NUMERO: 559

DATA: 13/06/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Marchisa

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. Mazzi

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^n$:

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, intorno sferico di $\bar{x}$ centro di raggio $\rho > 0$:

$B_\rho(x) = B(x;\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x;\bar{x}) < \rho\}$

aperto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}$

chiuso $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq \rho\}$

Dato un insieme A contenuto in $\mathbb{R}^n$ e dato un punto x di A, si dice interno di A se esiste un intorno $B(x;\rho)$ tutto contenuto in A.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ si dice interno ad $A \Leftrightarrow \exists B(x;\rho) \subseteq A$

$int(A) = \mathring{A} = \{x \in A,\ x \text{ interno ad } A\}$ $\Rightarrow$ parte interna

Si chiama aperto un insieme se tutti i suoi punti sono interni, cioè se $A = \mathring{A}$ (non ha punti sulla superficie)

$\bar{x}$ si dice punto di frontiera di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se $\forall$ intorno di centro $\bar{x}$ e raggio ρ ($\forall B(\bar{x};\rho)$) interseca sia l'insieme, sia il complementare

$A \cap B_r(\bar{x}) \neq \emptyset$ e $CA \cap B_r(\bar{x}) \neq \emptyset$

L'insieme dei punti di frontiera si chiama Frontiera di A o bordo
($\partial A = Fr A$) se $\{\bar{x} : \text{punto di frontiera di } A\}$ $\partial A = \partial CA$

Se $\partial A \subseteq A$ si dice che A è chiuso ed il suo complementare è aperto

$A \cup \partial A = \bar{A}$ è la chiusura di A, cioè un insieme chiuso che contiene tutti i punti di A, $A \subseteq \bar{A}$, ed è il più piccolo chiuso che contiene A

$$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} = A \cup \partial A$$

$$\underbrace{\mathring{A} = A}_{\text{aperto}} \underbrace{= \bar{A}}_{\text{chiuso}}$$

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists M > 0 : \forall x \in A,\ \|x\| = d(x,0) \leq M \in \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso (per archi) se $\forall (x,y) \in A$ $\exists$ un arco di curva che unisce x a y ed è interamente contenuto in A

x_0 è un punto isolato per A se esiste $r > 0$ tale che $A \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$

x_0 è un punto di accumulazione per A se $\forall r > 0$ si ha che
$[A \cap B_r(x_0)] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
cioè se ogni intorno di x_0 contiene punti di A diversi da x_0.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$: A è aperto se $\forall$ punto di A è interno ad A ($int(A) = A$)

A è chiuso se CA è aperto

A è limitato se $\exists r > 0 : A \subseteq B_r(0)$

A è compatto se è chiuso e limitato

Se f è di classe C^1 su un aperto Ω allora f è differenziabile in tutti i punti di Ω

Teorema di Schwarz:

se f è di classe C^2 su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto allora le derivate parziali miste sono uguali

$$\frac{d}{dx_2}\left(\frac{df}{dx_1}\right)=\frac{d}{dx_1}\left(\frac{df}{dx_2}\right)$$

Teorema di Weierstrass

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo in Ω

Teorema di derivazione di una funzione composta:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$$

$$\vec{x} \to F(\bar{x}) \to G(F(\bar{x})) = G \circ F(\bar{x})$$

se F è differenziabile in $\bar{x}$ e G è differenziabile in $F(\bar{x})$ allora la funzione $G \circ F$ è differenziabile in $\bar{x}$ e la $J_{\bar{x}}(G \circ F)$ è uguale a $J_{F(\bar{x})}G \cdot J_{\bar{x}}F$

$$d(g \circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x))$$

Teorema della funzione inversa

1 VARIABILE: $- f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\bar{x}$, punto interno al dominio
$- f'(\bar{x}) \neq 0$
$\Rightarrow \exists$ un intorno di $\bar{x}$ e un intorno di $f(\bar{x})$:

$$\exists f^{-1}: B(f(\bar{x})) \to B(\bar{x}) \quad f^{-1} \text{ è derivabile in } f(\bar{x})$$

$$(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è invertibile se e solo se la matrice che esprime A è invertibile, cioè se il suo determinante è $\neq 0$

PIÙ VARIABILI: $- F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenziabile in $\bar{x}$
$\Rightarrow \exists J_{\bar{x}}F$ invertibile in $\bar{x}$
$\Rightarrow \exists B_\rho(\bar{x})$, $\exists B_{\rho_1}(F(\bar{x}))$
$\exists F^{-1}: B_{\rho_1}(F(\bar{x})) \to B_\rho(\bar{x})$

$$J_{F(\bar{x})}(F^{-1}) = (J_{\bar{x}}F)^{-1}$$

$f(x,y)$ è a scala se l_{ij} è costante su $(x,y) \in R_{ij}$

$$\int_R f = \sum_{i=0/j=0}^{n-1/k-1} l_{ij}\,(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)$$ integrale della funzione a scala

funzione f limitata su un rettangolo R:
- $g(x,y)$ a scala su R tale che $f(x,y) \leq g(x,y)$ su R
- $h(x,y)$ a scala su R tale che $f(x,y) \geq h(x,y)$ su R

CALCOLO INTEGRALE: INTEGRALI MULTIPLI

~~formule di Riduzione~~

f sia Riemann-integrabile su un rettangolo $R: [a,b] \times [c,d]$

① $\forall y \in [c,d] \quad \exists g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

$$\Rightarrow \int_R f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

② $\forall x \in [a,b] \; \exists h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

$$\Rightarrow \int_R f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

③ se f è continua su R posso usare sia la 1 che la 2

$$\int_R f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

- l'integrale è lineare se f e g sono integrabili, allora αf è integrabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $f+g$ è integrabile.

