NUMERO: 558

DATA: 13/06/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Alovisi

MATERIA: Ingegneria Sismica
Prof. Sabia

CENNI DI SISMOLOGIA

1

"GLI EVENTI SISMICI SONO CAUSATI DA 1 LIBERAZIONE IMPROVVISA DI ENERGIA, SOTTO FORMA DI ONDE SISMICHE, CHE SI PROPAGANO ATTRAVERSO IL TERRENO".

• L'ORIGINE DELLA MATERIA SISMICA SI CONFIGURA CON LA TEORIA DELLA TETTONICA A ZOLLE

↳ SOSTIENE CHE LA PARTE SUPERIORE DELLA TERRA È SUDDIVISA IN 2 STRATI CON DIVERSE PROPRIETÀ DEFORMATIVE

- LITOSFERA (strato superiore rigido) → SUDDIVISA IN 7 PLACCHE GRANDI, 12 PLACCHE PICCOLE
- ASTENOSFERA (strato sottostante caratterizzato da rocce + deformabili)

⇒ LE PLACCHE CHE COMPONGONO LA LITOSFERA GALLEGGIANO SULLO STRATO DI ROCCE DEFORMABILI della SOTTOSTANTE ASTENOSFERA; LUNGO LA ZONA DI CONTATTO, SI CREANO FRATTURE.

IL SISMA È DOVUTO AL MOVIMENTO DEI 2 LATI DELLA FAGLIA, DURANTE IL QUALE SI ACCUMULA ENERGIA POTENZIALE DI NATURA ELASTICA;
QUANDO LA PRESSIONE SUPERA LA CAPACITÀ DI RESISTENZA DELLE ROCCE, ESSE CEDONO DI COLPO LIBERANDO EN. MECCANICA (SOTTO FORMA DI ONDE SISMICHE) CHE SI PROPAGA NEL TERRENO.

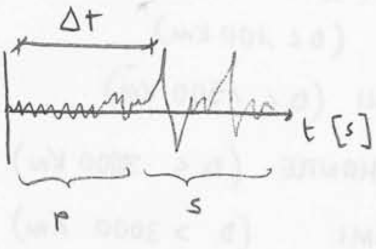
⇒ QUESTO È IL MOTIVO PER CUI LA DISTRIBUZIONE SPAZIALE DEI TERREMOTI È CONCENTRATA NELLE ZONE DOVE CI SONO I MAGGIORI SFORZI TETTONICI (LUNGO LE AREE DI FRATTURA DOVUTE AL CONTATTO TRA LE ZOLLE).

FAGLIE : • sono fratture generate NELLE ZONE DI CONTATTO TRA 2 ZOLLE.

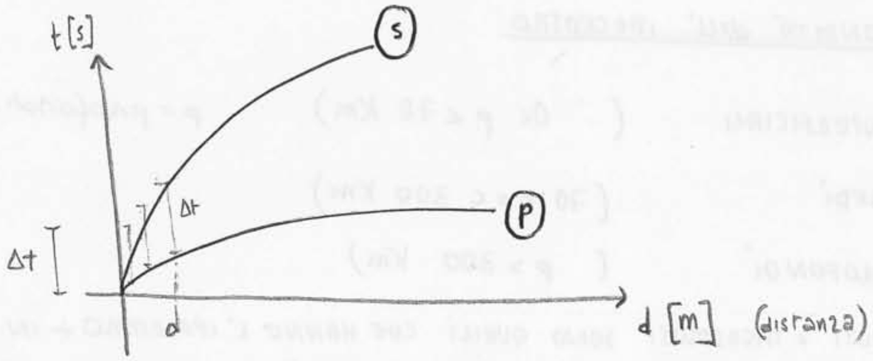
• SONO CARATTERIZZATE da:
  → ORIENTAZIONE (inclinazione, traccia)
  → MOVIMENTO (normale, rovescio, trascorrente)

1 POICHÉ LE ONDE SISMICHE (P, S, sup.) SI PROPAGANO CON VELOCITÀ ≠ E BEN CONOSCIUTE, È POSSIBILE RICAVARE LA DIFFERENZA DI ARRIVO TRA L'ONDA P ed S, OTTENENDO 1 ΔT 2

$$\Delta t = t_p - t_s$$



2 CON Δt ENTRO NEL GRAFICO



NB: LA DISTANZA EPICENTRALE, QUINDI QUELLA CHE SEPARA IL SISMOGRAFO DALL'EPICENTRO, È MISURATA SULLA SUPERFICIE CURVA DEL GLOBO (non in linea retta).

⇒ LA COSTRUZIONE DI QUESTO GRAFICO SI BASA SUL FATTO CHE LA ≠ENZA TRA L'ARRIVO DELLE ONDE P e S DIVENTA SEMPRE + GRANDE ALL'AUMENTARE DELLA DISTANZA EPICENTRO - SISMOGRAFO.

3 FACCIO TRASLARE IL SEGMENTO PARALLELO A SE STESSO (QUINDI VERTICALMENTE) CON 1 ESTREMITÀ CHE APPOGGIA SULLA CURVA INFERIORE (P)

⇒ QUANDO L'ALTRA ESTREMITÀ INTERSECA LA CURVA S, LEGGO d

HO TROVATO LA DISTANZA EPICENTRALE.

N.B. POICHÉ IO FACENDO COSÌ CONSIDERO LA DISTANZA RELATIVA AD 1 SOLO SISMOGRAFO RISPETTO ALL'EPICENTRO, QUINDI HO 1 CIRCONFERENZA DI PUNTI IN CUI POTREBBE ESSERE L'EPICENTRO.

→ X TROVARE UN UNICO PUNTO, CONSIDERO + POSIZIONI DEL SISMOGRAFO E INDIVIDUO LE INTERSEZIONI TRA LE CIRCONFERENZE.

(SE VOLESSI CONSIDERARE L'IPOCENTRO FAREI L'INVILUPPO DI SFERE!)

③ MAGNETUDO

→ È 1 MISURA INDIRETTA DELL'ENERGIA MECCANICA SPRIGIONATA DA 1 SISMA, CHE SI BASA SULL'AMPIEZZA DELLE ONDE SISMICHE, REGISTRATE dai SISMOGRAFI

RICHTER HA QUINDI PROPOSTO 1 SCALA DI VALORI LOGARITMICI CALCOLATI IN RAPPORTO AD 1 SISMA DI RIFERIMENTO, CHE HA LE SEGUENTI CARATTERISTICHE

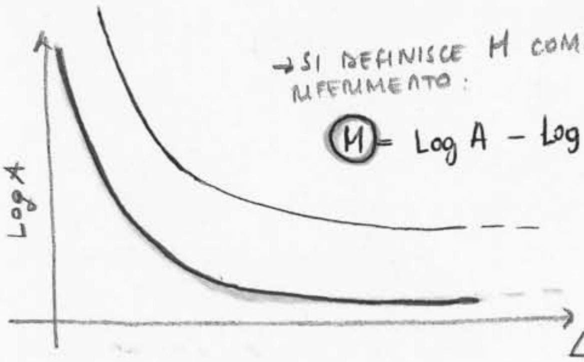
(DISTANZA EPICENTRALE) $\begin{cases} \Delta = 100 \text{ Km} \\ A_0 = \text{SPOSTAMENTO pari ad 1 MICRON} \end{cases}$

→ poiché A_0 È COST → $\log A_0 = \text{cost.}$

SCALA DI RICHTER

SI TRACCI X 1 DATO SISMA UN DIAGRAMMA $\log A - \Delta$

$\begin{cases} A = \text{massima ampiezza sismometrica registrata} \\ \Delta = \text{distanza epicentrale} \end{cases}$



→ SI DEFINISCE M COME DIFFERENZA TRA Log A E QUELLO DI RIFERIMENTO:

$$M = \log A - \log A_0$$

CURVA DI RIFERIMENTO
↓
La SCOSSA DI RIFERIMENTO È CHIAMATA SCOSSA NULLA $M = 0$
ED È COST BASSA IN MODO CHE NESSUN SISMA POSSA AVERE MAGNITUDO NEGATIVA

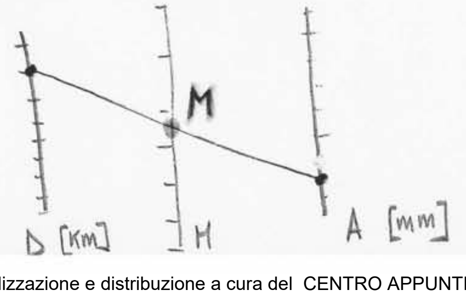
NB) LE CURVE, ANCHE SE MISURATE PER TERREMOTI ≠ SONO CIRCA PARALLELE, CIOÈ TRASLANO SOLO NEL PIANO SENZA VARIARE LA FORMA

• STRUMENTO DI MISURA: NORMOGRAMMA

→ IN PRIMISSIMA APPROSSIMAZIONE SI PUÒ RICAVARE LA M di RICHTER USANDO IL NORMOGRAMMA, in funzione di 3 grandezze:

- DISTANZA
- AMPIEZZA
- MAGNITUDO

1) LEGGO Δt tra ONDE p-s → RICAVO d (DISTANZA EPICENTRALE)
2) ENTRO CON d, LEGGO A, → RICAVO M (tirando 1 linea!!!)



METODO DEGLI SPOSTAMENTI

→ CONSISTE NELL' IMPORRE PARAMETRI CINEMATICI (CIOÉ SPOSTAMENTI) E FARE IN MODO CHE VENGANO SODDISFATTE LE EQ DI EQ NODALI (CHE SONO CONDIZIONI STATICHE)

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI È IL DUALE DEL METODO DELLE FORZE.
DAL PUNTO DI VISTA OPERATIVO CONSISTE NELL'IMPORRE ALCUNI PARAMETRI CINEMATICI (SPOSTAMENTI O ROTAZIONI), CARATTERISTICI DEL SISTEMA, IN MODO TALE CHE LE (V-g) REAZIONI IPERSTATICHE SODDISFINO (V-g) RELAZIONI DI EQUILIBRIO

→ (vincoli - gradi di libertà)

NEL METODO DEGLI SPOSTAMENTI È FONDAMENTALE INDIVIDUARE IL GRADO DI INDETERMINAZIONE CINEMATICA, OVVERO IL N. DEGLI SPOSTAMENTI NODALI (INCOGNITE CINEMATICHE) DELLA STRUTTURA.

M. D. FORZE	M. D. S SPOSTAMENTI
• (V-g) REAZIONI VINCOLARI L'INCOGNITA È L'INDETERMINAZIONE STATICA	• S: GRADO DI INDETERMINAZIONE CINEMATICA L' INCOGNITA SONO GLI SPOSTAMENTI DELLA STRUTTURA
• SI HANNO $\infty^{(v-g)}$ SOLUZIONI STATICAMENTE AMMISSIBILI (EQUILIBRATE) → SI SCEGLIE L'UNICA CHE RISPETTA ANCHE LA CONGRUENZA	• SI HANNO ∞^{S} SOLUZIONI CINEMATICAMENTE AMMISSIBILI (CONGRUENTI) → SI SCEGLIE L' UNICA CHE RISPETTA ANCHE L'EQUILIBRIO
• LE (V-g) INCOGNITE IPERSTATICHE VENGONO DETERMINATE ATTRAVERSO LE (V-g) EQUAZIONI DI CONGRUENZA.	• LE (S) INCOGNITE CINEMATICHE VENGONO DETERMINATE ATTRAVERSO LE (S) EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

1) DUALE METODO DEGLI SPOSTAMENTI
2) CONSISTE NELL' IMPORRE PARAMETRI CINEMATICI (ROTAZ, SPOSTAMENTI) CARATTERISTICI del SISTEMA IN MODO che LE (V-g) CARATT IPERSTATICHE SODDISFINO le (V-g) REAZIONE DI EQUILIBRIO.
3) É IMP. DETERMINARE S: il GRADO DI INDETERMINAZIONE CINEMATICA (XX QUI L'INCOGNITE SONO GLI SPOSTAMENTI DELLA STRUTT., NEL M.D.F SONO LE REAZIONI STATICHE)
4) SI HANNO ∞^{S} SOLUZIONI CONGRUENTI CINEMATICHE, SI SCEGLIE L'UNICA che RISPETTA ANCHE L' EQUILIBRIO
→ NEL M.D.F SI AVEVANO $\infty^{(v-g)}$ SOLUZIONI AMMISSIBILI EQUILIBRATE, SI SCEGLIE quella anche CONGRUENTE.

RISCRIVENDO LA RELAZIONE IN FORMA ESTESA SI OTTIENE:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & + K_{32} & + K_{33} & + K_{34} & + K_{35} & + K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}$$

FORZE RIGIDEZZA SPOSTAMENTI

SE VOLESSI ESPRIMERE UNA FORZA IESIMA, IN QUESTO CASO F_3

$$F_3 = K_{31} \cdot S_1 + K_{32} \cdot S_2 + K_{33} S_3 + K_{34} \cdot S_4 + K_{35} \cdot S_5 + K_{36} \cdot S_6$$

⇒ SIGNIFICA CHE LA FORZA I-ESIMA (F_3) DERIVA DALLA SOMMA DEI CONTRIBUTI DEI SINGOLI SPOSTAMENTI

→ SE GENERALIZZO, POSSO ANCHE DIRE CHE

$$\boxed{\underset{\text{colonna}}{K_{ij}} = \underset{\text{riga}}{F_i} \quad \text{per} \quad S_j \neq 0 \quad e \quad \forall S_{i \neq j} = 0 \\ S_j = 1}$$

i ————— j - - - → x

K_{ij} È 1 FORZA NEL NODO i QUANDO IMPONGO 1 SPOSTAMENTO NON NULLO NEL NODO j E TUTTI GLI ALTRI SPOSTAMENTI SONO NULLI

(es $K_{34} = F_3$ qnd $S_4 \neq 0$ e $\forall S_{i \neq 4} = 0$
$S_4 = 1$)

DOVE $F_i = K_{i1} S_1 + K_{i2} S_2 + K_{i3} S_3 + K_{i4} S_4 + K_{i5} S_5 + K_{i6} \cdot S_6$

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 \neq 0$, $S_5 = 0$, $S_6 = 0$

$F_3 = K_{i4} \, 1$

↓

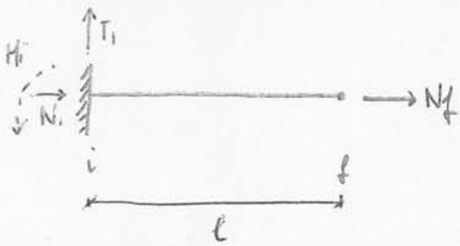
X CALCOLARE K_{i4} DEVO CALCOLARE LA FORZA F_i CHE INDUCE 1 SPOSTAMENTO UNITARIO

FORZA NODALE: Forza che dipende dal solo spostamento nel nodo (non perché cambi l'equazione bensì poiché tutti gli spostamenti oltre a quello nel nodo, sono nulli)

③

4 - 4 COLONNA -

SI RICAVANO LE FORZE SULLA TRAVE QUANDO L'UNICO SPOSTAMENTO NON NULLO È $\xi_f = 1$



$\rightarrow)\ N_f = -N_i$

$\uparrow)\ T_i = 0$

$5)\ M_i = 0$

$\sigma_f = \frac{N_f}{A}$

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N_f}{EA} = \frac{\xi_f}{\ell}$

RICAVO N_f

$\sigma_f = \frac{N_f}{A}$; $\quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} = \frac{N_f}{EA}$

$\varepsilon_f = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\xi_f}{\ell}$

$\Rightarrow \frac{N_f}{EA} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow N_f = \xi_f \cdot \frac{EA}{\ell}$

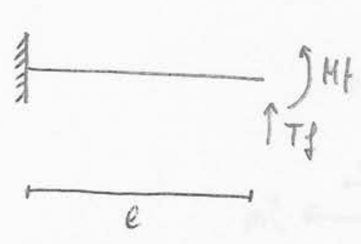
$\begin{cases} N_f = \frac{EA}{\ell} \\ N_i = -\frac{EA}{\ell} \end{cases}$

OTTENGO: $\begin{vmatrix} -EA/\ell \\ 0 \\ 0 \\ EA/\ell \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

5 - 5° COLONNA - / - 6° COLONNA

- SE CONSIDERO 1 MENSOLA E GLI APPLICO 1 COPPIA ALL'ESTREMITÀ, SI PROVOCA 1 DEFORMATA GENERATA SIA DA 1 ROTAZIONE CHE DA 1 SPOSTAMENTO TRASVERSALE IN DIREZIONE VERTICALE (C'È INTERAZIONE TRA M, T)

ANALOGAMENTE, SE APPLICO ALLA MENSOLA 1 SFORZO TAGLIANTE, LA DEFORMATA È GENERATA DA 2 CONTRIBUTI DEFORMATIVI: ROTAZIONE e SPOSTAMENTO VERTICALE.



