarrow H_A = P_{||} \Rightarrow H_A = P \cos \alpha$

↺)  $V_A a + M_A - m = 0 \Rightarrow M_A = m - a P \sin \alpha$





$$q(z) = q \left( 1 - \frac{z}{e} \right)$$

$$\int_0^e q(z) dz = q \left( e - \frac{e}{2} \right) = \frac{qe}{2}$$

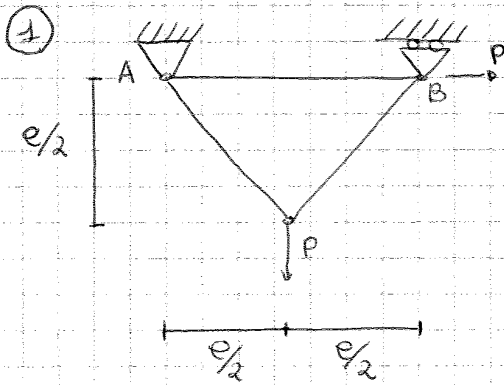
$$z_G = \frac{\int_0^e q(z) \cdot z dz}{\int_0^e q(z) dz} = \frac{1}{3} e$$

$$\overset{A^{\circ}}{\curvearrowleft} M_A + \frac{1}{2} qe \left( \frac{1}{3} e \right) = 0 \Rightarrow M_A = - \frac{1}{6} qe^2$$

$$\uparrow) V_A = \frac{1}{2} qe \quad (-F + V_A = 0)$$

$$\rightarrow) H_A = 0$$

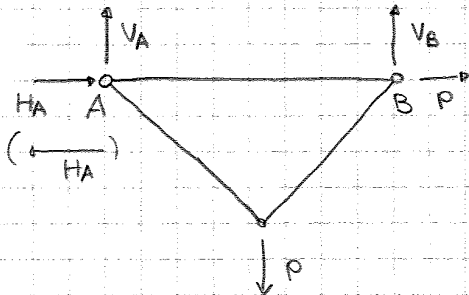
Esercitazione ④



3 cerniere interne

$$R = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0$$

$2(n-1)?$



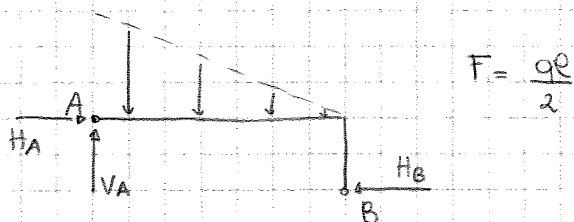
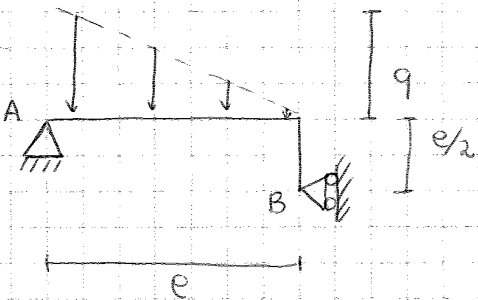
Quando due corpi sono collegati, anche se in un vincolo, debbano considerare una cerniera interna

→)  $H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P$   $H_A = P$

↑)  $-P + V_B + V_A = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P \Rightarrow V_A = \frac{P}{2}$

↺)  $-V_B \cdot \frac{e}{2} + P \cdot \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P}{2}$

②

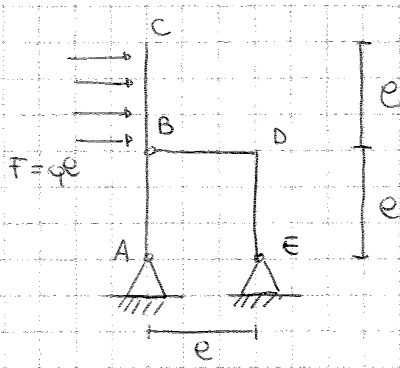


→)  $H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = -\frac{qe}{3}$

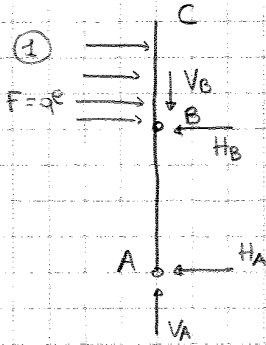
↑)  $V_A - F = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qe}{2}$

↺)  $F \cdot \frac{e}{3} + H_B \cdot \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow H_B = -\frac{2F}{3} \Rightarrow H_B = -\frac{qe}{3}$

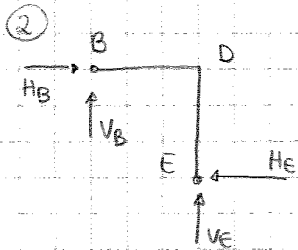
4



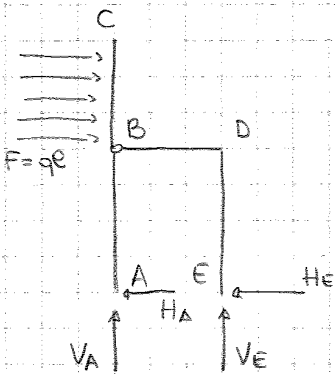
$$P = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0$$



B<sup>2</sup>)  $qe \cdot \frac{e}{2} + H_A e = 0 \Rightarrow H_A = -\frac{qe}{2}$



B<sup>2</sup>)  $H_E e - V_E e = 0 \Rightarrow H_E = V_E$



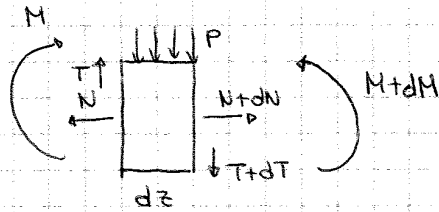
f)  $V_A + V_E = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{3}{2} qe$

→)  $-H_A - H_E + qe = 0 \Rightarrow H_A + H_E = qe$

$H_E = \frac{3}{2} qe$

$H_A = -\frac{qe}{2}$

$H_E = V_E = \frac{3}{2} qe$

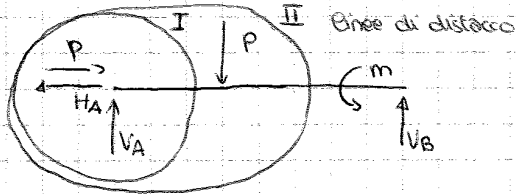
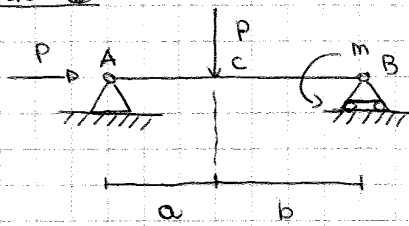


$$\uparrow) T + dT - T + p dz = 0 \Rightarrow -p = \frac{dT}{dz}$$

$$\curvearrow) -M + M + dM - (T + dT) dz - p dz \frac{dz}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{dM}{dz}$$

- se  $p=0$  ( $T=0$ )  $\Rightarrow T=\text{cost}$  ( $M=\text{cost}$ )
- se  $p=\text{cost}$  ( $T=\text{cost}$ )  $\Rightarrow T$  lineare ( $M$  lineare)
- se  $p=\text{lineare}$  ( $T=\text{lineare}$ )  $\Rightarrow T$  parabolico ( $M$  parabolico)
- se  $p$  concentrato  $\rightarrow$  salto nel diagramma di  $T$
- coppia  $C$   $\rightarrow$  salto nel diagramma di  $M$
- salto in  $T$   $\rightarrow$  cambio di pendenza in  $M$
- cerniere o carrelli  $\rightarrow$   $M$  nullo

### Esercizio 1

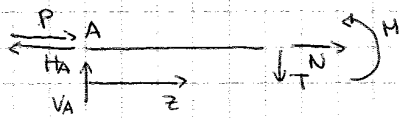


$$H_A = P$$

$$V_A = \frac{P \cdot b + m}{a + b}$$

$$V_B = \frac{P \cdot a - m}{a + b}$$

TRATTO AC  $0 < z < a$

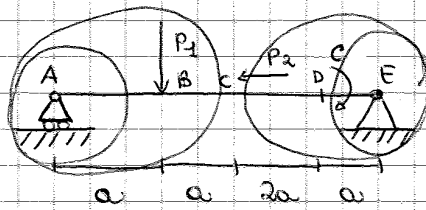


$$\begin{cases} \rightarrow) N + P - H_A = 0 \\ \uparrow) V_A - T = 0 \\ \curvearrow) V_A z - M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T = V_A \\ M = V_A \cdot z \end{cases}$$

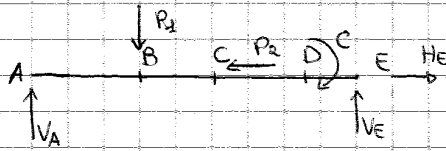
Quando non è costante calcolo quanto vale negli estremi dell'intervallo:

$$\begin{cases} M(z=0) = 0 \\ M(z=a) = V_A \cdot a \end{cases}$$

Esercizio 2)

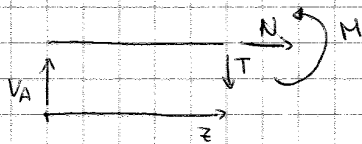


$P_1 = 50 \text{ N}$        $P_2 = 50 \text{ N}$   
 $C = 300000 \text{ Nmm}$        $\omega = 1000 \text{ mm}$



$H_E = P_2$   
 $V_A = \frac{1}{5} \left( 4P_1 - \frac{e}{a} \right)$   
 $V_E = \frac{1}{5} \left( P_1 + \frac{e}{a} \right)$

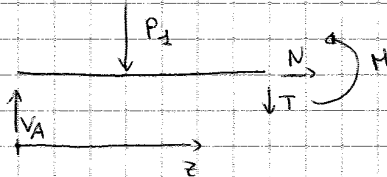
TRATTO AB     $0 < z < a$



$\begin{cases} N = 0 \\ T = V_A \\ M = V_A \cdot z \end{cases}$

$M(A) = 0$   
 $M(B; z=a) = V_A \cdot a$

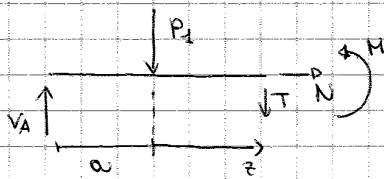
TRATTO BC     $a < z < 2a$



$N = 0$   
 $T = V_A - P_1$   
 $M = V_A z - P_1 (z - a)$

$M(z=a) = V_A \cdot a$   
 $M(z=2a) = 2V_A a - P_1 a$   
 ↓  
 C

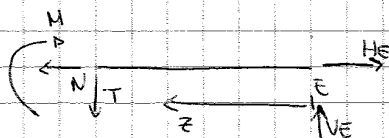
TRATTO BC     $0 < z < a$



$N = 0$   
 $T = V_A - P_1$   
 $M = V_A (a + z) - P_1 \cdot z$

$M(z=0) = V_A \cdot a$   
 $M(z=a) = 2V_A a - P_1 a$   
 ↓  
 C

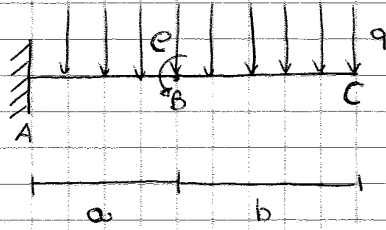
TRATTO ED     $0 < z < a$



$\begin{cases} N = H_E = P_2 \\ T = -V_E \\ M = V_E \cdot z \end{cases}$

$M(z=0) = 0$   
 $M(z=a) = V_E \cdot a$

Esercizio ③

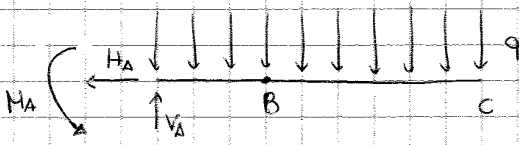


$$q = 10 \frac{N}{mm}$$

$$C = 200.000 \text{ Nmm}$$

$$a = 400 \text{ mm}$$

$$b = 600 \text{ mm}$$

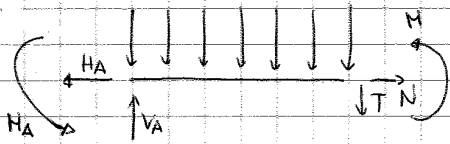


$$H_A = 0$$

$$V_A = q(a+b)$$

$$M_A = \frac{q(a+b)^2}{2} - e$$

TRATTO AB  $0 < z < a$



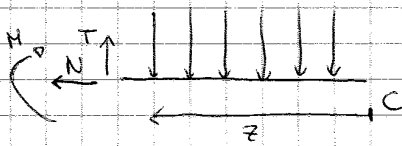
$$\begin{cases} N = 0 \\ T = V_A - qz \\ M = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + V_A \cdot z - M_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(z=0) = V_A = q(a+b) = 10000 \text{ N} \\ T(z=a) = V_A - qa = qb = 6000 \text{ N} \end{cases}$$

$$M(z=0) = -M_A = e - \frac{q(a+b)^2}{2} = -4,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M(z=a) = -\frac{qa^2}{2} + V_A a - M_A = -\frac{qb^2}{2} + e = -1,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