$$\int_R \alpha f = \alpha \int_R f \qquad \int_R f+g = \int_R f + \int_R g$$

- se $f \le g$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \le \int_\Omega g$
- e $\left| \int_\Omega f \right| \le \int_\Omega |f|$
- se $f \geq 0$ su R, f è integrabile $\Rightarrow \int_R f \geq 0$
- se f è continua su R, $f \geq 0$ su R $\quad \int_R f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ su R
- se $f(x,y) = g(x,y)$ fuori da un segmento $\Rightarrow \int_R f = \int_R g$
- $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ - g è definita su $I = [a,b]$ e integrabile su $[a,b]$
  - h è integrabile su $[c,d]$

$\Rightarrow g(x) \cdot h(y)$ è integrabile su $R = [a,b] \times [c,d]$

e $\int_R f = \int_R g(x) \cdot h(y) = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$

Funzione caratteristica di Ω: $\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$

chi di Ω

Ω è **misurabile** $\Leftrightarrow \chi_\Omega$ è integrabile su R

$|\Omega| = \int_R \chi_\Omega = m(\Omega)$ è la **misura** di Ω di Peano-Jordan

la misura non dipende dal rettangolo R considerato.

- se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile con $1 \le n \le k \Rightarrow m_k(\Omega) = 0$

Ω è un insieme **orizzontalmente convesso** se $\exists \alpha, \beta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue tali che:

$$\Omega = \{(x,y) : c \le y \le d \wedge \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

Gli insiemi orizzontalmente e verticalmente convessi sono misurabili

Teoremi di Riduzione per domini verticalmente e orizzontalmente convessi

- VERTICALMENTE C.: $\exists h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b \quad h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

f continua quasi ovunque su Ω

$$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

- ORIZZONTALMENTE C.: $\exists g_1, g_2 : [c;d] \to \mathbb{R}$ continue

$$\Omega = \{(x,y) : c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

f è continua quasi ovunque su Ω

$$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Additività rispetto al dominio:

Ω_1, Ω_2 misurabili e $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

se $|\Omega_1 \cap \Omega_2|$ non è nullo:

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$$

Sia $\subseteq \Omega \mathbb{R}^2$ un rettangolo con lati paralleli agli assi x e y, cioè Ω è della forma $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione della forma $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ con $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x)\, dx \int_c^d f_2(y)\, dy$$

Teorema del Cambiamento di Variabili

- Siano R e $R' \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, non vuoti, connessi,
- f una funzione continua e limitata;
- $\Phi : R \to R$ è un cambiamento di variabili se:
  1. Φ è biunivoca (iniettiva e suriettiva)
  2. Φ di classe C^1 su R' (se $\det J(\Phi)$ è continua)
  3. $J_P \Phi$ invertibile $\forall P \in R$ cioè $\neq 0$

$$\Rightarrow \int_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_{R'} f(\Phi(u,v))\, |\det J_\Phi(u,v)|\, du\, dv$$

Integrazione per fili paralleli ad un asse

ASSE z: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

ASSE y: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D,\ \alpha(x,z) \le y \le \beta(x,z)\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dx\,dz$$

ASSE x: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,\ \alpha(y,z) \le x \le \beta(y,z)\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dy\,dz$$

Integrazione per strati paralleli ad un piano

PIANO xy: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b,\ (x,y) \in \Omega_z\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz$$

PIANO xz: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le y \le b,\ (x,z) \in \Omega_y\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\Omega_y} f(x,y,z)\,dx\,dz\right] dy$$

PIANO yz: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b\ \ (y,z) \in \Omega_x\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right] dx$$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi x,y,z e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione della forma $f(x,y,z) = f_1(x)\,f_2(y)\,f_3(z)$ con $f_1: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2: [c,d] \to \mathbb{R}$, $f_3: [e,f] \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy \cdot \int_e^f f_3(z)\,dz$$

Teorema del cambiamento di variabili

$\Phi: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to A' \subseteq \mathbb{R}^3$ $\qquad A, A'$ aperti

- Φ biunivoca
- Φ di classe C^1 su A'
- $\det J_\Phi(P) \neq 0 \quad \forall P \in A'$

Φ è un cambiamento di variabili:

$\Rightarrow \Omega' \subset A'$ aperto $\Rightarrow \Phi(\Omega')$ è un aperto di A

$$y_B = \frac{1}{M(\Omega)} \int_\Omega y\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$z_B = \frac{1}{M(\Omega)} \int_\Omega z\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Il momento di inerzia di Ω rispetto all'asse r è:

$$I = \int_\Omega d^2(x,y,z)\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{M(\Omega)}{m(\Omega)} \int_\Omega d^2(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Solidi di Rotazione

Parametrizzazione con coordinate cilindriche in cui il parametro fisso è l'asse di rotazione.

$$\Omega(\Omega) = 2\pi \int_S \rho\, d\rho\, dz$$

$$= 2\pi \int_S y\, dy\, dz$$

Teorema di Guldino (Primo)

Sia $S \subseteq$ piano (x,y) un insieme misurabile, $x \geq 0$ e V_S il solido di rotazione di S intorno all'asse z, allora il volume di S sarà:

$$|V_S| = 2\pi \int_S x\, dx\, dz$$

$$= (2\pi\, x_G)\, |S|$$

$|V_S| =$ (area di S) $\times$ (lunghezza circonferenza di G)

perché $x_G = \frac{1}{M} \iint_S x\, dx\, dz$

$$M = \iint_S 1\, dx\, dz = |S| \text{ area di } S$$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, diciamo che Ω è **connesso per archi** se $\forall x, y \in \Omega$ esiste una curva parametrica $\gamma[a,b] \to \Omega$ tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

INTEGRALE CURVILINEO di PRIMA SPECIE

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua

$\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare.