APPLICO IL PLV, SOTTO LE SEGUENTI IPOTESI:

(a) 1) SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATE (FITTIZIO)

(b) 2) SISTEMA DI PICCOLI SPOSTAMENTI POSSIBILI (COMPATIBILI CON I VINCOLI) (REALE)

$\Rightarrow$ IL LAVORO COMPIUTO DALLE FORZE ESTERNE È UGUALE A QUELLO COMPIUTO DALLE FORZE INTERNE

$$\boxed{L_e = L_i}$$

APPLICO IL PLV:

$$L_e = L_i$$

$$\underset{1}{F_a} \cdot S_b + \underset{0}{R_a S_b} = \int_0^l M_a \frac{M_b}{EJ} dz$$

GLI SPOSTAMENTI NELL'INCASTRO SONO NULLI

$$S_b = \int_0^l M_a \cdot \frac{M_b}{EJ} dz$$

$$\eta_F = \int_0^l M_a \frac{M_b}{EJ} dz = \left[\frac{l}{6EJ} \left(M_a(0) \cdot M_b(0) + 4\left(\frac{M_a}{2} \cdot \frac{M_b}{2} \right) + M_a(l) \cdot M_b(l) \right) \right]$$

$$\eta_f = \frac{l}{6EJ} \left[(M_f + T_f l) \cdot l + 4\left(\left(M_f + \frac{T_f \cdot l}{2} \right) \cdot \left(\frac{l}{2} \right) \right) + M_f \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{l}{6EJ} \left[M_f \cdot l + T_f l^2 + 2 M_f \cdot l + T_f \cdot l^2 \right] = \left[\frac{l}{6EJ} \left(3 M_f \cdot l + 2 T_f \cdot l^2 \right) \right]$$

$$\boxed{\eta_f = \frac{M_f l^2}{2EJ} + \frac{T_f \cdot l^3}{3EJ}}$$

N.B. • DIPENDE SIA DA T_f CHE DA M_f.

COME NEI CASI PRECEDENTI, SI RICAVANO LE FORZE SULLA TRAVE QUANDO L'UNICO SPOSTAMENTO NON NULLO È $\eta_f = 1$

(POICHÉ HO 2 INCOGNITE (M_f, T_f) È NECESSARIO RICAVARE 1 SECONDA EQUAZIONE DA METTERE A SISTEMA E, POICHÉ STIAMO PARLANDO DELL'INTERAZIONE TRA TAGLIO E MOMENTO, INDAGO LA ROTAZIONE φ_f)

• APPLICO IL PLV SOTTO LE SEGUENTI IPOTESI

- a, SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATO
- b, SISTEMA DI PICCOLI SPOSTAMENTI POSSIBILI (COMPATIBILI CON I VINCOLI)

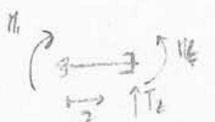
(b)

(a)

1) $T_1 = T_f$

$M_1 - M_f - T_f\, l = 0$

$M_1 = M_f + T_f\, l$



$M_1 = 1$

$M_2 = M_1 - T_1 \cdot z$

$= M_f + T_f \cdot l - T_f z$

AVENDO TROVATO QUESTI VALORI, RICAVO LE ALTRE REAZIONI:

$\eta_f = 1$

$-M_i + M_f + T_f \ell$

dove $T_f = \frac{12EJ}{\ell^3}$

$M_f = -\frac{6EJ}{\ell^2}$

$M_i =$

$\circlearrowright)\ M_i = -M_f - T_f \cdot \ell$

$= +\frac{6EJ}{\ell^2} - \left(\frac{12EJ}{\ell^3}\right)\ell = +\frac{6EJ}{\ell^2} - \frac{12EJ}{\ell^2} = -\frac{6EJ}{\ell^2}$

$\uparrow)\ T_i = T_f = \frac{12EJ}{\ell^3}$

$-M_i + M_f + T_f \ell$

$M_i = M_f + T_f \ell$

LA DEFORMATA ASSOCIATA SARÀ

$T_i =$

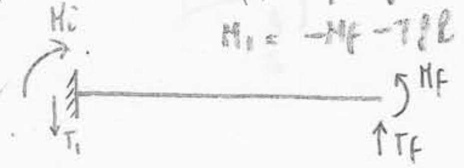
LA QUINTA COLONNA PERTANTO IDENTIFICA QUESTI VALORI:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{12EJ}{\ell^3} \\ -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 \\ 12EJ/\ell^3 \\ -\frac{6EJ}{\ell^2} \end{vmatrix}$$

$\varphi_f = 1$

$-M_i + M_f + T_f \ell = 0$

$M_i = -M_f - T_f \ell$



dove $T_f = -\frac{6EJ}{\ell^2}$

$M_f = \frac{4EJ}{\ell}$

$\circlearrowright)\ M_i = -M_f - T_f \cdot \ell$

$= -\frac{4EJ}{\ell} + \frac{6EJ}{\ell^2}(\ell) = +\frac{2EJ}{\ell}$

$\uparrow)\ T_i = T_f = -\frac{6EJ}{\ell^2}$

LA DEFORMATA ASSOCIATA SARÀ

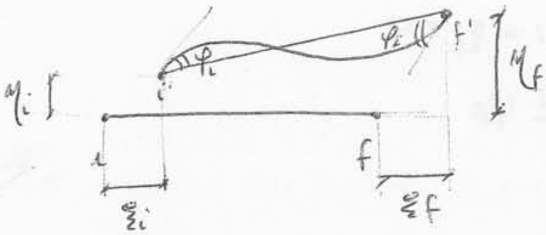
LA SESTA COLONNA PERTANTO IDENTIFICA QUESTI VALORI

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ \frac{2EJ}{\ell} \\ 0 \\ -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ \frac{4EJ}{\ell} \end{vmatrix}$$

3 ESEMPI APPLICATIVI PER L'UTILIZZO DELLA MATRICE

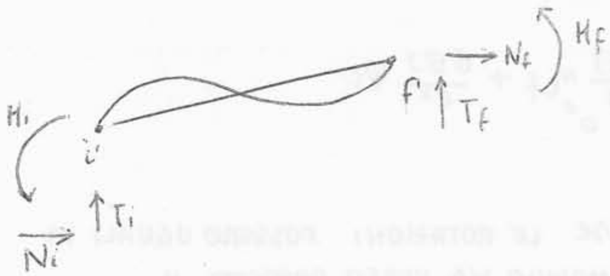
1) CONSIDERO 1 ELEMENTO TRAVE DI ESTREMI i ed f

→ CONSIDERO LA COMPRESENZA DI TUTTI GLI SPOSTAMENTI $\neq 0$ e $\neq$ TRA LORO



$$\eta_f \neq \eta_i \neq 0$$
$$\xi_f \neq \xi_i \neq 0$$
$$\varphi_f \neq \varphi_i \neq 0$$

→ A QUESTA DEFORMATA ASSOCIAMO 1 SISTEMA DI FORZE CHE LA INDUCE



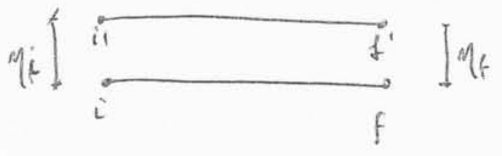
UTILIZZANDO LA MATRICE DI RIGIDEZZA PRIMA CALCOLATA AVRÒ CHE, PER L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE, VALE:

$$M_i = N_i \cdot \eta_i - T_i \cdot \xi_i + T_f \cdot \overset{\xi_f}{\cancel{\eta_f}} - N_f \eta_f + M_f \cdot \varphi_f$$ [SE DOVESSI PENSARE ALL'EQ]

$$M_i = 0 + \frac{6EJ}{\ell^2}\eta_i + \frac{4EJ}{\ell}\varphi_i + 0 - \frac{6EJ}{\ell^2}\eta_f + \frac{2EJ}{\ell}\varphi_f$$ [SE USO LA MATRICE È PIÙ SEMPLICE]

SE CONOSCO IL VALORE DEGLI SPOSTAMENTI DETERMINO UNIVOCAMENTE LE FORZE.

2) CONSIDERO SOLO LA PRESENZA DI SPOSTAMENTI TRASVERSALI



$$\eta_i = \eta_f \neq 0$$
$$\varphi_f = \varphi_i = 0$$
$$\xi_f = \xi_i = 0$$

→ VOGLIO VERIFICARE SE QUESTA DEFORMATA INDUCE 1 TAGLIO

$$T_i = 0 + \frac{12EJ}{\ell^3}\eta_i + \frac{6EJ}{\ell^2}\underset{0}{\varphi_i} + 0 - \frac{12EJ}{\ell^3}\eta_f + \frac{6EJ}{\ell^2}\underset{0}{\varphi_f}$$

$$= \frac{12EJ}{\ell^3}\eta_i - \frac{12EJ}{\ell^3}\eta_f = 0 \qquad [\eta_i = \eta_f]$$

CARATTERISTICHE DELLA MATRICE

① SIMMETRICA (x RECIPROCITÀ → TEOREMA DI BETTY) nell'elasticità lineare il princ. di sovrapp. effetti vale x spost., deform, tensione non x il lavoro di deformazione

② QUADRATA $[\underbrace{n}_{\text{n. nodi considerati}} \times 3]$ → n. gradi di libertà x 2D [nello spazio sarà $[n \times 6]$

③ SI PUÒ LEGGERE COME SE FOSSE DIVISA IN QUATTRO QUADRANTI

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ \hline N_f \\ T_f \\ M_f \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1Q & 2Q \\ \hline 3Q & 4Q \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \varphi_i \\ \hline \xi_f \\ \eta_f \\ \varphi_f \end{bmatrix}$$

$$|F_i| = [K_{ij}]\,|S|$$

$$\boxed{\left|\begin{array}{c} F_i \\ \hline F_f \end{array}\right| = \left[\begin{array}{c|c} [K_{ii}] & [K_{if}] \\ \hline [K_{fi}] & [K_{ff}] \end{array}\right] \left|\begin{array}{c} S_i \\ \hline S_f \end{array}\right|}$$

1Q: TERMINI CHE MOLTIPLICANO IL NODO INIZIALE i
- SONO FORZE CHE NASCONO NEL NODO i, INDOTTE DA SPOSTAMENTI DEL NODO STESSO

2Q: RAPPRESENTANO LE FORZE CHE NASCONO NEL NODO i, PER EFFETTO DEGLI SPOSTAMENTI DEL NODO F

3Q: RAPPRESENTANO LE FORZE CHE NASCONO NEL NODO FINALE f, INDOTTE DAGLI SPOSTAMENTI DEL NODO i

4Q: RAPPRESENTANO LE FORZE CHE NASCONO NEL NODO FINALE f, INDOTTE DAGLI SPOSTAMENTI DEL NODO STESSO.

④ È 1 MATRICE POSITIVA

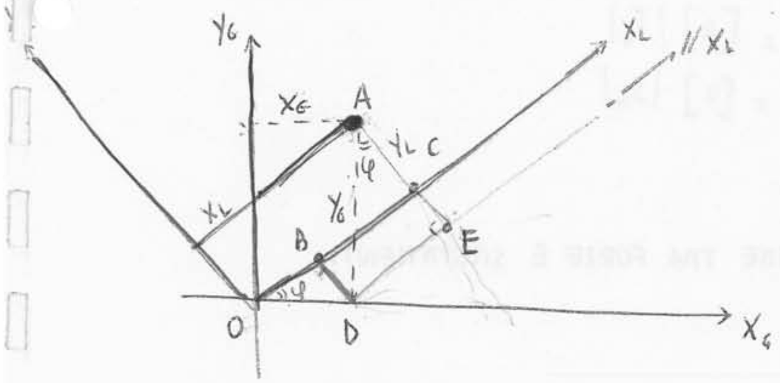
→ SE MOLTIPLICATA PER 1 VETTORE NON NULLO DÀ RISULTATI POSITIVI

$$\underbrace{|x|^T\,[K]\,|x|}_{\downarrow} > 0$$

OGNI TERMINE DI QUESTO PRODOTTO È NELLA FORMA $K_{ij} \cdot x^2$ (se divido per due)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K_{ij}\, x^2 = \text{EN. CINETICA, x def. È POSITIVA}$$

SISTEMA GLOBALE DI RIFERIMENTO



$X_L ; Y_L \rightarrow$ SISTEMA LOCALE

$X_G ; Y_G \rightarrow$ SISTEMA GLOBALE

φ = ANGOLO DEL SISTEMA LOCALE RISPETTO AL SISTEMA GLOBALE

- CONSIDERO 1 GENERICO PUNTO A, DESCRITTO CON COORDINATE DIVERSE A SECONDA DEL SISTEMA A CUI MI RIFERISCO.

→ VOGLIO TROVARE X_L, Y_L IN FUNZIONE di X_G, Y_G

$$\begin{cases} X_L = \underset{\substack{/\!/ \\ X_G}}{\overline{OB}} + \underset{\substack{/\!/ \\ DE}}{\overline{BC}} = \overline{OD}\cdot\cos\varphi + \overline{AD}\cdot\sin\varphi = X_G\cos\varphi + Y_G\sin\varphi \\ Y_L = \overline{AE} - \overline{CE} = Y_G\cdot\cos\varphi - BD = Y_G\cos\varphi - X_G\sin\varphi \end{cases}$$

- SE CONSIDERO IL PUNTO A COME L'ESTREMO DI 1 VETTORE CHE PARTE DALL'ORIGINE SONO IN GRADO DI PASSARE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE A QUELLO GLOBALE, GRAZIE A QUESTE EQUAZIONI

N.B. QUESTA TRASFORMAZIONE VALE DUNQUE PER LE COMPONENTI DI 1 VETTORE.