TRATTO BC  $0 < z < b$

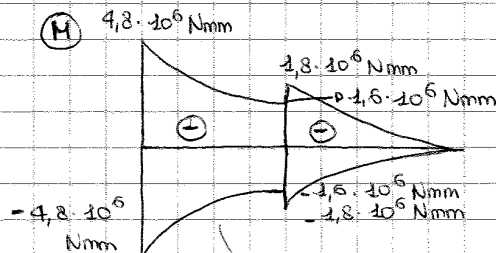
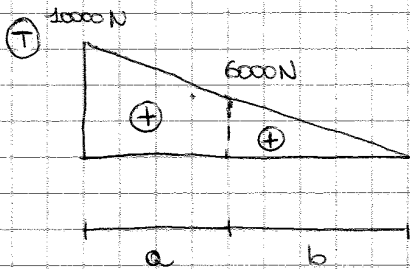


$$\begin{cases} N = 0 \\ T = qz \\ M = -qz \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(z=0) = 0 \\ T(z=b) = qb = 6000 \text{ N} \end{cases}$$

$$M(z=0) = 0$$

$$M(z=b) = -\frac{qb^2}{2} = -1,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



Aggiungere il diagramma di M abbia un max o un min, nel taglio devo vedere un punto che va a zero, oppure verifico che ci sia facendo  $\frac{dM}{dz} = 0$

Per disegno sotto per tener conto della concavità, poi la ribalto perché il momento negativo si disegna sopra

Diagramma (N)

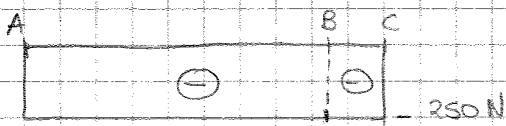


Diagramma (T)

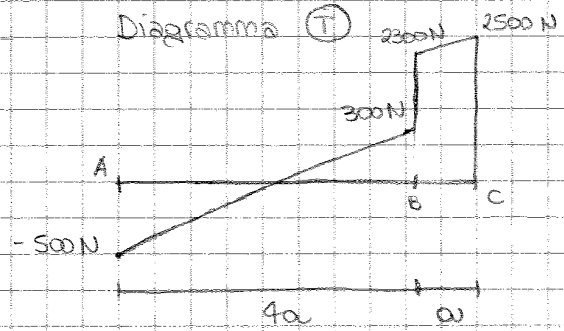
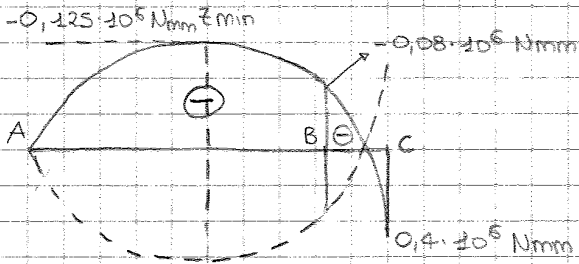


Diagramma (M)



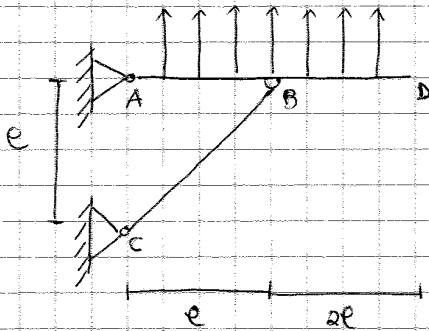
$$\frac{dM}{dz} = 0 \text{ per il tratto AB}$$

→ dove T attraversa l'asse della trave  
 Po un minimo del M

$$z_{min} = \frac{P_2}{q} = 500 \text{ mm}$$

$$M_{min} (z = z_{min}) = -0,125 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

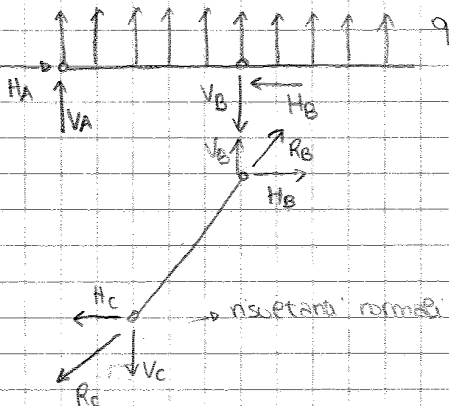
Esercizio (per casa)



$$q = \frac{1 \text{ N}}{3 \text{ mm}}$$

$$E = 20000 \text{ mm}$$

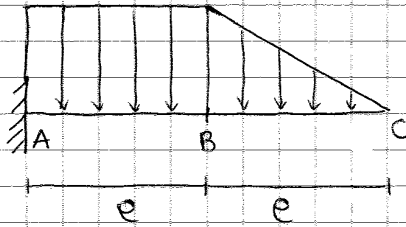
Fare i diagrammi per le due travi



Sforzi normali =  $R_B$  e  $R_C$   
 T e M nulli

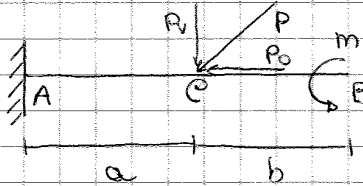
risultanti normali nulle

Esercizio (per casa)

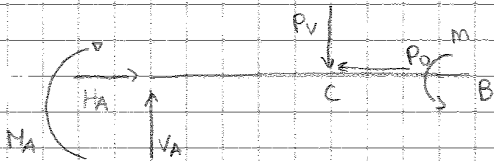


Considero AB e BC separatamente

Esercizio (5)



- $\alpha = 45^\circ$
- $P = 10 \text{ N}$
- $m = 2000 \text{ Nmm}$
- $a = 400 \text{ mm}$
- $b = 600 \text{ mm}$



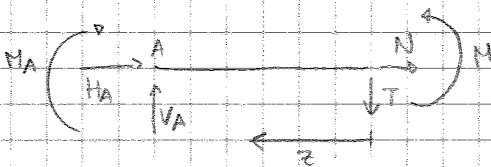
$$\rightarrow) H_A = P_0 = 5\sqrt{2} \text{ N} = 7,1 \text{ N}$$

$$\uparrow) V_A = P_v = 7,1 \text{ N}$$

$$A^B) M_A + P_v a - m = 0$$

$$M_A = -P_v a + m = -840 \text{ Nmm}$$

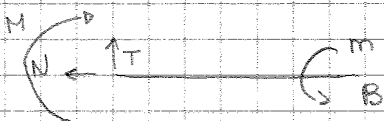
TRATTO AC  $0 < z < a$



$$\begin{cases} N = -H_A = -7,1 \text{ N} \\ T = V_A = 7,1 \text{ N} \\ -M + V_A z + M_A = 0 \\ M = V_A \cdot z + M_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(z=0) = M_A = -840 \text{ Nmm} \\ M(z=a) = M_A + V_A a = 3000 \text{ Nmm} \end{cases}$$

TRATTO BC  $0 < z < b$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = 0 \\ M = m = 2000 \text{ Nmm} \end{cases}$$

Diagramma (N)

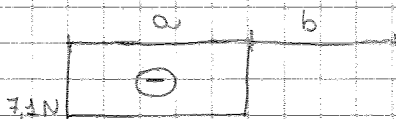
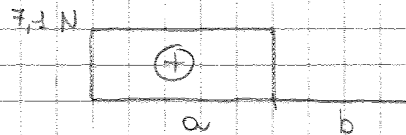


Diagramma (T)



Dove il taglio è nullo il momento è costante

Diagramma (M)





## Esercitazione (6)

### APPLICAZIONI PLV

$a \rightarrow$  equibrato  
 $b \rightarrow$  congruenti

$$\delta L_i^{ab} = \delta L_e^{ab}$$

### TRAVE

$$\int_z \left( \frac{N^a N^b}{EA} + \frac{M^a M^b}{EI} \right) dz = \int_z F^a(z) \delta S^b(z) dz$$

$EA =$  rigidezza assiale della trave (membrante)

$E =$  modulo Young

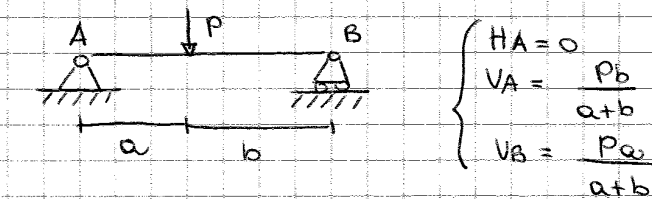
$EI =$  // flessionale

$A =$  area sezione trave

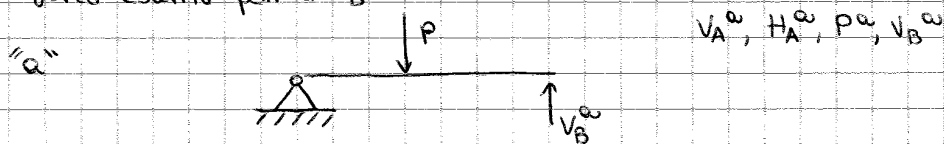
$I =$  momento di inerzia sezione trave

Nel modello trave lo sforzo taglio è nullo

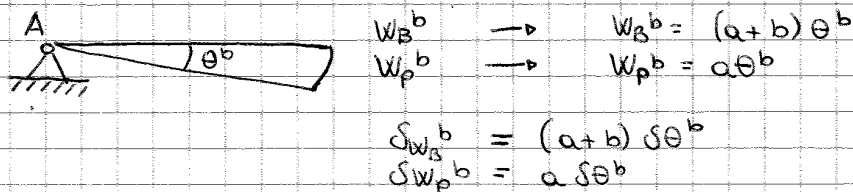
### ① REAZIONE VINCOLARE IN UNA TRAVE ISOSTATICA



Provo a calcolare una reazione vincolare con PLV. Toglio il vincolo in B e metto una forza esterna pari a  $V_B$



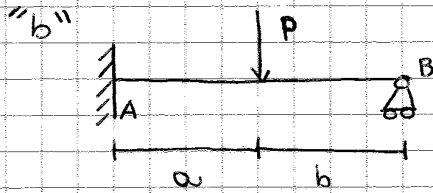
"b" (considero nel sistema b gli spostamenti virtuali)



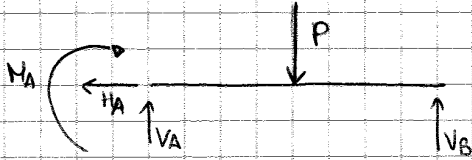
$\delta L_i^{ab} = 0 \rightarrow$  gli spostamenti considerati non dipendono da una deformazione della trave

$\delta L_e^{ab} = 0 \rightarrow$  per PLV

(3) REAZIONE VINCOLARE IN TRAVE IPERSTATICA



1 grado di iperstaticità

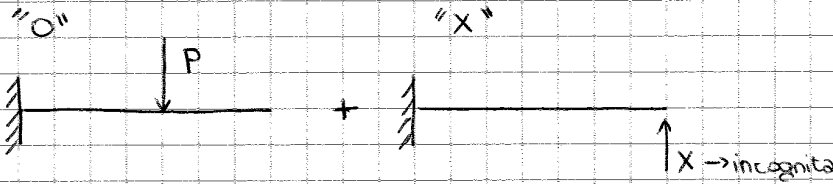


$$3 \begin{cases} H_A = 0 \rightarrow \text{non dipende dalla def. del sistema} \\ V_A + V_B = P \\ V_A(a+b) + M_A - Pb = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{dipendono dalla def.} \\ \text{(congruenza) del sistema} \end{array} \right\}$$

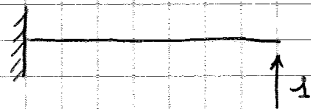
Reazione vincolare iperstatica  $V_B$

Sistema reale  $\rightarrow$  sistema "b"

Vedo "b" come sovrapp. degli effetti di "o" e "x"



$$\text{"x"} = x \cdot \text{"u"}$$



$$\text{"b"} = \text{"o"} + x \cdot \text{"u"}$$

$$\text{"a"} = \text{"u"} \quad \text{"a"} \text{ deve coincidere con "u"}$$

$f \rightarrow$  grandezza generica che può essere uno spostamento, una reaz. vincolare, una sollecitazione

$$f(b) = f(o) + x f(a)$$

$$M_b = M^o + x M^a$$

Sistema "o" ( $0 < z < a$ )

$$A \rightarrow \begin{cases} H_A^o = 0 \\ V_A^o = P \\ M_A^o = -P \cdot a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N^o = 0 \\ T^o = V_A^o \\ M^o = V_A^o z + M_A^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^o = 0 \\ T^o = P \\ M^o = P(z-a) \end{cases}$$

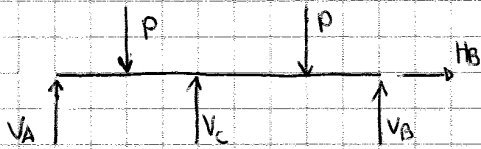
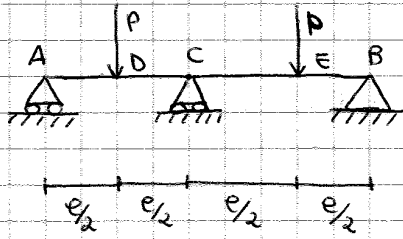
$a < z < (a+b)$

$$\begin{cases} N^o = 0 \\ T^o = 0 \\ M^o = 0 \end{cases}$$

Esercitazione (7)

