



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 557**

**DATA: 13/06/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Maltese**

**MATERIA: Tecnica delle Costruzioni + Esercitaz.**

**Prof. Mancini**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# TECNICA DELLE COSTRUZIONI:

7/03/2013

## ESERCITAZIONE 1

Libri esercizi: Bertero, Grasso "Esercizi di Scienze delle Costruzioni"

Prof. DIEGO ALLAIX  
diego.allaix@polito.it

Consulenza: Venerdì 11,30 - 13.00  
4825 numero di telefono  
DISEG

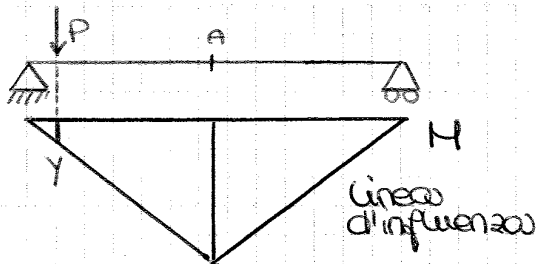
Esame: SCRITTO + ORALE

Lo scritto non è vincente per l'orale; ci si accede anche se non suff.  
Nello scritto saranno presenti tutti gli esercizi sul programma del corso.

### ARGOMENTI:

- 1) Sicurezza strutturale
- 2) Linee d'influenza

Supponendo di avere un impalcato



dal teor. Betti:  
 $M_A = P \cdot Y$

(lo vedremo più avanti;  
richiamo la scienza  
delle costruzioni).

calcolo il momento flettente  $M$  dovuto  
al peso del voido  
sub cerco posizione del max momento  
flettente.

→ dimensionamento della trave  
→ misuro in base alle condizioni  
peggiore che in qst caso sarà in  
mezzania

Il progettista può fare 2 cose:

- 1) calcolare il  $M$  in mezzania o in ogni pto.
- 2) linee d'influenza

### 3) Combinazione delle azioni:

Secondo gli Eurocodici:

$\gamma_k$  } fattori parziali

$G_k$  (azioni permanenti) →  $\gamma_k \cdot G_k$   
 $Q_k$  (azioni variabili) →  $\gamma_Q \cdot Q_k$

due valori  $\neq$  in  
funz. del singolo  
valore delle  
azioni ①

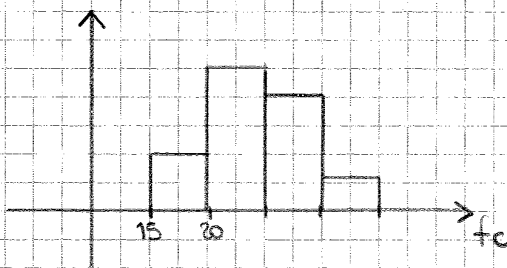
# ① SICUREZZA STRUTTURALE

- definizione
- metodi di valutazione

## DEFINIZIONI:

La sicurezza strutturale è il grado di protezione di persone e beni rispetto alla conseguenza del collasso.

L'affidabilità di una struttura è la capacità di soddisfare i requisiti per i quali viene progettata per un periodo di tempo chiamato "vita di progetto".

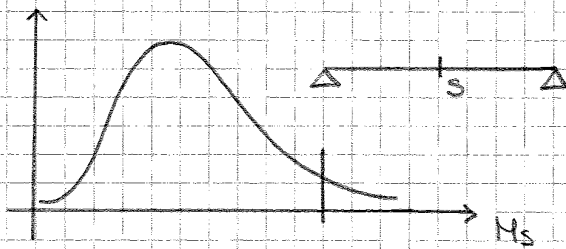


Aleatorietà dei materiali

Considero:  $R$  (resistenze strutture)

$S$  (solllecitazione dovute ai carichi)

$R, S$  grandezze casuali



Rottura:  $R < S$

Esempio:

- Lancio di 1 dado su 6 facce:

Voglio calcolare la probabilità che ho che esca un numero  $\geq 3$  con un lancio a disposizione:

$$P(\text{numero} \geq 3) = \frac{N_A}{N} = \frac{4}{6} = 0,6\bar{6}$$

$N_A = 4$  ma può uscire 3, 4, 5, 6 quindi 4 numeri

$N = 6$  ma facce del dado

- Lancio 2 dadi: probabilità che dal lancio di 2 dadi esca il num. 8

$$P(8) = \frac{N_A}{N} = \frac{5}{36}$$

risultato ricavato da tabella:

1° dado 2° dado

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

N risultati tot

$$N = 6 \times 6 = 36$$

No esse  
no possibile  
del risultato

[solo  
coppie]  
2, 6

→ Numero di casi favorevoli

$N_A = 5$  ma solo 5 coppie mi danno il num. 8

② PROBABILITÀ FREQUENTISTA

↳ definizione a posteriori

DEF: Si definisce la frequenza assoluta  $n$ :

$n$  rappresenta il numero delle volte in cui ottengo l'evento scelto

Esempio:

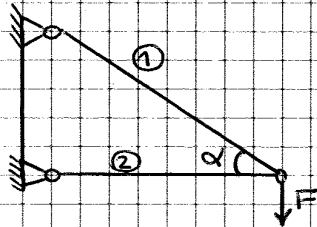
Dal lancio di una moneta voglio conoscere la probabilità che esca croce.

$$P(\text{croce}) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{\text{croce}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{\text{croce}}}{N} \quad \leftarrow \text{Stima delle frequenze}$$

$$e \quad f_{\text{croce}} = \text{frequenza relativa} = \frac{n_{\text{croce}}}{\text{num prove}}$$

LANCIO	RISULTATO	$n_{\text{croce}}$	$f_{\text{croce}}$
1	T	0	0
2	T	0	0
3	C	1	1/3
4	T	1	1/4
5	C	1	1/5

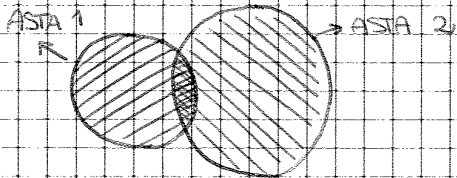
### Applicazione logica degli insiemi in un problema strutturale.



- Eventi:
- ① Rottura strutturale
  - ② Rottura asta 1
  - ③ Rottura asta 2

↳ Relazione tra rottura strutturale e rottura aste:

Evento ①: ROTTURA STRUTTURALE = ROTTURA ASTA 1 U ROTTURA ASTA 2



Rappresentano la rottura dell'elemento 1 e dell'elemento 2

Evento ②: ROTTURA ASTA 1 =  $S_1 > R_1$  (sforzo normale resistente)

$S$  = sollecitazione  
 $R$  = resistenza

Evento ③: ROTTURA ASTA 2 =  $S_2 > R_2$

• Supponendo di avere lo stesso materiale e stessa sezione trasversale:  $R_1 = R_2 = R$

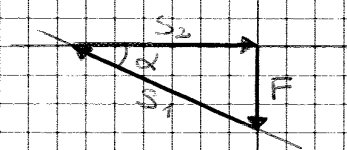
ROTTURA 1:  $S_1 > R$

ROTTURA 2:  $S_2 > R$

Quanto varrà lo sforzo nell'asta 1?