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\| \gamma'(t) \|}_{\text{norma del vettore } \gamma'(t)} dt$$

$\int_\gamma f \, ds$ se $f = 1 \Rightarrow \int_\gamma f \, ds = \ell =$ lunghezza della curva γ

Sia f una funzione continua su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, siano $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}^2$ due curve che differiscono per un cambiamento di parametrizzazione:

$$\gamma[a,b] = \sigma[c,d] \subseteq \Omega \Rightarrow \int_\gamma f = \int_\sigma f$$

<u>dimostrazione</u>:

$\varphi: [c,d] \to [a,b]$ biunivoca di C^1, $\varphi'(s) \neq 0 \ \forall s$

$\gamma(\varphi(s)) = \sigma(s)$

$\frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) = \vec{\gamma}'(\varphi(s)) \varphi'(s) = \vec{\sigma}'(s)$

$$\int_\sigma f = \int_c^d f(\sigma(s)) \| \sigma'(s) \| ds$$

$t = \varphi(s)$

$dt = \varphi'(s) \, ds$

$\varphi^{-1}(a)$, $\varphi^{-1}(b)$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| dt$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\gamma(\varphi(s))) \| \gamma'(\varphi(s)) \| \varphi'(s) \, ds$$

- se $\varphi'(s) > 0 \Rightarrow \varphi$ è strettamente crescente

$\varphi^{-1}(a) = c \quad \varphi^{-1}(b) = d$

$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \| \gamma'(\varphi(s)) \| \cdot | \varphi'(s) | \, ds =$$

$$\| \sigma'(s) \| = \| \tfrac{d}{ds} \gamma'(\varphi(s)) \| = \| \gamma'(\varphi(s)) \| \, \| \varphi'(s) \| =$$

$$\int_\sigma f = \int_c^d \varphi(\sigma(s)) \| \sigma'(s) \| ds$$

CALCOLO INTEGRALE: INTEGRALI di SUPERFICI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi. Si chiama **superficie parametrica** una funzione continua $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$.

Si chiama sostegno di σ l'immagine di σ, $\Sigma = \sigma(A)$. È una superficie in $\mathbb{R}^3$ $\Sigma = \sigma(A) = \{\sigma(u,v) : (u,v) \in A\}$

σ è **semplice** se è iniettiva

σ è **regolare** se è di classe C^1 e se $\forall (u,v) \in A$ la matrice $J\sigma(u,v)$ di σ in (u,v) ha rango massimo, cioè due.

Si chiama **calotta regolare** la restrizione di σ ad un qualunque compatto K contenuto in A, la cui frontiera sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti.

$$\sigma|_K : K \to \mathbb{R}^n$$

con $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ regolare su un aperto A connesso, $\mathring{A} \neq \emptyset$
K compatto (chiuso e limitato), connesso $\mathring{K} \neq \emptyset$, misurabile
∂K unione di un numero finito di archi di curva regolare a tratti

$$\text{Area di } \sigma(K) = \Sigma = \iint_K \|\vec{N}(u,v)\| \, du\, dv$$

I due vettori della matrice Jacobiana sono linearmente indipendenti e individuano un piano in $\mathbb{R}^3$ tangente alla superficie parametrica σ in $\sigma(u_0,v_0)$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ una superficie semplice e regolare e $(u,v) \in A$. Si chiama **vettore normale** al piano tangente alla superficie in $\sigma(u,v)$ il vettore:

$$N(u,v) = \frac{d\sigma}{du}(u,v) \wedge \frac{d\sigma}{dv}(u,v)$$

Il versore $n = \frac{N}{\|N\|}$ è detto versore normale alla superficie avente lo stesso verso di N.

σ induce su Σ un orientamento, detto verso di attraversamento

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ due aperti connessi per archi: $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma : B \to \mathbb{R}^3$ due superfici semplici e regolari.
Diciamo che σ e γ sono **equivalenti** se esiste una funzione $\alpha : B \to A$ biettiva e di classe C^1 con $\det J\alpha(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in B$ tale che $\gamma = \sigma \circ \alpha$
σ e γ hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso orientamento.
Se $J\alpha(x,y) < 0$ $\forall (x,y) \in B$. Allora σ e γ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso orientamenti opposti.

CALCOLO INTEGRALE: GAUSS, GREEN, STOKES

TEOREMA di GREEN ⇒ 2 VARIABILI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato non vuoto con bordo tale che ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$
$F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe $C^1(\Omega)$ def su Ω aperto
∂A è orientato positivamente, cioè induce su ∂A un verso di percorrenza antiorario.

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{dF_2}{dx}(x,y) - \frac{dF_1}{dy}(x,y) \right) dx\,dy$$

con $F(x,y) = (F_1(x,y) \,;\, F_2(x,y))$

se $\frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y) = 1 \Rightarrow m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP$ = area di A

Formule di Gauss-Green

A è un aperto con bordo
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$, $\bar{A} \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} f\, dy = \iint_A \frac{dF}{dx} dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} f\, dx = - \iint \frac{dF}{dy} dx\,dy$$

TEOREMA di STOKES ⇒ 3 VARIABILI

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
$\text{rot}\, F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ continua su Ω

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che ∂A sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $K = \bar{A} = A \cup \partial A$ (con K compatto, $\partial K = \partial A$) e $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare.
Si chiama bordo di σ la restrizione di σ a ∂K