①

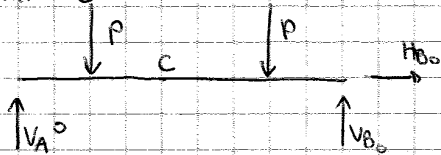
$$x = \frac{11}{8} P$$



$V_C?$

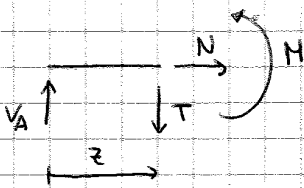
"b" = "0" + x "a"

Sistema "0"



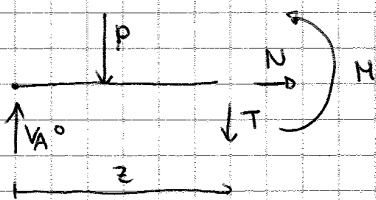
$$\begin{aligned} \rightarrow) \quad H_B^0 &= 0 \\ \uparrow) \quad V_A^0 + V_B^0 &= 2P \Rightarrow V_B^0 = P \\ \text{B)} \quad V_A^0 \cdot 2e - P \frac{3e}{2} - P \frac{e}{2} &= 0 \\ \Rightarrow 2V_A^0 &= 2P \Rightarrow V_A^0 = P \end{aligned}$$

Tratto AD  $0 < z < e/2$



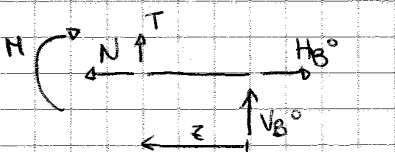
$$\begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = V_A^0 = P \\ M^0 = V_A^0 z = Pz \end{cases}$$

Tratto DC  $e/2 < z < e$



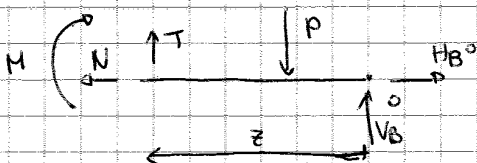
$$\begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = V_A^0 - P = P - P = 0 \\ M^0 = V_A^0 z - P(z - \frac{e}{2}) = Pz - Pz + \frac{Pe}{2} \end{cases}$$

Tratto BE  $0 < z < e/2$



$$\begin{cases} N^0 = H_B^0 = 0 \\ T^0 = -V_B^0 = -P \\ M^0 = V_B^0 \cdot z = Pz \end{cases}$$

Tratto EC  $e/2 < z < e$



$$\begin{aligned} N^0 = H_B^0 &= 0 \\ T^0 = -V_B^0 + P &= -P + P = 0 \\ M^0 = V_B^0 \cdot z - P(z - \frac{e}{2}) &= \frac{Pe}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2e} (M^a)^2 dz = \int_0^e \left(-\frac{z}{2}\right)^2 dz + \int_0^e \left(-\frac{z}{2}\right)^2 dz =$$

$$= \int_0^e \frac{z^2}{4} dz + \int_0^e \frac{z^2}{4} dz = \frac{1}{4} \frac{e^3}{3} + \frac{1}{4} \frac{e^3}{3} = \frac{e^3}{6}$$

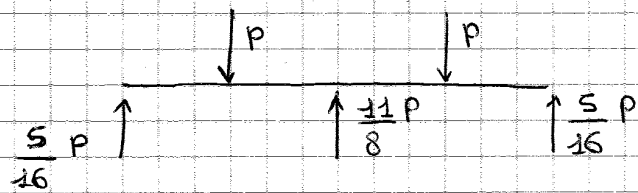
$$X = - \frac{\int_0^{2e} M^a M^b dz}{\int_0^{2e} (M^a)^2 dz} = + \frac{11 p e^3}{48 e^3} \cdot \frac{e}{e^3} = \frac{11}{8} p$$

$$H_B^b = H_B^0 + X H_B^a = 0$$

$$V_B^b = V_B^0 + X V_B^a = P + \frac{11}{8} p \left(-\frac{1}{2}\right) = P - \frac{11}{16} p = \frac{5}{16} p$$

$$V_A^b = V_B^0 + X V_B^a = \frac{5}{16} p$$

$$V_A^b + V_B^b + V_C^b = 2P$$



$$N^b = N^0 + X N^a = 0$$

$$T^b = T^0 + X T^a$$

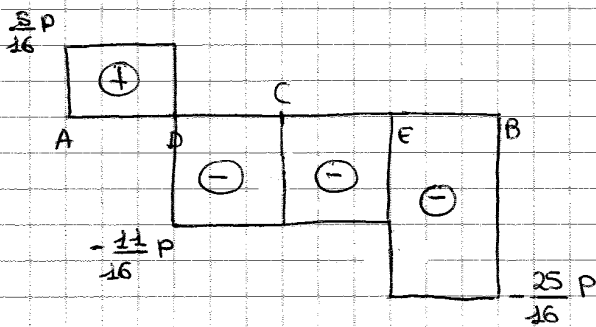
- Tratto AD  $T^b = \frac{5}{16} p$

- Tratto DC  $T^b = -\frac{11}{16} p$

- Tratto BE  $T^b = -\frac{25}{16} p$

- Tratto EC  $T^b = -\frac{11}{16} p$

Diagramma (T)



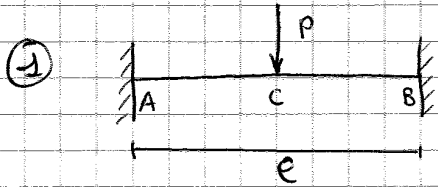
$$M^b = M^0 + X M^a$$

- Tratto AD  $M^b = Pz - \frac{11}{16} Pz = \frac{5}{16} Pz$

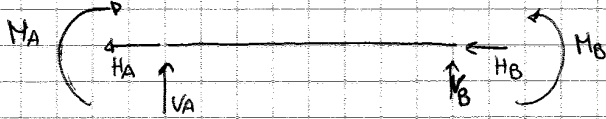
$$M^b(A) = 0$$

$$M^b(D) = \frac{5}{32} p e$$

Esercitazione (8)



Principio dei lavori virtuali per calcolare più di un'iperstatica



$H_A = H_B = 0$  no carichi applicati assialmente

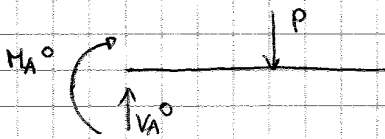
$V_A + V_B = P$

$M_A = M_B + V_B \cdot e - P \cdot \frac{e}{2}$  Ragionando sulla simmetria  
 $V_A = V_B, M_A = M_B \Rightarrow$  diventa 1 volta iperstatica

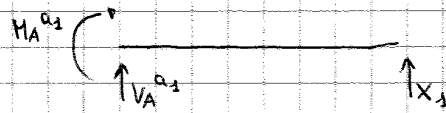
Calcolo  $V_B, M_B$  con PLV

"b" = "0" +  $x_1$ "a<sub>1</sub>" +  $x_2$ "a<sub>2</sub>"

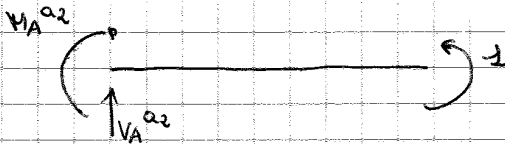
"0"



"a<sub>1</sub>"

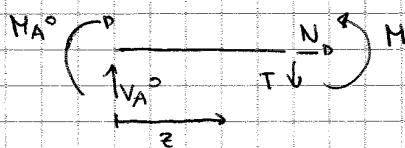


"a<sub>2</sub>"



"0" :  $V_A^0 = P$   
 $M_A^0 = -\frac{Pe}{2}$

TRATTO AC ( $0 < z < \frac{e}{2}$ )



$N^0 = 0$   
 $T^0 = V_A^0 = P$   
 $M^0 = M_A^0 + V_A^0 z = P \left( z - \frac{e}{2} \right)$

$$\int_0^e M^0 M^{a_1} dz = \int_0^{e/2} P \left( z - \frac{e}{2} \right) (e-z) dz + 0 \rightarrow \left( \int_{e/2}^e \dots \right) = 0$$

$$= P \int_0^{e/2} \left( -z^2 + \frac{3}{2} z e - \frac{e^2}{2} \right) dz = P \left[ -\frac{z^3}{3} + \frac{3}{4} z^2 e - \frac{e^2}{2} z \right]_0^{e/2} = -\frac{5}{48} P e^3$$

$$\int_0^e (M^{a_1})^2 dz = \int_0^e (e-z)^2 dz = \frac{e^3}{3}$$

$$\int_0^e M^{a_1} M^{a_2} dz = \int_0^e (e-z) dz = \frac{e^2}{2}$$

$$\int_0^e (M^{a_2})^2 dz = \int_0^e 1 dz = e$$

$$\int_0^e M^0 M^{a_2} dz = \int_0^{e/2} P \left( z - \frac{e}{2} \right) dz = -\frac{P e^2}{8}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{48} P e^3 + x_1 \frac{e^3}{3} + x_2 \frac{e^2}{2} = 0 \\ -\frac{P e^2}{8} + x_1 \frac{e^2}{2} + x_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{P e}{8} - x_1 \frac{e}{2}$$

$$-\frac{5}{48} P e^3 + x_1 \frac{e^3}{3} + \frac{P e^3}{16} - x_1 \frac{e^3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{P}{2} = V_B \\ x_2 &= -\frac{P e}{8} = M_B \end{aligned}}$$

$$V_A^b = V_A^0 + x_1 V_A^{a_1} + x_2 V_A^{a_2} = P + \frac{P}{2} (-1) - \frac{P e}{8} \cdot 0 = \frac{P}{2}$$

$$M_A^b = M_A^0 + x_1 M_A^{a_1} + x_2 M_A^{a_2} = -\frac{P e}{2} + \frac{P e}{2} - \frac{P e}{8} \cdot 1 = -\frac{P e}{8}$$

Tratto AC:  $T^b = P + \frac{P}{2} (-1) - \frac{P e}{8} \cdot 0 = \frac{P}{2}$

$$M^b = P \left( z - \frac{e}{2} \right) + \frac{P}{2} (e-z) - \frac{P e}{8} = \frac{P}{2} \left( z - \frac{e}{4} \right)$$

Tratto CB:  $T^b = 0 + \frac{P}{2} (-1) - \frac{P e}{8} \cdot 0 = -\frac{P}{2}$

$$M^b = 0 + \frac{P}{2} (e-z) - \frac{P e}{8} = \frac{P}{2} \left( \frac{3e}{4} - z \right)$$

$$M^b \left( z = \frac{e}{2} \right) = \frac{P e}{8}$$

$$L_e^{ab} = 1 \cdot w_B$$

$$L_i^{ab} = \int_0^e \frac{M^a M^b}{EI} dz = \frac{q}{EI} \int_0^e \left( -\frac{z^2}{2} + ez - \frac{e^2}{2} \right) (z - e) dz = \frac{qe^4}{EI}$$

Eguagliando  $L_e^{ab}$  e  $L_i^{ab}$  ottengo:  $w_B = \frac{qe^4}{EI}$

Diagramma (T)

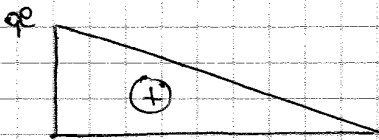
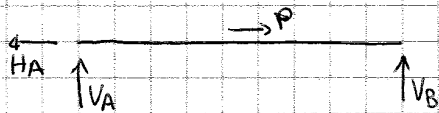
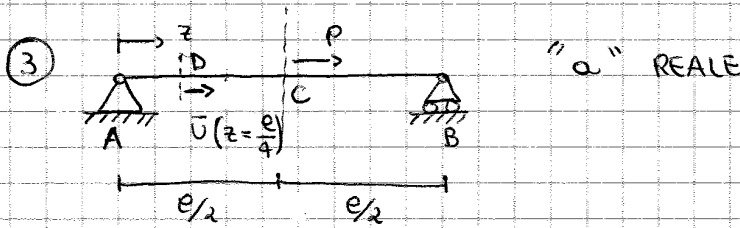
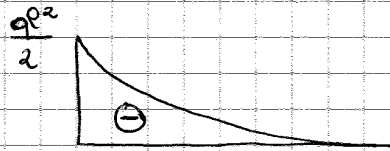


Diagramma (M)