NEL PIANO

- FORMA NORMALE

$$\begin{cases} X_L = X_G \cos\varphi + Y_G \sin\varphi \\ Y_L = -X_G\sin\varphi + Y_G\cos\varphi \end{cases}$$

- FORMA MATRICIALE

$$\begin{vmatrix} X_L \\ Y_L \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X_G \\ Y_G \end{vmatrix}$$

- FORMA COMPATTA

$$|S_L| = \underbrace{[R]}_{\text{OPERATORE LINEARE}} |S_G|$$

NELLO SPAZIO

- FORMA NORMALE

$$\begin{cases} X_L = X_G\cos\varphi + Y_G\sin\varphi \\ Y_L = -X_G\sin\varphi + Y_G\cos\varphi \\ \theta_L = \theta_G \end{cases}$$

- FORMA MATRICIALE

$$\begin{vmatrix} X_L \\ Y_L \\ \theta_L \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X_G \\ Y_G \\ \theta_G \end{vmatrix}$$

- FORMA COMPATTA

$$|S_L| = \underbrace{[R]}_{\text{OPERATORE LINEARE}} |S_G|$$

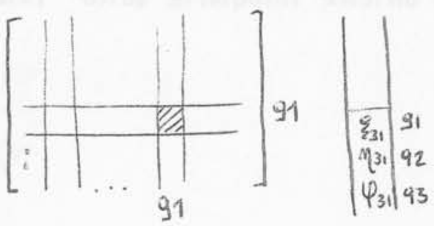
STRUTTURA DI 1 PROGRAMMA FEM

- IMMAGINO DI AVERE 1 STRUTTURA CON
  - $n = 3$ G.D.L
  - UNA MATRICE DI RIGIDEZZA LA CUI DIMENSIONE È $N = n \cdot 3$ = (dimensione matrice)

→ SE CONSIDERO IL NODO K-ESIMO, LA SUA POSIZIONE NEL VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI SARÀ

$$\boxed{(K-1)\cdot 3+1}$$

es) $K = 31$ 31 —— 40

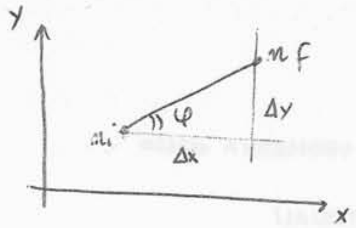


→ LA SUA POSIZIONE ALL'INTERNO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA SARÀ

n. colonna $= (K-1)\cdot 3+1$

n. riga $= (K-1)\cdot 3+1$

- QUESTO È IL MOTIVO PER CUI IN 1 PROGRAMMA F.E.M, X OGNI ELEMENTO DEVO FORNIRE LE INFO RELATIVE A E, ℓ, nodo iniziale, nodo finale, e le coord. x,y, di ogni nodo.

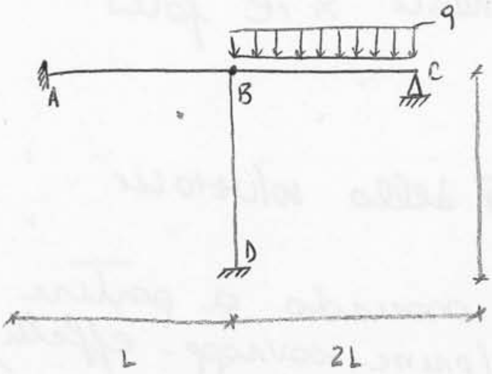


$$tg\,\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$ IN QUESTO MODO, GRAZIE A QUESTE INFORMAZIONI È TUTTO UNIVOCAMENTE DETERMINATO

→ INFINE DEVO FORNIRE I VINCOLI, QUESTO SIGNIFICA IMPORRE DEGLI SPOSTAMENTI, LA MATRICE PASSA DALL'ESSERE SINGOLARE (SNZ VINCOLI) AD ESSERE RISOLVIBILE CON 1 UNICA SOLUZIONE

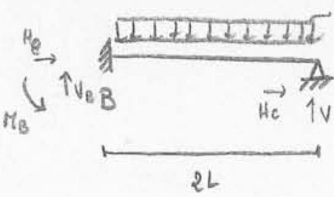
- I NODI DI INCASTRO DEVONO ESSERE NUMERATI PER ULTIMI, COSÌ COSTRUENDOMI LA MATRICE TROVERÒ LE FORZE, AD ESSI RELATIVE, RAGGRUPPATI AL FONDO ED INOLTRE POSSO COSÌ ORGANIZZARE LA MATRICE IN
  - NODI LIBERI, SPOSTAMENTI LIBERI
  - NODI VINCOLATI, SPOSTAMENTI INDOTTI

PASSAGGIO DA CARICHI DISTRIBUITI A NODALI



- LE SOLLECITAZIONI POSSO CONSIDERARLE DISCRETIZZANDO LA STRUTTURA IN ASTE

1) ISOLO L'ASTA $\overline{BC}$ E NE CALCOLO LE SOLLECITAZIONI ALL'ESTREMITÀ



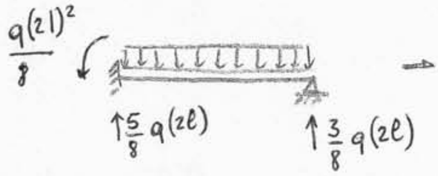
$\rightarrow)\ H_B = H_C = 0$

$\uparrow)\ q = V_C + V_B$

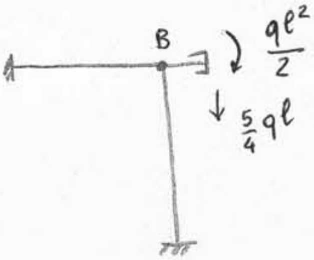
$V_C = q - V_B$

$\circlearrowleft)\ M_B - V_C\, 2L = 0$

IN QUESTA PRIMA FASE HO BLOCCATO IL NODO B PER NON AVERE SPOSTAMENTI (E QUINDI SOLLECITAZIONI) NELLE ASTE $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$

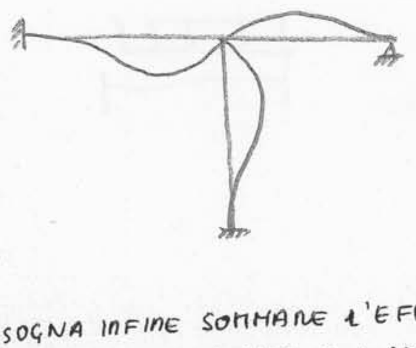


2) NELLE ALTRE 2 ASTE AVRÒ LE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE CALCOLATE PER L'ASTA $\overline{BC}$, CHE CAMBIATE DI SEGNO DIVENTANO AZIONI PER LE 2 ASTE.

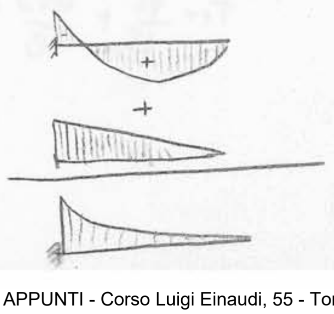


→ LA ROTAZIONE DEL NODO B ORA È SBLOCCATA E DIPENDE DALLE 2 FORZE TROVATE; ORA POSSO APPLICARE IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI:

⇒ SE IL NODO PUÒ RUOTARE PRODUCE 1 DEFORMATA CHE INDUCE DELLE SOLLECITAZIONI ALLE ASTE $\overline{AB}$ - $\overline{BD}$



3) BISOGNA INFINE SOMMARE L'EFFETTO, CALCOLATO INIZIALMENTE, DEL CARICO SULL'ASTA $\overline{BC}$, OTTENUTO BLOCCANDO IL NODO B



(TRASLO LA CURVA IN SU.)

METODO DEGLI SPOSTAMENTI _ A. FANTILLI

- ~~TEOREMA DI BETTY : IL TEOREMA AFFERMA CHE DATI 2 SISTEMI EQUILIBRATI DI FORZE, IL LAVORO CHE LE FORZE DEL PRIMO SISTEMA COMPIONO SUGLI SPOSTAMENTI CAUSATI DAL SECONDO È UGUALE AL LAVORO CHE LE FORZE DEL SECONDO SISTEMA COMPIONO SUGLI SPOSTAMENTI DEL PRIMO. (prodotti dal primo)~~

$$L_{12} = L_{21}$$

LAVORO CHE LE FORZE dal 1 sist compiono sugli spost. prodotti dal 2 sist

~~DIMOSTRA CHE~~ METTE IN EVIDENZA CHE in campo di ELASTICITÀ LINEARE IL PSE vale x il campo degli spostamenti $\{\eta\}$, deformazioni $\{\varepsilon\}$ e tensioni $\{\sigma\}$, monon X IL LAVORO di deformaz.

RELAZIONE TRA FORZE E SPOSTAMENTI

Dalla TEORIA SAPPIAMO CHE

$$|F| = [K] \cdot |\delta|$$

⇒ questo significa che se io applico 1 generico sist. di forze $|F|$ a 2 nodi vincolati ugualmente la risposta in termini di spost sarò =

PER SCRIVERE PIÙ CORRETTAMENTE E IN MODO PIÙ COMPLETO LA RELAZIONE BISOGNA CONSIDERARE L'APPLICAZIONE EVENTUALE di FORZE ESTERNE

$$\boxed{|F| = [K]\,|\delta| + |F_0|}$$

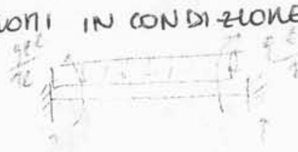
(EFFETTO DEI CARICHI APPLICATI SULLA TRAVE)

→ PER CALCOLARE $|F_0|$ CONSIDERO CHE

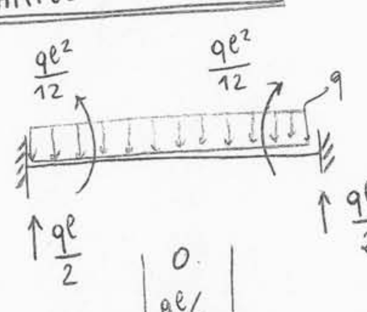
$$\boxed{|F| = |F_0| \ \text{se} \ |\delta| = 0}$$

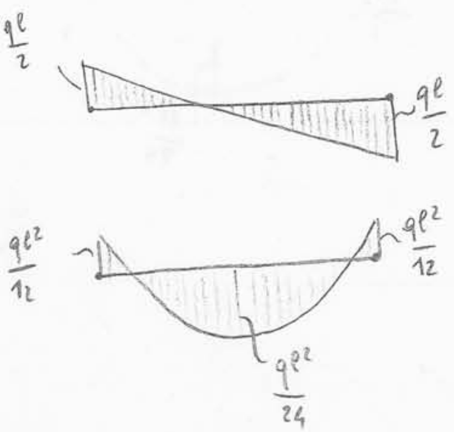
CIOÈ FORZE SONO = ALLE FORZE DOVUTE AL CARICO EXT QND LO SPOSTAMENTO È NULLO.

CONSIDERO 2 SITUAZIONI DIVERSE E CALCOLO LE SOLLECITAZIONI IN CONDIZIONE DI SPOSTAMENTO NULLO.



① CARICO DISTRIBUITO



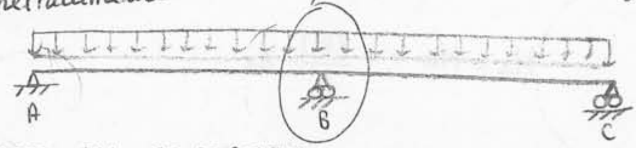


$$\Rightarrow F_0 : \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ q\ell/2 \\ q\ell^2/12 \\ 0 \\ q\ell/2 \\ q\ell^2/12 \end{vmatrix}$$

ESERCIZIO CON METODO DEGLI SPOSTAMENTI

É UNICO XK IL SISTEMA è caricato simmetricamente

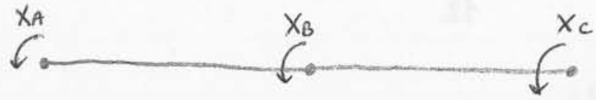
$M^- = \frac{q\ell^2}{8}$



- in 1 SISTEMA A + CAMPATE IL GRADO di IPERSTATICITÀ È DATO DAL n. appoggi intermedi
- $V - g$ — vincoli, 3 x n. aste

① DEVO CALCOLARE GLI SPOSTAMENTI NODALI E DISCRETIZZO LA TRAVE CONTINUA IN 2 ASTE DI CUI CALCOLO LE INCOGNITE (GLI SPOSTAMENTI)

(→ HO TRASCURATO LE FORZE ASSIALI, QUINDI TRASCURO GLI SP. ASSIALI)



X: É LA ROTAZIONE CIOÈ L'UNICO SPOSTAMENTO CHE IL NODO PUÒ AVERE

SE SCRIVO IL LEGAME MATRICIALE PER QUESTA STRUTTURA AVRÒ:

- $$\begin{vmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{0A} \\ F_{0B} \\ F_{0C} \end{vmatrix}$$ (FORMA MATRICIALE)

- $|F|_G = [K]_G \, |X|_G + |F_0|_G$ (FORMA COMPATTA)

- $F_A = K_{11} X_A + K_{12} X_B + K_{13} X_3 + F_{0A}$ → EQUILIBRIO DEL NODO A

  $F_B = K_{21} X_A + K_{22} X_B + K_{23} X_3 + F_{0B}$ → EQ NODO B

  $F_C = K_{31} X_A + K_{32} X_B + K_{33} X_3 + F_{0C}$ → EQ NODO C

(NB) NEL METODO DEGLI SPOSTAMENTI IMPONGO COME INCOGNITE GLI SPOSTAMENTI (QUANTITÀ CINEMATICHE) E RISOLVO IMPONENDO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO CIOÈ CONDIZIONI STATICHE

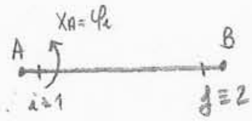
NODO (A) : 3 CONTRIBUTI

→ SUPPONGO DI APPLICARE SULL'ASTA AB LA ROTAZIONE XA E TUTTI GLI ALTRI SPOSTAMENTI NULLI

$$\varphi_i = X_A \neq 0 = 1$$

$$F_A = \frac{q\ell^2}{12} + \frac{4EJ}{\ell} + \frac{2EJ}{\ell}$$

①



$\Rightarrow M_A = (M_i) = \frac{4EJ}{\ell} \cdot X_A$

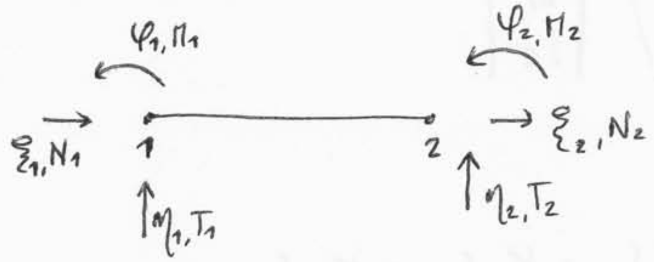
↓ leggo nella matrice [K] M_i qnd $\varphi_i = 1$, $\forall \delta = 0$

12/10/12

ESERCITAZIONE

ESERCITATORE : ALESSANDRO SANTILLI

METODO DEGLI SPOSTAMENTI



$$\{F\}_L = [K]_L \{\eta\}_L$$

↓

SPOSTAMENTI DUALI DELLE SOLLECITAZIONI

$$\begin{vmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & & & \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & & & \end{bmatrix}$$

EJ = rigidezza flessionale
EA = rigidezza torsionale assiale.