$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale di classe C^1
Ω aperto non vuoto
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a due a due disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici e regolari a tratti,
$K = \bar{A} = A \cup \partial A$ e $\sigma : K \to \Omega$ una calotta regolare con $\partial\sigma$ orientato positivamente

$$\oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot}\, F \cdot n$$

CALCOLO INTEGRALE: CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale.
Si dice che un campo f continuo su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, connesso è conservativo se esiste $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che:

$$\nabla\varphi(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

φ si dice potenziale di F su Ω $\qquad \omega = F_1 dx_1 + \dots F_n dx_n$
se $\omega = d\varphi$ si dice che ω è una forma esatta $\qquad$ formula esatta se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

Se φ è un potenziale di F su Ω allora $\forall k \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) + k$ è un potenziale di F su Ω

DIMOSTRAZIONE: $\nabla(\varphi(x) + k) = \nabla\varphi(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$ perché $k = cost$

F è continua su Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^n$, F è conservativo su Ω ~~e~~ se φ è un suo potenziale, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva, allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

DIMOSTRAZIONE:

$[a;b] \to \mathbb{R} \qquad t \to \varphi(\gamma(t)) = h(t)$ è C^1

derivabile su (a,b), $h'(t) = \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt - \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$\int_a^b h'(t)\, dt$ continua ; $h(t)$ è una sua primitiva

$$\int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

- Se F è conservativo su Ω connesso e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ curva regolare tale che:
$$\gamma(a) = A \; ; \; \gamma(b) = B \qquad \varphi \text{ è un potenziale}$$
$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP$ dipende solo da B e da A ed è $= \varphi(B) - \varphi(A)$ e non dal percorso

- Se F è conservativo su Ωxy connesso, γ è una qualunque curva chiusa con il sostegno contenuto in Ω
$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = \oint_\gamma F \cdot dP = 0 \qquad \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$
$$\oint_\gamma F \cdot dP = \varphi(B) - \varphi(A) = 0$$
$$= \int_{\gamma_2 - \gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP - \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0$$

- Se $\exists$ una curva chiusa γ tale che $\oint_\gamma F \cdot dP \neq 0$ allora F è un conservativo su un aperto che contiene il sostegno di γ

$= \frac{1}{h}\int_0^h F(x_1+t, x_2, \dots x_n)(1,0,\dots 0)\, dt =$

$= \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{F_1(x_1+t, x_2 \dots x_n)}_{= k(t) \text{ continua}} dt$

$= \frac{1}{h}\int_0^h k(t)\, dt \Rightarrow$ media integrale

Teorema della media integrale

Se k funzione continua, nell'intervallo $[0,h]$ e $c_k \in [0,h]$ tale che:

$$\frac{1}{h}\int_0^h k(t)\, dt = k(c_k) = F_1(x_1+c_k, x_2, \dots x_n)$$

$\lim_{h\to 0} F_1(x_1+c_h, x_2 \dots x_n) =$ $\quad 0 < c_h < h$

$= \lim_{c_h \to 0} F_1(x_1+c_h, x_2 \dots x_n) =$ $\quad$ per la continuità di F_1

$= F_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ cvd

Lavorando in modo analogo su tutte le componenti si ottiene che $\nabla\varphi = F$ su Ω

CONDIZIONE NECESSARIA PER I CAMPI CONSERVATIVI di CLASSE C^1

$F \in C^1(\Omega)$ e F è conservativo su Ω connesso, aperto, $\neq \emptyset$ allora $\frac{dF_i}{dx_j}(x) = \frac{dF_j}{dx_i}(x) \quad \forall i,j = 1, \dots n$

$n=3$ significa che $\text{rot} F(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$

DIMOSTRAZIONE

Se φ è un potenziale di F su $\Omega \Rightarrow \varphi \in C^2(\Omega)$ perché $\nabla\varphi = F \in C^1$

$$\frac{dF_i}{dx_j} = \frac{d}{dx_j}F_i = \frac{d}{dx_j}\frac{d\varphi}{dx_i} = \frac{d^2\varphi}{dx_j\, dx_i}$$

$$\frac{dF_j}{dx_i} = \frac{d}{dx_i}F_j = \frac{d}{dx_i}\frac{d\varphi}{dx_j} = \frac{d^2\varphi}{dx_j dx_i}$$

se $i \neq j$ poiché $\varphi \in C^2(\Omega)$ vale il teorema di Schwatz e

$$\frac{dF_i}{dx_j} = \frac{d^2\varphi}{dx_j dx_i} = \frac{d^2\varphi}{dx_i dx_j} = \frac{dF_j}{dx_i} \quad \forall x \in \Omega$$

Il teorema inverso non è sempre vero

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è irrotazionale per Ω se $\frac{dF_i}{dx_j}(x) = \frac{dF_j}{dx_i}(x)$ su Ω $\forall i,j$

$F = (F_1, \dots F_n)$ è di classe C^1 su Ω:
- F è conservativo su $\Omega \Rightarrow F$ è irrotazionale su Ω
- se $\omega = \sum_{i=1} F_i dx_i$ è chiuso su $\Omega \Rightarrow \omega$ è esatto su Ω

Siano $0 < a \leq b \leq +\infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| < b\}$ e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale
Diciamo che F è **radiale** se è della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$
dove $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione

Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo radiale continuo $\Rightarrow$ F è conservativo

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto
Diciamo che Ω è **connesso per archi** se $\forall x, y \in \Omega$ $\exists$ una curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega$ regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Proprietà dei potenziali

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω
Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f - g = c$ cioè $f(x) - g(x) = c$ $\forall x \in \Omega$

se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ si dice che $\{a_n\}$ è convergente

se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ (o -\infty)$ si dice che $\{a_n\}$ è divergente positivamente (o negativamente)

se $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ la successione è indeterminata

- $\forall p \in \mathbb{R},\ p>0 \quad \sqrt[n]{p} = p^{1/n}$

$\lim_{n\to+\infty} p^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} p^x = 1$

- $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log n = \lim \frac{\log n}{n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{1/n \log n} = e^0 = 1$

Si dice che una successione soddisfa "definitivamente" una proprietà se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0$, la successione soddisfa la proprietà.