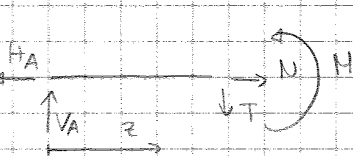


$$H_A^a = P$$

$$V_A^a + V_B^a = 0 \Rightarrow V_A^a = 0$$

$$-V_B^a e = 0 \Rightarrow V_B^a = 0$$

Traito AC  $0 < z < \frac{e}{2}$

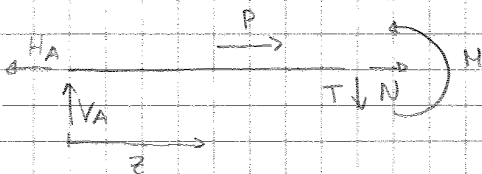


$$N^a = H_A = P$$

$$T^a = V_A = 0$$

$$M^a = V_A \cdot z = 0$$

Traito CB  $\frac{e}{2} < z < e$

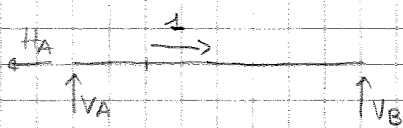


$$N^a = H_A - P = 0$$

$$T^a = V_A = 0$$

$$M^a = V_A \cdot z = 0$$

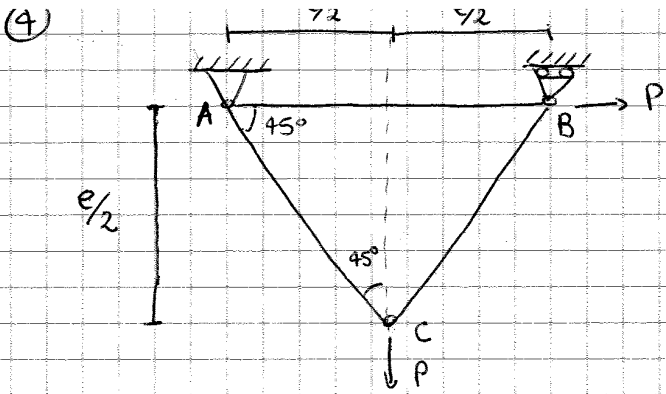
"b"



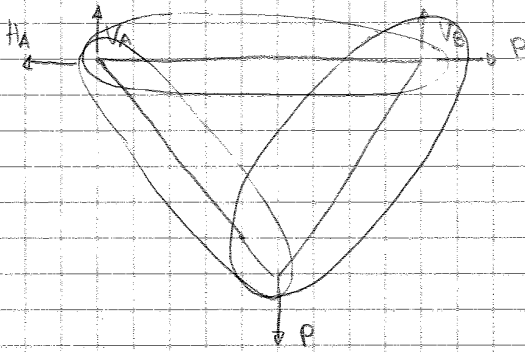
$$H_A^b = P$$

$$V_A^b + V_B^b = 0 \Rightarrow V_A^b = 0$$

$$V_B^b e = 0 \Rightarrow V_B^b = 0$$



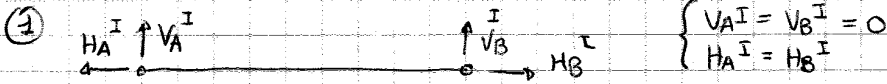
Diagrammi (N)



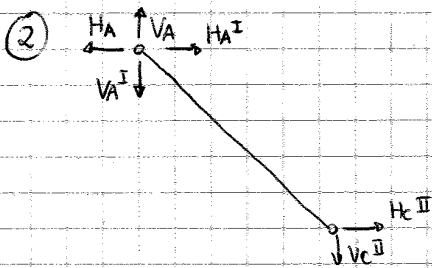
$$H_A = P$$

$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

Modo (I)



$$\begin{cases} V_A^I = V_B^I = 0 \\ H_A^I = H_B^I \end{cases}$$



$$\overset{C}{\curvearrowright} : H_A^I \frac{e}{2} - \frac{V_A^I e}{2} - H_A \frac{e}{2} + V_A \frac{e}{2} = 0$$

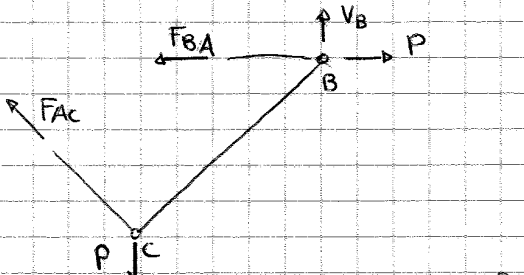
$$\Rightarrow H_A^I = \frac{P}{2} = F_{AB}$$

$$\overset{A}{\curvearrowright} : H_C^II \frac{e}{2} - \frac{V_C^II e}{2} = 0 \Rightarrow H_C^II = V_C^II$$

$$\rightarrow H_C^II = H_A - H_A^I = \frac{P}{2}$$

$$F_{AC} = \sqrt{(H_C^II)^2 + (V_C^II)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

Modo (2)

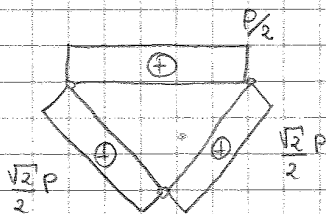


$$\overset{B}{\curvearrowright} : F_{AC} \frac{\sqrt{2} e}{2} - \frac{P e}{2} = 0 \Rightarrow F_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$\overset{C}{\curvearrowright} : \frac{P e}{2} - \frac{V_B e}{2} - \frac{F_{BA} e}{2} = 0 \Rightarrow F_{BA} = \frac{P}{2}$$

$$F_{AC} = F_{CB}$$

(N)





Punto più sollecitato: A

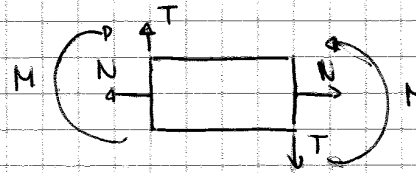
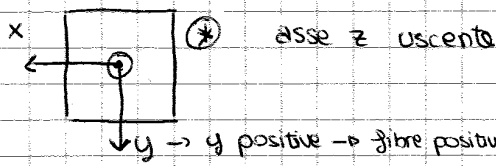
$$T = 10.000 \text{ N}$$

$$M = -4,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

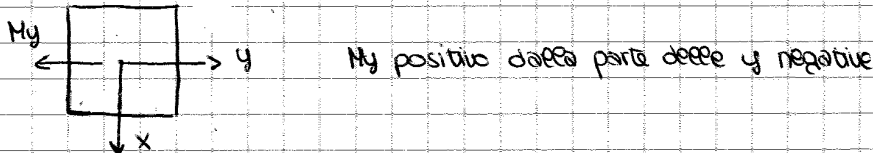
$$M = M_x$$

$$M_y = 0$$

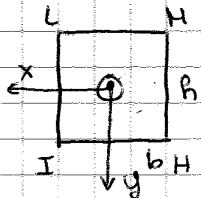
Punto più sollecitato della sezione:



Scego gli assi in modo da avere  $M = M_x$  e  $M_y = 0$  ovvero \*



Nel nostro caso:



$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y^*}{I_y} x$$

dove  $M_y^* = -M_y$

$\sigma_{zz}$  di a x e y

$$\sigma_{zz} \propto \frac{1}{I_x} \text{ e } \frac{1}{I_y}$$

per trovare il punto più sollecitato cerco i punti in cui  $I_x$  e  $I_y$  sono minimi e x e y massimi

Prendo x e y massimi  $\rightarrow$  vertici

$$I_x = I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = I_y = \frac{b^3h}{12}$$

nel caso di sez. rettang. il baricentro è un nf. principale di inerzia

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$A = 1800 \text{ mm}^2$$

$$h = 60 \text{ mm}$$

$$I_x = 540000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 135000 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{M_x y_i}{I_x}$$

N e  $M_y^*$  nulli

	$x_i$ [mm]	$y_i$ [mm]	$\sigma_{zz} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$
H	-15	30	-266,667
I	-15	30	-266,667
L	15	-30	266,667
M	-15	-30	266,667

Calcolo x e y rispetto ad nf. principale

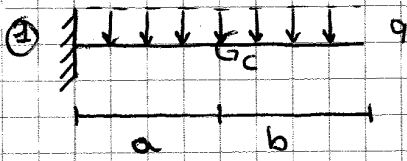
$$\sigma_{zz} = 266,667 \text{ N/mm}^2$$

LEGA ALLUMINIO 7075-T6

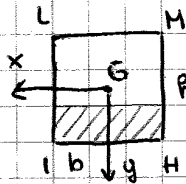
$$\sigma_R = 538 \text{ N/mm}^2$$

Esercitazione (10)

VON MISES  $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{yz}^2} < \frac{\sigma_R}{S}$   
 (S) → coeff. di sicurezza



$M = -4,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$   
 $N = 0$   
 $T = 10.000 \text{ N}$



$b = 30 \text{ mm}$   
 $h = 60 \text{ mm}$

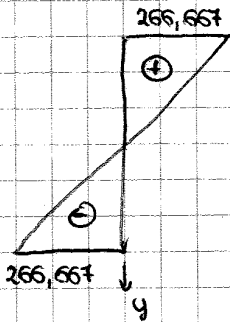
$I_x = 540.000 \text{ mm}^4$   
 $I_y = 135.000 \text{ mm}^4$

AR 7075-T6  $\sigma_R = 538 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{zz} = \frac{M \cdot y}{I_x}$

	$\sigma_{zz} \text{ [N/mm}^2\text{]}$
H	-266,667
I	-266,667
L	266,667
M	266,667

$\sigma_{zzmax} = 266,667 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



$\tau_{yz} = \frac{T_y S_x(y)}{I_x b(y)}$

$S_x(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right) = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{1}{8} b (h^2 - 4y^2)$

$b(y) = b$        $I_x = \frac{b h^3}{12}$

$\tau_{yz} = \frac{3}{2} T_y \frac{h^2 - 4y^2}{b h^3}$        $y = 0$

II)  $0 < y < 5a$

$b^{\text{II}}(y) = 2a$

$S_x^{\text{II}} = \underbrace{10a \cdot a \left(5a + \frac{a}{2}\right)}_{S_x^{\text{I}} \text{ non in funzione di } y} + 2a(5a - y) \cdot \left(\frac{5a - y}{2} + y\right) = 80a^3 - ay^2$

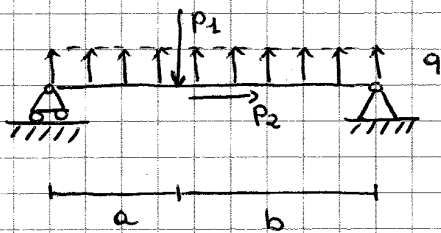
$\tau_{yz}^{\text{II}} = \frac{T_y (80a^3 - ay^2)}{\frac{2320}{3} a^4 \cdot 2a} = \frac{3}{4640} \frac{T_y}{a^4} (80a^3 - y^2)$



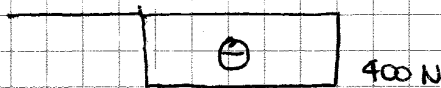
$\tau_{yz}^{\text{II}}_{\text{max}} = \tau_{yz}^{\text{II}}(y=0) = 35,82 \text{ N/mm}^2$   
 ↓  
 sostituisco a e T

$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{(453,216)^2 + 3(35,82)^2} = 457,767 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

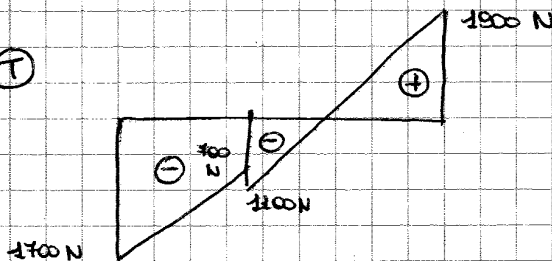
③



Ⓝ



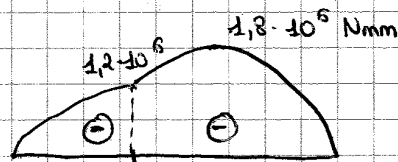
Ⓣ



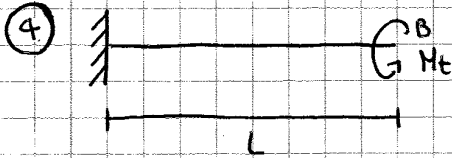
$N = -400 \text{ N}$   
 $M = -1,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$   
 $T = 0$

$\sigma_R = 449 \text{ N/mm}^2$

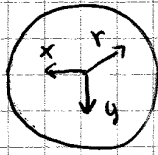
Ⓜ



TORSIONE - SEZIONI COMPATTE



$T_{max} ?$   
 $\theta_B ?$



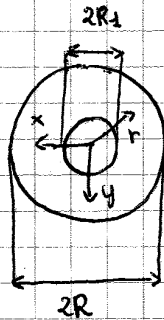
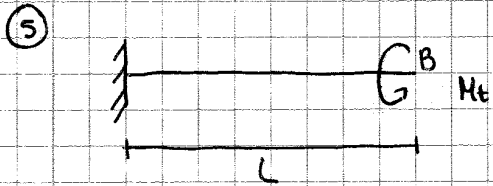
$R = 10 \text{ mm}$   
 $L = 1 \text{ m}$   
 $M_t = 10 \text{ Nm}$   
 $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$

$I_t = I_p = \frac{\pi R^4}{2} = 1,571 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$\tau = \frac{M_t r}{I_t} = \frac{10.000}{1,571 \cdot 10^4} r$

$T_{max} = \tau(r=R) = 6,366 \text{ N/mm}^2$

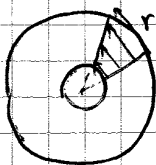
$\theta_B = \frac{M_t L}{G I_t} = \frac{10.000}{8 \cdot 10^4 \cdot 1,571 \cdot 10^4} \cdot 1000 = 0,796 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$



$R = 10 \text{ mm}$   
 $L = 1 \text{ m}$   
 $M_t = 10 \text{ Nm}$   
 $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$   
 $R_2 = \frac{R}{2}$

