



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 561

DATA: 19/06/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Marangi

MATERIA: Matematica Applicata

Prof. Delitala

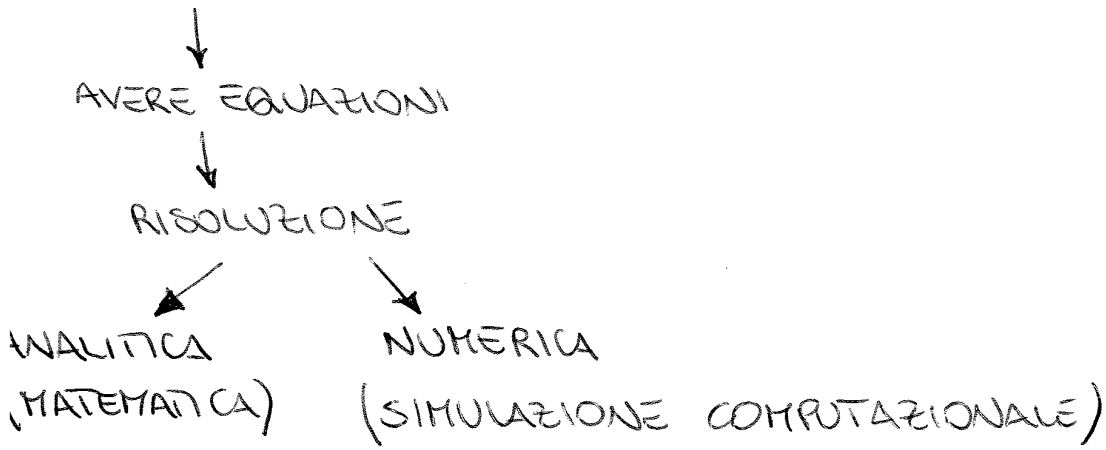
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

5/03/13

# MODELLI MATEMATICI



• QUALI MODELLI ED EQUAZIONI?

## 1) O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

- |                                |   |  |
|--------------------------------|---|--|
| METODI<br>RISOLUTIVI<br>ESATTI | } | - BREVE RICHIAMO DELLE EQUAZIONI DI ANALISI I E<br>LORO RISOLUZIONE      |
|                                |   | - SOLUZIONE CON TRASFORMATA DI LAPLACE                                   |
| METODI<br>ANALITICI            | { | - STABILITÀ ED EQUILIBRIO DI SISTEMI DINAMICI (MODEL-<br>LI) NON LINEARI |

↳ BIFORCAZIONI (ED EVENTUALMENTE SISTEMI CAOTICI)

## 2) P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

- LEGGI DI CONSERVAZIONE O DI BILANCIO

↳ EQ. PARABOLICHE (PRINCIPI CLASSICI - MECCANICA)

→ METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI PER LA SOLUZIONE

→ EQ. ELLITTICHE (ACCENNO)

↳ CASO STAZIONARIO

→ EQ. IPERBOLICHE (FENOMENI DI TRASPORTO)

↳ EQ. DI TRASPORTO DEL 1° ORDINE

→ MODELLO DI CORDA VIBRANTE

(?)

SI PUÒ DIMOSTRARE PER SEPARAZIONE DELLE VARIABILI CHE LA SOLUZIONE  

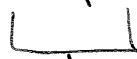
$$p(t) = p_0 e^{(N-M)t}$$

LEGGE CHE HA BEN DESCRITTO L'ANDAMENTO DELLA POPOLAZIONE MONDIALE DAL '700 AL '900

\* DINAMICA POPOLAZIONI - MODELLO LOGISTICO

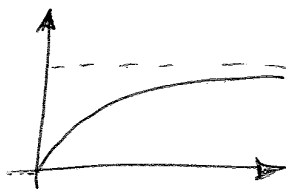
↳ ESTENSIONE PER TENERE CONTO DELLE RISORSE

$$\frac{dp}{dt} = (N-M)p - Cp^2$$



COMPETIZIONE: MORTE PER ASSENZA DI RISORSE SE PRESENTI TANTI INDIVIDUI

↓  
 CIÒ COMPORTA LA "NASCITA DI UN PATEAU"



- SATURAZIONE LEGATA AL PARAMETRO C CHE TIENE CONTO DELLA "CARRYING CAPACITY" - CAPACITÀ DI SOPPORTARE INDIVIDUI DELL'AMBIENTE

↳ RISOLUZIONE

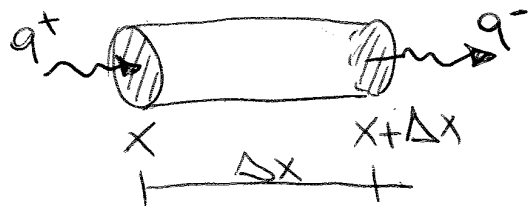
↳ PER SEPARAZIONE VARIABILI

• MODELLO MATEMATICO PER MIGLIORARE COMPrensIONE DELLA REALTÀ STUDIATA.

• IL PROCESSO DI COSTRUZIONE DEL MODELLO È ITERATIVO E IL MODELLO È PERFETTIBILE ANCHE IN BASE AUE ESIGENZE



# LEGGE DI BILANCIO ( IN GENERICO VOLUMEETTO DELLA SBARRA )



A: SEZIONE DELLA SBARRA

$$\boxed{\Delta x C_0 A \frac{du}{dt}}$$

: VARIAZIONE DI TEMPERATURA

⇓ //

DIFFERENZA TRA CALORE ENTRANTE E CALORE USCENTE

$$\Delta x C_0 A \frac{du}{dt} = A (q^+ - q^-)$$

$$\Delta x C_0 \frac{du}{dt} = q^+(x) - q^-(x + \Delta x)$$

USANDO LA LEGGE DI FOURIER ( LEGGE FENOMENOLOGICA DEL FLUSSO DI CALORE ) ABBIAMO CHE

$$\Delta x C_0 \frac{du}{dt} = \lambda \left( - \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) \right)$$

PER  $\Delta x$  PICCOLO

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\left[ \frac{\lambda}{C_0} \right]}_K \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x}$$

NEL LIMITE

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

P. D. E.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_3 \\ \dots \\ \frac{du_n}{dt} = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{array} \right.$$

SE PER ESEMPIO SI DOVESSE SCRIVERE LA LEGGE DELLA MOVA

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$u_1 = x$$

$$u_2 = \frac{dx}{dt}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{k}{m} u_1 \end{array} \right.$$

CI SONO DEI CASI PIÙ FACILI DA STUDIARE, E SONO QUELLI LINEARI

$\vec{f}(t, \vec{u})$  STA AD INDICARE UN "CAMPO VETTORIALE" GENERICO.

SE  $\vec{f}$  SI RISCRIVE COME  $\vec{f} = \underbrace{A(t)}_{\text{MATRICE } n \times n} \vec{u} + \vec{b}(t)$

$\Rightarrow$  IL MODELLO È LINEARE

SE POI IL TERMINE  $\vec{b}(t) = 0 \Rightarrow$  IL MODELLO CHE SI HA È LINEARE ED OMOGENEO

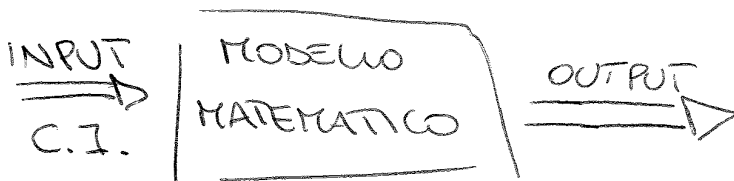
## IL PROBLEMA MATEMATICO

SI DEFINISCE APPLICANDO IL MODELLO ALLA REALTÀ IN ESAME.

TIPICAMENTE QUELLO CHE SI FA È DEFINIRE IL PROBLEMA AL VALORE ~~INIZIALE~~ INIZIALE

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u}) \\ \bar{u}(t_0) = \bar{u}_0 \end{cases}$$

ASSOCIANDO  $n$  CONDIZIONI INIZIALI AL MODELLO



IN ALTRI CASI SI POSSONO DEFINIRE PROBLEMI AL CONTORNO (BORDO) IN CUI SI ASSOCIANO UN NUMERO  $p < n$  DI CONDIZIONI INIZIALI E  $n-p$  CONDIZIONI AI LIMITI AL TEMPO FINALE

$$u_i(t_0) = u_{i_0} \quad i = 1, \dots, p$$

$$u_i(T) = u_{i_1} \quad i = p+1, \dots, n$$

IL PROBLEMA È BEN FORMULATO SE L'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE È ASSOCIATA AL NUMERO CORRETTO DI CONDIZIONI INIZIALI O AL BORDO.