Una successione $a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è ~~crescente~~ se $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}$

$\Leftrightarrow \quad \forall n \quad a_n < a_{n+1}$

DIMOSTRAZIONE

Prendo n_1 e n_2 $\quad n_1 < n_2 \quad$ con $n_2 = n_1, n_1+1, n_1+2, n_1+(n_2-n_1)$

per Hp: $a_{n_1} < a_{n+1} < a_{n_1+2} < \cdots < a_{n_1+(n_2-n_1)} = a_{n_2}$

$a_n = f(x)$

$0 < n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n > 0$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente

$f(x)$ è definita su $(0,+\infty)$ è derivabile

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ su $(0,+\infty) \qquad f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f$ è strettamente decrescente su $(0,+\infty)$

$\Rightarrow a_n = f(n)$ è decrescente su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Criterio della Radice

$\{a_n\}$ a_n definita positiva

$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ $\begin{cases} \text{se } \ell<1 \Rightarrow \exists \lim_n a_n = 0 \\ \text{se } \ell>1 \Rightarrow \exists \lim_n a_n = +\infty \\ \text{se } \ell = 1 \quad ? \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE RAPPORTO

$\ell<1$ e $a_n>0$ $(n \geq \bar{n})$

$\varepsilon = 1-\ell$

$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\forall B_\varepsilon(\ell), \forall \varepsilon$ scelgo $\varepsilon = 1-\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$

$\exists n_0 > \bar{n}$ tale che $n \geq n_0 \Rightarrow \ell-(1-\ell) < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1-\ell$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow \{a_n\}$ è una successione definitivamente decrescente

$\Rightarrow \exists \lim_n a_n = \ell \geq 0$ $(a_n>0)$

Suppongo $\ell \neq 0$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1$ assurdo perché per Hp $\ell<1 \Rightarrow \ell = 0$

$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ se prendo le successioni $b_n = \frac{1}{a_n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}/a_n} = \frac{1}{\ell} < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$S_4 = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$\vdots$

$S_n = 1 - \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ serie telescopiche

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ tali che $\exists n_0$, $n > n_0$ $a_n = b_n$

$\Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso comportamento

DIMOSTRAZIONE

$\sum a_n = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots$

$\sum b_n = b_0 + \dots + b_{n_0-1} + b_{n_0} + \dots$

$S_0 = a_0$ $\quad t_0 = b_0$

$S_1 = a_0 + a_1$ $\quad t_1 = b_0 + b_1$

$\vdots$

$S_{n_0} = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + a_{n_0}$

$\vdots$

$S_n = \underbrace{a_0 + \dots + a_{n_0-1}}_{n \geq n_0} + a_{n_0} + \dots a_n$ $\quad t_n = \underbrace{b_0 + \dots + b_{n_0-1}}_{n \geq n_0} + a_{n_0} + \dots a_n$

$t_n = b_0 + \dots + b_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots a_n =$

$= a_0 + \dots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_n - (a_0 + \dots a_{n_0-1}) + b_0 + \dots b_{n_0-1}$

$= S_n - S_{n_0-1} + t_{n_0-1}$

$\lim_n t_n = \lim_n (S_n - S_{n_0-1} + t_{n_0-1}) = \left[\lim_n S_n\right] - S_{n_0-1} + t_{n_0-1}$

$\sum b_n$ converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge

$\sum b_n = t = S - S_{n_0-1} + t_{n_0-1}$, $\quad \sum a_n = S$

$\sum b_n$ div. pos (neg) $\Leftrightarrow \sum a_n$ div. pos (neg)

$\sum b_n$ è indet. $\Leftrightarrow \sum a_n$ è indet se $\sum a_n$ è indeterminato $\Rightarrow$ $\sum \alpha a_n$ è indeterminata.

DIMOSTRAZIONE

$S_n = a_0 + \dots + a_n$

$t_n = \alpha a_0 + \dots \alpha a_n = \alpha S_n$

$\lim_n t_n = \lim_n \alpha S_n$ $\quad \alpha S$ se $S_n \to S$

$\quad$ $\operatorname{sgn} \alpha \cdot \infty$ se $S_n \to +\infty$

$\quad$ $\nexists$ se $\nexists \lim S_n$

Teorema della somma delle serie

$$\sum_{n \geq 0} a_n + \sum_{n \geq 0} b_n \overset{?}{=} \sum (a_n + b_n)$$

$\sum a_n$	$\sum b_n$		$\sum(a_n+b_n)$
conv a S	conv a T		conv a $S+T$
div $\pm\infty$	conv a T	$\Rightarrow$	div $\pm\infty$
div $+\infty$	div $+\infty$		div $+\infty$
div $-\infty$	div $-\infty$		div $-\infty$
div $+\infty$	div $-\infty$		?
ind	ind		?

DIMOSTRAZIONE

$\sum a_n$; $\sum b_n$; $\sum (a_n + b_n)$

$\sum(a_n+b_n) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) \dots + (a_n+b_n)$ ridotta n-esima della serie somma

$= S_n + t_n$ se riordino gli addendi

S_n: ridotta n-esima di $\sum a_n$ $\quad$ t_n: ridotta n-esima di $\sum b_n$

$\Rightarrow \sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$

$\lim_{n\to+\infty} [(a_0+b_0) + \dots + (a_n+b_n)] = \lim_{n\to+\infty} (S_n + t_n) \to S+T$ entr. conv

$S_n \to +\infty$, $t_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ entr. div.