$I_t = I_p = \frac{\pi(R^4 - (R/2)^4)}{2} = 1,472 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$\tau = \frac{M_t r}{I_t} = \frac{10.000}{1,472 \cdot 10^4} r$        $T_{max} = \tau(r=R) = 6,79 \text{ N/mm}^2$



$\theta_B = \frac{M_t L}{G I_t} = 0,849 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$

Sez. sottile:  $I_t = \frac{4R^2s}{e} = \frac{4 \cdot (\pi \cdot (9,5)^2)^2 \cdot 1}{2 \cdot 9,5 \cdot 3,14} = 5,38 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$

$e = (R - 0,5s) = 9,5$

$e$  è una circonferenza

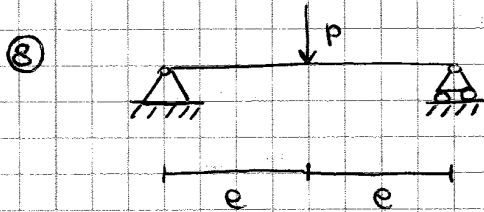
$\tau = \frac{M_t}{2R^2s} = \frac{10.000}{2 \cdot (\pi \cdot 9,5)^2 \cdot 1} = 17,64 \text{ N/mm}^2$

$\tau_{\max} = \tau(s_{\min}) = 17,64 \text{ N/mm}^2$

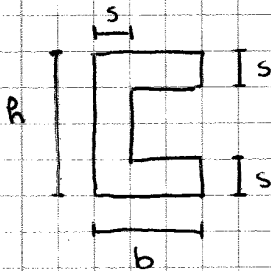
$\theta_B = \frac{M_t L}{G I_t} = \frac{10.000}{8 \cdot 10^4 \cdot 5,38 \cdot 10^3} \cdot 1000 = 0,0232 \text{ rad}$

Errore su  $I_t$ :  $\frac{(I_{t1} - I_{t2})}{I_{t\max}} \cdot 100 = \frac{(5400 - 5380)}{5400} \cdot 100 = 0,37 \%$

Errore su  $\theta_B$ :  $\frac{(\theta_{B1} - \theta_{B2})}{\theta_{B\max}} \cdot 100 = \frac{(0,0232 - 0,0231)}{0,0232} \cdot 100 = 0,43 \%$

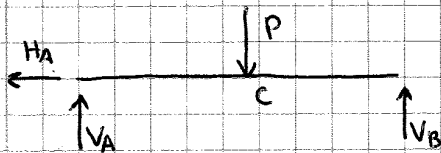


$P = 1000 \text{ N}$   
 $e = 3000 \text{ mm}$



$R = 40 \text{ mm}$   
 $b = 30 \text{ mm}$   
 $s = 5 \text{ mm}$

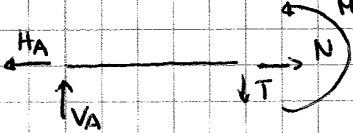
$\sigma_{zz}$ ?  $\tau_{yz}$ ?



$H_A = 0$   
 $V_A + V_B = P \rightarrow V_A = \frac{P}{2}$   
 $P \cdot e - V_B \cdot 2e = 0 \rightarrow V_B = \frac{P}{2}$

$N = 0$

Tratto AC  $0 < z < e$



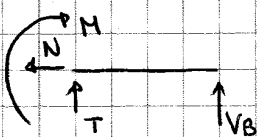
$T = V_A = \frac{P}{2}$

$M = V_A z$

$M(0) = 0$

$M(e) = V_A e = \frac{Pe}{2}$

Tratto BC  $0 < z < e$



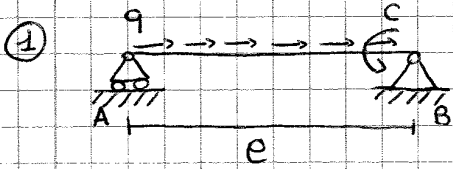
$T = V_B = \frac{P}{2}$

$M = V_B z$

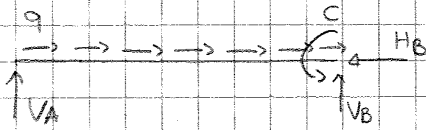
$M(0) = 0$

$M(e) = V_B e = \frac{Pe}{2}$

ESERCIZIO (11)

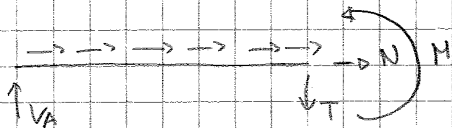


$e = 10^3 \text{ mm}$   
 $C = 10^6 \text{ Nmm}$   
 $q = 10 \text{ N/mm}$



$F = qe$   
 $H_B = qe = 10000 \text{ N}$   
 $V_A + V_B = 0 \rightarrow V_B = -\frac{C}{e} = -10000 \text{ N}$   
 $V_A = C \rightarrow V_A = \frac{C}{e} = 10000 \text{ N}$

$0 < z < e$



$N = -qz = -10000 \text{ N}$   
 $T = V_A = \frac{C}{e} = 10000 \text{ N}$   
 $M = V_A z = \frac{Cz}{e}$

$\begin{cases} N(z=0) = 0 \\ N(z=e) = -qe = -10000 \text{ N} \end{cases}$

$\begin{cases} M(z=0) = 0 \\ M(z=e) = C = 10^6 \text{ Nmm} \end{cases}$

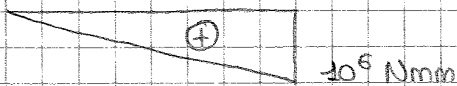
Diagramma (N)



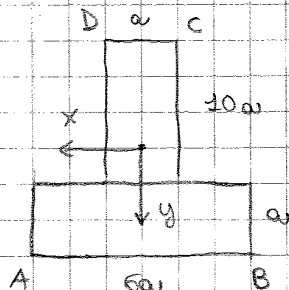
Diagramma (T)



Diagramma (M)



$N = -10000 \text{ N}$   
 $T = 10000 \text{ N}$   
 $M = M_x = 10^6 \text{ Nmm}$



$a = 5 \text{ mm}$   
 $A = 2024 \text{ TB}$  con  $\sigma_R = 449 \text{ N/mm}^2$   
 $X_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{6a^2 \cdot 3a + 10a^2 \cdot 3a}{16a^2} = 3a = 15 \text{ mm}$   
 $Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{6a^2 (0,5a) + 10a^2 \cdot 6a}{16a^2} = \frac{63}{16} a = 19,68 \text{ mm}$

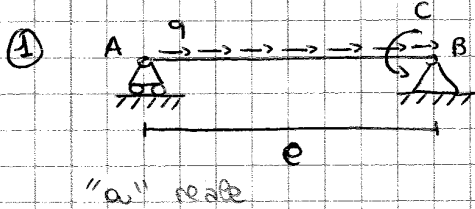
$I_x = \sum \frac{bR^3}{12} + d y^2 A = \frac{6a \cdot a^3}{12} + 6a^2 \left( \frac{1}{2}a - \frac{63}{16}a \right)^2 + \frac{a \cdot (10a)^3}{12} + 10a^2 \left( 6a - \frac{63}{16}a \right)^2 = 1,2329 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

Perché il taglio e piccolo  $\sigma_{id}$  sarà max dove è max  $\sigma_{zz}$ , ma non è detto sia sempre così.

$$\sigma_{id\max} = \sigma_{zz\max} = 311,47 \text{ N/mm}^2 < \sigma_R$$

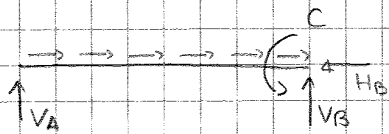
$$\text{Perché } \sigma_{id}(y = -35,32 \text{ mm}) = \sqrt{\sigma_{zz\max}^2 + 3\tau_{yz}} = \sigma_{zz\max}$$

Esercitazione 12



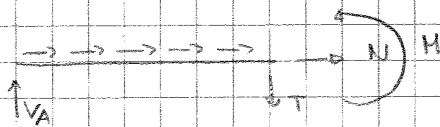
$\varphi_A?$

$C = 10^5 \text{ Nmm}$   
 $e = 1000 \text{ mm}$   
 $q = 10 \text{ N/mm}$   
 $EI = 10^9 \text{ Nmm}^2$



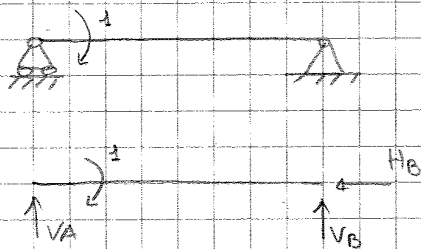
$H_B = qe$   
 $V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = + \frac{C}{e}$   
 $A^2) - C - V_B e = 0 \Rightarrow V_B = - \frac{C}{e}$

$0 < z < e$



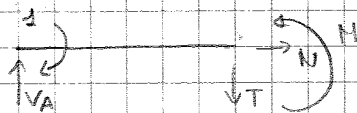
$T^a = V_A = + \frac{C}{e}$   
 $N^a = - qz$   
 $M^a = V_A z = + \frac{C}{e} z$

"b" virtuale



$H_B = 0$   
 $V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = - \frac{1}{e}$   
 $A^2) + 1 - V_B e = 0 \Rightarrow V_B = + \frac{1}{e}$

$0 < z < e$



$N^b = 0$   
 $T^b = V_A = - \frac{1}{e}$   
 $M^b = V_A z + 1 = - \frac{1}{e} z + 1$

$$L_i^{ab} = \int_0^e \frac{N^a N^b}{EA} dz + \int_0^e \frac{M^a M^b}{EI} dz$$

$$L_e^{ab} = 1^b \cdot \varphi_A^a$$

$$L_i^{ab} = \frac{1}{EI} \int_0^e \frac{C}{e} z \left( - \frac{1}{e} z + 1 \right) dz = \left( - \frac{C}{e^2} \frac{e^3}{3} + \frac{C}{e^2} \frac{e^2}{2} \right) \frac{1}{EI} = \frac{Ce}{6EI} = \frac{10^9 \text{ Nmm}^2}{6 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \frac{1}{6} \text{ rad} = 0,167 \text{ rad}$$



EQUAZIONI DEI CONTINUI DEFORMABILI

- Equazioni indefinite di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

- Equazioni di compatibilità o congruenza

$$R_x: \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$R_y: \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$R_z: \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$R_{xy}: \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

$$R_{yz}: \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$R_{xz}: \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z}$$

- Relazioni geometriche

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Relazione costitutiva

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2G & 1 & 1 \\ 1 & 1+2G & 1 \\ 1 & 1 & 1+2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}$$

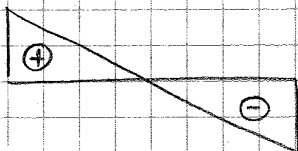


$$N^b = -qz + \left(-\frac{qe}{2}\right)(-1) = \begin{cases} z=0 \Rightarrow +\frac{qe}{2} \\ z=e \Rightarrow -\frac{qe}{2} \end{cases}$$

$$T^b = T^0 + XT^{\omega} = T^0 = \frac{c}{e}$$

$$M^b = M^0 + XM^{\omega} = M^0 \begin{cases} z=0 \Rightarrow 0 \\ z=e \Rightarrow c \end{cases}$$

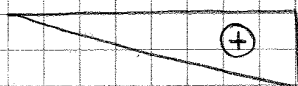
(N)



(T)



(M)



$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = -2 \frac{b^2 R^2}{\frac{24}{12}} \cdot \frac{1}{\frac{bR^3}{12} - \frac{b^3R}{12}} = -\frac{b^2 R^2}{12} \cdot \frac{12}{bR(R^2 - b^2)}$$

$$= -\frac{bR}{R^2 - b^2}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\arctan\left(\frac{-bR}{R^2 - b^2}\right)}{2}$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bR^3 + b^3R}{12}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bR^3 - b^3R}{12}\right)^2 + 4\left(\frac{b^2R^2}{24}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bR^3 + b^3R}{12}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2R^5 - b^5R^2}{144} + \frac{4b^4R^4}{576 \cdot 144}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bR^3 + b^3R}{12}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2R^5 - b^5R^2 + b^4R^4}{144}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bR^3 + b^3R}{12}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2R^2(R^4 - b^4 + b^2R^2)}{144}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{bR(R^2 + b^2)}{12}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} bR \sqrt{R^4 - b^4 + b^2R^2} =$$

$$= \frac{1}{24} bR \left[ (R^2 + b^2) + \sqrt{R^4 - b^4 + b^2R^2} \right]$$

$$I_{\eta} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1}{24} bR \left[ (R^2 + b^2) - \sqrt{R^4 - b^4 + b^2R^2} \right]$$

$$I_x = I_x - dy^2 A = \frac{bR^3}{12} - \left(\frac{R}{3}\right)^2 \frac{bR}{2}$$

$$I_y = I_y - dx^2 A = \frac{Rb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bR}{2}$$