SOSTANZIALMENTE SI PUÒ RISOLVERE L'EQUAZIONE

LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ È LEGATA ALLA REGOLARITÀ DEL CAMPO  $\bar{f}$  E SI PUÒ MOSTRARE CHE È SODDISFATTA SE  $\bar{f}$  È LIMITATA E ~~REGLIATA~~

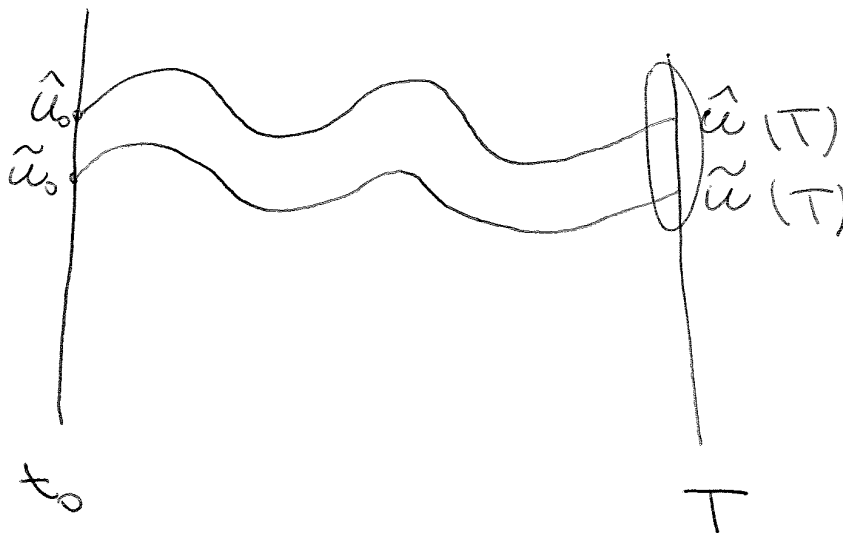
$$\max_{i,j=1,\dots,n} \sup_{(t,\bar{u}) \in R} \left| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right| \leq M$$

~~REGOLARE~~

TEOREMA DI ~~REGOLARE~~ DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE :

SE  $\bar{f}$  È CONTINUA E SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ, CIOÈ È SUFFICIENTEMENTE REGOLARE, ALLORA:

$$\|\hat{u}(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|\hat{u}_0 - \tilde{u}_0\| e^{L|t-t_0|}$$



E SI OTTENE LA SOLUZIONE PARTICOLARE.

$$\begin{cases} X''(t) = -g \\ X(0) = h \rightarrow \text{SONO AD UN'ALTEZZA } h \\ X'(0) = 0 \rightarrow \text{SONO FERMO} \end{cases}$$

$$X(t=0) = -\frac{g}{2} \cdot 0 + A \cdot 0 + B = h$$

$$X'(t=0) = A = 0$$

⇒ IL MIO INTEGRALE PARTICOLARE È

$$X(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

AD ESEMPIO SE VOGLIAMO CONOSCERE IL TEMPO IN CUI IL NOSTRO GRAVE TOCCHERÀ PER TERRA

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + h$$

$$t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

EQ. LINEARI DEL 1° ORDINE

COEFF. DIPENDENTE DAL TEMPO

LINEARE È DEL TIPO

$$X'(t) + a(t)X(t) = g(t)$$

TERMINI FORZATI  
TE ⇒ NON OMO-  
GENEO

IL CASO GENERALE SI RISOLVE CON UN RAFFINAMENTO DI QUESTA TECNICA.

SOSTANZIALMENTE QUELLO CHE SI HA È:

$$x'(t) + \underbrace{a(t)} x(t) = \underbrace{g(t)}$$

FUNZ. CONTINUE  
IN UN OPPORTUNO  
INTERVALLO APERTO

$$x(t) = e^{-z(t)} \left[ \int e^{z(t)} g(t) dt + cost \right]$$

CON  $z(t) = \int a(t) dt$

INFATTI SI MOLTIPLICANO AMBO I MEMBRI PER  $e^{z(t)}$

$$e^{z(t)} x'(t) + e^{z(t)} a(t) x(t) = e^{z(t)} g(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{z(t)} x(t) \right] = e^{z(t)} g(t)$$

INTEGRANDO

$$e^{z(t)} x(t) = \int e^{z(t)} g(t) dt + cost$$

LA SOLUZIONE SI OTTIENE MOLTIPLICANDO PER  $e^{-z(t)}$

NEL CASO DI EQUAZIONI LINEARI DEL 1° ORDINE VALGONO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI UNICITÀ E QUINDI LA SOLUZIONE ESISTE UNICA. QUESTO NON È PIÙ GARANTITO PER EG. NON LINEARI DEL TIPO

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

IN CUI NON È DETTO CHE VI SIA UNICITÀ.

AD ESEMPIO:

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

LA ~~SOLUZIONE~~ COSTANTE  $x(t) = 0$  È SOLUZIONE.

MA ANCHE LA FUNZIONE

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{SE } x \geq 1 \end{cases}$$

INFATTI PER  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2(x-1) \\ &= 2\sqrt{|x(t)|} = 2(x-1) \end{aligned}$$

E SI PUÒ VERIFICARE CHE VI SONO INFINITE SOLUZIONI DEL TIPO

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x < t_0 \\ (x-t_0)^2 & \text{SE } x \geq t_0 \end{cases}$$

IN CUI SI SONO SEPARATE LE DIPENDENZE  
DALE VARIABILI

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

$$G(y) = F(x) + \text{cost}$$

IN ALCUNI CASI SI PUÒ RISOLVERE ESPLICITAMENTE RISPETTO A Y OTTENENDO LA SOLUZIONE (CONFRONTABILE CON IL DATO INIZIALE) DEL PROBLEMA DIFFERENZIALE.

ESEMPIO: EQ. LOGISTICA

$$\frac{dy}{dt} = k \left( 1 - \frac{y}{L} \right) y$$

↑  
PROLIFERAZIONE
←  
COMPETIZIONE PER  
RISORSE AMBIENTE

CERCO LA SOLUZIONE SEPARANDO LE  
VARIABILI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{L} (L - y) y$$

$$\frac{dy}{(L-y)y} = \frac{k}{L} dt$$



- SE LE DUE RADICI COINCIDONO ( $\alpha_1 = \alpha_2$ )

$\Rightarrow$  LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA È DEL TIPO

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 t e^{\alpha_1 t}$$

- SE LE RADICI SONO COMPLESSE E CONIUGATE ( $\alpha_1 = \lambda + i\omega$ ,  $\alpha_2 = \lambda - i\omega$ )

$\Rightarrow$  LA SOLUZIONE È DEL TIPO

$$x(t) = e^{\lambda t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$$

N.B.:

NEL CASO IN CUI SI ABBIANO RADICI COMPLESSE E CONIUGATE SI RICORRE ALE FORMULE DI EULER

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$$

$$e^{\alpha t} = e^{(\lambda + i\omega)t} = e^{\lambda t + i\omega t} =$$

$$= e^{\lambda t} e^{i\omega t} = e^{\lambda t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$g(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) e^{\alpha_j t}$$

COME

COROLLARIO

~~PROPOSIZIONE~~ OTTENUTO PONENDO  $\alpha = \gamma + i\delta$

$$\text{SE } g(t) = p(t) e^{\gamma t} (a \cos(\delta t) + b \sin(\delta t))$$

$\Rightarrow$  SI HA COME SOLUZIONE PARTICOLARE

$$x(t) = q(t) t^m e^{\gamma t} (A \cos \delta t + B \sin \delta t)$$

DOVE  $q(t)$  È UN POLINOMIO DI GRADO  $k$

E  $m$  È LA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE

CARATTERISTICA.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x''(t) - 4x(t) = 2+t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

STUDIAMO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA  
DELL'OMOGENEA

$$x''(t) - 4x(t) = 0$$

$$\alpha^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

RADICI REALI E DISTINTE

LA SOLUZIONE È

$$x(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{2}$$

LA SOLUZIONE GENERALE È SOMMA DI INTEGRALE PARTICOLARE PIÙ SOLUZIONE DELL'OMOGENEA.

$$x(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{2} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

$C_1$  E  $C_2$  SI DETERMINANO IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} x(0) = 0 = -\frac{1}{2} + C_1 + C_2 \\ x'(0) = 1 = -\frac{1}{4} + 2C_1 - 2C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 9/16 \\ C_2 = -1/16 \end{cases}$$

OTTENIAMO QUINDI LA SOLUZIONE AL PROBLEMA DI CAUCHY

$$x(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{2} + \frac{9}{16} e^{2t} - \frac{1}{16} e^{-2t}$$

SE VOLESSI VERIFICARE IL RISULTATO VADO A CALCOLARE  $x'' - 4x \stackrel{?}{=} 2+t$