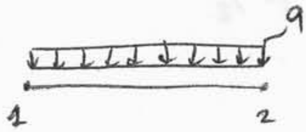
ESERCITAZIONE

- LA MATRICE È SIMMETRICA PER RECIPROCITÀ (TEOREMA DI BETTY)

SE VOLESSI SCRIVERE PIÙ CORRETTAMENTE E IN MODO PIÙ COMPLETO LA FORMULA DOVREI CONSIDERARE L'APPLICAZIONE DI FORZE ESTERNE

$$\{F\} = [K] \cdot \{\eta\} + \{F_0\}$$

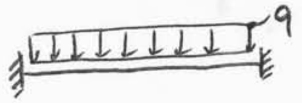
↳ EFFETTO PRODOTTO DAI CARICHI APPLICATI SULL'ASSE 1-2 DELLA TRAVE



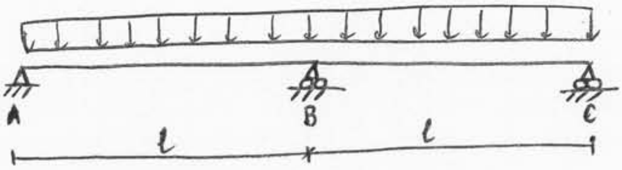
PER CALCOLARE $\{F_0\}$ CONSIDERO CHE:

$$\{F\} = \{F_0\} \text{ se } \{\eta\} = 0$$

→ TRAVE DOPPIAMENTE INCASTRATA



• CONSIDERO 1 TRAVE CONTINUA



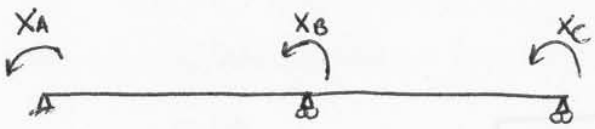
$EJ = \text{cost}$

$EA = \text{cost}$

ⓐ METODO DEGLI SPOSTAMENTI

1_ DEVO CALCOLARE GLI SPOSTAMENTI NODALI, E DISCRETIZZO LA TRAVE CONTINUA IN 2 ASTE DI CUI CALCOLO LE INCOGNITE (SPOSTAMENTI)

(HO TRASCURATO LE FORZE ASSIALI, QNDI TRASCURO GLI SPOSTAMENTI ASSIALI)



X_A = È LA ROTAZIONE, CIOE L'UNICO SPOSTAMENTO CHE IL NODO A PUO' AVERE

SE SCRIVO IL LEGAME MATRICIALE X QUESTA STRUTTURA, SCRIVERÒ:

$$\{F\}_G = [K]_G \{X\}_G + \{F_0\}_G \qquad \begin{matrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{matrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \end{bmatrix}$$

$F_A = F_1 = K_{11} \cdot X_A + K_{12} X_B + K_{13} X_C + F_{0_A}$ → EQUILIBRIO AL NODO A

$F_B = F_2 = K_{21} X_A + K_{22} X_B \quad K_{23} X_C + F_{0_B}$ → EQUILIBRIO AL NODO B

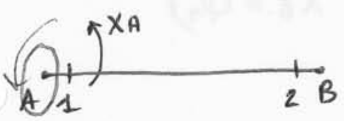
$F_C = F_3 = K_{31} X_A + K_{32} X_B + K_{33} X_C + F_{0_C}$ → EQUILIBRIO AL NODO C

METODO DEGLI SPOSTAMENTI → IMPONGO COME INCOGNITE GLI SPOSTAMENTI (CIOÈ QNTITÀ CINEMATICHE) E RISOLVO IMPONENDO DELLE CONDIZIONI STATICHE CIOE delle EQUAZIONI DI EQUILIBRIO NODALI

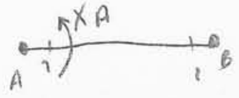
NODO Ⓐ : SUPPONGO DI APPLICARE ALL'ASTA $\overline{AB}$ LA ROTAZIONE X_A E TUTTI GLI ALTRI SPOSTAMENTI NULLI.

• $X_A = \varphi_1 \neq 0 = 1$

$$M_1 = M_A = \frac{4EJ}{l} \overset{1}{\varphi_1} = \frac{4EJ}{l} X_A$$



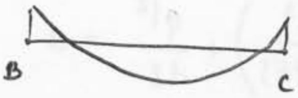
$M_1 =$

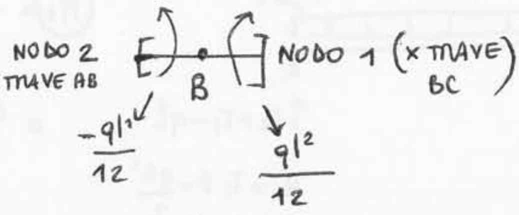


I TERMINI NOTI SONO: (CONSIDERANDO SEMPRE LE 2 ASTE DISTINTE)

$M_B = -\dfrac{ql^2}{12}$

$M_B = +\dfrac{ql^2}{12}$





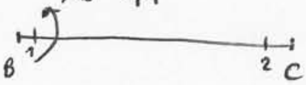
SI ANNULLANO.

→ VEDI $\{F_0\}$ X CARICO DISTRIBUITO!

$$\boxed{F_2 = F_B = \frac{2EJ}{l} X_A + \frac{4EJ}{l} X_B + \frac{4EJ}{l} X_B + \frac{2EJ}{l} X_C}$$

NODO C → SE APPLICO X_A NON SUCCEDE NULLA! PARTO CON X_B

$X_B = \varphi_1$



$$M_C = M_2 = \frac{2EJ}{l} X_B$$

$X_C = \varphi_2$

$$M_C = M_2 = \frac{4EJ}{l} X_C$$

$f(x) = y$

$x = \dfrac{y}{t}$

TERMINE NOTO $\quad M_C = M_2 = -\dfrac{ql^2}{12}$

$$\boxed{F_C = \frac{2EJ}{l} X_B + \frac{4EJ}{l} X_C - \frac{ql^2}{12} = 0}$$

$\dfrac{\frac{ql^2}{12}}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{ql^2}{48}$

RISCRIVO IN FORMA MATRICIALE - SISTEMA IN 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE.

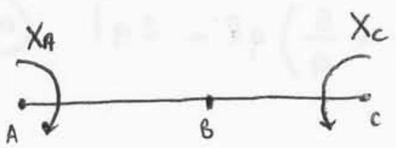
$$\frac{EJ}{l}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \end{Bmatrix} = \frac{ql^2}{12}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

→ SE RISOLVO OTTENGO:

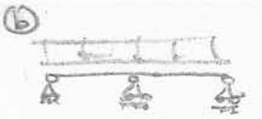
$X_A = -\dfrac{ql^3}{48EJ}$

$X_B = 0$

$X_C = \dfrac{ql^3}{48EJ}$



(b)



=

$$\int \frac{X M'^2}{EJ} dz = -\int \frac{M^0 M'}{EJ} dz$$

+

$$\boxed{X = -\frac{\int M^0 M' \, dz}{\int M'^2 dz}}$$

(0) schema iso prim.

(1) (a) schema iso aux.

$$\int M^0 \cdot M' dz = \frac{l}{6}\left[\; - \; - - \right]$$

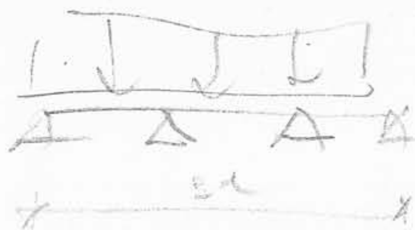
$$\int M'^2 = \frac{l}{6}$$

$$\int \frac{M^a M^b}{EJ} dz = 1 \cdot \eta$$

$$M^b = M^0 + X M^1$$

$$\int \frac{M^1 (M^0 + X M')}{EJ} dz = 1 \cdot \eta$$

$$\int \frac{M' M^0}{EJ} dz + \int \frac{X M'^2}{EJ} dz = 1 \cdot \eta =$$



$$\int \frac{M^a M^b}{EJ} dz =$$

$$\int \frac{M'(M^0 + X M' + Y M^2)}{EJ} dz$$

(1)

(0)

+

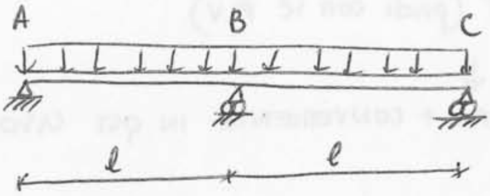
(2)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 214

ESERCITAZIONE

19/10/12

TRAVE CONTINUA - SVOLGIMENTO CON IL METODO DELLE FORZE



APPLICO IL PLV

$$\boxed{L_i^{a,b} = L_e^{a,b}}$$

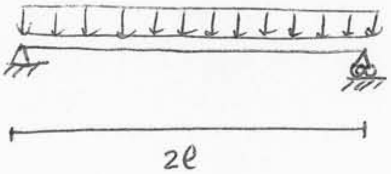
b = SISTEMA REALE

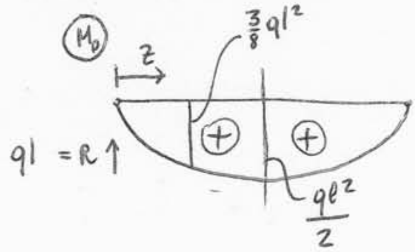
a = SISTEMA VIRTUALE

→ VOGLIO CALCOLARE LE INCOGNITE IPERSTATICHE DELLA TRAVE, APPLICO IL PLV TANTE VOLTE QUANTE SONO LE INCOGNITE IPERSTATICHE, in qst caso 1 volta

① DEFINISCO 1 SISTEMA DI RIFERIMENTO _0_

→ TOLGO 1 vincolo → rendo la struttura ISOSTATICA

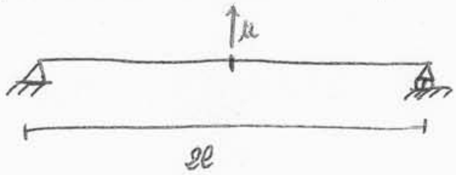


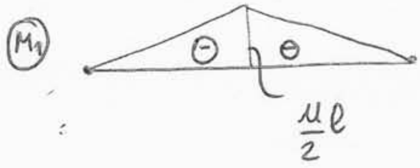


$$M_0(z) = Rz - \frac{qz^2}{2}$$

$$M_0(z) = qlz - \frac{qz^2}{2}$$

② ORA CONSIDERO (n) SISTEMI AUSILIARI → n = n. di incognite _1_
(agisce 1 forza unitaria in corrispondenza del vincolo soppresso)





$$L_i^{a,b} = L^{1,b} = \int_{2l} \frac{M^a \cdot M^b}{EJ} dz = \int_{2l} \frac{M_0 \cdot M_1}{EJ} dz + X_1 \int_{2l} \frac{M_1^2}{EJ} dz$$

dove $M^b = M_0 + X_1 M_1$

$M_a \equiv M_1$

N.B. HO TRASCURATO IN L_i, IL LAVORO FATTO DAL TAGLIO! PERCHÉ h(sezione) ≪ lunghezza elemento.

$$L_e^{a,b} = L_e^{1,b} = U \cdot \cancel{\eta}^{\,0} = 0$$

LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO IN CUI È APPLICATA LA U NEL SIST. REALE È NULLO OK

RISCRIVO L'EQUAZIONE E OTTENGO:

$$L_i^{a,b} = 0 \rightarrow X_1 = -\frac{\int_{2l} \frac{M_0 M_1}{EJ} dz}{\int_{2l} \frac{M_1^2}{EJ} dz} = \frac{-\int_{2l} M_0 M_1 \, dz}{\int_{2l} M_1^2 \, dz}$$

CALCOLO SEPARATAMENTE I 2 INTEGRALI

$\int_{2l} M_0 \cdot M_1 \, dz$ → data la simmetria del sistema posso considerare metà struttura.

LIMITI DI SIMPSON → $\int g(z) f(z) \, dz$ POSSO USARE LA FORMULA DI SIMPSON se LA SOMMA dei gradi delle 2 FUNZIONI è ≤ 3

↓

nel mio caso posso applicarlo

1) $$\int_{2l} M_0 \cdot M_1 \, dz = 2 \int_0^l M_0 M_1 \, dz = 2 \cdot \frac{l}{6}\left[0 + 4\left(-\frac{ul}{4}\right)\left(\frac{3}{8} q l^2\right) + \left(-\frac{ul}{2}\right)\left(\frac{ql^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{l}{3}\left[-\frac{3}{8} q u l^3 - \frac{1}{4} q u l^3\right] = -\frac{l}{24}\left[5 q u l^4\right]$$

2) $\int_{2l} M_1^2 \, dz$ = [x simmetria considero solo la prima parte)

$$\int_0^l M_1^2 \, dz = 2 \cdot \frac{l}{6}\left[0 + 4\left(\frac{ul}{4}\right)\left(\frac{ul}{4}\right) + \left(\frac{ul}{2}\right)\left(\frac{ul}{2}\right)\right] = \frac{u^2 l^3}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{u^2 l^3}{6}$$

OTTENGO:

$$X_1 = \frac{+\frac{5}{24} q u l^4}{\frac{u^2 l^3}{6}} = \frac{5}{4} ql/u$$

$$\Rightarrow R_B = X_1 \cdot u = \frac{5}{4} q l$$

$$M_B = M_{0(B)} + X_1 M_{1(B)} = \frac{ql^2}{2} + \left(\frac{5}{4} ql/\cancel{u}\right)\left(-\frac{\cancel{u}}{2} l\right) = ql^2\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{8} q l^2$$

POTREI QUINDI CALCOLARMI LE ALTRE REAZIONE

↳ IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI E QUELLO DELLE FORZE PORTANO AD 1 SOLUZIONE UGUALE XK VALE IL PRINCIPIO DELL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE X STRUTTURE IN REGIME ELASTICO-LINEARE.

Ricorda: il $L_e^{a,b}$ sarebbe costituito anche dai contributi di sforzo normale e taglio. Il primo non si considera perchè è pari a zero, il secondo perchè il contributo del taglio nelle travi snelle è un contributo trascurabile rispetto all'azione flettente.

Per risolvere gli integrali ci si affida a Simpson, metodo applicabile perchè la somma dei gradi delle funzioni è MINORE DI TRE.

N.B. se avessi avuto 2 funzioni quadratiche (2 parabole), non avrei potuto applicare Simpson.

$$\int_{2l} M_0 M_1 \, dz = 2\int_0^l M_0 M_1 \, dz = 2\frac{l}{6}\left[0 + 4\left(-\frac{Ul}{4}\right)\left(\frac{3}{8}ql^2\right) + \left(-\frac{Ul}{2}\right)\left(\frac{ql^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{l}{3}\left[0 - \frac{3}{8}qUl^3 - \frac{Uql^3}{4}\right] = -\frac{5qUl^4}{24}$$

$$\int_{2l} M_1^2 \, dz = 2\int_0^l M_1^2 \, dz = \frac{l}{3}\left[0 + 4\left(\frac{Ul}{4}\right)^2 + \left(\frac{Ul}{2}\right)^2\right] = \frac{2U^2l^3}{12} = \frac{U^2l^3}{6}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \frac{\frac{5}{24}qUl^4}{\frac{U^2l^3}{6}} = \frac{5}{4}\frac{ql}{U}$$

$$\Rightarrow \quad R_B = X_1 U = \frac{5}{4}ql \quad ✓$$

$$M_B = M_{0B} + X_1 M_{1B} = \frac{ql^2}{2} + \frac{5}{4}ql \cdot -\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{2} - \frac{5}{8}ql^2 = -\frac{ql^2}{8} \quad ✓$$

I due risultati sono gli stessi con i 2 metodi per il TEOREMA DELL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE.

Come detto, è molto più facile risolvere tale sistema con il metodo delle forze rispetto a quello degli spostamenti.

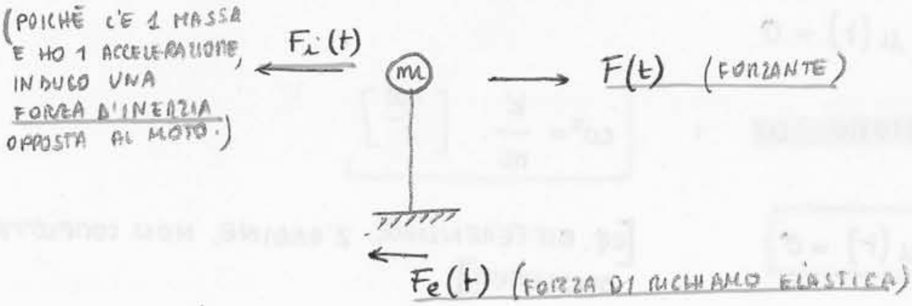
Le cose si possono invertire in altri esempi in cui bisognerebbe applicare più volte il PLV.

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI È UNIVOCO, SI PUÒ RISOLVERE SOLO IN UN MODO. ECCO PERCHÈ SI USA NEL CALCOLO AUTOMATICO: POICHÈ È FACILMENTE IMPLEMENTABILE.