→ per calcolarsi rispetto al baricentro

$$I_{xy} = \dots$$

$$x^1) \quad ① \quad \frac{\sigma_{yz} dx dz dy}{2}$$

$$② \quad \frac{\sigma'_{yz} dx dz dy}{2}$$

$$③ \quad 0$$

$$④ \quad 0$$

$$⑤ \quad -\frac{\sigma_{zy} dx dy dz}{2}$$

$$⑥ \quad -\frac{\sigma'_{zy} dx dy dz}{2}$$

$$= 0 \\ (M_{x'})$$

$$y^1) \quad ① \quad 0$$

$$② \quad 0$$

$$③ \quad -\frac{\sigma_{xz} dy dz dx}{2}$$

$$④ \quad -\frac{\sigma'_{xz} dy dz dx}{2} = 0 \\ (M_{y'})$$

$$⑤ \quad \frac{\sigma_{zx} dx dy dz}{2}$$

$$⑥ \quad \frac{\sigma'_{zx} dx dy dz}{2}$$

$$z^1) \quad ① \quad -\frac{\sigma_{yx} dx dz dy}{2}$$

$$② \quad -\frac{\sigma'_{yx} dx dz dy}{2}$$

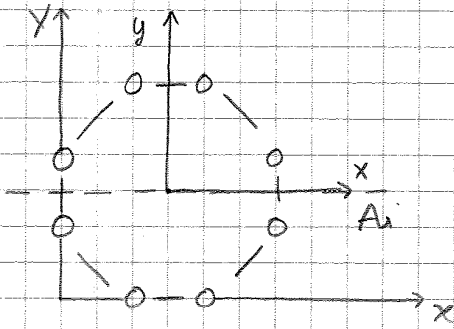
$$③ \quad \frac{\sigma_{xy} dy dz dx}{2}$$

$$④ \quad \frac{\sigma'_{xy} dy dz dx}{2}$$

$$⑤ \quad 0$$

$$⑥ \quad 0$$

3)



Calcolare  $G, \bar{\theta}, I_x, I_y$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$I_x = \sum_{i=1}^n A_i (y_i - y_G)^2$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n A_i (x_i - x_G)^2$$

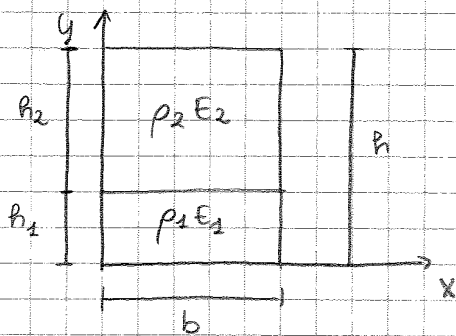
$I_{xy} = 0$  perché scoglio il riferimento principale  $\rightarrow$  la figura è simmetrica  
 assi di simmetria = assi principali di inerzia

$\bar{\theta} = 0$  " " " " "

$I_x = I_y$  " " " " "

$I_y = I_x$  " " " " "

4)



Calcolare  $x_G, y_G, I_x, I_y$

$$x_G = \frac{\int_{A_1} \rho_1 x dx dy + \int_{A_2} \rho_2 x dx dy}{\int_{A_1} dx dy + \int_{A_2} dx dy} = \frac{\rho_1 \int_0^b x \left( \int_0^{h_1} dy \right) dx + \rho_2 \int_0^b x \left( \int_{h_1}^{h_1+h_2} dy \right) dx}{\rho_1 b h_1 + \rho_2 b h_2}$$

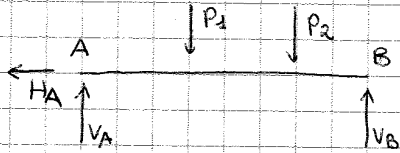
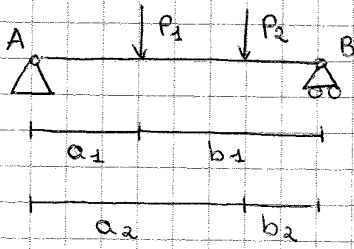
$$= \frac{\rho_1 \int_0^b x h_1 dx + \rho_2 \int_0^b (h_1 + h_2) x dx}{\rho_1 b h_1 + \rho_2 b h_2}$$

$$= \frac{\rho_1 h_1 \frac{b^2}{2} + \rho_2 (h_1 + h_2) \frac{b^2}{2}}{\rho_1 h_1 b + \rho_2 (h_1 + h_2) b} = \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{b^4 a^3}{36} + \frac{b^3 a^4}{36} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{b^4 a^3}{36} - \frac{b^3 a^4}{36} \right)^2 + 4 \left( -\frac{b^2 a^2}{72} \right)^2} = \\
 &= \frac{b^4 a^3 + b^3 a^4}{72} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^8 a^6 - b^6 a^8}{1296} + \frac{b^4 a^4}{1296}} = \\
 &= \frac{b^4 a^3 + b^3 a^4}{72} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^8 a^6 - b^6 a^8 + b^4 a^4}{1296}} = \\
 &= \frac{b^4 a^3 + b^3 a^4}{72} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 a^2 (a^4 - b^4 + b^2 a^2)}{1296}} \\
 &= \frac{b^4 (a^2 + b^2)}{72} \pm \frac{1}{72} b^2 a \sqrt{a^4 - b^4 + b^2 a^2} \\
 &= \frac{b^4}{72} \left[ (a^2 + b^2) \pm \sqrt{a^4 - b^4 + b^2 a^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\
 &= \frac{b^4}{72} \left[ (a^2 + b^2) \mp \sqrt{a^4 - b^4 + b^2 a^2} \right]
 \end{aligned}$$

Non utilizzando la sovrapposizione degli effetti



$$\vec{x}) \quad H_A = 0$$

$$y \uparrow) \quad -P_1 - P_2 + V_A + V_B = 0$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2$$

$$\vec{A} \curvearrowright) \quad P_1 a_1 + P_2 a_2 - V_B (a_1 + b_1) = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{a_1 + b_1}$$

$$\rightarrow \quad V_A = P_1 + P_2 - V_B \quad \Rightarrow \quad V_A = P_1 + P_2 - \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{a_1 + b_1}$$

$$= \frac{P_1 a_1 + P_1 b_1 + P_2 b_1 + P_2 a_2 - P_1 a_1 - P_2 a_2}{a_1 + b_1} =$$

$$= \frac{\cancel{P_1 a_1} + P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cancel{P_2 a_2} - \cancel{P_1 a_1} - \cancel{P_2 a_2}}{a_1 + b_1}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2}{a_1 + b_1}$$

$$\frac{\partial R_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial^3 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial y^2 \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} - \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial y \partial z^2}} - \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} - 2 \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xz}}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

②  $\frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial R_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial^3 \epsilon_{zz}}{\partial x^2 \partial y} =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} - \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial y \partial z^2}} - 2 \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} =$$

$$\frac{\partial R_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial y^2 \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial y^2 \partial z^2}} - \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial y^2 \partial z^2}} - \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial y \partial z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial R_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^3 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} - 2 \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y \partial z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

③  $\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial R_{zz}}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial R_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \left( \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial^3 \epsilon_{yy}}{\partial x^2 \partial z} =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y^2 \partial z}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} - \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y^2 \partial z}} - \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y^2}} - 2 \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} =$$

$$\frac{\partial R_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^3 \epsilon_{xx}}{\partial y^2 \partial z} =$$

$$= \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y^2 \partial z}} + \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y^2}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y^2 \partial z}} + \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} - \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x^2 \partial y \partial z}} - \frac{\cancel{\partial^4 \omega}}{\cancel{\partial x^2 \partial y^2}} - 2 \frac{\cancel{\partial^4 \nu}}{\cancel{\partial x \partial y^2 \partial z}} = 0$$

• Esercizio

PLAIN STRAIN

MATERIALE	E	$\lambda$	G	$\nu$	$C_{11}^*$	$C_{11}^{**}$	diff.
Alluminio	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$5,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,33	$403 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	32%
Oro	$8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$1,48 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$2,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,42	$2,04 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	61%
Argento	$7,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$8,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$2,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,37	$2,37 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$7,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	43%
Rame	$12,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$9,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$4,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,34	$1,88 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$12,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	34%
Acciaio	$20,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$1,5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$8,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,33	$3,3 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$20,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	37%
Vetro	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,24	$8,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	19%
Nichel	$21 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$1,30 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,31	$3 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$21 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	28%
Tungsteno	$34 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$9,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$14 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,2	$3,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$34 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	10%
Titanio	$10 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$7,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$3,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,33	$1,5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$10 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	34%
Magnesio	$4,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$3,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$1,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	0,35	$6,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$4,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	37%

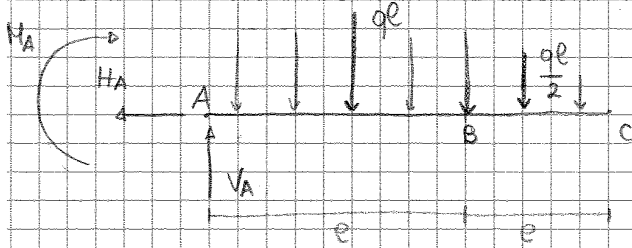
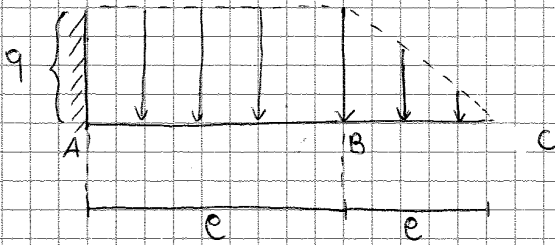
MATERIALE	$\sigma_R \left( \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$	$L_R \text{ (cm)}$
Alluminio	55-91	2,70	$20,78 - 34,33 \cdot 10^4$
Oro	450	19,3	$23,79 \cdot 10^4$
Argento		10,49	
Rame	216	8,96	$24,60 \cdot 10^4$
Acciaio (C40)	500	7,5-8	$63,78 \cdot 10^4$
Vetro	40	2,4-2,8	$14,58 \cdot 10^4$
Nichel	320-400	8,8	$35,95 - 46,38 \cdot 10^4$
Tungsteno	4000	19,3	$23,48 \cdot 10^4$
Titanio	365	4,54	$82,04 \cdot 10^4$
Magnesio	185-232	1,3	$145,21 - 182,10 \cdot 10^4$

$$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{(\text{cm}/100)^2} = \frac{\text{g} \cdot 1000}{(\text{cm}/100)^2} = 10^5 \text{ cm}$$

$$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \text{m/s}^2 = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \text{m/s}^2 = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$



(3)



$$z_{BC} = \frac{1}{3}e$$

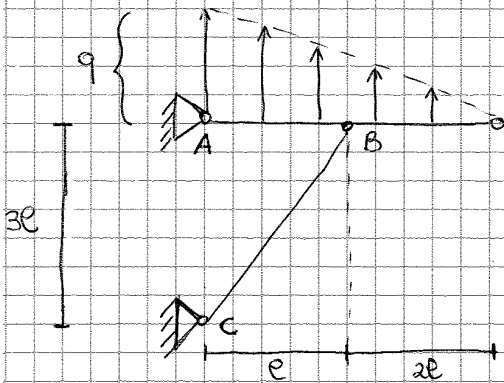
$$\rightarrow) H_A = 0$$

$$1) V_A - qe - \frac{qe}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3}{2}qe$$

$$A^2) M_A + qe\left(\frac{e}{2}\right) + \frac{qe}{2}\left(\frac{2}{3}e\right) = 0$$

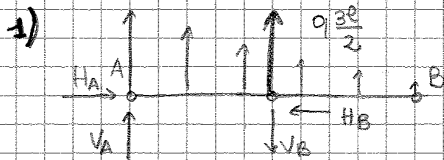
$$M_A = -\frac{qe^2}{2} - 2\frac{qe^2}{3} = -\frac{7}{6}qe^2$$

(4)



$$F = q \cdot \frac{3e}{2}$$

$$z_G = \frac{1}{2} \cdot 3e = \frac{3e}{2}$$

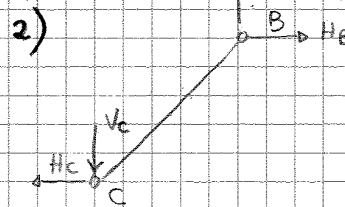


$$\rightarrow) -H_A + H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = \frac{qe}{2}$$

$$1) V_A - V_B + F = 0 \Rightarrow V_A - V_B + 3qe/2 = 0$$

$$A^2) -q \frac{3e}{2} \cdot e + V_B e = 0 \Rightarrow V_B = q \frac{3e}{2}$$

$$\rightarrow V_A - q \frac{3e}{2} + q \frac{3e}{2} = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