• INTEGRALE PARTICOLARE DELLA NON-OMOGENEA

$$q(t) = p(t) e^{\gamma t} \quad b \text{ ou } \delta t = \\ = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$p(t) \bar{=} \text{UNA COSTANTE} \\ \gamma = 0$$

LA MIA SOLUZIONE SARÁ

$$x(t) = q(t) t^m e^{\gamma t} \quad B \cos(\delta t)$$

$$q(t) \bar{=} \text{UNA COSTANTE}$$

$$m = 0$$

$$\gamma = 0$$

QUINDI CERCHIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DEL TIPO

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$



COSTANTE DA DETERMINARE

SOSTITUISCO NELLA EQ. GENERALE

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$-\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) + \omega^2 A \cos(\omega_0 t) = \\ = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{SUPPONENDO} \\ \omega_0 \neq \omega$$

$$\text{cioè } \frac{d\bar{u}}{dt} = \underline{A} \bar{u}, \text{ si può risolvere}$$

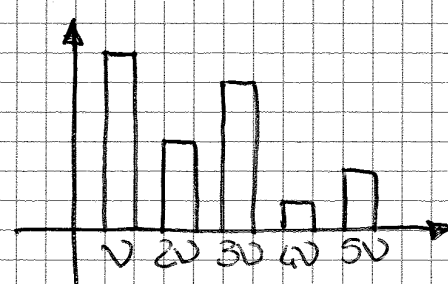
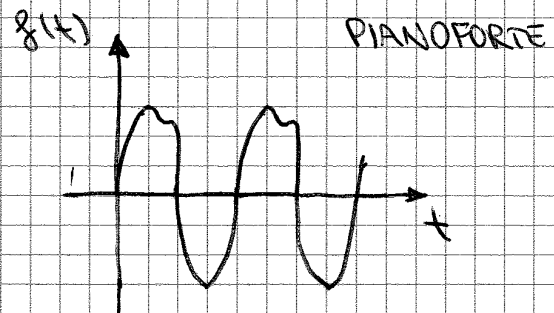
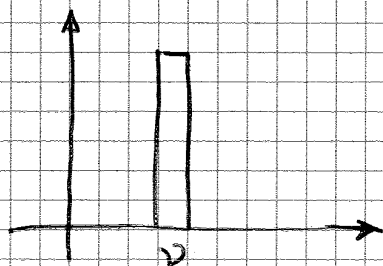
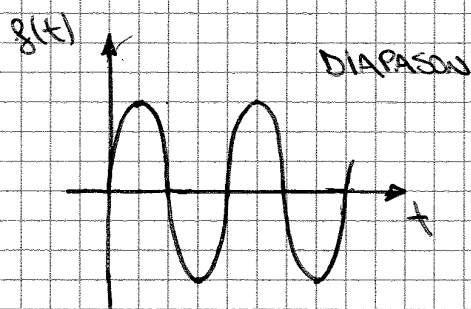
RE CON IL METODO DELLA MATRICE ESPONENZIALE OPPURE CON IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE, CHE CI PERMETTE DI AVERE UNA SOLUZIONE ESATTA.

NON PIÙ SINUSOIDALE MA SEMPRE PERIODICO  
DI PERIODO  $T$

IL MOTO SI OTTIENE SOVRAPPONENDO (SOMMANDO)  
DIVERSI MOTI ONDULATORI CON FREQUENZA  $\nu$ ,  $2\nu$ ,  
 $3\nu$ , ECC. CHE MULTIPLA DELLA FREQUENZA FONDAMEN-  
TALE  $\nu$ .

L'IDEA DELL'ANALISI DI FOURIER È QUELLA DI STU-  
DIARE UN SEGNALE PERIODICO DECOMPONENDOLO NEI  
VARI SEGNALE CHE SONO SOVRAPPosti, RISALENDO  
ALLE SINGOLE FREQUENZE E ALLE RELATIVE AMPIEZZE.

SI PASSA QUINDI DAL DOMINIO DEI TEMPI A QUELLO  
DELE FREQUENZE.



QUELLO CHE SI PUÒ DIMOSTRARE È CHE FUNZIONI PERIO-  
DICHE  $f(x)$  DEFINITE IN  $(-\infty, +\infty)$ , POSSONO ESSERE  
RAPPRESENTATI COME SOMMA INFINITA DI SENI E COSENI

IL LIMITE APPLICATIVO MAGGIORE DELLE SERIE DI FOURIER È CHE LA FUNZIONE DEVE ESSERE PERIODICA

PER AFFRONTARE CIÒ SI ARRIVA A PARLARE DI TRASFORMATE DI FUNZIONI

PER TRATTARE FUNZIONI NON PERIODICHE CHE HANNO SPETTRO CONTINUO SI INTRODUCONO LE TRASFORMATE DI FOURIER

SE HO UNA FUNZIONE  $x(t)$  CONTINUA A TRATTI E L'INTEGRALE IMPROPRIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

ESISTE FINITO PER OGNI  $\omega \in \mathbb{R}$ , ALLORA SI DICE CHE È TRASFORMABILE SECONDO FOURIER.

$$F[x(t)](\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

↓  
TRASFORMATA  
DI  
FOURIER

UNA CLASSE IMPORTANTE DI FUNZIONI CONTINUE A TRATTI E TRASFORMABILI SECONDO FOURIER È QUELLA DELLE FUNZIONI ASSOLUTAMENTE TRASFORMABILI DETTE  $L^1(\mathbb{R})$  E SONO TALI CHE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

## TRASFORMATA DI LAPLACE

$$L[f] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$\swarrow$   $\searrow$   $\nearrow$   
 SEGNALE NELLO SPAZIO DEI TEMPI      FUNZIONE NELLO SPAZIO DELLE FREQUENZE       $s \in \mathbb{R}$

CI PERMETTE DI TRASFORMARE UN MAGGIOR NUMERO DI FUNZIONI GRAZIE AL VALORE SMORZANTE  $e^{-st}$ , A PATTO CHE ESISTA L'INTEGRALE IMPROPRIO

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

QUELLO CHE SI PUÒ DIMOSTRARE È CHE SE ESISTE FINITO L'INTEGRALE IMPROPRIO PER UN CERTO  $s_0$

⇒ ESISTE FINITO  $\forall s > s_0$

$t \rightarrow x(t)$ ,  $t \geq 0$  → SEGNALE NEL DOMINIO DEI TEMPI

APPLICO LA TRASFORMATA

$s \rightarrow X(s)$ ,  $s \in D$  → DOMINIO DELLE FREQUENZE

↓  
DOMINIO DI ESISTENZA FINITO DELL'INTEGRALE IMPROPRIO

ESISTE ANCHE LA FUNZIONE INVERSA DETTA ANTITRASFORMATA CHE PERMETTE DI RICOSTRUIRE IL SEGNALE A PARTIRE DALLA TRASFORMATA DI LAPLACE



IL DOMINIO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE È QUELLO PER CUI ESISTE FINITO L'INTEGRALE IMPROPRIO, OVERO LA SEMIRETTA  $(0, +\infty)$

LA TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA FUNZIONE GRADINO DI  $t$

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \frac{1}{s} \text{ CON } s > 0$$

ESEMPIO:

$$x(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}$$

CALCOLO LA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt =$$

$$= \frac{1}{s-a} \iff s > a$$

ALTRIMENTI L'INTEGRALE NON È CONVERGENTE

NON È SEMPRE AGEVOLE VERIFICARE IL DOMINIO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

UN CRITERIO UTILE È CHE LA FUNZIONE ABBAIA CRESCITA ESPONENZIALE.

$$-L[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

CON TECNICHE DI RISOLUZIONE DELL'INTEGRALE SI POSSONO CALCOLARE UNA SERIE DI TRASFORMATE NOTEVOLI

- $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
- $L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
- $L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
- $L[\sinh(at)] = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$
- $L[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$
- $L[e^{at} \sin(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
- $L[e^{at} \cos(bt)] = \frac{s+a}{(s-a)^2+b^2}$

IN REALTÀ QUANDO DOBBIAMO CALCOLARE UNA TRASFORMATA SI CERCA DI NON CALCOLARE L'INTEGRALE ESPlicito MA SI CERCA DI RICONDURCI A LLE TRASFORMATE NOTEVOLI

CAMBIO LA VARIABILE  $\alpha t = z \Rightarrow dz = \alpha dt$

$$\int_0^{+\infty} X(\alpha t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} X(z) e^{-s \frac{z}{\alpha}} \frac{dz}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