Criterio del confronto.

$\sum a_n \quad \sum b_n \quad \forall n \geq 0, \; 0 \leq a_n \leq b_n$

① se $\sum b_n$ converge a $t \Rightarrow \sum a_n$ converge a $s \leq t$ $\sum a_n \leq \sum b_n$

② se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

DIMOSTRAZIONE

$s_0 = a_0 \leq b_0 = t_0$

$s_1 = a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1 = t_1$

$\vdots$

$s_n = s_{n-1} + a_n \leq t_{n-1} + b_n = t_n$

$\Rightarrow \forall n \quad 0 \leq s_n \leq t_n$

le serie sono a termini positivi $\Rightarrow \exists \lim_n s_n$ e $\exists \lim_n t_n$

Primo teorema del confronto:

1- se $\lim_n t_n = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_n s_n \leq t$ ma s_n è necessariamente $\geq 0 \Rightarrow \lim_n s_n = s \in \mathbb{R}$ con $0 \leq s \leq t$

2- se $\lim_n s_n = +\infty \Rightarrow \lim_n t_n = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

$\sum a_n$, $\sum b_n$ a termini definitivamente positivi.

se a_n e b_n hanno lo stesso ordine di grandezza, cioè se

$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$, $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento.

DIMOSTRAZIONE

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\ell \geq 0$

prendo $\varepsilon > 0$: $\ell - \varepsilon > 0$

$\exists n_0$, $n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

poiché $b_n > 0$ per n sufficientemente grande

$(\ell - \varepsilon) b_n < a_n < (\ell + \varepsilon) b_n$

se $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \sum (\ell - \varepsilon) b_n$ conv $\Rightarrow \sum b_n$ conv.

se $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum (\ell + \varepsilon) b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv

$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq 0$ per le proprietà degli integrali

$F(t_1) = \int_0^{t_1} f(x)\,dx$

$$F(t_2) = \int_0^{t_2} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{t_1} f(x)\,dx}_{F(t_1)} + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq F(t_1)$$

- sia $f(x)$ localmente integrabile su $[0,+\infty)$ e sia $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ o conv a $\ell \geq 0$
o div pos.

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t)$$

ma per la proposizione precedente $F(t)$ è crescente su $[0,+\infty)$ perciò il limite esiste e sarà uguale a:

$$\sup F(t) \quad t \geq 0 = \begin{cases} \ell \geq 0 \\ +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se f è localmente integrabile su $[0,+\infty)$ e $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

e se $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx = \begin{cases} \ell \\ +\infty \end{cases} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \\ \text{div pos.} \end{cases}$

$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx \qquad \exists \lim_{t\to\infty} F(t) = \ell \Leftrightarrow \forall a_n \to +\infty$

$\Rightarrow F(a_n) \to L$ per $n \to +\infty$

$\exists \lim_{t\to+\infty} F(x)$ per la prop. precedente

Criterio di Mac Laurin

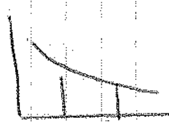
$f(x)$ definita su $[1;+\infty)$, $f(x) \geq 0$ (non negativa) $\forall x \geq 1$ e $f(x)$ decrescente su $[1,+\infty) \Rightarrow$ è localmente integrabile

1 – $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

hanno lo stesso comportamento

2 – $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

DIMOSTRAZIONE



$\forall x \in [n, n+1]$

$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

2 _ $\sum a_n$ div $\rightarrow \sum \varepsilon b_n$ div $\rightarrow \sum b_n$ div

- abbiamo $\sum a_n \quad a_n \geq 0$ definitivamente

1 _ se a_n è un infinitesimo di ordine $\geq \alpha > 1$ rispetto a $\frac{1}{n}$ allora $\sum a_n$ converge

2 _ se a_n è un infinitesimo di ordine ≤ 1 rispetto a $\frac{1}{n}$ allora $\sum a_n$ diverge

DIMOSTRAZIONE

1 _ se a_n ha ordine $\geq \alpha = 1 + \varepsilon$

allora se faccio $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/a_n^{\alpha}} = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \\ 0 \text{ se ha ordine} > \alpha \end{cases}$

se prendo $\lim \frac{a_n}{1/n^{1+\varepsilon/2}} = 0$ allora $a_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}\right)$ sono nelle ipotesi del criterio ~~del~~ precedente

$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} \quad \alpha > 1 \rightarrow$ conv $\rightarrow \sum a_n$ conv

2 _ se a_n è infinitesimo di ordine ≤ 1

Se a_n ha ordine $= 1$ rispetto a $\frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n} = \ell \neq 0$

$\rightarrow a_n \sim \frac{1}{n}$ per il primo criterio del confronto hanno lo stesso comportamento e $\sum \frac{1}{n}$ div $\rightarrow \sum a_n$ div.

a_n ha ordine < 1

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1/n}{a_n} = 0 \quad \sum \frac{1}{n}$ div.

$\Rightarrow \sum a_n$ div per il secondo criterio del confronto asintotico

Criterio di convergenza assoluta:

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, vale il criterio di convergenza assoluta e vale la disuguaglianza triangolare(*) : se la serie converge assolutamente allora la serie converge.