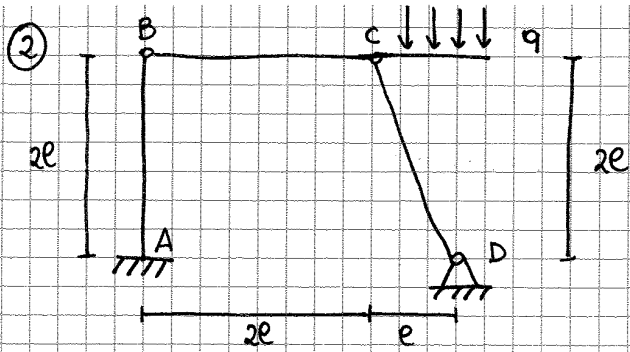


$$\rightarrow) -H_C + H_B = 0 \Rightarrow H_C = H_B = \frac{qe}{2}$$

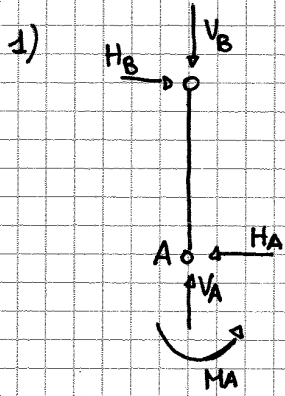
$$1) -V_C + V_B = 0 \Rightarrow V_C = V_B \Rightarrow V_C = q \frac{3e}{2}$$

$$C^2) H_B \cdot 3e - V_C e = 0 \Rightarrow 3H_B = V_C$$

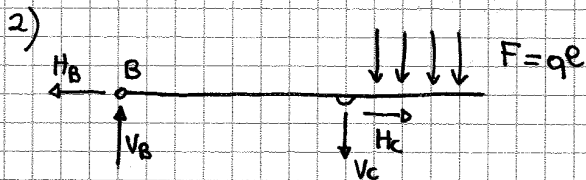
$$H_B = \frac{V_C}{3} = \frac{qe}{2}$$



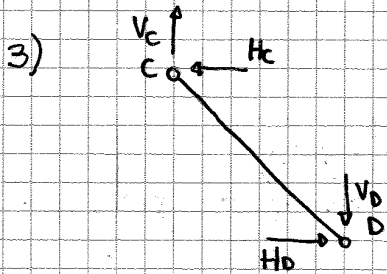
$$h = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$$



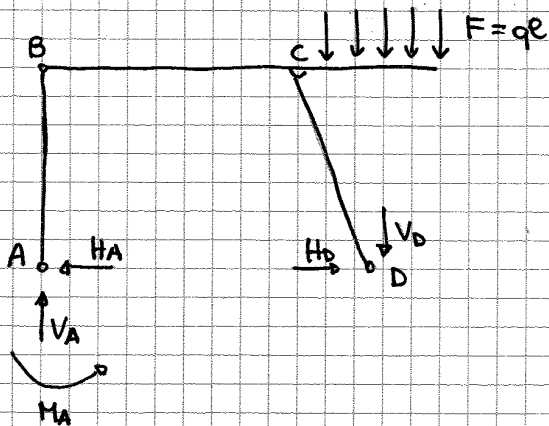
$$\begin{aligned} \uparrow) V_A = V_B &= -\frac{qe}{4} \\ \rightarrow) H_A = H_B &= -\frac{5}{8}qe \\ \curvearrowright) M_A = H_B \cdot 2e &= -\frac{5}{4}qe^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow) H_B = H_C &= -\frac{5}{8}qe \\ \uparrow) V_B = V_C + qe &\Rightarrow V_C = V_B - qe = \frac{qe}{4} - qe = -\frac{3}{4}qe \\ \curvearrowright) V_B \cdot e + qe \cdot \frac{e}{2} &= 0 \\ V_B &= -\frac{qe}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow) H_C = H_D &= -\frac{5}{8}qe \\ \uparrow) V_D = V_C &= -\frac{5}{4}qe \\ \curvearrowright) -H_D \cdot 2e + V_D \cdot e &= 0 \\ \Rightarrow H_D = \frac{V_D}{2} &= -\frac{5}{8}qe \end{aligned}$$



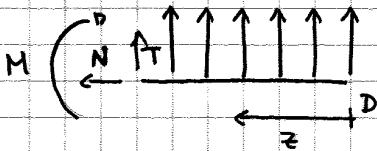
$$H_A = H_D = -\frac{5}{8}qe$$

$$V_A = -\frac{qe}{4}$$

$$V_D = -\frac{5}{4}qe$$

$$M_A = -\frac{5}{4}qe^2$$

• Tratto DB  $0 < z < 2e$



$$\begin{cases} N=0 \\ T=-qz \\ M=\frac{qz^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(z=0)=0 \\ T(z=2e)=-2qe = -1334 \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(z=0)=0 \\ M(z=2e)=2qe^2 = 2,67 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \end{cases}$$

Diagramma (N)

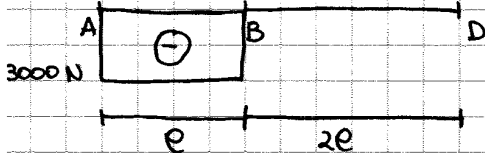


Diagramma (T)

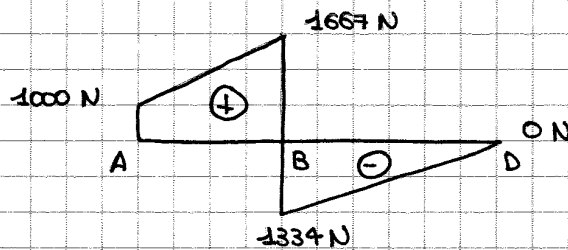
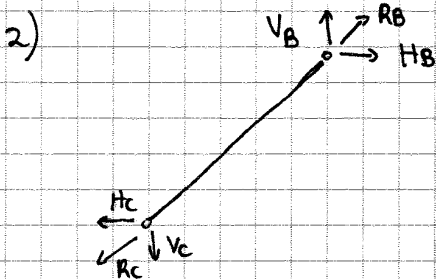
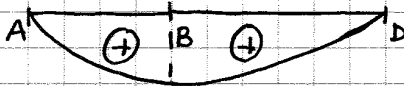


Diagramma (M)



$$\alpha = 45^\circ$$

$$R_B = R_C = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} =$$

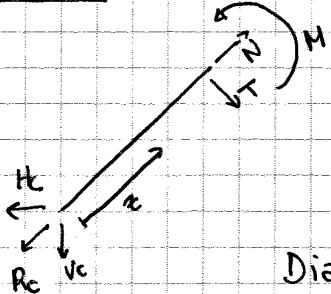
$$V_B = \frac{9}{2} qe$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4}(qe)^2 + \frac{81}{4}(qe)^2} =$$

$$H_B = \frac{9}{2} qe$$

$$= \sqrt{\frac{81(1+1)(qe)^2}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} qe$$

• Tratto CB  $0 < z < e\sqrt{2}$



$$N = R_C = \frac{9\sqrt{2}}{2} qe = 4242,64 \text{ N}$$

$$T = H_C \frac{\sqrt{2}}{2} - V_C \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}qe}{4} - \frac{9\sqrt{2}qe}{4} = 0$$

$$M = H_C \frac{\sqrt{2}}{2} e\sqrt{2} - V_C \frac{\sqrt{2}}{2} e\sqrt{2} = \frac{9qe^2}{4} - \frac{9qe^2}{4} = 0$$

Diagramma (N)



Diagramma (T) ed (M) nulli



Esercizio (teoria di Eulero - Bernoulli)

$$\tau_{xz} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow v^0_z + \Phi_x(z) = 0$$

$$\Phi_x(z) = -\frac{\partial v^0}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow v^0_z + \Phi_y(z) = 0$$

$$\Phi_y(z) = -\frac{\partial v^0}{\partial z}$$

Diagrammi esercizio 3

Diagramma (N)



Diagramma (M)

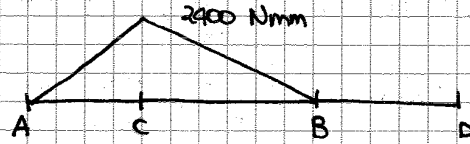
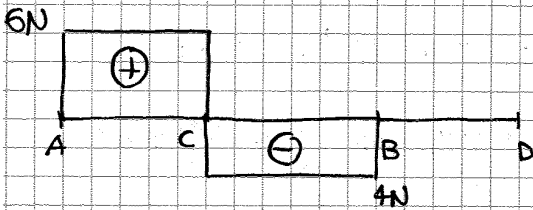


Diagramma (T)

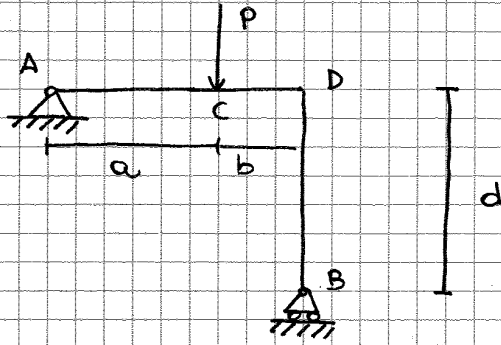


Ricopiare

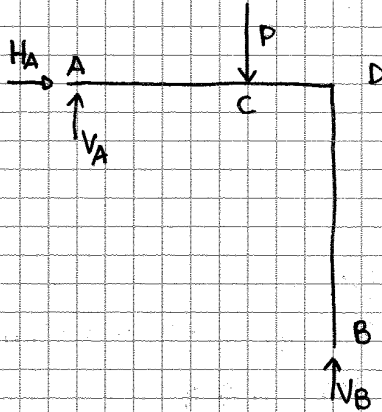
Per essere equilibrio le parentesi devono essere nulle:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{equazioni indefinite di equilibrio}$$

Esercizio 3

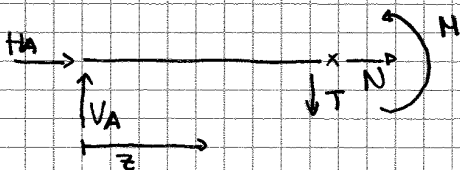


$P = 10 \text{ N}$   
 $a = 400 \text{ mm}$   
 $b = 600 \text{ mm}$   
 $d = 500 \text{ mm}$



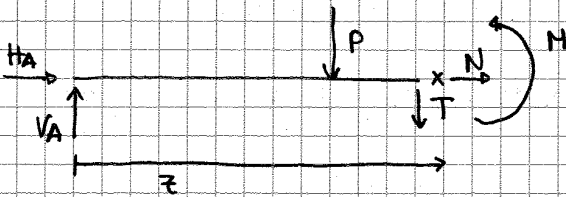
$\rightarrow HA = 0$   
 $\uparrow VA + VB = P \Rightarrow VA = \frac{Pb}{a+b} = 5 \text{ N}$   
 $\curvearrowright VB(a+b) = Pa \Rightarrow VB = \frac{Pa}{a+b} = 4 \text{ N}$   
 $VA + \frac{Pa}{a+b} = P \Rightarrow VA = P - \frac{Pa}{a+b} = \frac{P(a+b) - Pa}{a+b} = \frac{Pb + Pb - Pa}{a+b}$

• Tratto AC  $0 < z < a$



$\begin{cases} N = -HA = 0 \\ T = VA = 5 \text{ N} \\ M = VAz \end{cases}$ 
 $\begin{cases} M(z=0) = 0 \\ M(z=a) = VAa = 2400 \end{cases}$

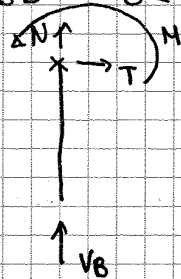
• Tratto CD  $a < z < a+b$



$\begin{cases} N = -HA = 0 \\ T = VA - P = -\frac{Pa}{a+b} = -4 \text{ N} \\ M = VAz - P(z-a) \end{cases}$

$\begin{cases} M(z=a) = VAa = 2400 \text{ Nmm} \\ M(z=a+b) = VA(a+b) - Pb = 0 \text{ Nmm} \end{cases}$

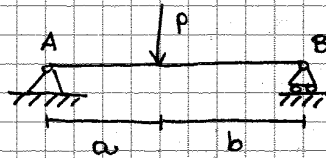
• Tratto BD  $0 < z < d$



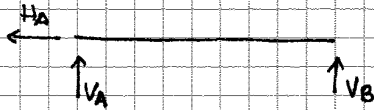
$\begin{cases} N = -VB = -\frac{Pa}{a+b} = -4 \text{ N} \\ T = 0 \\ M = 0 \end{cases}$

APPLICAZIONI PLV

Esercizio ②

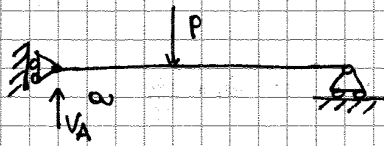


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{Pb}{a+b} \\ V_B = \frac{Pa}{a+b} \end{cases}$$



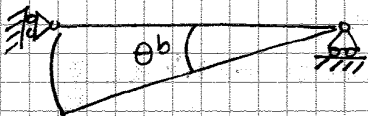
Calcolo  $V_A$  con PLV:

"a"



$$V_A^a, H_A^a, P^a, V_B^a$$

"b"



$$W_A^b = (b+a) \theta^b$$

$$W_P^b = b \theta^b$$

$$\delta W_A^b = (b+a) \delta \theta^b$$

$$\delta W_P^b = b \delta \theta^b$$

$$\delta L_i^{ab} = 0$$

$$\delta L_e^{ab} = 0$$

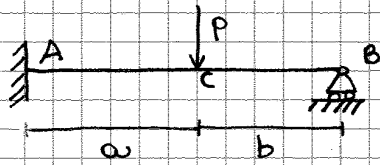
$$\delta L_e^{ab} = V_A^a W_A^b - P^a W_P^b = V_A^a (b+a) \delta \theta^b - P^a b \delta \theta^b = 0$$

$$\boxed{V_A = \frac{Pb}{a+b}}$$



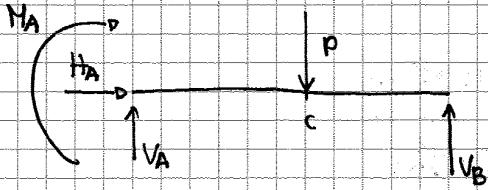
Calcolo (3)