### 3) TRASLAZIONE

$$L[x(t-a)U(t-a)](s) = \quad , \text{ CON } a > 0$$

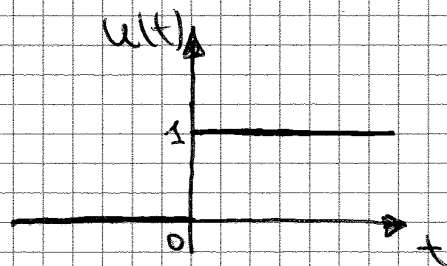
$$= e^{-as} X(s) \quad , s > s_0$$

ES:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } t < 1 \\ 2e^{3t} & \text{SE } t \geq 1 \end{cases}$$

$$L[x(t)] = ?$$

$$x(t) = 2e^{3t} U(t-1)$$



$$L[2e^{3t} U(t-1)]$$

VOGLIO APPLICARE LE PROPRIETÀ DELLA T.L.  
PER RICONDURMI A TRASFORMATE NOTEVOLI

$$L[2e^{3t} U(t-1)] = 2L[e^{3t} U(t-1)] =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( -X(0) + S \int_0^{\lambda} x(t) e^{-st} dt \right) =$$

$$= S \bar{X}(s) - X(0)$$

ANALOGAMENTE

$$L[x''(t)](s) = S^2 \bar{X}(s) - S X(0) - X'(0^+)$$

$$, s > s_0$$

7) DIVISIONE PER t

$$L\left[\frac{x(t)}{t}\right] = \int_0^{+\infty} \bar{X}(s) ds, s > s_0$$

8) TRASFORMATA DELL'INTEGRALE

$$L\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{\bar{X}(s)}{s}, s > \max\{s_0, 0\}$$

9) CONVOLUZIONE

$$f \overset{\text{CONVOLUTO}}{*} g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$L[x(t) * y(t)](s) = \bar{X}(s) \bar{Y}(s)$$

EQUIVALENTEMENTE QUESTE PROPRIETÀ VALGONO ANCHE PER L'ANTI TRASFORMATA

$$x(t) = L^{-1}[\bar{X}(s)](t)$$

2<sup>a</sup> VIA: 
$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

MOLTIPLICO PER  $s-3$  E CALCOLO IL LIMITE PER  $s \rightarrow 3$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3)(3s+7)}{(s-3)(s+1)} = \frac{A(s-3)}{s-3} + \lim_{s \rightarrow 3} \frac{B(s-3)}{s+1}$$

$$A = \frac{16}{4} = 4$$

ANALOGAMENTE PER RECUPERARE B MOLTIPLICO PER  $(s+1)$  E CALCOLO IL LIMITE PER  $s \rightarrow -1$

$$B = -1$$

ES: SISTEMA MASSA - MOLLA

$$\begin{cases} x'' + 4x = 0 \\ x(0) = 10 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

PARTICELLA DI MASSA 2 FORZA DI RICHIAMO DELLA MOLLA DEL TIPO  $8x$  INIZIALMENTE FERMA NELLA POSIZIONE 10.

$$m\ddot{x} = F$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -8x$$

DETERMINARE LA POSIZIONE DELLA PARTICELLA IN OGNI ISTANTE SUCCESSIVO.

APPLICHIAMO LA TRASFORMATA DI LAPLACE PER DETERMINARE LA SOLUZIONE

ES: MOTO MASSA - MOLLA CON SMORZAMENTO PARI  
A 8 VOLTE LA VELOCITÀ DELLA PARTICELLA

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -8x - \left( \frac{8 dx}{dt} \right)$$

↓  
SMORZAMENTO

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 10 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

APPLICO LA T.L.

$$s^2 \bar{X}(s) - sx(0) + x'(0) + 4s\bar{X}(s) + 4x(0) + 4\bar{X}(s) = 0$$

$$s^2 \bar{X}(s) - 10s + 4s\bar{X}(s) - 40 + 4\bar{X}(s) = 0$$

$$\bar{X}(s) (s^2 + 4s + 4) - 10(s + 4) = 0$$

$$\bar{X}(s) = \frac{10(s+4)}{s^2 + 4s + 4} = \frac{10(s+4)}{(s+2)^2}$$

DEVO ANTITRASFORMARE

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{X}(s)](t) = 10 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{(s+4)}{(s+2)^2} \right] =$$

$$\begin{aligned} \underline{1^a \text{ VIA}} : \quad \frac{s+2+2}{(s+2)^2} &= \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^2} = \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \end{aligned}$$



$$L\{x'(t)\}(s) = s\bar{X}(s) - x(0)$$

$$\begin{cases} s\bar{X}(s) - 1 = 2\bar{X}(s) - 4\bar{Y}(s) \\ s\bar{Y}(s) = \bar{X}(s) - 2\bar{Y}(s) \end{cases}$$

$$\bar{X}(s) = \frac{1 - 4\bar{Y}(s)}{s-2}$$

$$s\bar{Y}(s) = \frac{1 - 4\bar{Y}(s)}{s-2} - 2\bar{Y}(s)$$

$$s(s-2)\bar{Y}(s) = 1 - 4\bar{Y}(s) - 2(s-2)\bar{Y}(s)$$

$$\bar{Y}(s)(s(s-2) + 2(s-2) + 4) = 1$$

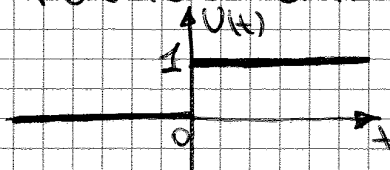
$$\bar{Y}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\bar{X}(s) = \frac{1 - \frac{4}{s^2}}{s-2} = \frac{s+2}{s^2} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$\begin{cases} y(t) = t \\ x(t) = \underbrace{U(t)} + 2t = 1 + 2t \quad \text{PER } t \geq 0 \end{cases}$$

FUNZIONE GRADINO



ES:

$$\begin{cases} X'(t) = 2X - 3Y \\ Y'(t) = Y - 2X \\ X(0) = 8 \\ Y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{T.L.} \rightarrow \begin{cases} S\bar{X}(s) - X(0) = 2\bar{X}(s) - 3\bar{Y}(s) \\ S\bar{Y}(s) - Y(0) = \bar{Y}(s) - 2\bar{X}(s) \end{cases}$$

SOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO CON LA  
REGOLA DI CRAMER

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = g \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} (s-2)\bar{X} + 3\bar{Y} = 8 \\ 2\bar{X} + (s-1)\bar{Y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = (s+1)(s-4)$$

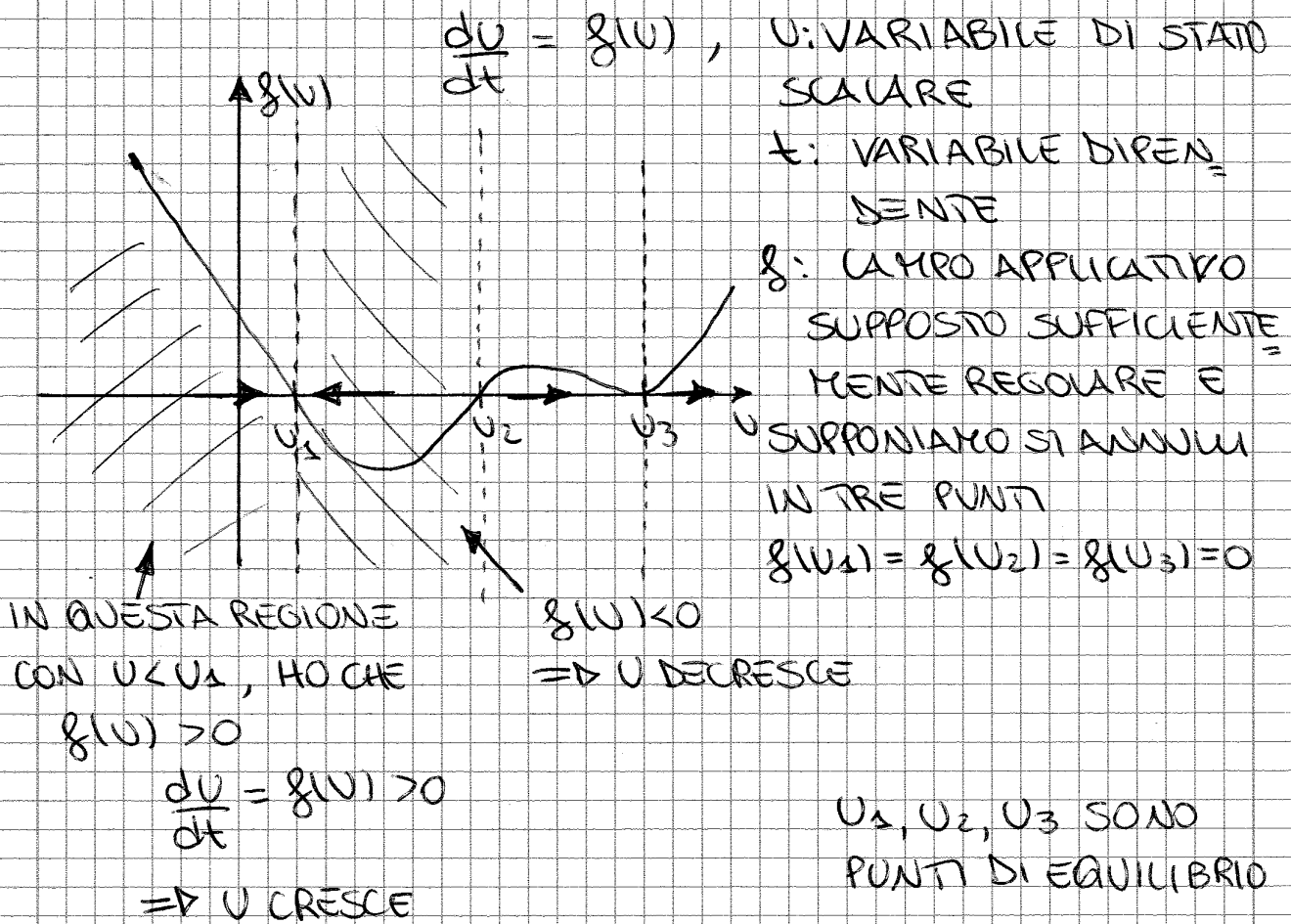
$$\bar{X} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{(s+1)(s-4)} = \frac{8(s-1) - 9}{(s+1)(s-4)} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