Quanto varrà lo sforzo nell'asta 2?

↳ Costruisco il poligono delle forze: percorso chiuso



$$S_1 = \frac{F}{\sin \alpha} \Rightarrow S_1 = \frac{F}{0,7}$$

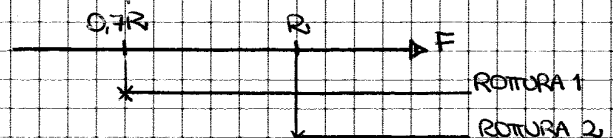
$$S_2 = S_1 \cdot \cos \alpha = F \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow S_2 = F$$

Se  $\alpha = 45^\circ$  (max)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esprimo le rotture in elemento 1 e 2 in funzione di F:

1)  $S_1 > R \rightarrow F > 0,7 R$

2)  $S_2 > R \rightarrow F > R$



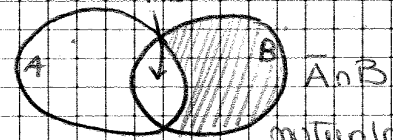
Se  $R > F$  si rompono entrambi

Rappresentazione giusta:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$



↳ Posso applicare assioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

confronto tra  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  } 1° membro uguale  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$  } 2° membro valutato

Se  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

allora  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$  ← uguale

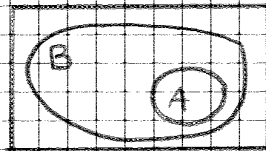
↳  $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$  sostituisco in equazione e ottengo l'equazione iniziale.

### PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Supponendo di avere due eventi A, B, calcolo la probabilità che si verifichi l'evento A sapendo che l'evento B si sia già verificato.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

caso 1:  $A \subset B$

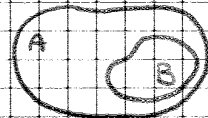


$$A \cap B = A$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$$

con  $0 \leq P(B) \leq 1$

caso 2:  $B \subset A$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Tutto ciò ci serve in relazione agli eventi statisticamente indipendenti

### EVENTI STATISTICAMENTE INDIPENDENTI:

A, B sono statisticamente indipendenti se il verificarsi di un evento non influenza la probabilità che si verifichi l'altro.

Supponendo di avere due eventi A, B, se sono statisticamente indipendenti:

$$P(A) = P(A|B)$$

Esempio:

$$A = \{ \# \text{ pari} \} = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$B = \{ 2 \}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} ; P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

## TEOREMA DI BAYES

Dati  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mutualmente escludentisi ed esaustivi

$$P(A_i|C) = \frac{P(C|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(C|A_j) \cdot P(A_j)} = P(C)$$

Esempio:

Ciò viene applicato quando:

supponendo di avere un edificio che ha subito un danneggiamento causato da 2 eventi:

1° causa: terremoto (T)

2° causa: vento (fortissima intensità) (V)

D = danneggiamento (D)

Voglio sapere quanto vale:  $P(T|D) = ?$

$P(V|D) = ?$

$$P(T) = 0,8 \quad P(D|T) = 0,1$$

$$P(V) = 0,2 \quad P(D|V) = 0,05$$

$$P(T|D) = \frac{P(D|T) \cdot P(T)}{P(D)} = \frac{0,1 \cdot 0,8}{0,09} = \boxed{0,89}$$

$$\begin{aligned} \text{dove } P(D) &= P(D|T) \cdot P(T) + P(D|V) \cdot P(V) = \\ &= 0,1 \cdot 0,8 + 0,05 \cdot 0,2 = 0,09 \end{aligned}$$



$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \boxed{0,50} \rightarrow \text{Causa più probabile di errore}$$

$$P(B|C) = \frac{P(C|B) \cdot P(B)}{P(C)} = 0,26$$

$$P(C|C) = \frac{P(C|C) \cdot P(C)}{P(C)} = 0,07$$

$$P(D|C) = \frac{P(C|D) \cdot P(D)}{P(C)} = 0,08$$

$$P(E|C) = \frac{P(C|E) \cdot P(E)}{P(C)} = 0,08$$

Esercizio ③ (slides) → palline

## METODI DI VALUTAZIONE PER I SISTEMI DI SICUREZZA STRUTTURALE

### VARIABILI ALEATORIE:

Strumenti che permettano di descrivere ciò che non si riesce ad esprimere in modo deterministico.

Sono delle funzioni che associano dei numeri reali ad esiti di esperimenti.

Spazio campione: → Variabili aleatorie ⇒ facilitano il calcolo delle probabilità.

↳ Una variabile aleatoria  $X$  è una funzione che associa ad ogni risultato  $\omega \in \Omega$  un numero reale  $x \in \mathbb{R}$ .

### Esempio:

Lancio di 2 monete non truccate.

Esperimento casuale  $\Leftrightarrow$  spazio campione  $\Omega$ .

$X = \text{n}^\circ$  di volte che si verifica CRUCE.

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$$

	$X$	
{	TT	→ 0
	TC	→ 1
	CT	→ 1
	CC	→ 2

$$F_X(x) \geq 0 \quad F_X(x) = P(X=x)$$

$$x_1 < x_2 \quad F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$

$$F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = \underbrace{P(X \leq x_1)}_{F_X(x_1)} + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + \underbrace{P(x_1 < X \leq x_2)}_{> 0}$$

$$F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$

Esempio:

$X$ : n° di assali dei veicoli

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

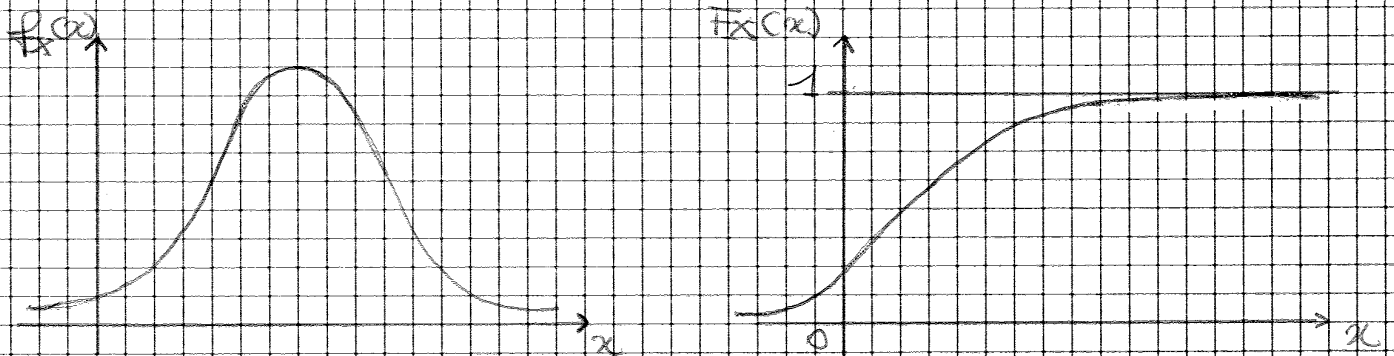
$X=2$

valori $x_i$	frequenza	$P(X=x_i)$
2	0,108	0,108
3	0,058	0,058
4	0,235	0,235
5	0,53	0,53
...	...	...
10	0,0015	0,0015

trasporti eccezionali

### VARIABILI CONTINUE

Descrivono le grandezze che entrano realmente in gioco nella sicurezza strutturale