S.D.O.F. - OSCILLATORE SEMPLICE ①

→ LA SCHEMATIZZAZIONE PIU RICORRENTE DI UNA STRUTTURA CON 1 SOLO GRADO DI LIBERTÀ È L'OSCILLATORE SEMPLICE, CIOÈ 1 TRAVE SEMPLICE, SENZA PESO, INCASTRATA AD UNA ESTREMITÀ E ALL'ALTRA COLLEGATA AD UNA MASSA m. di cui si trascura il peso

1) SE IO IMMAGINO UNA MASSA IN MOVIMENTO, POSSO TROVARE LA MASSA IN DIVERSE POSIZIONI, SE SCATTO 1 FOTO ISTANTANEA, IN 1 DATO ISTANTE t:



IN UN CERTO ISTANTE (t) DEVE VERIFICARSI L'EQUILIBRIO DI QUESTE TRE FORZE; POICHÉ SONO GRANDEZZE CHE VARIANO NEL TEMPO, ESPRIMO L'EQUAZIONE DI MOTO:

$$F_i(t) + F_e(t) + F(t) = 0$$

2) ESPLICITANDO I TERMINI OTTENGO:

$$F_i(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$$ → derivata 2° dello spostamento = ACCELERAZIONE

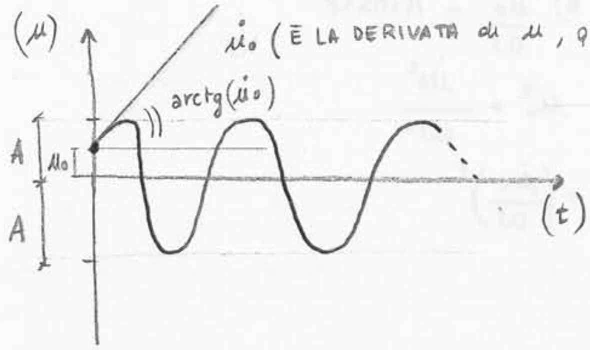
$$F_e(t) = K \cdot u(t)$$

$$\longrightarrow \boxed{m \cdot \ddot{u}(t) + K \cdot u(t) = F(t)}$$

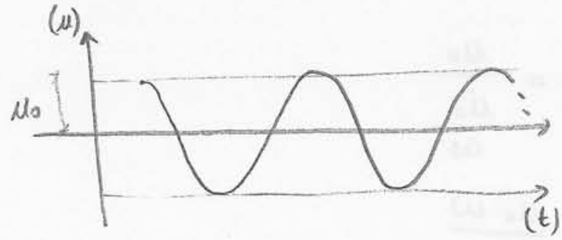
→ la legge del moto è descrivibile x mezzo di 1 parametro che può essere ← spost / acceler / velocità

legge di spostamento di 1 solo mass.

• da UN PUNTO DI VISTA GRAFICO OTTENGO:

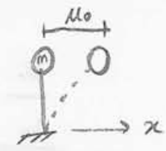


1) SE LA VELOCITÀ FOSSE NULLA NELLE MIE CONDIZIONI INIZIALI, AVREI 1 TANGENTE ORIZZONTALE

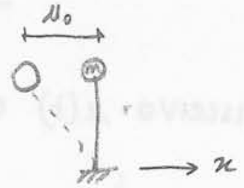


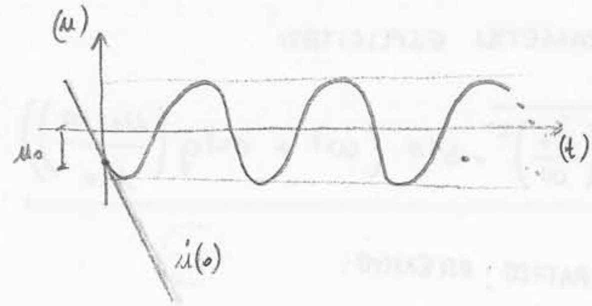
$\dot{u}_0 = 0$

u_0 (indiret. positiva)



2) SE LA VELOCITÀ FOSSE NEGATIVA, AVREI 1 SPOSTAMENTO NEGATIVO RISPETTO ALLO ASSE x





• CASO 2 _ FUNZIONE ARMONICA → DO x ASSODATO CHE VERIFICHI L'EQUILIBRIO.

$$\boxed{u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{u}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{u}(t) = -A \cdot \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

COND. INIZIALI $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$

→ VOGLIO DETERMINARE A.

$$u_0 = A \cdot \sin(\varphi)$$

$$\dot{u}_0 = A \cdot \omega \cdot \cos(\varphi)$$

▸ CASO 3 – FUNZIONE ESPONENZIALE ③

$$\boxed{u(t) = A \cdot e^{st}}$$

$$\dot{u}(t) = A \cdot s \cdot e^{st}$$

$$\ddot{u}(t) = A\, s^2\, e^{st}$$

→ LE SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE di MOTO: $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$

$$\cancel{A} s^2 \cancel{e^{st}} + \omega^2 (\cancel{A}\, \cancel{e^{st}}) = 0$$

$$s^2 + \omega^2 = 0$$

→ QUESTA RELAZIONE È VERIFICATA, SE E SOLO SE $s^2 = -\omega^2$

$$\rightarrow s = \sqrt{-\omega^2}$$

POICHÉ NEL CAMPO DEI NUMERI REALI NON È POSSIBILE, RICORRIAMO AI NUMERI IMMAGINARI:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{-\omega} = \pm i \cdot \omega < \begin{matrix} s_1 = +i\omega \\ s_2 = -i\omega \end{matrix}$$

• VOGLIO TROVARE 1 COMBINAZIONE LINEARE DELLE 2 SOLUZIONI:

$$u(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2\, e^{s_2 t} = A_1\, e^{i\omega t} + A_2\, e^{-i\omega t}$$

→ APPLICO LA FORMULA DI EULERO

$$\left[\begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \end{array}\right.$$

• SOSTITUISCO

$$u(t) = A_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + A_2 (\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t))$$

$$= \underbrace{(A_1 + A_2)}_{C_1} \cos(\omega t) + \underbrace{(A_1 - A_2)\, i}_{C_2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

IMPONGO CHE LA SOLUZIONE CERCATA APPARTENGA A $\mathbb{R}$

$$u(t) \in \mathbb{R} : \begin{matrix} (A_1 + A_2) \\ (A_1 - A_2) \end{matrix} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A_1 + A_2 = C_1 \\ i(A_1 - A_2) = C_2 \end{matrix}$$

$a + ib \qquad a + ib$

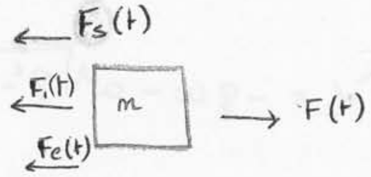
$$\Rightarrow \boxed{u(t) = C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)}$$

È NELLA STESSA FORMA di CASO 1

② CON SMORZAMENTO, SENZA FORZANTE

(LO SMORZAMENTO È CARATTERISTICO DEI SISTEMI REALI

$$F(t) = 0 \quad ; \quad F_s(t) \neq 0$$



dove $F_s(t)$ È LA FORZA SMORZANTE di TIPO VISCOSO, IN QUESTA DIMOSTRAZIONE CONSIDERO DI CONCENTRARE LE AZIONI DI SMORZAMENTO IN 1 FORZA UNICA

$$F_s(t) \propto \dot{u}(t).$$

$$F_s(t) = C \cdot \dot{u}(t)$$

L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA ALL'ISTANTE t, sarà:

$$F_i(t) + F_e(t) + F_s(t) = F(t)^{=0}$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + K \cdot u(t) + C \cdot \dot{u}(t) = 0$$

C = COSTANTE di PROPORZIONALITÀ

▸ CASO 1 - FUNZIONE ESPONENZIALE

$$m \cdot \ddot{u}(t) + C \cdot \dot{u}(t) + K u(t) = 0$$

$$\ddot{u}(t) + \frac{C}{m} \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

$\rightarrow$ PONGO $\frac{C}{m} = 2\xi \cdot \omega \rightarrow \xi = \frac{C}{C_{crit}}$ (C = SMORZAMENTO, C_{crit} = SMORZAMENTO CRITICO)

EQ. MOTO $\boxed{\ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0}$

- EQ. DIFFERENZIALE II ORDINE
- COMPLETA
- OMOGENEA.

SOLUZIONE IN FORMA ESPONENZIALE:

$$\boxed{u(t) = C \cdot e^{\alpha t}}$$

$$- \dot{u}(t) = C \cdot \alpha e^{\alpha t}$$

$$- \ddot{u}(t) = C \alpha^2 e^{\alpha t}$$

SOSTITUENDO SI OTTIENE

$$\cancel{C} \cdot \alpha^2 e^{\alpha t} + 2\xi\omega(\cancel{C} \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}) + \omega^2 \cancel{C} e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\xi\omega\alpha + \omega^2 = 0$$

- VOGLIO TROVARE TUTTI I PARAMETRI INCOGNITI:

(-) CASO $\xi < 1$ → SISTEMI SOTTO SMORZATI (la risposta del sistema è oscillante)

$c < c_{cr}$

• IL SISTEMA, DISTURBATO DAL SUO STATO DI QUIETE $(\mu(0) \neq 0)$, OSCILLA CON AMPIEZZE DECRESCENTI, AVENDO 1 FREQUENZA SMORZATA (del sist. smorzato)

$$\omega_D = \omega\sqrt{(1-\xi^2)}$$

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

LA SOLUZIONE IN QUESTO CASO È DEL TIPO:

$$\mu(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} = C_1 e^{t(-\xi\omega + i\omega\sqrt{1-\xi^2})} + C_2 e^{t(-\xi\omega - i\omega\sqrt{1-\xi^2})}$$

$$= e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{i\omega\sqrt{1-\xi^2}\,t} + C_2 e^{-i\omega\sqrt{1-\xi^2}\cdot t}\right)$$

→ SE SOSTITUISCO

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\mu(t) = e^{-\xi\omega t}\left(C_1 e^{i\omega_d\cdot t} + C_2 e^{-i\omega_d\cdot t}\right)$$

N.B. FORMULA EULERO

$e^{+ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$

$e^{-ix} = \cos x - i\,\text{sen}\,x$

$$\mu(t) = e^{-\xi\omega t}\left(C_1\left[\cos(\omega_d t) + i\,\text{sen}(\omega_d t)\right] + C_2\left[\cos(\omega_d t) - i\sin\omega_d t\right]\right)$$

$$\mu(t) = e^{-\xi\omega t}\left[(C_1 + C_2)(\cos(\omega_d t)) + (C_1 - C_2)\cdot i\,\text{sen}(\omega_d t)\right]$$

• DETERMINO LE COSTANTI C_1, C_2 CON LE CONDIZIONI AL CONTORNO:

$$\begin{cases} \mu(0) = \mu_0 & t = 0 \\ \dot{\mu}(0) = \dot{\mu}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_0 = 1\,(C_1 + C_2) + 0 = (C_1 + C_2) \\ \dot{\mu}_0 = -\xi\omega\, e^{-\xi\omega t}\left[(C_1+C_2)(\cos(\omega_d t)) + (C_1 - C_2)\, i\,\text{sen}(\omega_d t)\right] + \\ \quad e^{-\xi\omega t}\left[-(C_1+C_2)\sin(\omega_d t)\cdot\omega_d + (C_1 - C_2)\, i\,\omega_d\cos(\omega_d t)\right] \end{cases}$$

$$= -\xi\omega\left[C_1 + C_2\right] + \left[C_1 - C_2\right] i\,\omega_d$$

VALORE DI SMORZAMENTO

PER LE STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO E MURATURA SI ASSUMONO COMUNEMENTE

$c_{cls,\,muratura} \cong 5\%\, c_r$

$c_{acciaio} \cong 2\%\, c_r$.

$\Rightarrow$ QST SIGNIFICA CHE $\sqrt{1-\xi^2} \to 1$

$\Downarrow$

E QUINDI CHE L'INFLUENZA DELLO SMORZAMENTO SUI PARAMETRI CARATTERISTICI DELLA RISPOSTA DINAMICA RISULTA TRASCURABILE!

SI ASSUME GENERALMENTE

$\omega_D \approx \omega$

$T_D = T$

• PER LA COSTRUZIONE DI 1 GRAFICO $u-t$ SONO NECESSARIE ANALISI DETTAGLIATE, E SI UTILIZZANO:

- GLI SPOSTAMENTI INDOTTI DALL'OPERATORE
- LE ACCELERAZIONI REGISTRATE

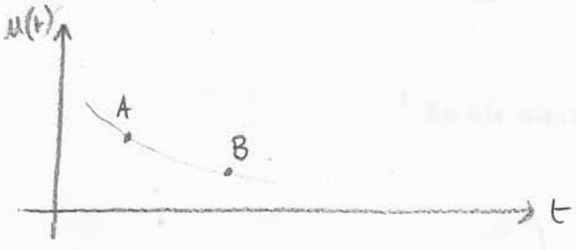
$\downarrow$

QUESTO 2° METODO È PIÙ UTILIZZATO XK È + PRECISO:
SI SFRUTTA L'INTEGRAZIONE (da $\ddot{u}$: $\int \ddot{u} = \dot{u}$; $\int \dot{u} = u$)
(se facessi il processo inverso, cioè la derivazione, potrei ottenere stime non affidabili)

X VALUTARE LO SPOSTAMENTO IN PRATICA SI PRENDE LA STRUTTURA, LA SI DEFORMA E QUINDI LA SI LASCIA OSCILLARE.

$$u(t+Td) = e^{-\xi\omega(t+Td)} \cdot \left[u_0 \cos\left(\omega d\,(t+Td)\right) + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega d} \sin\left(\omega d (t+Td)\right)\right]$$

SE CONSIDERO 2 PUNTI:



E VOLESSI FARE IL RAPPORTO TRA $u(t)_A$ e $u(t)_B$ otterrei:

$$\frac{u(t)}{u(t+Td)} = \frac{e^{-\xi\omega t}}{e^{-\xi\omega(t+Td)}} = \frac{e^{\xi(\omega(t+Td))}}{e^{\xi\omega t}}$$

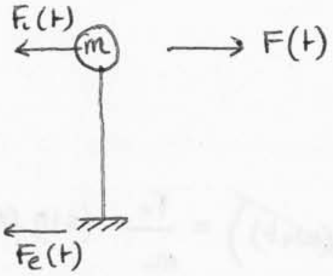
$$= \frac{e^{\xi\omega t} + e^{\xi\omega Td}}{e^{\xi\omega t}}$$

$$= e^{\xi\omega Td} = d$$

d = VALORE DI SPOSTAMENTO che x ipotesi ho misurato.