$$\bar{Y} = \frac{3(s-2) - 16}{(s+1)(s-4)} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$



UN'INFORMAZIONE COSÌ DETTAGLIATA DEL COMPORTAMENTO DEL MODELLO.

È INTERESSANTE IN QUESTI CASI EFFETTUARE UNO STUDIO QUALITATIVO DEL MODELLO DIFFERENZIALE.



SE  $f(\hat{u}) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0$   
 $u$  RIMANE COSTANTE

L'ANALISI QUALITATIVA MI PERMETTE DI STUDIARE IL CAMPO PER DETERMINARE I PUNTI DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA E LA LORO NATURA.

$$\frac{dU}{dt} = f(U) \Rightarrow \frac{dU}{dt} - \frac{dU_E}{dt} = f(U)$$

$\swarrow = \emptyset$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(U - U_E) = f(U)$$

FACCIAMO UNO SVILUPPO DI TAYLOR INTORNO AL PUNTO DI EQUILIBRIO DEL CAMPO  $f$ .

$$\Rightarrow f(U) \sim \underbrace{f(U_E)}_{\emptyset} + f'(U_E)(U - U_E) + o(U - U_E)$$

$\emptyset \rightarrow$  VISTO CHE  $U_E$  È EQUILIBRIO

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(U - U_E) \sim f'(U_E)(U - U_E)$$

DEFINENDO  $V = U - U_E$  (SPOSTAMENTO RISPETTO ALLA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO)

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = f'(U_E)V \quad (2)$$



QUESTA EQUAZIONE È LINEARE E FORNISCE UN'APPROSSIMAZIONE DEL MODELLO ORIGINALE VALIDA IN UN INTORNO DELLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO.

IL MODELLO LINEARE (2) SI PUÒ RISOLVERE PER SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

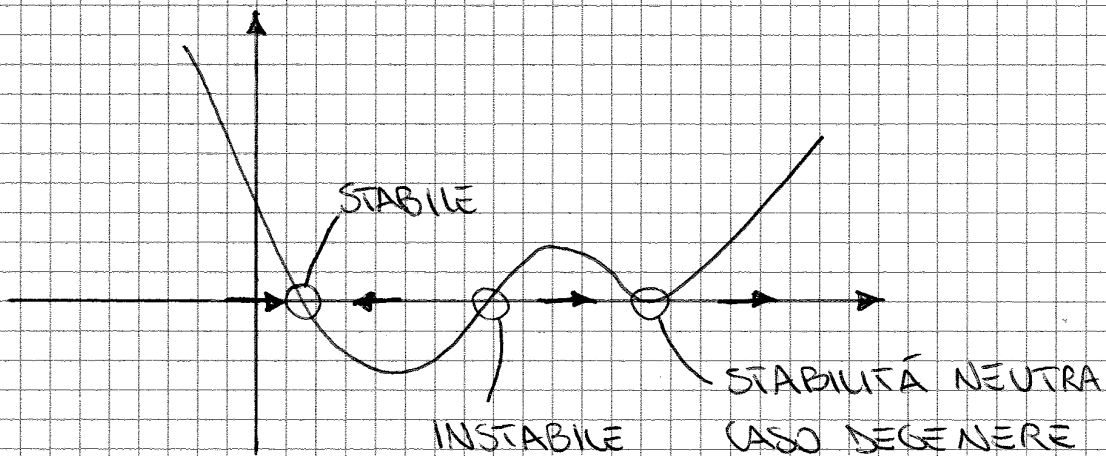
NEL PRIMO CASO IL SISTEMA SI ALLONTANA DA  $U_e$  CHE QUINDI RISULTA UN PUNTO DI EQUILIBRIO INSTABILE

NEL SECONDO CASO  $U \rightarrow U_e$  E IL SISTEMA FINISCE SUL PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE

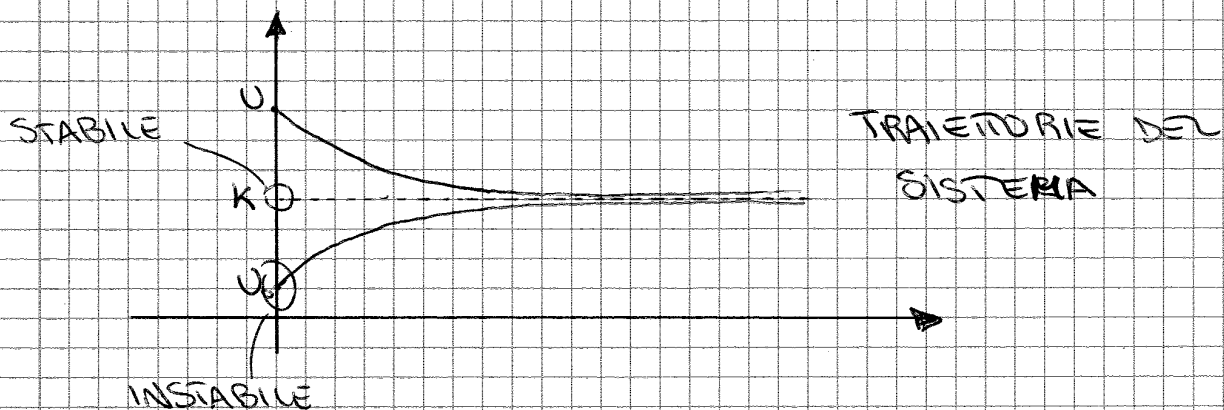
SE  $f'(U_e) = 0 \Rightarrow V = V_0 \rightarrow$  CASO DEGENERE

↓  
QUESTO È UN CASO DEGENERE IN CUI NON SI POSSONO DISCUTERE E TRADURRE I RISULTATI DAL SISTEMA LINEARE A QUELLO NON LINEARE

QUESTO CASO È COERENTE CON QUELLO DISCUSO GRAFICAMENTE



IN PRATICA



### STABILITÀ LINEARE PER SISTEMI AUTONOMI

UN SISTEMA SI DICE AUTONOMO SE  $f$  NON DIPENDE **ESPPLICITAMENTE** DA  $t$ , MA SOLO IMPLICITAMENTE ATTRAVERSO LA VARIABILE DI STATO  $U = U(t)$

$$\frac{dU}{dt} = \vec{f}(U)$$

A DIFFERENZA DEL CASO PRECEDENTE,  $U \in \mathbb{R}^n$  E  $f$  NON SONO PIÙ SCALARI MA  $f: U \in \mathbb{R}^n$

Def: UN PUNTO  $U \in \bar{U}$  È DETTO DI EQUILIBRIO SE ANNULLA IL CAMPO VETTORIALE  $\vec{f}(\bar{U}) = 0$

INFATTI SE  $\bar{U}(t_0) = \bar{U} \Rightarrow \bar{U}(t) = \bar{U} \forall t > t_0$

COME SI COMPORTA IL SISTEMA PER PERTURBAZIONI PICCOLE INTORNO ALE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO? - PROBLEMA DELLA STABILITÀ LINEARE.