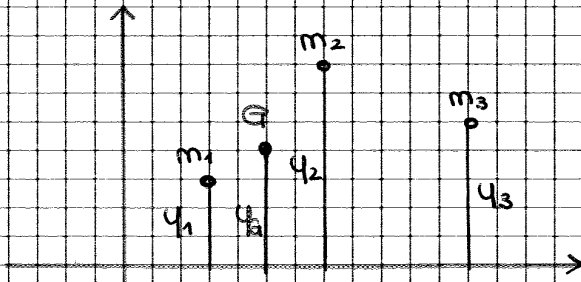


curva puntuiforme continua

# VARIABILI ALEATORIA DISCRETA

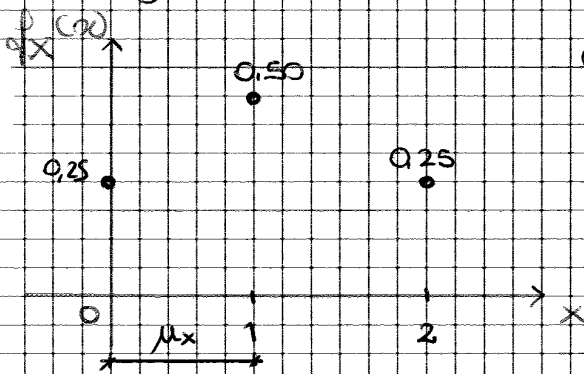
$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_X(x_i)}$$

(calcolo del baricentro di una massa puntiforme)  
 ↓  
 Scienze delle Costruzioni



$$\bar{y}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum m_i}$$

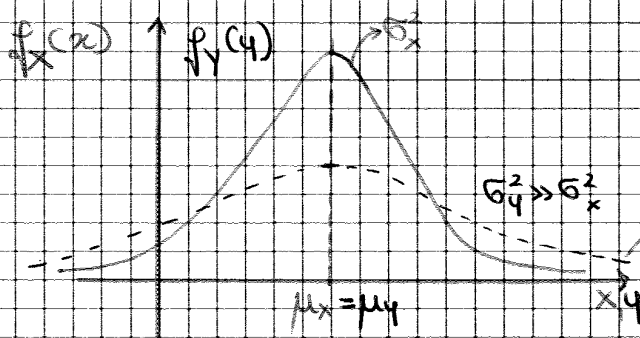
Analogia:



$$m_i = p_X(x_i)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p_X(x) dx = \text{VARIANZE}$$

momento centrale di ordine 2 → riferito alla media  
 momento d'inerzia della distribuzione



la curva si allarga perché  $\sigma_y^2 \gg \sigma_x^2$   
 (la curva si allarga in conseguenza all'allargamento e al fatto che l'area deve essere uguale ad 1)

Varianza:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \text{ DEVIATIONE STANDARD della variabile } x$$

MOMENTO DI ORDINE 3 ⇒  $\mu_3 = \text{ASIMMETRIA}$

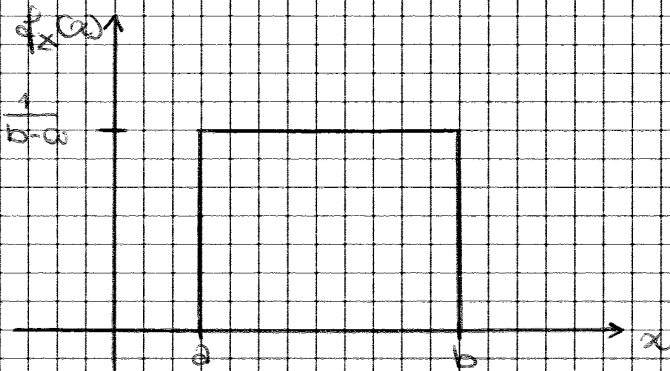
## ASIMMETRIA

$$\mu_{3x}$$

$$\mu_{3x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^3 f_x(x) dx.$$

## SPECIFICHE DISTRIBUZIONI

### DISTRIBUZIONE UNIFORME

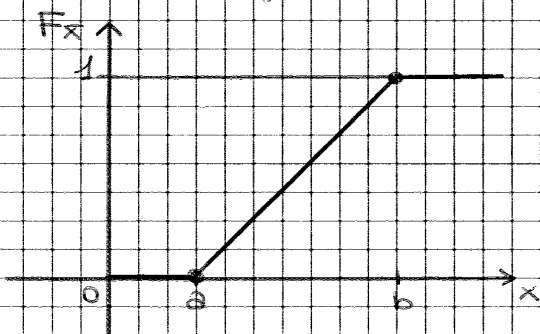


$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1 \rightarrow \text{non è esatto}$$

area del rettangolo  $(b-a)$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) dt$$



$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

### VALORE MEDIO

$$\mu_x = \frac{a+b}{2}$$

### VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

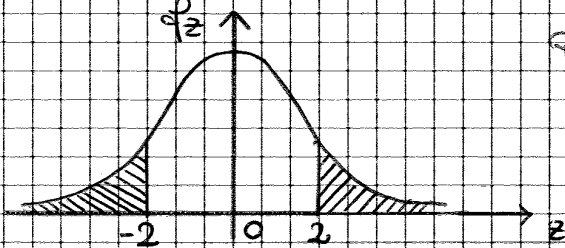
come calcolare  $\mu_x$ :

$$\begin{aligned} \mu_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_a^b x f_x(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} [b^2 - a^2] = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

$$C.O.V. = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{30}{560} = 0,053 \quad \text{deviazione standard}$$

$$P(X \leq 500) = P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{500 - \mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \leq \frac{500 - 560}{30}\right) = P(Z \leq -2)$$

Consulta Tabella sulle slides.