③ CON FORZANTE, SENZA SMORZAMENTO

$$F(t) \neq 0 \quad ; \quad F_s(t) = 0$$



L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA ALL'ISTANTE t SARÀ:

$$F_i(t) + F_e(t) = F(t)$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + K\,u(t) = F(t)$$

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F(t)}{m}}$$

- EQ. DIFFERENZIALE DI 2° GRADO
- NON COMPLETA
- TERMINE NOTO $\neq 0$
  (→ LA SOLUZIONE ORA DIPENDE ANCHE DALLA FORZANTE)

- IPOTIZZO DIVERSE FORMA della FORZANTE

① $F(t) = F_0 \sin(\omega_1 t)$

risolvendolo ottengo:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_1 t)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

ω = PULSAZIONE del SISTEMA $\neq$ ω_1 = PULSAZIONE della FORZANTE

→ CON QUESTO TIPO DI EQUAZIONE AVRÒ 1 SOLUZIONE COMPOSTA DA 1

- OMOGENEA ASSOCIATA $(u_0(t))$ $\quad$ [OMOGENEA: $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$]

$+$

- SOL. PARTICOLARE $(u_p(t))$ $\quad$ $[f(F(t))]$

SOL 1) $\quad \underline{u(t) = u_0(t) + u_p(t)}$

$$\begin{cases} u_0(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ u_p(t) = C \cdot \sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

$$u_p(t) = u_{st} \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \sin(\omega_1 t)$$

N.B. : $\underline{u_p(t)\,max} \Rightarrow \underbrace{\sin(\omega_1 t)}_{max} = 1$

$r = \frac{\omega}{\omega_1}$; $(1-r^2) = f(\omega_1)$

se $\omega_1 = \omega \rightarrow r = 1$

$\rightarrow (1-r^2) = 0$

$\rightarrow \frac{1}{0} = \infty$

$\rightarrow u_p \rightarrow \infty$

$\rightarrow$ SPOSTAMENTI GRANDISSIMI

ORA DEVO TROVARE LE COSTANTI A, B, DELLA SOLUZIONE GENERALE; LE TROVO IMPONENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO INIZIALI.

N.B. POICHÉ SI RIFERISCONO ALLO SPOSTAMENTO COMPLESSIVO, DEVO IMPORLE ALLA SOLUZIONE COMPLESSIVA (quindi ALLA COMBINAZIONE LINEARE di $u_0(t)$ e $u_p(t)$)

SOLUZIONE COMPLESSIVA:

$$\boxed{u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-r^2)} \sin(\omega_1 t)}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO:
$$\begin{cases} u_0(0) = u_0 \\ \dot{u}_0(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ SOSTITUENDO OTTENGO:

$$\begin{cases} u_0 = A\cos(\underset{0}{\omega t}) + B\sin(\underset{0}{\omega t}) + \frac{F_0}{K}\frac{1}{(1-r^2)}\sin(\underset{0}{\omega_1 t}) = A + 0 + 0 \\ \dot{u}_0 = -A\sin(\underset{0}{\omega t})\cdot\omega + B\omega\cos(\underset{0}{\omega t}) + \omega_1 \cdot \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-r^2)} \cos(\underset{0}{\omega_1 t}) = 0 + B\cdot\omega + \omega_1 \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1-r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = A \\ \dot{u}_0 = B\omega + \omega_1 \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-r^2)} \end{cases} \rightarrow \quad A = u_0$$

$$B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{\omega_1}{\omega} \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{\omega}\left[\dot{u}_0 - \omega_1 \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1-r^2}\right]$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE: $\quad r = \frac{\omega_1}{\omega} \quad 1 - r^2 = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}$

LA RISULTANTE DEGLI SPOSTAMENTI (il suo valore massimo) NON DIPENDE DALL'ENTITÀ DELLA FORZANTE, MA SOLO DA COME È APPLICATA NEL TEMPO

• se $\begin{cases} u_0(0) = 0 \\ \dot{u}_0(0) = 0 \end{cases} \rightarrow u(t) = + \frac{F_0}{K(1-r^2)} \sin \omega_1 t - \frac{\omega_1}{\omega} \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{1-r^2} \sin \omega t$

$K \omega^2$

• ESPLICITO I TERMINI E TOLGO $r = \frac{\omega}{\omega_1} \approx 1$

$$u(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{\omega_1}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

→ ASSUMIAMO CHE $|\omega - \omega_1| = 2\Delta$ con $\Delta \ll 1$

•) $\omega - \omega_1 = 2\Delta$

•) $\omega^2 - \omega_1^2 = \underbrace{(\omega + \omega_1)}_{\omega \cong \omega_1} (\omega - \omega_1)$

$= (2\omega \cong 2\omega_1) \cdot 2\Delta$

•) $\frac{\omega_1}{\omega} \cong 1$

$$\Longrightarrow \frac{F_0/m}{2\omega \cdot 2\Delta} \left[\sin(\omega_1 t) - \sin \omega t \right]$$

FORMULA DI PROSTAFERESI

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{F_0/m}{2\omega \cdot 2\Delta} \left[2 \cos\left(\frac{\overbrace{(\omega + \omega_1)}^{2\omega \cong 2\omega_1} t}{2}\right) \sin\left(\frac{\overbrace{(\omega - \omega_1)}^{2\Delta} t}{2}\right) \right] = u(t)$$

$$\Longrightarrow u(t) = \frac{F_0/m}{2\omega \cdot \cancel{2}\Delta} \cancel{2} \cos(\omega_1 t) \sin(\Delta t)$$

$$\boxed{u(t) = \frac{F_0/m}{2\omega\Delta} \left[\cos(\omega_1 t) \cdot \sin(\Delta t) \right]}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 214

$$\Rightarrow u(t+T) - u(t) = \frac{F_0/m}{2\omega}\left[\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\cdot 1 - t \cdot 1\right]$$

$$= \frac{F_0/m}{2\omega}\left[\cancel{t} + \frac{2\pi}{\omega} - \cancel{t}\right]$$

$$= \frac{F_0/m}{\cancel{2}\omega}\left[+\frac{\cancel{2}\pi}{\omega}\right] = \frac{F_0}{m\omega}\left[\frac{\pi}{\omega}\right] = \frac{F_0}{m\cdot\sqrt{\frac{K}{m}}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$= \frac{F_0}{m\cdot\frac{K}{\cancel{m}}}\cdot\pi = \frac{F_0}{K}\cdot\pi$$

$$= \frac{F_0}{K}\cdot\pi = u_{st}\cdot\pi$$

LA VELOCITÀ CON CUI TENDE ALL' ∞ DIPENDE DA QST RAPPORTO

+ STRUTT. È DEFORMABILE $\rightarrow K\downarrow\downarrow \rightarrow$ VA + VELOCEM. ALL'INFINITO

OSSERVAZIONI

- AFFERMARE CHE $r=1$, cioè $\frac{\omega}{\omega_1} = 1 \rightarrow \omega \cong \omega_1$.
SIGNIFICA CHE LA PULSAZIONE DELLA FORZANTE COINCIDE CON LA PULSAZIONE PROPRIA DELLA STRUTTURA.

FENOMENO DI RISONANZA: SIGNICA AMPLIFICAZIONE DELLO SPOSTAMENTO DELLA STRUTTURA e in GENERALE di tutte le risposte.

ORA VOGLIO INVECE CAPIRE COSA SUCCEDE QND $\omega \neq \omega_1$

- ASSUMIAMO ORA CHE $\Delta =$ quantità finita ($\neq$ da prima, era $\Delta \rightarrow 0$)

$\rightarrow$ usando PROSTAFERESI, assumo che:

$$f:\ \sin(\omega_1 t) - \sin\omega t = \cancel{2}\cos\left(\frac{\omega + \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega - \omega_1}{2}t\right)$$

($\omega+\omega_1 = 2\omega$, $\omega - \omega_1 = \Delta$)

questo successivamente si semplificava

$\rightarrow$ pongo $\omega = 2\pi f$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega}{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\frac{(\omega - \omega_1)}{2\pi}}$$

- VOGLIO CONSIDERARE IL CONTRIBUTO DOVUTO ALLA FORZANTE:

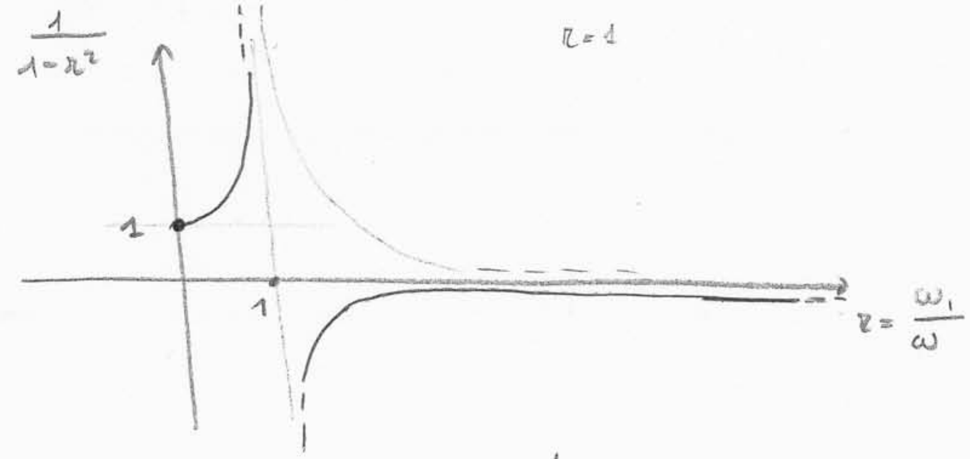
$$u_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin(\omega_1 t)$$

$$= \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$1 - 1{,}1 = -0{,}1$

↓

COEFF. DI AMPLIFICAZIONE (cost)



- $r = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} = 1$ — $r \to \infty \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} = 0$
- $r = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} = \infty$

---

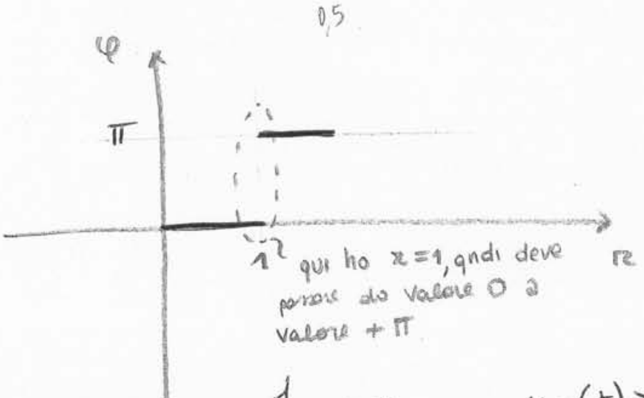
② VOGLIO CONSIDERARE LA SOLUZIONE NELLA FORMA (considerando la fase φ)

$$u_p(t) = C \cdot (\sin(\omega_1 t + \varphi))$$

$$u_p(t) = u_{st} \cdot \frac{1}{1-r^2} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

0,5

$r = 1 \to \omega = \omega_1$



RIASSUNTINO!

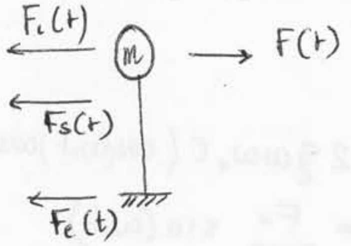
- SE $r > 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} < 0$ ED È qndi COME SE AVESSI meno le sequo meno davanti all'espressione del seno! ⇒ qst coincide con 1 incremento dell'angolo di π, infatti
$$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta + \pi)$$

- $r < 1 \Rightarrow \omega_1 < \omega \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} > 0 \Rightarrow u_p(t) > 0$
- $r > 1 \Rightarrow \omega_1 > \omega \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} < 0$ ⇒ È COME METTERE IL SEGNO − DAVANTI A TUTTA L'ESPRESSIONE e SICCOME $\sin\theta = -\sin(\theta + \pi)$, METTENDO IL − È COME SE INCREMENTASSI IL VALORE dell'ANGOLO di π.

ECCO XK IN CORRISPONDENZA della RISONANZA SI ASSISTE AD 1 ... di π nel VALORE di φ ←

4) CON FORZANTE, CON SMORZAMENTO

(è la condizione + realistica)



RISCRIVO CON LE VARIE ESPRESSIONI TROVATE:

$$F_i(t) + F_e(t) + F_s(t) = F(t)$$

$$\ddot{u}(t)\cdot m + K\cdot u(t) + c\cdot\dot{u}(t) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_1 t)$$

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) = \underline{\frac{F_0}{m}\sin(\omega_1 t)}$$

F(t) POTREI ANCHE SCRIVERLA NELLA FORMA $F(t) = \frac{F_0}{m}e^{i\alpha t}$ e POI DOVREI DETERMINARE IN MODO COERENTE I PARAMETRI

LA SOLUZIONE A QUESTA EQ. DIFFERENZIALE SARÀ NELLA FORMA:

$$u(t) = \underbrace{u_0(t)}_{\text{SOL. DELLA EQ OMOGENEA ASSOCIATA}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{CONTRIBUTO INDOTTO DALLA FORZANTE}} \; ; \quad \begin{cases} u_0(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)) \\ u_p(t) = C\sin(\omega_1 t + \varphi) \end{cases}$$

1) VOGLIO DETERMINARE C e φ

$$u_p(t) = C\cdot\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\dot{u}_p(t) = C\cdot\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\omega_1^2\cdot C\cdot\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

• SOSTITUISCO NELL' EQ. DI MOTO

$$-\omega_1^2(C\cos(\omega_1 t + \varphi)) + \omega^2(C\sin(\omega_1 t + \varphi)) + 2\xi\omega(C\cdot\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi)) =$$

$$= \frac{F_0}{m}\sin(\omega_1 t)$$

→ SOSTITUISCO C nell' EQ. di $u_p(t)$

$$u_p(t) = \frac{F_0}{K} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-r^2) + 4\xi^2 r^2}}}_{\text{COEFF. DI AMPLIFICAZIONE } D} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) \Rightarrow ?$$

⇒ PRIMA qndo il sistema non era smorzato avevo $D = \frac{1}{1-r^2}$; cioè come se ora ponessi lo smorzamento $=0$ ($\xi = 0$)

⇒ L' EFFETTO DELLO SMORZAMENTO È DI RIDURRE r (il suo effetto)

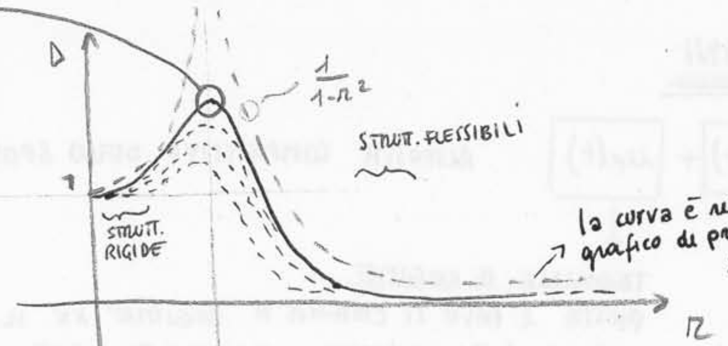
IL PICCO È SPOSTATO A SX, NON COINCIDE CON 1 XKE:

$r = \frac{\omega_1}{\omega}$; $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\omega_d = \omega \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{<1}$

⇒ $\omega_d < \omega$

⇒ $\frac{\omega}{\omega_d} < 1$



la curva è ribaltata rispetto al grafico di prima xk ora che $r \ge 0$ ho sempre $D > 0$

⇒ ORA INFATTI SE C'È IL FENOMENO DELLA RISONANZA

• $r = 1 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega$

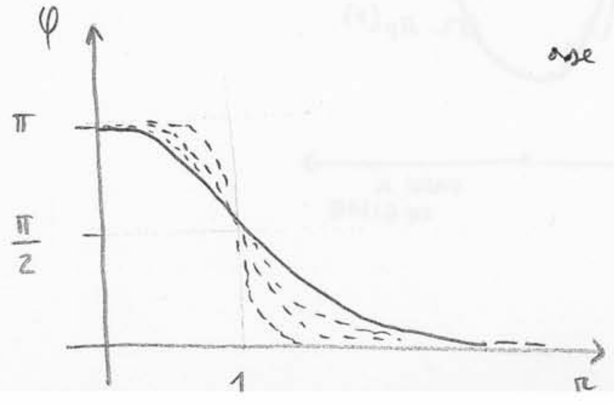
(PRIMA AVEVO CHE $D = \frac{1}{1-r^2} = \infty$ → QUINDI IL COEFF. DI AMPLIFICAZIONE TENDEVA ALL' INFINITO, QNDI AVEVO CHE $u(t) \to \infty$ (SPOSTAMENTI GRANDISSIMI).