## STABILITÀ LINEARE

SOTTO OPPORTUNE IPOTESI DI REGOLARITÀ DELLA  $\bar{g}_i$  SI SVILUPPA IN SERIE DI TAYLOR

$$f_i(\bar{U}) \sim f_i(\bar{U}_E) + (\bar{U} - \bar{U}_E) \nabla f_i(\bar{U}_E) + \dots$$

↙ PER DEFINIZIONE

INTRODUCENDO LA PERTURBAZIONE  $\bar{V} = \bar{U} - \bar{U}_E$  SI HA:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \underline{\underline{J}}(\bar{U}_E) \bar{V} \quad (3)$$

CON  $\underline{\underline{J}}(\bar{U}_E)$  CHE È LA MATRICE JACOBIANA CHE HA COME GENERICO ELEMENTO

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j}$$

SI È QUINDI OTTENUTO UN SISTEMA LINEARE CHE APPROSSIMA IN UN INTORNO DEL PUNTO DI EQUILIBRIO IL SISTEMA NON LINEARE DI PARTENZA E DI CUI POSSO CALCOLARE LA SOLUZIONE ANALITICA.

RICORDANDOCI LA SOLUZIONE ESPONENZIALE DEL CASO SCALARE, CERCHIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE NELLA FORMA

DOVE IN GENERALE :

- $m < n$  IN AUTOVALORI DISTINTI
- $P_i(t)$  POLINOMI IN  $t$  DI ORDINE UGUALE ALLA MOLTEPLICITÀ DELL'AUTOVALORE CORRISPONDENTE.

IL TEOREMA DI STABILITÀ LINEARE PERMETTE DI LEGARE I RISULTATI OTTENUTI SUL SISTEMA LINEARE A QUELLI DEL SISTEMA NON LINEARE DI PARTENZA. ESSO AFFERMA CHE :

- SE  $\forall i = 1, \dots, n \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  ALLORA  $\bar{u}_e$  È ASINTOTICAMENTE STABILE ( $\bar{u}_e$  È ATTRATTORE), INFATTI  $\bar{v}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  PERCHÉ TUTTI GLI ESPONENZIALI TENDONO A ZERO.
- SE ESISTE UN AUTOVALORE  $\lambda_1$  TALE CHE  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$  ALLORA IL PUNTO  $\bar{u}_e$  È INSTABILE.
- SE ESISTE UN  $\lambda_1$  TALE CHE  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$  ALLORA SI HA STABILITÀ NEUTRA PER IL SISTEMA LINEARE, MA NON POSSO DIRE NULLA SULLA STABILITÀ DEL SISTEMA NON LINEARE DI PARTENZA. SI DEVONO QUINDI USARE ALTRE TECNICHE PER STUDIARE LA STABILITÀ, OSSIA QUELLE DI STABILITÀ NON

NEL PUNTO DI EQUILIBRIO

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} (\partial_x f_1)_{(0,0)} & (\partial_y f_1)_{(0,0)} \\ (\partial_x f_2)_{(0,0)} & (\partial_y f_2)_{(0,0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

QUINDI IL SISTEMA LINEARIZZATO È:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

SI SUPPONE CHE  $\det J \neq 0$ , CHE COINCIDE CON L'ESCLUDERE IL CASO DEGENERE IN CUI SI HANNO AUTOVALORI NULLI.

GLI AUTOVALORI LI CALCOLO STUDIANDO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA

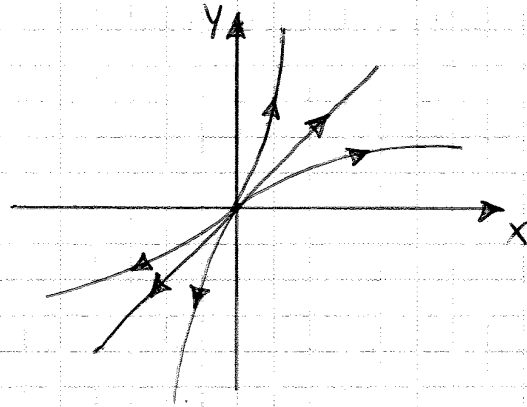
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = \lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det J = 0$$

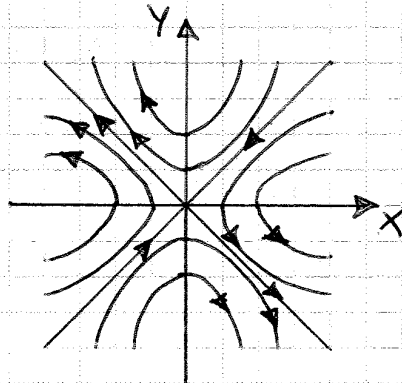
DA CUI OTTENGONO DUE AUTOVALORI  $\lambda_1$  E  $\lambda_2$ .



- SE  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  ALLORA SI HA INSTABILITÀ CON NODO INSTABILE ( $v \rightarrow +\infty$ )



- SE  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , OSSIA AUTOVALORI DI SEGNO OPPOSTO, ALLORA SI HA UNA SELLA O COLLE INSTABILE



- SE HO DUE AUTOVALORI REALI E COINCIDENTI, ALLORA:

$$v(t) = \underbrace{(c_1 + c_2 t)}_{(*)} e^{\lambda t}$$

CON (\*) CHE È UN POLINOMIO DI GRADO 1 INT, UGUALE ALLA MOLTEPLICITÀ DELL'AUTOVALORE.



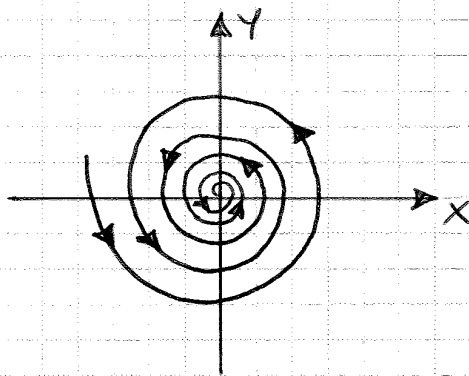
$$v(t) = 2e^{\alpha t} [\cos(\beta t + \gamma)\bar{u} + \sin(\beta t + \gamma)\bar{w}]$$

SINO TI CHE LA PARTE REALE DEGLI AUTOVALORI COMPARE NELL'ESPO\_NENZIALE, MENTRE QUELLA IMMAGINARIA STA NEL SENO E NEL COSENO.

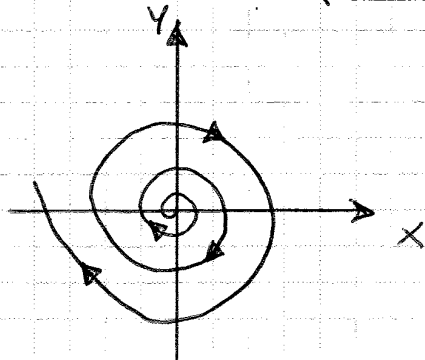
QUINISI CIÓ CHE IMPORTA È LA PARTE REALE ( $\alpha$ ) CHE È DOMINANTE POICHÈ COMPARE NELL'ESPO\_NENZIALE.

SOTTO CASI:

- SE  $\alpha < 0$  IL MOTO CONVERGE A SPIRALE VERSO L'ORIGINE ( FUOCO STABILE )



- SE  $\alpha > 0$  IL MOTO DIVERGE A SPIRALE DALL'ORIGINE ( FUOCO INSTABILE )



- SE  $\det(\underline{\underline{J}}) < 0$  GLI AUTOVALORI SONO REALI E DI SEGNO OPPOSTO  $\leadsto$  PUNTO DI SELVA

INFATTI

$$\Delta > (\text{Tr}(\underline{\underline{J}}))^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > \text{Tr}(\underline{\underline{J}})$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

- SE  $\det(\underline{\underline{J}}) > 0$  E  $\Delta > 0$  SI HANNO AUTOVALORI REALI E CONCORDI (DELO STESSO SEGNO DELA  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}})$ )  
SI HA PERCIÓ:

- NODO STABILE SE  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) < 0$

- NODO INSTABILE SE  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) > 0$

- SE  $\det(\underline{\underline{J}}) > 0$  E  $\Delta < 0$  SI HANNO AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE CHE HA SEGNO UGUALE A  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}})$

- FUOCO STABILE SE  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) < 0$

- FUOCO INSTABILE SE  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) > 0$

- CENTRO SE  $\text{Tr}(\underline{\underline{J}}) = 0$

NOV SE:

- È CONTINUA IN UN INTORNO DI  $u_e$  ED È DIFFERENZIALE.

- HA UN MINIMO LOCALE IN  $\bar{u}_e$ , AD ESEMPIO:

$$V(u_e) = 0 \text{ CON } V(u) > 0 \forall u \in D - u_e$$

- È UNA FUNZIONE NON CRESCENTE LUNGO TUTTE LE SOLUZIONI CON  $u_0 \in D / u_e$ , OVVERO:

$$\frac{dV}{dt}(u(t)) = \sum_i \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial V}{\partial u_i} g_i(u(t)) \leq 0$$

ADORA IL PUNTO  $u_e$  È STABILE.