DIMOSTRAZIONE:

$b_n = \begin{cases} a_n \text{ se } a_n > 0 \\ 0 \text{ se } a_n < 0 \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} -a_n \text{ se } a_n < 0 \\ 0 \text{ se } a_n > 0 \end{cases}$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge se } p>1 \\ \text{diverge pos se } p\leq 1 \end{cases}$$

SERIE TELESCOPICHE

$$\sum (a_{n+1} - a_n)$$

Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge oppure si elimina, oppure si modifica un numero finito di termini

$\lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge

$\lim_n a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ converge

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_u > 0 \quad |x - x_0| < \delta_u$ e $x \in A$

- $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su A

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \; n > n_0$ e $x \in A$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Prendo $n > n_0$ e uso la continuità di f_n

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \neq$$

$$\neq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon} =$$

$$= < 3\varepsilon$$

Ho fissato $\varepsilon > 0$, ho scelto $n > N_0$, uso la continuità di f_n per scegliere $\delta_u > 0$. Se $|x - x_0| < \delta_u \rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ $x \in A$, $n > N_0$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_u > 0 : |x - x_0| < \delta_u \wedge x \in A$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$

$f_n(x)$ funzione continue su A

$f_n(x) \to f(x)$ su A

Se f non è continua su $A \Rightarrow f_n(x)$ non converge uniformemente a $f(x)$ su A.

Se $f_n(x) \to f(x)$ su A e $f_n(x)$ e $f(x)$ sono funzioni continue, non è detto che la convergenza sia uniforme.

Teorema del doppio limite

$\{f_n(x)\}$ definita su A, x_0 punto di accumulazione di A

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ uniformemente su A

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n$

$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = L \qquad \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \right)$ posso scambiare i due limiti solo se c'è convergenza uniforme

Se f_n continue $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$

Se f è continua $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\sup_{x\in[a,b]} |F_n - F| = \max_{x\in[a,b]} |F_n - F|$ per il teorema di Weierstrass

Devo far vedere che $\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0, \; n \geq n_0 \Rightarrow \max_{x\in[a,b]} |F_n - F| < \varepsilon$

$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| =$

$= \left| \int_{x_0}^{x} f_n(t) - f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,dt$

con $x_0 < x$

se $x_0 > x$ $\quad |F_n(x) - F(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,dt$

$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$

per $\forall x, x_0 \in [a,b]$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \max |f_n(x) - f(x)|$ $\quad \leq \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)|\,dt$

$\leq \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ $\quad f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ per H_p

$\Rightarrow \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| <$

$\forall x \in [a,b] \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : n \geq n_0, \; x \in [a,b], \; |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \max_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$

Corollario al teorema fondamentale del calcolo integrale

teorema: $f(x)$ funzione continua su $I \subseteq \mathbb{R}$

$\forall x, x_0 \in I \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$\Rightarrow F$ è derivabile su I e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

f di classe C^1 su I

$f'(x) = h(x)$ è continua su I

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$

$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \qquad \forall x \in I, \; x_0 \in I$

rappresentazione integrale di una funzione continua di C^1

SERIE di FUNZIONI

$f_n(x)$ definita su I $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$S_0(x) = f_0(x)$

$S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$

$\vdots$

$S_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x) = S_{n-1}(x) + f_n(x)$ successione delle ridotte → è una successione di funzioni

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente a $S(x)$ su I se

$$S_n(x) = (f_0(x) + \dots + f_n(x)) \rightrightarrows S(x)$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |S(x) - S_n(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum f_n(x)$ converge puntualmente a $S(x)$ su I se $\forall x \in I$:

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Teorema 1

Se $f_n(x)$ sono continue su I

se $\sum f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su I

$\Rightarrow S(x)$ è continua su I

DIMOSTRAZIONE

$S_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$ è continua, perchè somma di un numero finito di funzioni continue.

So che $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$

$\Rightarrow$ per il teorema delle successioni $S(x)$ è continua su I

Teorema 2 integrazione termine a termine

$f_n(x)$ sono continue su I

$\sum f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su I

$\forall a, b \in I \quad a \le b$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

$S_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$ conv. unif a $S(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 58

Criterio di Weierstrass

- $f_n(x)$ limitate su I insieme
- $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists M_n \ \forall x \in I, \ |f_n(x)| \leq M_n$
- $\sum_{n\geq 0} M_n$ sia convergente

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e uniformemente su I

inoltre $\left|\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right| \leq \sum_{n\geq 0} M_n$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x, \forall n$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge

$\sum |f_n(x)| \leq \sum_{n\geq 0} M_n$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge $\forall x \in I$

il criterio della convergenza assoluta:

$$\left|\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right| \leq \sum_{n\geq 0} |f_n(x)| \leq \sum_{n\geq 0} M_n$$

detta $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ e detta $S_n(x) = f_0(x) + \dots f_n(x)$

? $\sup_{x\in I} |S(x) - S_n(x)| \to 0$ per $n \to +\infty$ $\forall x \in I$

$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ = resto n-esimo della $\sum M_n$

$\Rightarrow \sup_{x\in I} |S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$

il resto di una serie converge $r_n \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |S(x) - S_n(x)| = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su I

$\sum f_n(x)$ converge assolutamente e uniformemente su I si dice che $\sum f_n(x)$ **converge totalmente** su I

DIMOSTRAZIONE:

1 – $R = \sup\{|x|, \sum a_n x^n \text{ conv}\} = 0$

$\Rightarrow x = 0$ è l'unico punto in cui la serie converge

2 – $\sup\{|x|, \sum a_n x^n \text{ conv}\} = R \in \mathbb{R}$ $R \neq 0$

$\Rightarrow \forall x, |x| < R$ la serie converge o in $|x|$ o in $|-x|$

3 – $R = +\infty \Rightarrow \sum a_n x^n$ conv $\forall x \in \mathbb{R}$ con $R \geq 0$ per def.