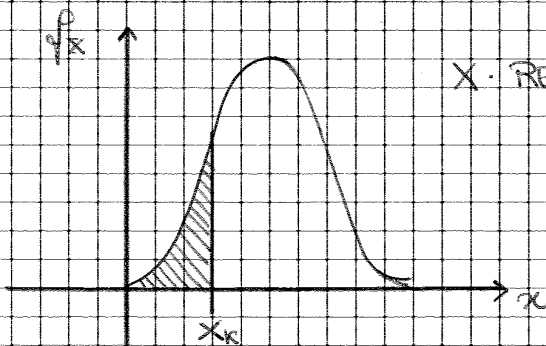


$$P(Z \leq -2) = P(Z > 2)$$

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F_z(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

X variabile a distribuzione normale

$$= P(Z \leq -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0,0228$$



X - RESISTENZA

$$P(X \leq x_k) = 5\%$$

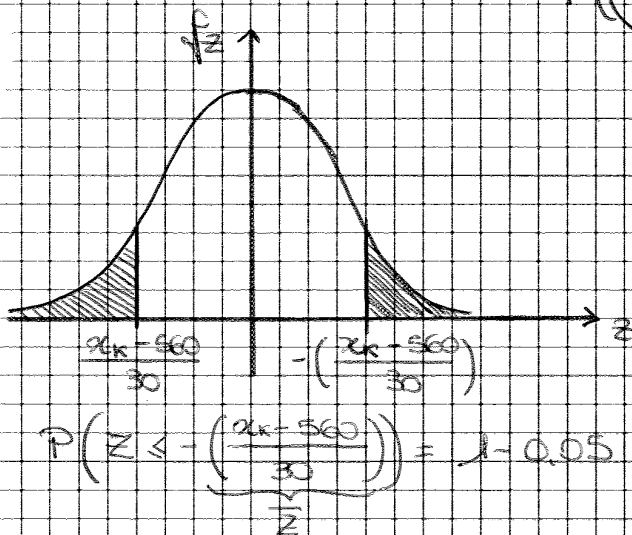
$$P(X \leq x_k) = 0,05$$

$$P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{x_k - \mu_x}{\sigma_x}\right) = 0,05$$

$$P\left(Z \leq \frac{x_k - 560}{30}\right) = 0,05$$

$$P\left(Z \geq -\left(\frac{x_k - 560}{30}\right)\right) = 0,05 =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq -\left(\frac{x_k - 560}{30}\right)\right)$$



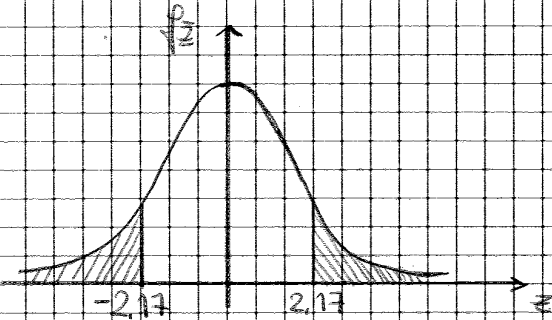
$$P\left(Z \leq -\left(\frac{x_k - 560}{30}\right)\right) = 1 - 0,05 = 0,95$$

Cerco nella Tabella il valore più prox. al 0,95 e troverò la z che mi rappresenta la z.

$$P(Z \leq \bar{z}) = 0,95 \rightarrow \bar{z} = 1,645$$

$$P(X \leq 500) = P\left(\frac{\ln(x) - \lambda x}{\sigma_x} \leq \frac{\ln(500) - \lambda x}{\sigma_x}\right) =$$

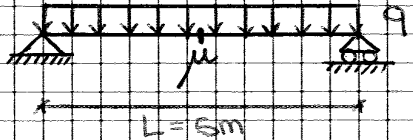
$$= P\left(Z \leq \frac{\ln(500) - 6,33}{0,053}\right) = P(Z \leq -2,17) = F_Z(-2,17)$$



$$P(Z \leq -2,17) = 1 - P(Z \leq 2,17) =$$

$$= 1 - 0,9850 = 0,0150$$

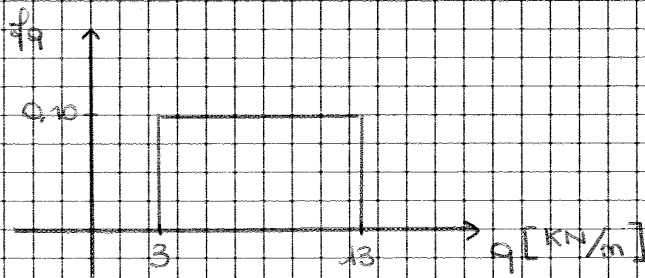
### ESERCIZIO



$q \sim$  UNIFORME Variabile aleatoria

distribuzione momento flettente in mezzanella?

Momento flettente sarà variabile aleatoria.



$$\mu_q = 8 \text{ KN/m}$$

$$\sigma_q = 2,9 \text{ KN/m}$$

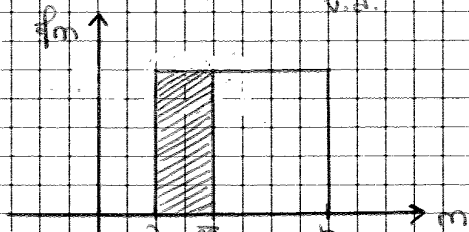
$$f_q = \begin{cases} 0 & q \leq 3 \text{ KN/m} \\ 0,10 & 3 < q < 13 \\ 0 & q \geq 13 \text{ KN/m} \end{cases}$$

$$F_q(q) = \begin{cases} 0 & q \leq 3 \text{ KN/m} \\ \frac{q-3}{10} & 3 < q < 13 \\ 1 & q \geq 13 \text{ KN/m} \end{cases}$$

funz. distrib. cumulativa

Scrivo la funz. di distribuzione cumulativa del momento flettente

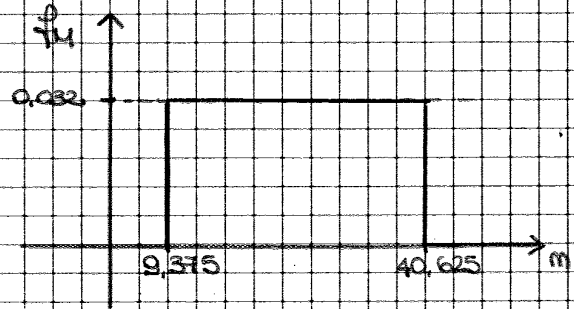
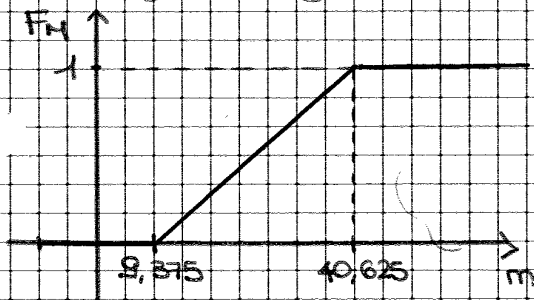
$$F_M(m) = ? = P(M \leq m) \stackrel{\text{una sola variabile}}{\text{v.b.}} = P\left(\frac{q \ell^2}{8} \leq m\right) = P\left(q \leq \frac{8m}{\ell^2}\right) = F_q\left(\frac{8m}{\ell^2}\right)$$



Trovare l'espressione della funzione cumulativa di

$$F_q\left(\frac{8m}{\ell^2}\right)$$

Disegno (diagramma) delle funzioni cumulative e densità di probabilità



L'effetto strutturale del carico trovato è il momento flettente  $M$

Valore medio  $\mu_M = \frac{9,375 + 40,625}{2} = 25 \text{ KN}\cdot\text{m}$

Varianza  $\sigma_M^2 = \frac{(40,625 - 9,375)^2}{12} = 81,38 \text{ (KN}\cdot\text{m)}^2$

Momento  $M = \frac{\rho l^2}{8}$

$\mu_M = \mu_\rho \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{8 \cdot 25}{8} = 25 \text{ KN}\cdot\text{m}$