⇒ ORA ANCHE se $r = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \neq \infty$, È 1 VALORE FINITO, QUINDI LO SARÀ ANCHE LO SPOSTAMENTO.

IN PARTICOLARE

• se $\xi \uparrow\uparrow \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \downarrow\downarrow$ ⇒ IL PICCO SI ABBASSA (-----)

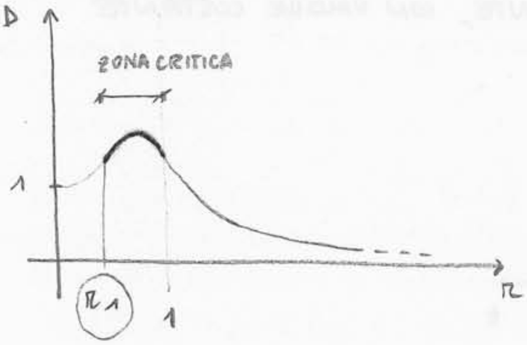
• SE CONSIDERO LA FASE:



⇒ se $\xi \uparrow\uparrow$ la curva si sposta (si abbassa)

2

⇒ RIPRENDO 1 DELLE CURVE IN FUNZIONE di ξ, E LA RIFERISCO AD 1 STRUTTURA:



◦ hp: conosco K, m, ω_1
→ calcolo r_1

ZONA CRITICA ⇒ zona in cui si concentrano le > deformazioni

⇒ PER USCIRE DALLA ZONA CRITICA, DEVO AGIRE SU ω:

◦ X AND VERSO SX : • AUMENTO ω, DIMINUISCO r
• IRRIGIDISCO LA STRUTTURA $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega\uparrow\uparrow$ se $K\uparrow\uparrow$

◦ X AND VERSO DX : • DIMINUISCO ω, AUMENTO r
• LA STRUTTURA DIVENTA + DEFORMABILE

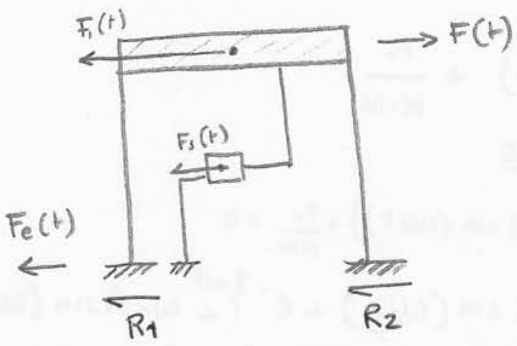
$\omega\downarrow\downarrow \rightarrow$ se $K\downarrow\downarrow$

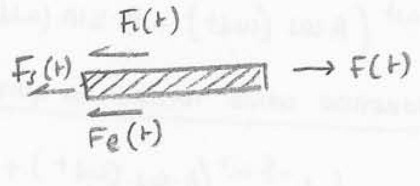
se $K\downarrow\downarrow \Rightarrow \omega\downarrow\downarrow$ (xo se $K\downarrow\downarrow$ ⇒ GLI SPOSTAMENTI $\uparrow\uparrow$)

$m\uparrow\uparrow \Rightarrow \omega\downarrow\downarrow$ (SOLITAMENTE XO LA MASSA È COST)

NB : X SAPERE COSA FARE È NECESSARIO CONOSCERE ESATTAMENTE DOVE SI È NELLA CURVA → CALCOLARE D
→ CALCOLARE r

3 CONOSCERE GLI SPOSTAMENTI SIGNIFICA CONOSCERE LE FORZE IN GIOCO





EQ. GENERICA del moto è : $m \cdot \ddot{u}(t) + K \cdot u(t) + c\,\dot{u}(t) = F(t)$

• RMK: LA FORZA DI INERZIA NON ARRIVA AI VINCOLI

$\rightarrow R_1 + R_2 = F_s(t) + F_e(t) = c \cdot \dot{u}(t) + K\,u(t)$

$\rightarrow c \cdot \dot{u}(t) + K\,u(t) = F(t) - m \cdot \ddot{u}(t)$

ELEMENTI DI DINAMICA

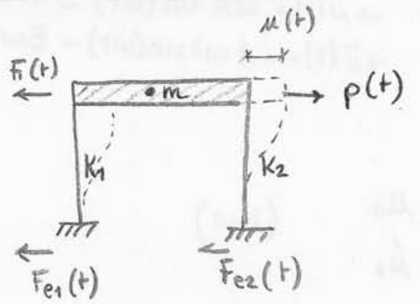
→ È 1 RIASSUNTINO DELLE DIMOSTRAZIONI APPENA FATTE, CON IN AGGIUNTA delle OSSERVAZIONI

1 OSCILLATORE SEMPLICE

→ È LA SCHEMATIZZAZIONE PIÙ COMUNEMENTE UTILIZZATA PER RAPPRESENTARE UNA STRUTTURA E IL SUO COMPORTAMENTO QUANDO VIENE ECCITATA DA 1 AZIONE SISMICA.

LE STRUTTURE RAPPRESENTATE POSSONO ESSERE MOLTEPLICI:

- TELAIO MONOPIANO

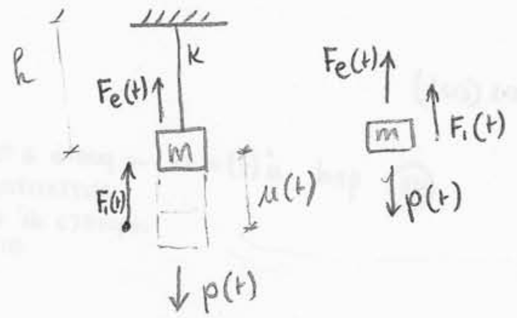


$$\begin{cases} F_i(t) = m \cdot \ddot{u}(t) \\ F_e(t) = \sum_i F_{ei}(t) = \sum K_i \cdot u(t) \end{cases}$$

$$\boxed{K_i = \frac{12EI}{h^3}}$$

EJ = RIGIDEZZA FLESSIONALE

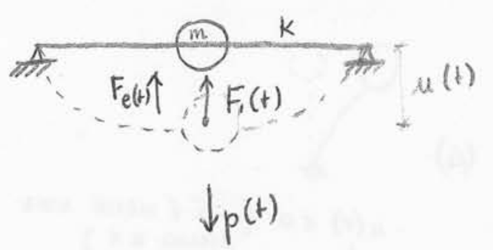
- TIRANTE



$$\boxed{K = \frac{EA}{h}}$$

EA RIGIDEZZA ASSIALE

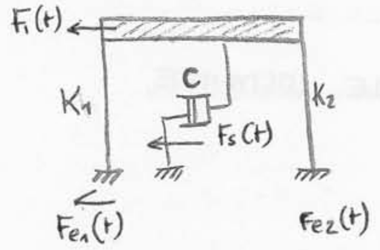
- IMPALCATO CON MASSA CONCENTRATA



$$\boxed{K = \frac{48EI}{L^3}}$$

②

2b OSCILLATORE SMORZATO — moto non forzato, ma smorzato



$\rightarrow p(t) = 0$

$$F_i(t) + F_e(t) + F_s(t) = 0$$

$$\begin{cases} F_i(t) = m \cdot \ddot{u}(t) \\ F_e(t) = \sum F_{ei} = K \cdot u(t) \\ F_s(t) = c \cdot \dot{u}(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ eq. $\quad m\ddot{u}(t) + K \cdot u(t) + c\,\dot{u}(t) = 0$

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) + 2\xi\omega \cdot \dot{u}(t) = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$c = 2m\xi\omega$$

sol $\quad u(t) = c \cdot e^{\alpha t}$

$\dot{u}(t) = \alpha c e^{\alpha t}$

$\ddot{u}(t) = \alpha^2 c e^{\alpha t}$

$\Rightarrow \alpha^2 c e^{\alpha t} + \omega^2 \cdot c e^{\alpha t} + 2\xi\omega\,\alpha c e^{\alpha t} = 0$

$\alpha^2 + 2\xi\omega\alpha + \omega^2 = 0$

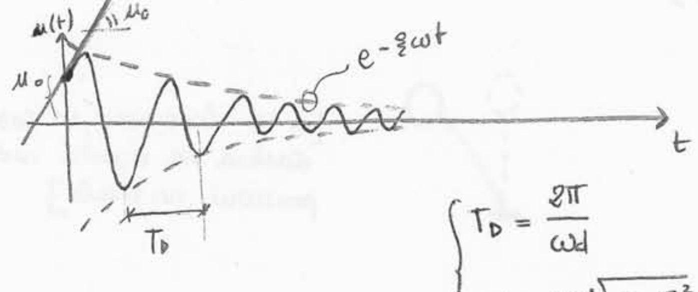
$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix}$$

$$\boxed{\rightarrow u(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}$$

- CASO $\xi < 1 \quad \rightarrow \alpha = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} \quad \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix}$

impongo $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + u_0\cos(\omega_d t)\right)$$

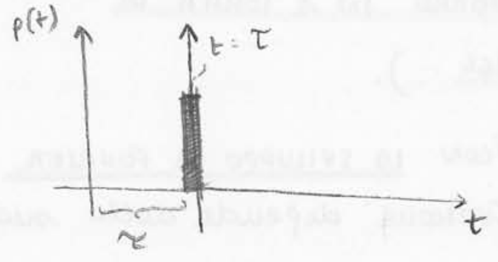


$$\begin{cases} T_D = \dfrac{2\pi}{\omega_d} \\ \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

MOTO ARMONICO OSCILLATORE SMORZATO

$$u(t) = e^{-\xi \omega t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + u_0 \cos(\omega_d t)\right)$$

→ DESCRIVE ESATTAMENTE IL NOSTRO OSCILLATORE in (2), CIOÈ DOPO L'IMPULSO, AVENDO TRASLATO L'ASSE VERTICALE in $t = \tau = 0$ (cioè sull'impulso)



CONDIZIONI INIZIALI

$$u(t) = (d)u(t)$$

LO CHIAMO COSÌ XK È LEGATO AD 1 IMPULSO UNITARIO CHE È 1 QUANTITÀ INFINITESIMA NEL TEMPO

(NB) LE CONDIZIONI INIZIALI DIVENTANO TRASLATE di 1 PERIODO τ RISPETTO A PRIMA.

→ IN PARTICOLARE AVRÒ:

$$\begin{cases} u(0) = du(\tau) = 0 \\ \dot{u}_0(0) = d\dot{u}(\tau) = \dfrac{p(\tau)}{m}\, d\tau \end{cases}$$

SE SOSTITUISCO nell' EQ. DI MOTO, OTTENGO:

$$\boxed{du(\tau) = e^{-\xi\omega(t-\tau)}\left(\frac{p(\tau)}{m \cdot \omega_d} \sin(\omega_d(t-\tau))\, d\tau\right)}$$

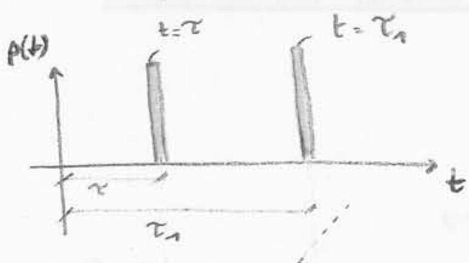
(ho sostituito $u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = \frac{p(\tau)}{m}\, d\tau$)

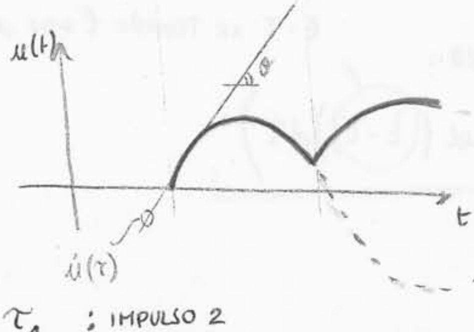
SOMMA DI IMPULSI

→ SE AGISCONO + IMPULSI DILAZIONATI NEL TEMPO, LA SITUAZIONE SARÀ:

- all' istante $t = \tau$: IMPULSO 1
  - PRODUCE 1 VARIAZIONE di VELOCITÀ pari a: $d\dot{u}(\tau) = \frac{p(\tau)}{m} d\tau$

$$d\dot{u}(\tau) = \operatorname{tg}\theta$$





- all' istante $t = \tau_1$: IMPULSO 2
  - VARIAZIONE di velocità : $du(\tau_1) = \frac{p(\tau_1)}{m} d\tau$

→ LA MASSA XK NON SI TROVA IN POSIZIONE NULLA MA nella POSIZIONE DOVUTA ALL'OSCILLAZIONE 1

→ SE SOMMO TUTTE LE RISPOSTE, OTTENGO:

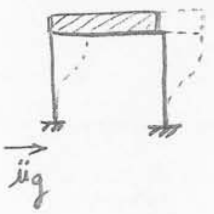
INTEGRALE DI DUHAMEL

$$u(t) = \frac{1}{m\,\omega_d} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\left(\omega_d (t-\tau)\right) d\tau$$

↳ TROVO 1 FUNZIONE CONTINUA CON 1 INTEGRALE di CONVOLUZIONE

4 _ SPETTRO DI RISPOSTA

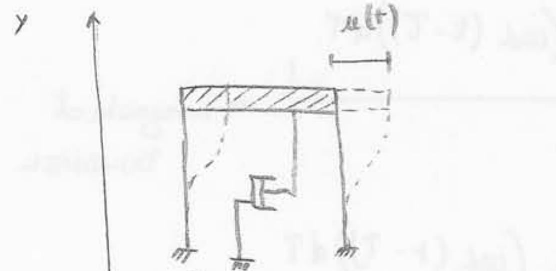
• IN GENERALE:



SE IO CONSIDERO 1 SISTEMA GENERICO, IN QUIETE, E GLI APPLICO 1 ACCELERAZIONE ALLA BASE (in questo caso alle fondazioni) SI GENERA 1 MOVIMENTO RELATIVO TRA LA SUBSTRUTTURA E LA SOVRASTRUTTURA. NASCONO:

• $F_e(t)$ = FORZA ELASTICA di RICHIAMO, nasce nei pilastri GRAZIE ALLA DEFORMAZIONE DI QUEST'ULTIMI DOVUTA ALLO SPOSTAMENTO RELATIVO TRA FONDAMENTA e SOLAIO. (SE ENTRAMBI TRASLASSERO RIGIDAMENTE DELLA STESSA QUANTITÀ, NON CI SAREBBE DEFORMAZIONE NEI PILASTRI E QUINDI NON CI SAREBBE LA FORZA ELASTICA DI RICHIAMO)

• $F_i(t)$ = FORZA DI INERZIA, NASCE A PRESCINDERE DAGLI SPOSTAMENTI RELATIVI TRA MASSA E VINCOLI, È LEGATA ESCLUSIVAMENTE ALL'ACCELERAZIONE SUBITA.
→ È IN FUNZIONE DI 1 SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO, GLOBALE.