SE INOLTRE L'ULTIMA RELAZIONE VALE STRETTAMENTE

$$\frac{dV}{dt} < 0$$

ADORA  $u_e$  È ASINTOTICAMENTE STABILE.

HO DUE PUNTI DI EQUILIBRIO

$$(0,0) \quad \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

EFFETTUAMO ORA L'ANALISI DI STABILITÀ LINEARE

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

ORA LO CALCOLIAMO NEI PUNTI DI EQUILIBRIO

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = a > 0 \\ \lambda_2 = -c < 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{SELA} \\ \text{INSTABILE} \end{matrix}$$

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac} \quad \text{CENTRO}$$

METTENDOCI NELLO SPAZIO DELLE FASI VALUTIAMO SOLO IL 1° QUADRANTE, POICHÉ PARLANDO DI POPOLAZIONI ESSE SONO PER FORZA MAGGIORI DI ZERO.

$$= aT - b \int_0^T y(t) dt = 0$$

DA CUI

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}$$

VALOR MEDIO  
PREDATORI

ANALOGAMENTE

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}$$

VALOR MEDIO  
PREDE

DURANTE LA GUERRA (MENO PESCA):

- RIDUCE TASSO DI MORTE PREDATORI:  $c \rightarrow c - \mu$
- AUMENTA TASSO CRESCITA PREDE:  $a \rightarrow a + \epsilon$

QUINDI

$$\langle x \rangle = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c - \mu}{d}$$

MINOR NUMERO DI  
PREDE

$$\langle y \rangle = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a + \epsilon}{b}$$

MAGGIOR NUMERO DI  
PREDATORI

•  $\alpha < 0$

HO UN SOLO PUNTO DI EQUILIBRIO:  $u = 0$   
 INFATTI PER  $u^2 = \alpha$  NON HO SOLUZIONI REALI

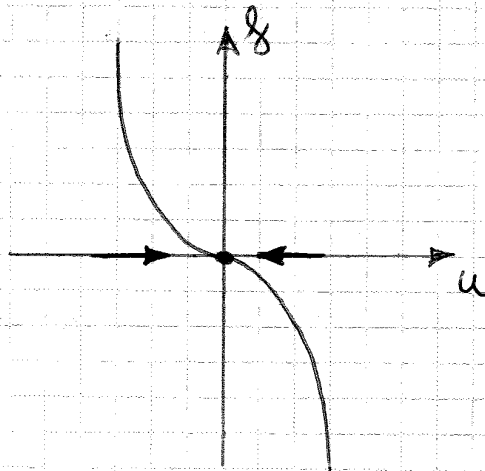
VEDIAMO LA STABILITÀ:

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=0} = [(\alpha - u^2) + u(-2u)]_{u=0} =$$

$$= \alpha < 0$$

DUNQUE IL PUNTO DI EQUILIBRIO  $u = 0$  È  
 STABILE.

STESSO RISULTATO SI PUÒ TROVARE DAL GRAFICO  
 DI  $f$ :

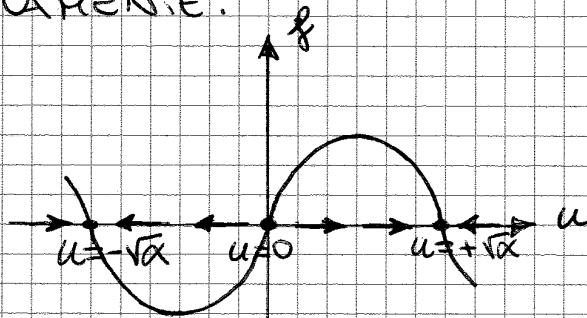


•  $\alpha = 0$

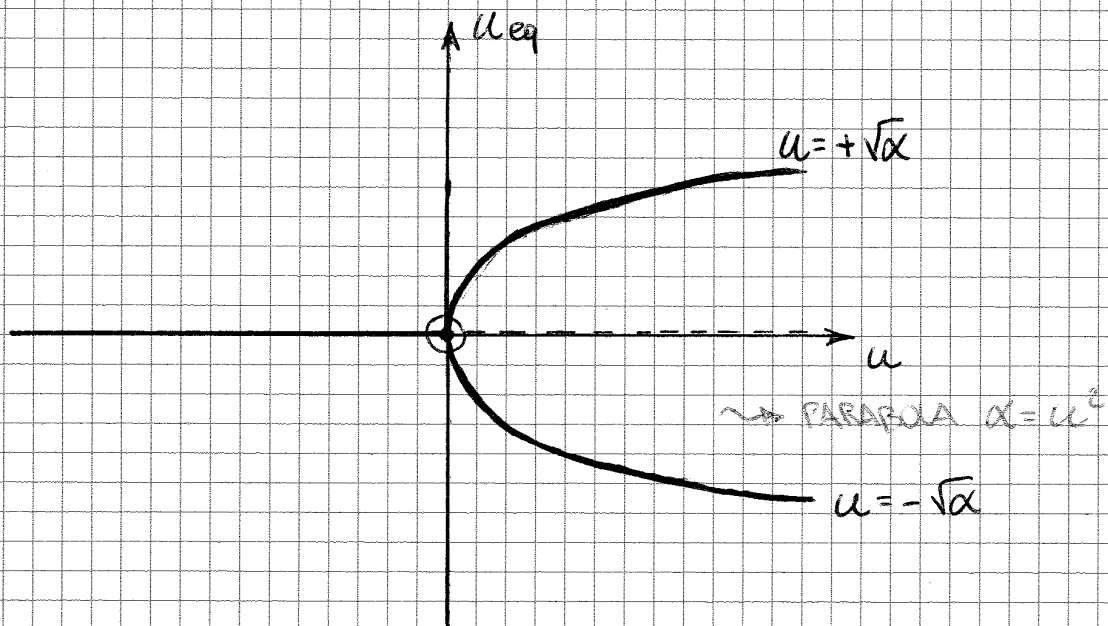
COME UNICO PUNTO DI EQUILIBRIO HO  $u = 0$   
 STABILITÀ:

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=0} = \alpha = 0$$

GRAFICAMENTE:



IN CASI COME QUESTO SI PUÒ RAPPRESENTARE IL COSIDDETTO DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE, CHE IN ASCISSA IL PARAMETRO DI RIFERIMENTO E IN ORDINATA I PUNTI DI EQUILIBRIO.



LA LINEA CONTINUA INDICA LA STABILITÀ  
LA LINEA TRATTEGGIATA L'INSTABILITÀ

$\alpha=0$  È DETTO PUNTO DI BIFORCAZIONE, POICHÉ NASCONO DUE PUNTI DI EQUILIBRIO NUOVI E UN PUNTO CAMBIA LA SUA STABILITÀ. SI NOTI CHE UN PUNTO DI BIFORCAZIONE È UN PUNTO CRITICO!! INFATTI

QUESTA BIFORCAZIONE È DIFFICILMENTE CONTROLLABILE NUMERICAMENTE, INFATTI CAMMINANDO ALL'INDIETRO SUL RAMO STABILE, NON POSSO, SUPERATO IL PUNTO DI BIFORCAZIONE, RIPRENDERE IL RAMO STABILE. HO QUINDI IRREVERSIBILITÀ.

SEMPRE NEL CASO SCALARE SI POSSONO AVERE ALTRI TIPI DI BIFORCAZIONI:

- BIFORCAZIONE TRANSCRITICA

DEL TIPO

$$\frac{du}{dt} = \alpha u - u^2 = u(\alpha - u)$$

CHE HA PUNTI DI EQUILIBRIO  $u=0$  E  $u=\alpha$   
STABILITÀ:

$$\frac{df}{du} = \alpha - 2u$$

- SE  $\alpha < 0$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=0} = \alpha < 0 \Rightarrow u=0 \text{ STABILE}$$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=\alpha} = -\alpha > 0 \Rightarrow u=\alpha \text{ INSTABILE}$$

- SE  $\alpha > 0$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=0} = \alpha > 0 \Rightarrow u=0 \text{ INSTABILE}$$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=\alpha} = -\alpha < 0 \Rightarrow u=\alpha \text{ STABILE}$$

- SE  $\alpha = 0$

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\alpha} = 0 \quad \text{CASO DEGENERE}$$