Se ho una variabile  $X$  di cui conosco  $\mu_x, \sigma_x^2$

$Y = a \cdot X + b$

$\mu_y = a \mu_x + b$  una 1ª proprietà del valore medio

2ª proprietà del valore medio:

$X_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$

$\mu_y = a_1 \mu_{x_1} + a_2 \mu_{x_2} + \dots + a_n \mu_{x_n}$

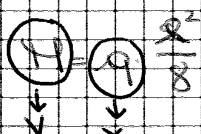
Calcolo della varianza attraverso una sua proprietà:

$X: \mu_x, \sigma_x^2$

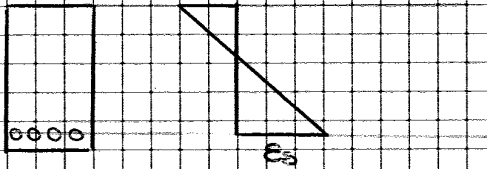
$Y = a \cdot X + b$  funz. lineare

$\hookrightarrow \sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$  nessun contributo in termini di varianza

$\hookrightarrow$  Applicazione al momento flettente:



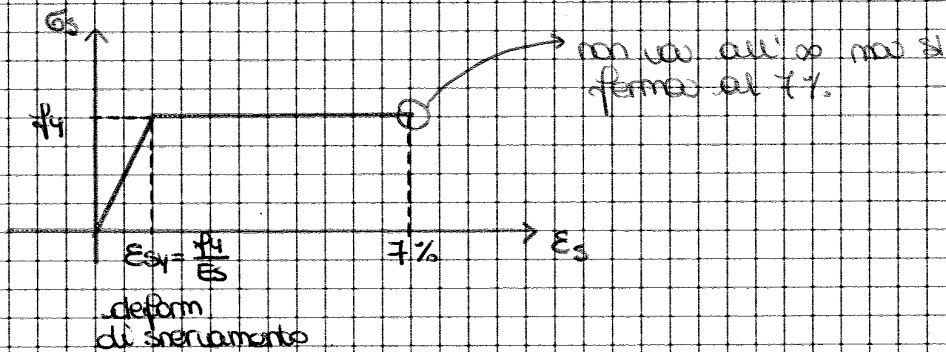
## Diagrammi delle deformazioni lineari.



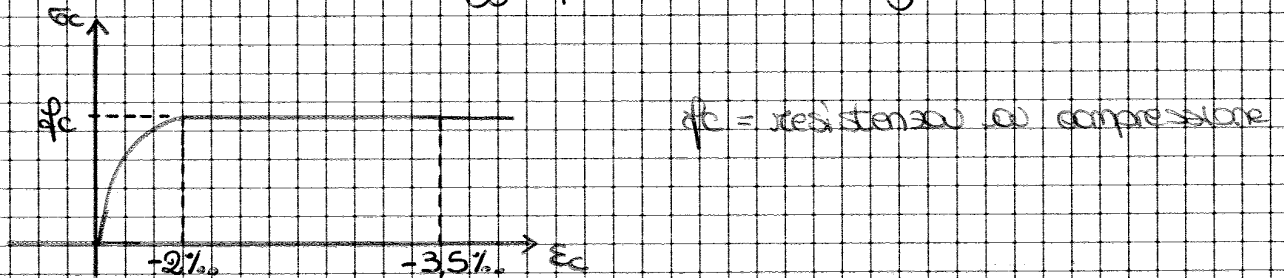
$\epsilon_s = \epsilon_c \rightarrow$  uguaglianza esprime l'aderenza dei materiali  
 ↓  
 deform. del ds a livello dell'armature

### Leggi costitutive:

ACCIAIO: diagramma elasto-plastico:

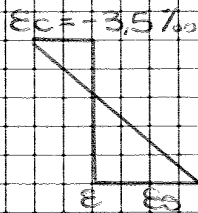


CLS COMPRESSIVE: legge paraboloido-rettangolo



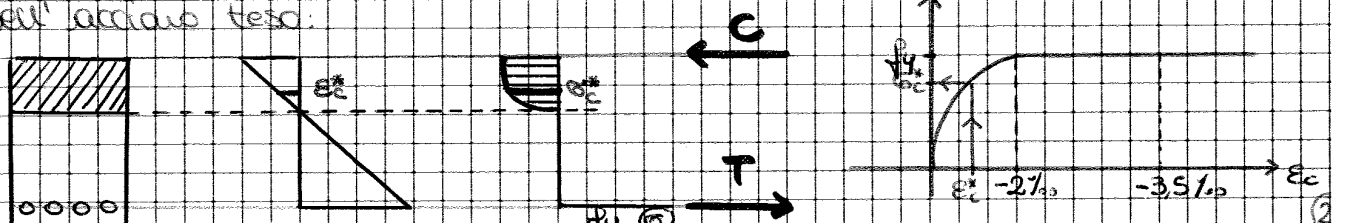
CLS TRAZIONE nessun contributo.

La tensione dell'acciaio deve essere uguale alla tensione di snervamento



Nel diagramma delle tensioni  $f_y \equiv$  tensione dell'acciaio

Nell'acciaio teso:



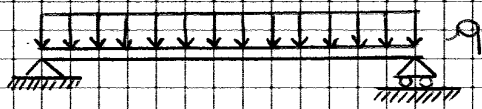


# ESERCITAZIONE (7)

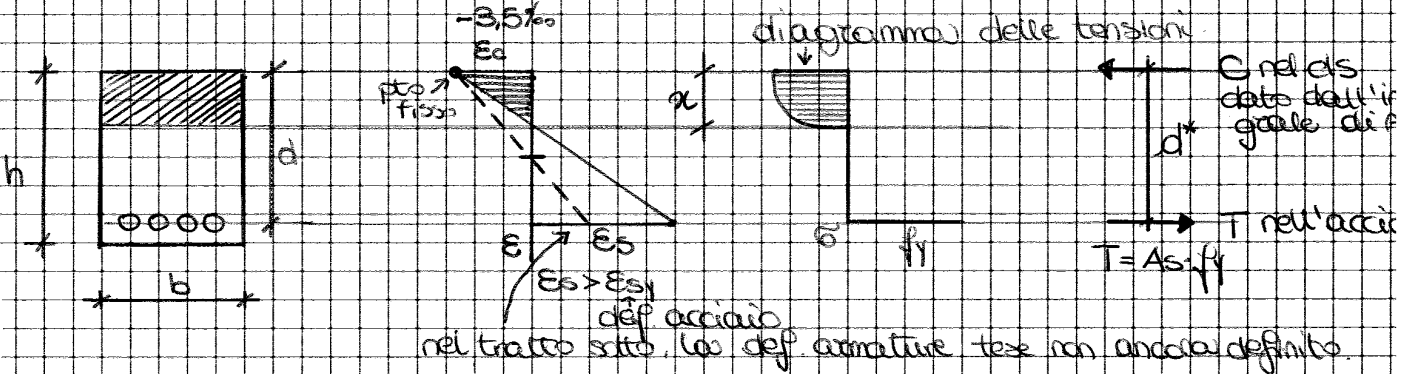
16/04/2013

## INCERTEZZA LATO DELLE RESISTENZE

Continuazione esercizio:



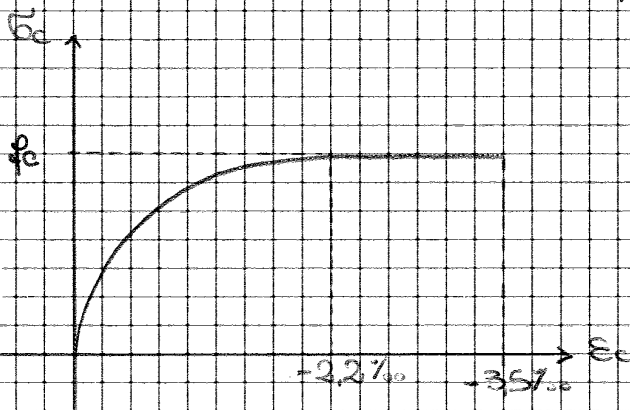
Trave soggetta a carico distribuito.



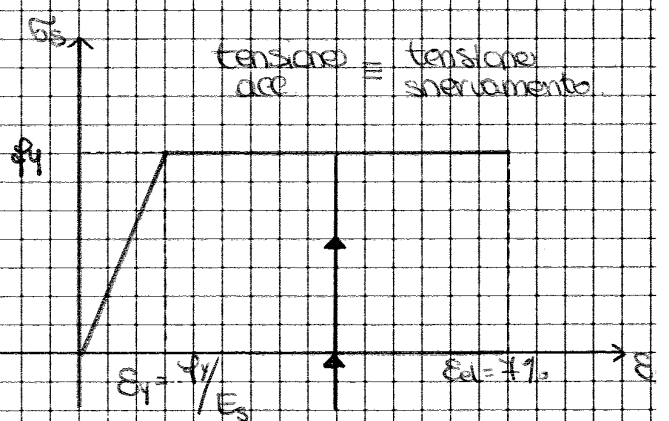
nel tratto sito, la def. armature tese non ancora definita.

Verifica della resistenza: momento resistente confrontato con momento flettente

Perfetta aderenza acciaio/c/c ⇒ (2° hp)



legge costitutiva usata nel progetto



Per acciaio in trazione: legge costitutiva elasto-plastica.

Nota i diagrammi della def. assiale la legge di tensione

① ⇒ voglio conoscere la def delle armature:

② ⇒ profondità asse neutro che dipende dall'inclinazione della retta

varia la posizione e cambia anche C.

$T = A_s \cdot f_y$  con  $A_s$  = area esposta dalle armature.

Det. distribuzione del momento resistente  $M_R$

↳ (funz. di tensione di snervamento)

$$X, Y = aX + b$$

$$\begin{cases} f_Y = X \\ M_R = Y \\ a = A_s \cdot 0,9d \\ b = 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right] \quad \text{distribuzione normale per tensione di snervamento}$$

Sostituendo  $a = \frac{y-b}{\omega}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{y-b}{\omega} - \mu_x\right)^2}{\sigma_x^2}\right]$$

$$M_R = \underbrace{A_s \cdot 0,9d}_{\omega} \cdot f_Y = 804 \cdot 0,9 \cdot 460 \text{ mm} = 332'856$$

$b=0$  ma  $M_R$  è dato da una funz.  $f_Y$  dove non c'è termine noto

$$\mu_{M_R} = (A_s \cdot 0,9d) \cdot \mu_{f_Y} = \text{ma prop. del valore medio}$$

$$= 332'856 \cdot 560 = 186'399'360 \text{ N mm}$$

devo trasformarlo in KN m quindi divido per  $10^6$ :

$$\Rightarrow \mu_{M_R} = 186,4 \text{ KN m}$$

$$\sigma_{M_R} = (A_s \cdot 0,9d) \cdot \sigma_{f_Y} = 332'856 \cdot 30 = 9'985'680 \text{ N mm} / 10^6$$

$$\Rightarrow \sigma_{M_R} \approx 10 \text{ KN m}$$

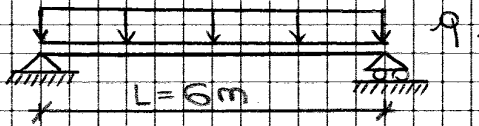
Det. COV di  $M_R$ :

$$COV = \frac{\sigma_{M_R}}{\mu_{M_R}} = \text{x definizione} = \frac{(A_s \cdot 0,9d) \cdot \sigma_{f_Y}}{(A_s \cdot 0,9d) \cdot \mu_{f_Y}} = \frac{\sigma_{f_Y}}{\mu_{f_Y}} = \frac{30 \text{ MPa}}{560 \text{ MPa}} = 0,0536$$

METODO DI LIVELLO 3  
 METODO MONTECARLO  
 METODO DI LIVELLO 2.

ESEMPIO (1):

Problema governato da singola variabile aleatoria



$$E = 210'000 \frac{N}{mm^2}$$

$$I = 5790 \text{ cm}^4$$

$$q \sim N \left( 12 \frac{kN}{m}; 2.4 \frac{kN}{m} \right)$$

Det  $P \left( \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spostamento verticale}}}{v} \geq \frac{L}{250} \right) = ? \Rightarrow$  condizione d'esercizio.

Utilizzo metodo di livello 3 per det P:

$$v = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I} \quad \text{espressione dello spostamento verticale}$$

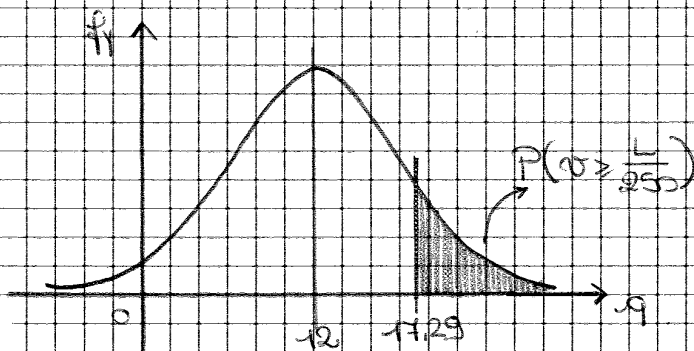
Sostituisco nella relazione:

$$P \left( \frac{5}{384} \cdot \frac{q L^4}{E \cdot I} \geq \frac{L}{250} \right) = P \left( q \leq \frac{L}{250} \cdot \frac{384}{5} \cdot \left( \frac{E \cdot I}{L^4} \right) \right) =$$

rigidezza flessionale

$$= P \left( q \geq \frac{6000}{250} \cdot \frac{384}{5} \cdot \frac{210'000}{6000^4} \cdot 5790 \cdot 10^4 \right) = P (q \geq 17,29)$$

Graphicamente:



Funz. distribuzione cumulativa:

$$P(q \geq 17,29) = 1 - P(q \leq 17,29) = 1 - P \left( \frac{q - \mu_q}{\sigma_q} \leq \frac{17,29 - \mu_q}{\sigma_q} \right) = \text{deviazione}$$