- DERIVO E TROVO LA VELOCITÀ

$$\dot{u}(t) = \xi \omega u(t) + \underbrace{\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos(\omega_d (t-\tau)) d\tau}_{(\to \text{ è } S_v)}$$

- DERIVO ANCORA E OTTENGO L'ACCELERAZIONE

1) $\ddot{X}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 \cdot u(t) = 0 \Rightarrow \ddot{X}(t) = -2\xi\omega \dot{u}(t) - \omega^2 u(t)$

2) $\ddot{X}(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$

TUTTAVIA X 1 CORRETTA PROGETTAZIONE, A FAVORE DI SICUREZZA, PIÙ CHE VALUTARE LA VARIAZIONE DI QUESTE FUNZIONI NEL TEMPO, È PIÙ IMPORTANTE VALUTARE GLI EFFETTI MASSIMI

- VOGLIO TROVARE LO SPOSTAMENTO MAX:

- $u(t) = u_{max}(t)$
- $\dot{u}(t) = 0$

CASO 1 _ $\dot{u}(t) = 0$ (POSIZIONE DI MASSIMO SPOSTAMENTO)

_ ACC: $\ddot{X}(t) = -\omega^2 \cdot u(t)$

_ SPOST: $u(t) = \frac{1}{\omega_d} \cdot V(t)$ $\to f(\ddot{u}_g(t), \omega, \xi)$

$\Rightarrow$ VOGLIO TROVARE IL MAX DI QUESTA FUNZIONE, E LO CHIAMO S_v

$$S_v = \left[V(t) \right]_{max} = \left[\int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_d (t-\tau)) d\tau \right]_{max}$$

PSEUDO VELOCITÀ SPETTRALE

$\to$ LA CHIAMO PSEUDO PERCHÉ $\dot{u}(t)$ CALCOLATA PRIMA, HA 1 TERMINE AGGIUNTIVO ($\xi\omega \cdot u(t)$)

SPOSTAMENTO MAXIMO SPETTRALE

$$\boxed{u_{max}(t) = \frac{1}{\omega_d} \cdot S_v = \frac{1}{\omega_d} \left[V(t)_{max} \right]} = S_d$$

$\Rightarrow$ QUINDI MASSIMIZZANDO LA PSEUDO VELOCITÀ SPETTRALE, E MOLTIPLICANDOLA X IL RECIPROCO DELLA PULSAZIONE, OTTENGO LO SP SPETTRALE MAX.

Spostamento

FORZANTE SISMICA _ SPETTRO DI RISPOSTA

- CONSIDERO L'EQ. DEL SISTEMA

$$m \cdot \ddot{X}(t) + c\,\dot{u}(t) + K u(t) = 0$$

$$m\left(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)\right) + c\,\dot{u}(t) + K\,u(t) = 0$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c\,\dot{u}(t) + K\,u(t) = -m\,\ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\,\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = p(t)$$

→ considero $p(t) = -m\,\ddot{u}_g(t)$ UNA SOMMA di impulsi, ne ricavo l'integrale:

$$u(t) = \frac{1}{\cancel{m}\,\omega_d}\int_0^t \cancel{m}\,\ddot{u}_g(t)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\left(\omega_d(t-\tau)\right) d\tau \quad \rightarrow \text{DUHAMEL}$$

$$= \frac{1}{\omega_d}\underbrace{\int_0^t \ddot{u}_g(t)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\left(\omega_d(t-\tau)\right) d\tau}_{= V(t)}$$

[HA LE DIMENSIONI di 1 VELOCITÀ

$$S_d = \frac{1}{\omega_d}\left[V(t)\right]_{max} = \frac{1}{\omega_d}\cdot S_v$$

SP. MASSIMO

PSEUDO VELOCITÀ SPETTRALE $S_v = \left[V(t)\right]_{max}$

$$S_v = \left[V(t)\right]_{max}$$

VELOCITÀ SPETTRALE

S_a : $\rightarrow \dot{u}_0 = 0 \rightarrow$

$$\ddot{X}(t) = -\frac{c}{m}\cdot\dot{u}(t) - \frac{K}{m}u(t) \qquad (\dot{u}(t) \rightarrow 0)$$

$$= -\frac{K}{m}u(t)$$

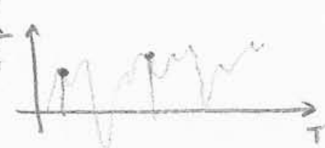
$$\rightarrow |\ddot{X}|_{max} = K\,|u(t)|_{max} = \frac{K}{m}S_d = \frac{K}{m}\cdot\frac{S_v}{\omega_d} = \omega^2\cdot\frac{S_v}{\omega_d} = \omega S_v$$

$$|F_i|_{max} = m\cdot\ddot{X}_{max} = m\cdot S_a = m\cdot\omega\cdot S_v$$

$$|F_e|_{max} = K\,|u(t)|_{max} = K\cdot S_d = K\cdot\frac{S_v}{\omega}$$

X LA COSTRUZIONE DELLO SPETTRO DI RISPOSTA

→ costruisco queste funzioni massimizzanti.



1. REGISTRO CON ACCELEROGRAMMI le ACCELERAZIONI al SUOLO

→ POSSO CALCOLARMI QUINDI $S_v = f(\ddot{u}_g, \omega, \xi)$ (noto, noto, noto) → SIGNIFICA CHE X OGNI PERIODO mi RICAVO IL VALORE MAX, E QUESTO È 1 PUNTO della CURVA

→ RICAVO $S_d = \frac{S_v}{\omega}$

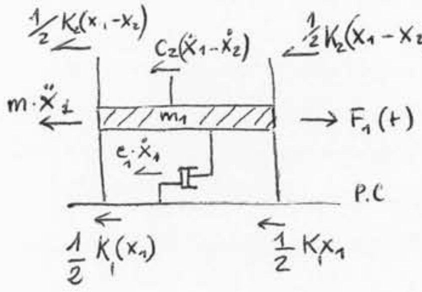
luogo dei punti di maximo Sv x strutt. che hanno ξ = fissato.

→ RICAVO $S_a = \omega \cdot S_v$

⇒ COSTRUISCO LO SPETTRO DI PROGETTO → L' INVILUPPO DI TUTTI GLI SPETTRI NELLA STORIA E PRENDE TUTTI I VALORI MASSIMI

M.D.O.F. _ OSCILLATORE MULTIPLO

IN QUESTO CASO IL MIO EDIFICIO È SCHEMATIZZABILE COME 1 OSCILLATORE MULTIPLO:



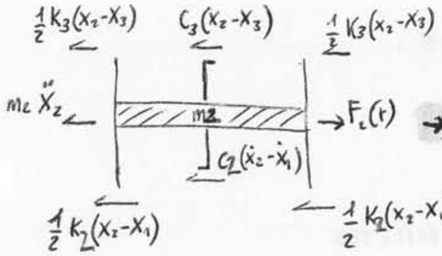
$$\rightarrow\ m_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 + K_2(x_1-x_2) + C_1\dot{x}_1 + C_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) = F_1(t)$$

F_{s1} solaio 1; F_{s2} solaio 2; F_{e1}; F_{e2}

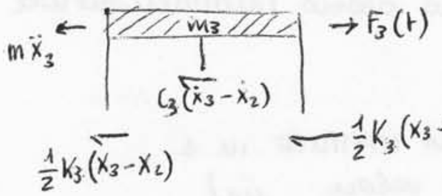
inerzia legata a sistema globale

IL SOLAIO CHE SI SPOSTA DI MENO RICHIAMA L'ALTRO, QUINDI m_1 SI SPOSTA DI MENO E RICHIAMA m_2,

QNDI $x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1-x_2) < 0 \Rightarrow F_e = K(x_1-x_2) < 0$ È OPPOSTA ALLA DIREZ DELLO SPOST



$$\rightarrow\ m_2\ddot{x}_2 + K_2(x_2-x_1) + K_3(x_2-x_3) + C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + C_3(\dot{x}_2-\dot{x}_3) = F_2(t)$$



$$\rightarrow\ m_3\ddot{x}_3 + K_3(x_3-x_2) + C_3(\dot{x}_3-\dot{x}_2) = F_3(t)$$

IN FORMA COMPATTA RAPPRESENTO IL MIO SISTEMA DINAMICO COME:

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} + [C]\{\dot{x}\} = \{F\}}$$

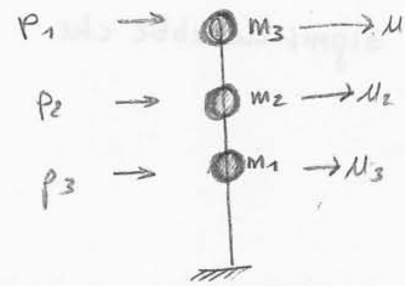
DOVE:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix};\quad [C] = \begin{bmatrix} C_1+C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_1+C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{bmatrix};\quad [K] = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$

Γx COMPORRE BISOGNA CONSIDERARE CHI MOLTIPLICA COSA CIOÈ

$[C]\cdot\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix} \Rightarrow$ QUINDI VADO A VEDERE TRA LE 3 EQUAZIONI QUALI SONO I COEFF CHE MOLTIPLICANO $\dot{x}_1$ E LI SCRIVO IN RIGA, POI QUALI MOLTIPLICANO $\dot{x}_2$ E LI SCRIVO IN RIGA E COSÌ VIA

① MOTO ARMONICO _ NON FORZATO - NON SMORZATO



F_i F_S

L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA È TALE PER CUI:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0$$

IPOTIZZO CHE LA SOLUZIONE DA NOI CERCATA SIA 1 COMBINAZIONE LINEARE TRA 1 componente f(tempo) e 1 f(spazio)

$$\{x\} = \{\psi\} \cdot \phi(t)$$

$\phi(t)$ → contributo in f(TEMPO)

$\{\psi\}$ → contributo in f(SPAZIO) → sono coord. geometriche spaziali

•) [QUESTO x_K LO SPOSTAMENTO DI 1 MASSA A + GRADI DI LIBERTÀ DIPENDE DA + VARIABILI: f(tempo, posizione nello spazio, vincoli etc..)]

→ è cost, x_K derivo in dt

$$\{\ddot{x}\} = \{\psi\}\ddot{\phi}(t)$$

• SOSTITUENDO OTTENGO:

$$[M]\cdot\{\psi\}\ddot{\phi}(t) + [K]\{\psi\}\phi(t) = 0$$

→ È NELLA FORMA $\sum_{K=1}^{n} m_{iK}\psi_K\ddot{\phi}(t) + \sum_{K=1}^{n} K_{iK}\psi_K\phi(t) = 0$

→ pongo $\boxed{\omega^2 = \dfrac{\sum_{K=1}^{K} K_{iK}\psi_K}{\sum_{K=1}^{n} m_i\psi_K} = -\dfrac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}}$

divido tutto per $\phi(t)$

$$[K]\{\psi\}(-\omega^2) + [M]\{\psi\} = 0$$

$$\{\psi\}\left(-\omega^2[K] + [M]\right) = 0$$

→ È 1 PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

RISOLVENDO IL SISTEMA (che ha solo + 2 incognite) ottengo

$$\{\psi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}2 \\ 3{,}15 \end{Bmatrix}$$

→ x CALCOLARE $\{\psi_2\}$ → pongo $\lambda = \omega_2^2$

$\{\psi_3\}$ → pongo $\lambda = \omega_3^2$

OTTENGO $\{\psi_1\}$, $\{\psi_2\}$, $\{\psi_3\}$

SIGNIFICATO FISICO DI $\{\psi\}$ e ω

$\{\psi\}$ = È 1 CONTRIBUTO ALLO SPOSTAMENTO RELATIVO ALLA POSIZIONE DELLE MASSE

ω = È 1 QUOTAPARTE DELLO SPOSTAMENTO

(→ NON È IL VERO E PROPRIO SPOSTAMENTO XK È CALCOLATO A MENO di 1 COSTANTE MOLTIPLICATIVA

⇒ L'OSCILLAZIONE FINALE SARÀ 1 COMBINAZIONE LINEARE DELLE ≠ FORME

PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ DEI VETTORI

$$[K]\{\psi\}^i - \omega_i^2 [M] \underbrace{\{\psi\}^i}_{\text{AUTOVETTORE ASSOCIATO A } \omega_i} = 0$$

moltiplico per $\{\psi\}^{J,T}$

$$\{\psi\}^{(J)T} \cdot [K]\{\psi\}^i - \omega_i^2 [M]\{\psi\}^i \cdot \{\psi\}^{(J),T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\psi\}^{(J)T} \cdot \{\psi\}^i} = \begin{cases} = 0 & J \neq i \\ \neq 0 & J = i \end{cases}$$

(SE I 2 VETTORI SN ORTOGONALI TRA LORO, IL PRODOTTO È NULLO!)

$$[\bar{M}]\{\ddot{p}\} + [\bar{K}]\{p\} = [\psi]^T\{F\}$$

- moltiplico per $[\bar{M}]^{-1}$ → matrice diagonale con $\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}$

$$\underbrace{[\bar{M}]^{-1}[\bar{M}]}_{[I]}\{\ddot{p}\} + [\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]\{p\} = [\bar{M}]^{-1}[\psi]^T\{F\}$$

$$\{\ddot{p}\} + \boxed{[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}]}\{p\} = [\bar{M}]^{-1}[\psi]^T\{F\}$$

↓

X SVOLGERE QUESTO PRODOTTO CONSIDERO CHE:

→ $[K]\{\psi\}^i - \omega_i^2[M]\cdot\{\psi\}^i = 0$ → ω_i^2 È 1 COST CHE MOLTIPLICA 1 MATRICE, posso considerarlo come 1 matrice diagonale $[\Omega]$

TORNANDO ALLE MATRICI

→ $[K]\cdot[\psi] - [\Omega][M][\psi] = 0$

$[\psi]^T[K][\psi] - [\psi]^T[\Omega][M][\psi] = 0$

$[\bar{K}] - [\Omega][\bar{M}] = 0$

→ $[\bar{M}]^{-1}[\bar{K}] - [\bar{M}]^{-1}[\Omega][\bar{M}] = 0$

$$\boxed{[\bar{M}]^{-1}\cdot[\bar{K}]} = [\Omega]$$

- SOSTITUENDO IL SISTEMA DIVENTA:

$$\boxed{\underbrace{\{\ddot{p}\}}_{\text{VETTORE delle ACCELERAZIONI}} + \underbrace{[\Omega]}_{\text{MATRICE DIAGONALE}}\underbrace{\{p\}}_{\text{VETTORE degli SPOSTAMENTI}} = \underbrace{[\bar{M}]^{-1}[\psi]^T}_{\text{COEFFICIENTE}}\{F\}}$$

→ • È 1 SISTEMA DI (n) EQ. DISACCOPPIATE

- OGNI EQ. DESCRIVE IL MOTO DI 1 OSCILL. SEMPLICE

In forma estesa, l'i-esima componente sarà:

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2\cdot p_i = \frac{1}{\bar{M}_{ii}}\cdot\{\psi\}_i^T\cdot\{F(t)\}$$

$$= \frac{1}{[\bar{M}]}\cdot[\psi]^T\cdot\{F(t)\} = \frac{[\psi]^T}{[\bar{M}]}[m]\ddot{u}_g\{i\}$$

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2\cdot p_i = \frac{\Sigma\,\psi_K^T}{\Sigma\, m_K\cdot\psi_K^{(i)2}}\cdot F_K(t) \qquad \text{con } F_K(t) = m_K\cdot\ddot{u}_g$$

$$= \frac{[M][\psi]^T}{[M][\psi]^T[\psi]}$$

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2\cdot p_i = \frac{\Sigma\,\psi_K^T}{\Sigma\, m_K\psi_K^2}\, m_K\ddot{u}_g = g_i\cdot\ddot{u}_g$$

$$= \frac{\Sigma m_K\{\psi\}_i^T}{\Sigma m_K\,\psi_K^2}$$

NB L'EN. TOTALE

L'EN. TOTALE si DISTRIBUISCE TRA I VARI MODI DI VIBRARE, AD OGNI MODO SI ASSOCIA 1 QUOTAPARTE di ENERGIA.

QUOTAPARTE di EN. > ⇒ MODI DI VIBRARE CON f ↓↓

frequenza

- HANNO 1 OSCILLAZIONE LENTA
- GENERALMENTE SONO I MODI CHE COINVOLGONO PIÙ DELL' 85% DELLE MASSE.

NB se considero

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

↳ trattandosi di 1 sistema complesso, È 1 MATRICE che DIPENDE DA SPOSTAMENTI CHE VARIANO da modo a modo (xk ogni componente dipende dallo spost. non nullo considerato, ma questo varia da modo a modo!)