Teorema di Abel

Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0, +\infty)$ il suo raggio di convergenza.

Se $\sum a_n x^n$ conv in $I \Rightarrow \sum a_n x^n$ conv in $\forall [a,b] \subseteq I$

1 – Se $\sum a_n x^n$ converge in $[-R; R)$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge unif in $[-R; k)$ con $0 < k < R$

2 – se $\sum a_n x^n$ converge in $(-R; R]$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge unif in $(-k; R]$ con $0 < k < R$

3 – se $\sum a_n x^n$ converge in $[-R; R]$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge uniformemente in $[-R; R]$

Criterio del Rapporto

$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ $\exists n_0, \forall n \geq n_0$, $a_n \neq 0$

$$\exists \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad \begin{cases} \text{se } l > 0,\ l \in \mathbb{R} \Rightarrow R = 1/l \\ \text{se } l = 0 \Rightarrow R = +\infty \\ \text{se } l = +\infty \Rightarrow R = 0 \end{cases}$$

Il raggio di convergenza è il reciproco del limite del rapporto

DIMOSTRAZIONE

$\sum a_n x^n$ $b_n = a_n x^n$

$$\lim_n \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{|x|}}$$

- se $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = 0 \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ conv $\forall x$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow R = +\infty$

Teorema

$\sum a_n x^n = f(x)$ converge su I di estremi $(-R;R)$ con $R>0$

$\Rightarrow f(x)$ è continua su I

dim: $f_n(x) = a_n x^n$ continue su I

$\sum a_n x^n$ converge uniformemente a $f(x)$ sui compatti $\subseteq I$

$[-R;R]$ $\forall x \in (-R;R)$

$\exists [-R;x] \subseteq [-R;R] \Rightarrow f(x)$ è continua $\forall x \in I$

Teorema di integrazione termine a termine

$\sum a_n x^n$ converge uniformemente sui compatti $\subseteq I$

integrale di convergenza a $f(x) \Rightarrow \forall x \in I$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum a_n t^n\,dt = \sum \int_0^x a_n t^n\,dt$$

allora anche $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ ha raggio di conv R come $\sum a_n x^n$ $\forall x \in$ intervallo di conv.

DIMOSTRAZIONE:

segue dal teorema delle serie di funzioni

$\sum \int_0^x a_n t^n\,dt$ ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza

$$\sum \int_0^x a_n t^n\,dt \Rightarrow \sum \frac{a_n t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\sum \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad n+1 \to n$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum \frac{a_{n-1}}{n} x^n \cdot R$$

$$f(x) = \sum a_n x^n \cdot R$$

Teorema di derivazione termine a termine

$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n_0} x^{n_0} + \dots = f(x)$ su I

R è il raggio di convergenza

$$\sum (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad n-1 \to n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

FUNZIONI PERIODICHE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T>0$ se $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$

se si assegna $f(x)$ su $[0,T)$ prolungata per periodicità f su $\mathbb{R}$ significa:

$$f(x+kT) = f(x+T+\dots+T) = f(x)$$

- se f ha periodo $T \Rightarrow f(\alpha x)$ con $\alpha>0$ ha periodo $\frac{T}{\alpha}$

DIMOSTRAZIONE

$g(x) = f(\alpha x)$

$f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g\left(x+\frac{T}{\alpha}\right) = g(x) \ ? \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x+T) = f(\alpha x) = g(x)$$

- Sia f periodica di periodo $T>0$ e sia f localmente integrabile (integrabile su $[a,b]$ compatti)

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad \int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{T+a} f(x)\,dx$

DIMOSTRAZIONE

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+T} f(x)\,dx + \int_{a+T}^T f(x)\,dx$$

$\Downarrow$

$y = x-T$

$f(y+T) = f(y)$

$x = a+T \Rightarrow y = a+T-T = a$

$= \int_a^0 f(y)\,dy = -\int_0^a f(y)\,dy$

$x = T \to y = T-T = 0$

$\Downarrow$

$\int_a^0 f(y+T)\,dx$ di periodo T

$$\int_0^T f(x)\,dx = \cancel{\int_0^a f(x)\,dx} + \int_a^{a+t} f(x)\,dx - \cancel{\int_0^a f(y)\,dy}$$

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx \quad \text{integrale simmetrico rispetto all'origine}$$

Se $f(x)$ è periodica di periodo T integrabile sui compatti:

- se f è pari $\Rightarrow \int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 2\int_0^{T/2} f(x)\,dx$
- se f è dispari $\Rightarrow \int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = 0$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen} kx}_{\text{dispari}}\, dx = 0$$

f dispari $\rightarrow$ $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k\, dx = 0$ se cos a $-\pi$ e π è 0

identità di Parceval

$$\|f\|^2 = \int_0^T f^2 dx = T a_a^2 + \frac{T}{2} \Sigma (a_k^2 + b_k^2)$$

coefficienti di Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}(kx)\right) dx$$

f è monotona a tratti su un intervallo $[0,T]$ se è possibile suddividere $[0,T]$ in un numero finito di sotto intervalli

Se f è periodica di periodo T e monotona a tratti su $[0,T]$
$\Rightarrow f$ è continua a tratti e

$$f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$f_-(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x$$

Dico che f ha pseudo-derivata destra se $\exists$ finito

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f_+(x_0)}{x - x_0}$ e simile per la pseudo d-sinistra

Se f è continua in x_0 $f_+(x_0) = f_-(x_0) = f(x_0)$

Teorema

f periodica di periodo T

f continua a tratti su $\mathbb{R}$

f ha pseudo derivata destra e sinistra $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la serie di F di f converge puntualmente su $\mathbb{R}$ a $\tilde{f}(x)$