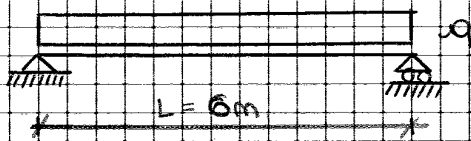
Quanto vale quella probabilità:

$$P\left(x > \frac{L}{250}\right) = 1 - P\left(x < \frac{L}{250}\right) = 1 - P\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{\frac{L}{250} - \mu_x}{\sigma_x}\right) =$$

$$= 1 - P\left(z < \frac{\frac{6000}{250} - 16.65}{3.33}\right) = 1 - P(z < 2.2) \text{ nella tabella con } z = 2.2$$

$$= 1 - 0.9861 = 0.0139 \Rightarrow \text{Ho ottenuto lo stesso valore per entrambi i metodi utilizzati nel metodo di livello 3}$$

## APPLICAZIONE METODO MONTECARLO (metodo di tipo simulativo)



Carico e rigidezza flessionale come v. aleatorie:

$$q \sim N(-12; 2.4) \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$EI \sim N(12159; 607.95) \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

↑  
distribuzione normale per semplicità

$$\mu_{EI} = EI = 210'000 \cdot 5790 \cdot 10^{-4} = 12159$$

$$\sigma_{EI}^2 = 12159 \cdot (0.05) = 607.95$$

↓  
5% di variabilità che sto considerando l'acciaio:

Applicazione metodo Montecarlo:

$$P\left(x > \frac{L}{250}\right)$$

definisco la funzione di stato limite \$g(q; EI)\$

$$g(q; EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI}$$

\$g > 0\$: dom di SUCCESSO.

\$g = 0\$: condizione LIMITE.

\$g < 0\$: dom di INSUCCESSO.

Se:

$$g(q; EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} > 0 \text{ nella } \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} < \frac{L}{250}$$

Risolvere probabilità:

$$P(Z \leq z_1) = P(Z \geq -z_1) \Rightarrow \text{le 2 aree sottese sono uguali}$$

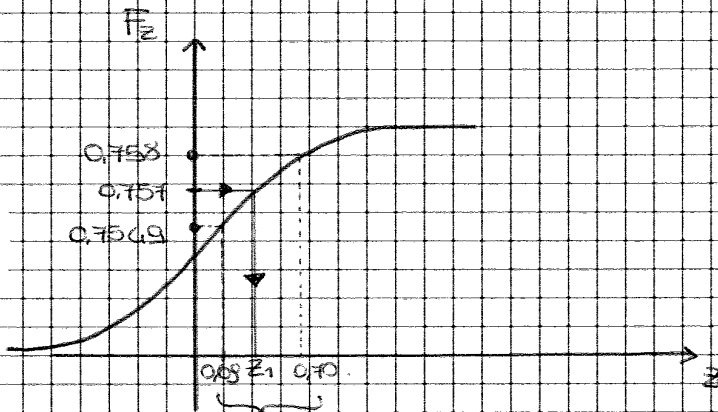
$$= 1 - P(Z \leq -z_1) = 0,243$$

$$\hookrightarrow P(Z \leq -z_1) = 1 - 0,243 = 0,757$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{0,5 < 0,757 < 1}$$

Tabella e cerca il valore 0,757 in corrispondenza di Z  
 0,757 no in tabella  $\Rightarrow$  interpolazione lineare



interpolazione lineare tra  
 qst 2 per trovare  $z_1$

$$z_1 = 0,69 + (0,757 - 0,7549) \cdot \frac{(0,70 - 0,69)}{(0,758 - 0,7549)} = 0,694 \quad \checkmark$$

$$\downarrow$$

$$0,69 < \boxed{0,694} < 0,70$$

$$\boxed{-z_1 = 0,694}$$

$$z_1 = \frac{q_1 - \mu_q}{\sigma_q} = -0,694 \text{ ma posso ricavare } q_1$$

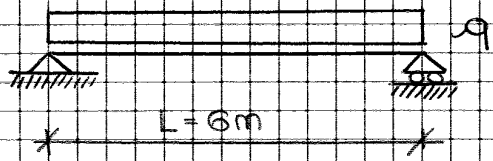
$$q_1 = \mu_q - 0,694 \cdot \sigma_q = 12 - 0,694 \cdot 2,4 = 10,34 \text{ kN/m}$$

Calcolare il valore della rigidità corrispondente = ?

# ESERCITAZIONE ⑧

18/04/2013

Continuazione dell'esercizio precedente



$$q \sim N(12; 2.4) \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$EI \sim N(12159; 607.95) \text{KN}\cdot\text{m}^2$$

Applicazione metodo Montecarlo

$P(\sigma \geq \frac{L}{250})$  via serie di simulazioni dove  $N$  dipende dal numero di qst serie di simulazioni

ciclo:

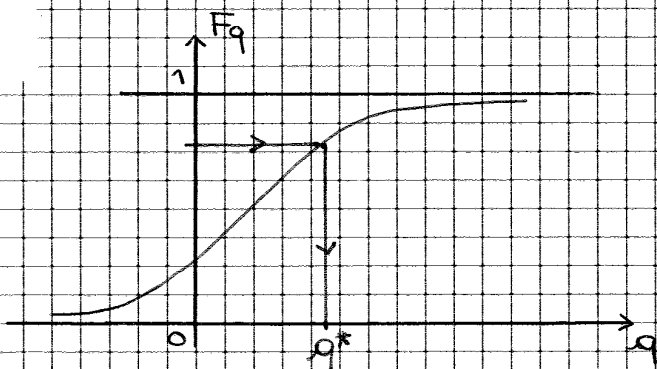
1) GENERAZIONE DI VALORI CASUALI DEL CARICO  $q$  E DELLA RIGIDEZZA FLESSIONALE

2) VALUTAZIONE DELLA FUNZIONE DI STATO LIMITE  $g(q, EI)$ .

$$g = \frac{L}{250} - \sigma_{mezzano}$$

3)  $g < 0$  DAN DI INSUCCESSO  $\text{via } N_r = N_r + 1$

4) PROBABILITA' DI INSUCCESSO  $P = \frac{N_r}{N}$



Funz. distribuzione cumulativa  
nota:

$$q_1 = 10,34 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

Determinare valore  $ET_1$

$$T_b = 0,841$$

Calcolo:

$$T_b = F_{ET}(ET_1) = P(EI \leq ET_1) = P\left(\frac{EI - \mu_{EI}}{\sigma_{EI}} \leq \frac{ET_1 - \mu_{EI}}{\sigma_{EI}}\right) = P(Z \leq Z_1) =$$

$$= 0,841$$

## APPLICAZIONE METODO SECONDO: LIVELLO 2

- MVFOSM } FORM (considero approssimazioni di 1° ordine  
 - AFOSM } Metodo di affidabilità della struttura)