"b"



Calcolare  $V_A$

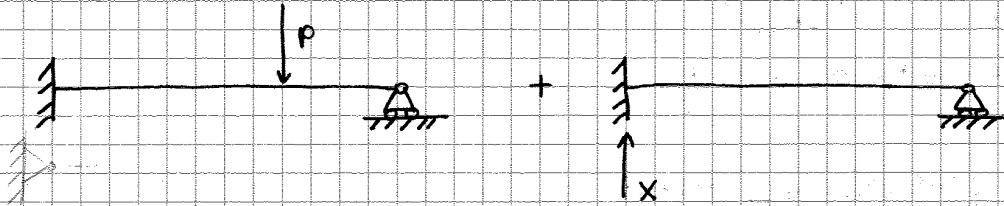
*Handwritten signature*



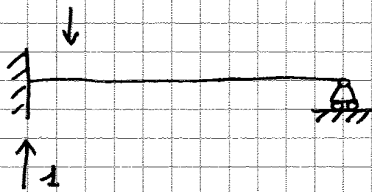
$$B \rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = P \\ V_A(a+b) + M_A - Pb = 0 \end{cases}$$

"0"

"X"



$$"X" = X \cdot "0"$$



$$"b" = "0" + X \cdot "0"$$

dove "0" = "a"

$$M^b = M^0 + X M^a$$

Sistema "0" ( $0 < z < b$ )

$$A \rightarrow \begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_B^0 = P \\ M_A^0 + Pa - V_B^0(a+b) = 0 \\ \Rightarrow M_A^0 = V_B^0(a+b) - Pa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = -V_B^0 = -P \\ M^0 = V_B^0 z = Pz \end{cases}$$

$b < z < a+b$

$$\begin{cases} N^0 = 0 \\ T^0 = -V_B^0 + P = -P + P = 0 \\ M^0 + Pz - V_B^0 z = 0 \\ \Rightarrow M^0 = V_B^0 z - Pz = Pz - Pz = 0 \end{cases}$$



costituzio

$$f_z = \bar{f} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad w(z)?$$

$$EA \frac{d^2 w}{dz^2} = -f_z$$

$$EA \frac{d^2 w}{dz^2} = -\bar{f} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\bar{f} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \frac{1}{EA}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-\bar{f}}{EA} \int \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{-\bar{f}}{EA} \frac{m\pi}{L} \left(-\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right)$$

$$= \frac{\bar{f} m\pi}{EAL} \left(\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right)$$

$$w(z) = \int \frac{\bar{f} m\pi}{EAL} \left(\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right) dz = \frac{\bar{f}}{EA} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$$

$$w(z=0) = 0$$

$$w(z=L) = \frac{\bar{f}}{EA} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin(m\pi)$$

Esercizio → correggere

Calcolare relazione di Navier per sistema baricentrico, principale, qualsiasi

• Baricentrico:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_y & I_{xy} \\ 0 & I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{N}{EA}$$

$$k_2 = \frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_x}{EI_{xy}}$$

$$k_3 = \frac{M_y}{EI_{xy}} + \frac{M_x}{EI_x}$$

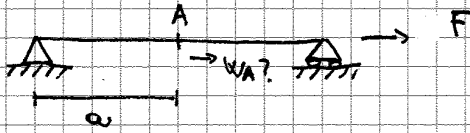
$$\epsilon_{zz} = \frac{N}{EA} + \left(\frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_x}{EI_{xy}}\right)x + \left(\frac{M_y}{EI_{xy}} + \frac{M_x}{EI_x}\right)y$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \left(\frac{M_y}{I_y} + \frac{M_x}{I_{xy}}\right)x + \left(\frac{M_y}{I_{xy}} + \frac{M_x}{I_x}\right)y$$

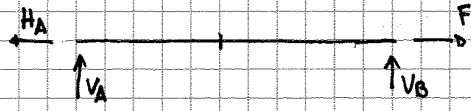
esercizio

Calcolo  $w_A$

*M.P.*

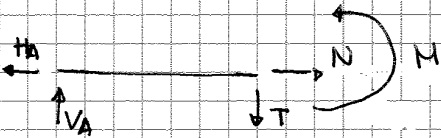


"a" reale



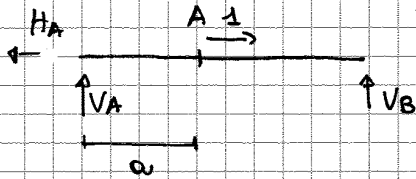
$$\begin{cases} H_A^a = F \\ V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A^a = 0 \\ V_B = 0 \Rightarrow V_B^a = 0 \end{cases}$$

$0 < z < L$



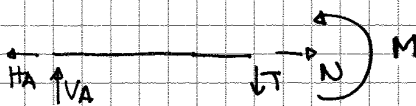
$$\begin{cases} N^a = H_A^a = F \\ T^a = V_A^a = 0 \\ M^a = 0 \end{cases}$$

"b" congruente



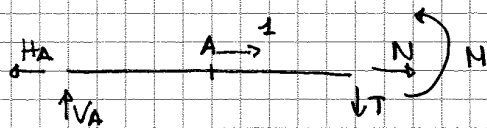
$$\begin{cases} H_A^b = F \\ V_A^b = 0 \\ V_B^b = 0 \end{cases}$$

$0 < z < a$



$$\begin{cases} N^b = H_A^b = F \\ T^b = V_A^b = 0 \\ M^b = 0 \end{cases}$$

$a < z < L$



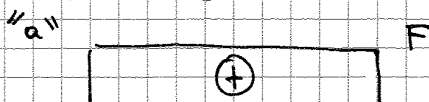
$$\begin{cases} N^b = H_A^b - F = 0 \\ T^b = V_A^b = 0 \\ M^b = 0 \end{cases}$$

$$L_e^{ab} = 1 \cdot w_A a$$

$$L_i^{ab} = \int_0^L \frac{N^a N^b}{EA} dz = \int_0^a \frac{N^a N^b}{EA} dz + \int_a^L \frac{N^a N^b}{EA} dz = \int_0^a \frac{F \cdot F}{EA} dz = \frac{F^2}{EA} a$$

$$L_e^{ab} = L_i^{ab} \Rightarrow w_A = \frac{F}{EA} a$$

Diagramma (N)



esercizio

Scrivere le equazioni di compatibilità secondo le seguenti ipotesi

$$E_{xx} = 0$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$E_{yy} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$E_{zz} = \omega_{,z}^{\circ}(\bar{z}) = \frac{\partial \omega^{\circ}}{\partial z} = \frac{d\omega}{dz} = E^{\circ}_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$\bullet R_x = \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Rightarrow R_x = 0$$

$$\bullet R_y = \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\Rightarrow R_y = \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^2 \partial z}$$

$$\bullet R_z = \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\Rightarrow R_z = \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\bullet R_{xz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \right] - 2 \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\Rightarrow R_{xz} = -2 \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y \partial z}$$

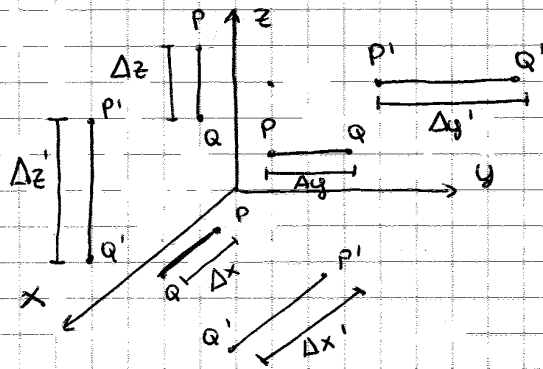
$$\bullet R_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\Rightarrow R_{yz} = 0$$

$$\bullet R_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} \right] - 2 \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial x \partial z}$$

$$\Rightarrow R_{xy} = 0$$

Esercizio → tensore di deformazione E



$$\vec{y}^0 = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

x) 
$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y) 
$$\epsilon_{yy} = \frac{\Delta y' - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

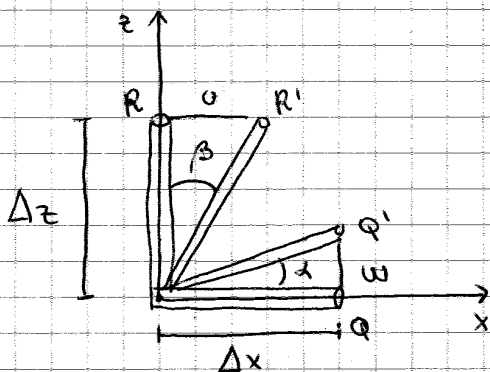
$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

DEFORMAZIONI LINEARI

z) 
$$\epsilon_{zz} = \frac{\Delta z' - \Delta z}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = (\alpha + \beta) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{vedi appunti})$$



$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\beta = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xz} = (\alpha + \beta) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

DEFORMAZIONI ANGOLARI

Correzione esercizi RELAZIONE DI NAVIER

Trovare la soluzione di Navier per

- 1) riferimento baricentrico
- 2) riferimento principale
- 3) riferimento qualsiasi

$$Ez = k_1 + k_2 x + k_3 y$$

① Momenti statici nulli ( $S_x, S_y$ )

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_y & I_{xy} \\ 0 & I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} N = EAK_1 \\ M_y = E(I_y k_2 + I_{xy} k_3) \Rightarrow M_y = EI k_2 + EI_{xy} k_3 \\ M_x = E(I_{xy} k_2 + I_x k_3) \end{cases} \Rightarrow k_2 = \frac{M_y - EI_{xy} k_3}{EI_y}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{N}{EA} \\ k_2 = \frac{M_y - EI_{xy} k_3}{EI_y} \\ M_x = \frac{I_{xy}(M_y - EI_{xy} k_3)}{I_y} + EI_x k_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{N}{EA} \\ k_2 = \frac{M_y}{EI_y} - \frac{I_{xy}}{I_y} \left( \frac{M_x I_x - M_y I_{xy}}{I_x I_y E - I_{xy}^2 E} \right) \end{cases}$$

$$M_x I_x = M_y I_{xy} - EI_{xy} k_3 + I_x I_y E k_3 \Rightarrow k_3 = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y E - I_{xy}^2 E}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{N}{EA} \\ k_2 = \frac{M_y}{EI_y} - \frac{I_{xy}}{I_y} \left( \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y E - I_{xy}^2 E} \right) \\ k_3 = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y E - I_{xy}^2 E} \end{cases}$$

Calcolo  $K_2$  da  $M_y A$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{M_y A - S_y N + S_x S_y E K_3 - E I_{xy} K_3 A}{E I_y A - S_y^2 E}$$

Sostituisco in  $M_x$ :

$$\Rightarrow M_x A = S_x N - S_x I_y \left( \frac{M_y A - S_y N + S_x S_y E K_3 - E I_{xy} K_3 A}{E I_y A - S_y^2 E} \right) - E S_x^2 K_3 +$$

$$+ A I_{xy} \left( \frac{M_y A - S_y N + S_x S_y E K_3 - E I_{xy} K_3 A}{I_y A - S_y^2} \right) + E A I_x K_3$$

$$\Rightarrow \boxed{K_3} = \frac{M_x I_y A - S_y^2 M_x - S_x N I_y + S_x S_y M_y - A I_{xy} M_y + S_y I_{xy} N}{E A I_y I_x - E I_x S_y^2 - E A I^2_{xy} - E S_x^2 I_y}$$

Sostituisco in  $K_1$  e  $K_2$ :

$$\boxed{K_1} = \frac{1}{EA} \left\{ N - E S_y \left[ \frac{M_y A - S_y N}{E I_y A - S_y^2 E} \right] + \left[ \left( \frac{S_x S_y E - E I_{xy} A}{E I_y A S_y^2 E} \right) \left( \frac{M_x I_y A - S_y^2 M_x - S_x N I_y + S_x S_y M_y - A I_{xy} M_y + S_y I_{xy} N}{E A I_y I_x - E I_x S_y^2 - E A I^2_{xy} - E S_x^2 I_y} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{S_x S_y M_y - A I_{xy} M_y + S_y I_{xy} N}{- E S_x^2 I_y + E A I_y I_x - E I_x S_y^2 - E A I^2_{xy} - E S_x^2 I_y} \right] + \right.$$

$$\left. - E S_x \left( \frac{M_x I_y A - S_y^2 M_x - S_x N I_y + S_x S_y M_y - A I_{xy} M_y + S_y I_{xy} N}{E A I_y I_x - E I_x S_y^2 - E A I^2_{xy} - E S_x^2 I_y} \right) \right\}$$

$$\boxed{K_2} = \frac{M_y A - S_y N}{E I_y A - S_y^2 E} + \left( \frac{S_x S_y E - E I_{xy} A}{E I_y A - S_y^2 E} \right) \left( \frac{M_x N_y A - S_y^2 M_x - S_x N I_y + S_x S_y M_y - A I_{xy} M_y - S_y I_{xy} N}{E A I_y I_x - E I_x S_y^2 + E A I^2_{xy} - E S_x^2 I_y} \right)$$