STABILITÀ:

$$\frac{d\delta}{du} = -2u$$

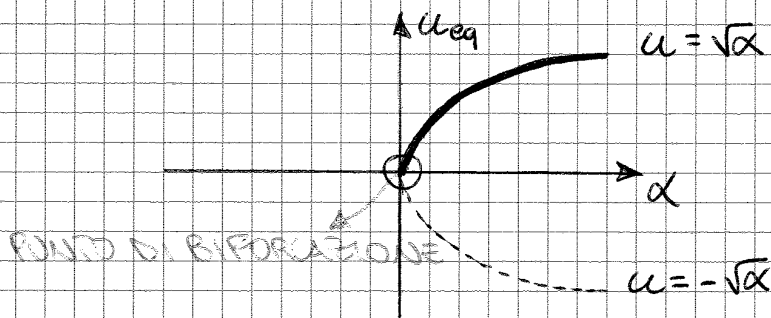
• SE  $\alpha = 0 \Rightarrow u = 0$  È DEGENERE POICHÉ  $\left. \frac{d\delta}{du} \right|_{u=0} = 0$

• SE  $\alpha > 0 \Rightarrow \left. \frac{d\delta}{du} \right|_{u=\pm\sqrt{\alpha}} = \mp 2\sqrt{\alpha}$



$\left. \begin{array}{l} < 0, \text{ STABILE PER } u = \sqrt{\alpha} \\ > 0, \text{ INSTABILE PER } u = -\sqrt{\alpha} \end{array} \right\}$

DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE:



QUINDI NEL CASO SCALARE, TUTTI I TIPI DI BIFORCAZIONE SONO RICONDUCEBILI AI QUATTRO ESEMPI APENA CITATI:

- A FORCHETTA SUPER CRITICA
- A FORCHETTA SUBCRITICA
- TRANSCRITICA
- NOBIL - SQUA

DA CUI DIPENDE LA NATURA DEL PUNTO DI EQUILIBRIO UNA VOLTA TROVATI GLI AUTOVALORI

$$\lambda = \mu \pm i\omega$$

AVENDO AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI

- SE  $\mu < 0 \Rightarrow$  HO UN FUOCO STABILE
- SE  $\mu = 0 \Rightarrow$  HO UN CENTRO (STABILITÀ NEUTRA, PERCUI NON SI POSSONO ESTENDERE I RISULTATI AL SISTEMA NON LINEARE)
- SE  $\mu > 0 \Rightarrow$  HO UN FUOCO INSTABILE

ORA CERCHIAMO DI LAVORARE SUL SISTEMA NON LINEARE, SPERANDO DI OTTENERE QUALCOSA DI PIÙ SOPRATTUTTO NEL CASO  $\mu = 0$ .

ESSENDOCI UN TERMINE  $x^2 + y^2$ , PASSIAMO IN COORDINATE POLARI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$$

EQUILIBRIO

PERCUI DA  $f(x, y)$  PASSO A:

$$\hat{f}(r, \theta) = f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

E DA  $g(x, y)$  PASSO A  $\hat{g}(r, \theta)$ .

IL SISTEMA IN CARTESIANE INIZIALE È EQUIVALENTE AD UNO SCRITTO IN POLARI

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \theta \hat{f}(r, \theta) + \sin \theta \hat{g}(r, \theta) \\ r \dot{\theta} = \cos \theta \hat{g}(r, \theta) - \sin \theta \hat{f}(r, \theta) \end{cases}$$

DUNQUE IN POLARI IL SISTEMA DIVENTA:

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu r - r^3 \\ \textcircled{2} & \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{aligned} \right\} \text{ESSENDO} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \end{cases}$$

LE DUE EQUAZIONI SONO DISACCOPPIATE

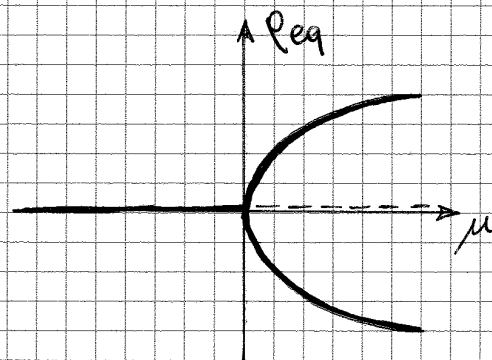
RISOLVO LA  $\textcircled{2}$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

RISOLVO LA  $\textcircled{1}$ :

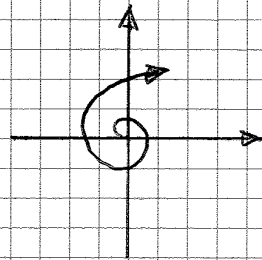
$$\frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2)$$

CHE PERÒ È PROPRIO IL MODELLO DELLA BIFORCAZIONE A FORCHETTA SUPERCRTICA

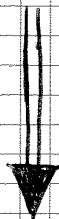


- PER  $\mu < 0$  HO UN PUNTO DI EQUILIBRIO IN  $r = 0$ , OSSIA  $(x, y) = (0, 0)$
- PER  $\mu = 0$  HO UN PUNTO DI BIFORCAZIONE
- PER  $\mu > 0$  HO CHE  $r = 0$ , OSSIA  $(x, y) = (0, 0)$ , DIVENTA INSTABILE E NASCONO DUE PUNTI DI EQUILIBRIO STABILI  $r = \pm \sqrt{\mu}$ .

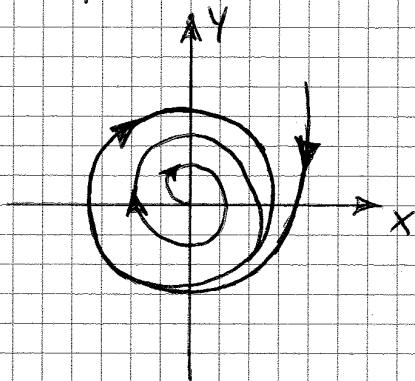
• PER  $\mu > 0$  :



ORIGINE COME FUOCO  
INSTABILE



CON L'ANALISI FATTA COL PASSAGGIO IN  
POLARI, SI VEDE CHE SI VA A FINIRE IN  
UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO  $\sqrt{\mu}$



DEFINIAMO DUNQUE IL CICLO LIMITE :

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO  $\bar{u}(t)$  TENDE  
AD UNA CURVA CHIUSA  $\gamma$ , DETTA CICLO LIMITE, SE  
ESISTE UN PERIODO  $T > 0$  TALE CHE  $\bar{u}(t + nT)$   
TENDE AD UN PUNTO DI  $\gamma$  PER  $\bar{u}_0 \rightarrow \infty$

A DIFFERENZA DELL'OSCILLATORE ARMONICO O DI ALTRI  
SISTEMI MECCANICI, QUESTE SONO OSCILLAZIONI AUTO-  
SOSTENUTE IN CUI NON HO BISOGNO DI UNA FORZANTE  
ESTERNA ED HO UN'AMPIEZZA BEN DEFINITA, CHE DIPENDE  
DAL VALORE DEL PARAMETRO E NON DALLA CONDIZIONE  
INIZIALE. INFATTI, FISSATO  $\mu$ , HO FISSATO IL RAGGIO  
DELLA CIRCONFERENZA ~~invariante~~ STABILE, INDIPENDENTE  
MENTE DALLE CONDIZIONI INIZIALI.

$$\text{CON } \frac{d\alpha}{d\alpha}(\alpha = \alpha_B) > 0$$

⇒ ESISTE UN CICLO LIMITE DI CUI PERÒ NON SI CONOSCE LA STABILITÀ. OMMERO AUMENTANDO  $\alpha$  PASSO DA STABILE AD INSTABILE.

### MODELO DI VAN DER POL

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = (\alpha - \beta x^2)v - \gamma x \end{cases}$$

STUDIANDO LA STABILITÀ LINEARE SI VEDE CHE L'ORIGINE È PUNTO DI EQUILIBRIO E SI VEDE CHE:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

DA CUI GLI AUTOVALORI:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma} \right)$$

SI VEDE CHE:

- SE  $\alpha < 0 \Rightarrow (0,0)$  È STABILE
- SE  $\alpha > 0 \Rightarrow (0,0)$  È INSTABILE

IN PARTICOLARE:

- SE  $\alpha \leq -2\sqrt{\gamma} \Rightarrow \lambda$  REALI E NEGATIVI  $\Rightarrow$  NODO STABILE
- SE  $-2\sqrt{\gamma} < \alpha < 0 \Rightarrow \lambda$  COMPLESSI CON  $\text{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  FUOCO STABILE

ESERCIZIO:

DETERMINARE LA NATURA DEI PUNTI CRITICI (PUNTI DI EQUILIBRIO) DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{X} = 2X + 3Y \\ \dot{Y} = -X - Y \end{cases} \quad (\text{SISTEMA LINEARE})$$

PUNTI DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 0 \\ -X - Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

UNICO PUNTO CRITICO  $O(0,0)$

NATURA - STABILITÀ:

GLI AUTOVALORI  $\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

ESSENDO UN SISTEMA LINEARE COINCIDE CON LO JACOBIANO

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 3i^2$$

$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE  $> 0$

$\Rightarrow O(0,0)$  È UN FUOCO INSTABILE