### METODO MVFOSM:

Sviluppo in serie delle funzioni di stato limite

$$\begin{aligned}
 Z = g(X) &= \\
 &= g(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} (X_i - \mu_{x_i}) \quad \text{approssimazioni 1° ordine delle} \\
 & \quad \text{funz. di stato limite}
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \quad \text{def. INDICE DI AFFIDABILITÀ}$$

Come calcolo  $\mu_z$  e  $\sigma_z$  partendo dalle funz. di stato limite:

$$\mu_z = g(\mu_x)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2$$

Applicazione al problema precedente:

$$g(q; EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI}$$

$$q \sim N(12; 24) \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$EI \sim N(12159; 607,95) \quad \text{kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\mu_z = \frac{6000}{250} - \frac{5}{384} \cdot \frac{12 \cdot 6000^4}{12159 \cdot 10^3} = 7,34 \text{ mm}$$

$$\sigma_z^2 = \left( \left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_q^2 + \left( \left. \frac{\partial g}{\partial EI} \right|_{\mu_x} \right)^2 \cdot \sigma_{EI}^2$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{\mu_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{L^4}{EI} \Bigg|_{\mu_x} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{6000^4}{12159} = -1,39$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial EI} \right|_{\mu_x} = -\frac{5}{384} \cdot qL^4 \cdot \frac{(-1)}{EI} \Bigg|_{\mu_x} = 1,37 \cdot 10^{-12}$$

$$\sigma_z^2 = (-1,39)^2 \cdot 24^2 + (1,37 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 607,95^2 = 11,13^2$$

$$\sigma_z = \sqrt{11,13} = 3,34$$

$$f_{\text{vd}} = f(\alpha, \beta; \beta)$$

$$0 = \alpha^T (X' - X^{(k)}) = \alpha^T X' - \alpha^T X^{(k)}$$

$$\alpha^T X^{(k)} = \alpha^T X'$$

$$= \beta = \alpha^T X^{(k)} \longrightarrow \boxed{\alpha^T X' - \beta = 0}$$

indice di affidabilità

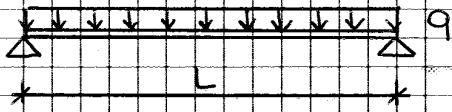


# Esercitazione (9)

KK 1041000

Analisi di affidabilità di una struttura nelle condizioni di esercizio

Correzione esercizio precedente:



DATI:  $L = 6m$

$q \sim N(12; 2.4) \text{ KN/m}$

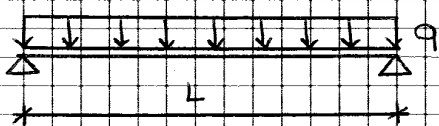
$EI \sim N(12159; 608) \text{ KNm}^2$

$$P\left(\sigma \geq \frac{L}{250}\right) = ?$$

MVFSM:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{7.35}{3.43} = 2.14$$

## ESEMPIO (Tema d'esame)



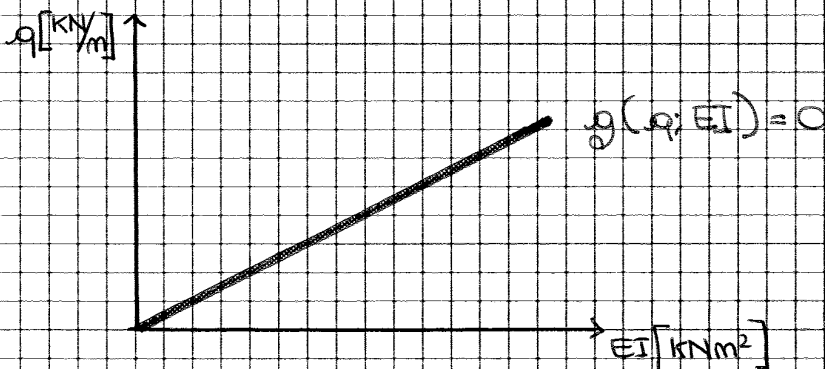
Stessi dati scritti sopra

$$P\left(\sigma \geq \frac{L}{250}\right) = ?$$

Soluzione con metodo AFOSM

⇒ Si scrive l'espressione della funz. di stato limite  $g(q; EI)$ :

$$g(q; EI) = \frac{L}{250} - \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$



$$X \rightarrow X' = \frac{X - \mu_x}{\sigma}$$

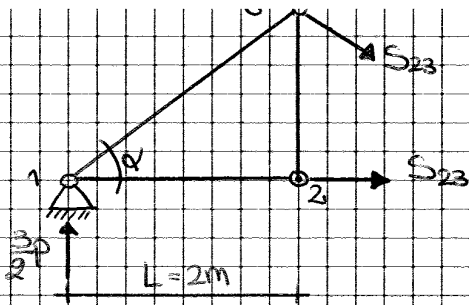
$$\beta$$

$$g(q; EI) = 0$$

$$-\frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} + \frac{L}{250} = 0$$

$$\rightarrow \left(-\frac{5}{384} \cdot L^4\right) q + \left(\frac{L}{250}\right) \cdot EI = 0$$

eqne) di una retta → diagramma lineare



Equilibrio  
alla rotazione:

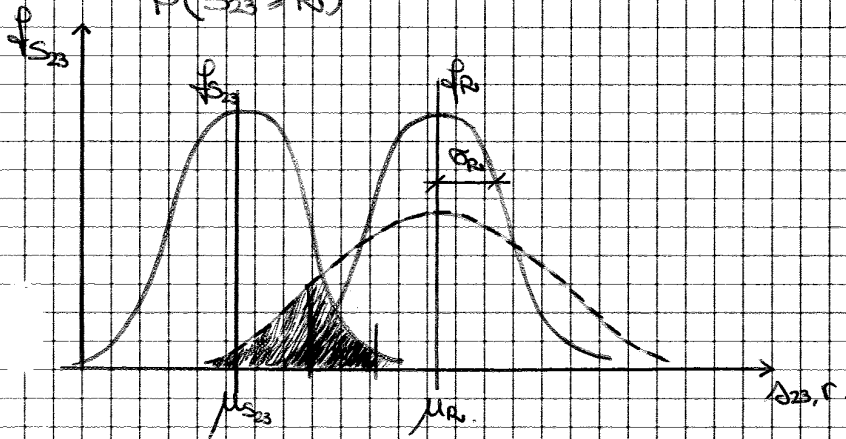
$$\circlearrowleft - \frac{3}{8} P \cdot l + S_{23} \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\boxed{S_{23}} = \frac{3}{8} P \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \boxed{10,67 P}$$

$$\boxed{A_{23} = 1382 \text{ mm}^2}$$

Metodo di livello 3:

$$P(S_{23} \geq R)$$



$$f_{YD} = \frac{f_{YK}}{\gamma_{SD}}$$

$$S_{23D} = \gamma_{SD} \cdot S_{23K}$$

\* area di sovrapposizione è crescente quando aumenta la probabilità.

$$P_R = P(S_{23} \geq R) = \int_{D_{23}} f_{S_{23}, R}(S_{23}; R) dS_{23} dR \rightarrow \text{def di probabilità di rottura}$$

Introduco variabile Z:

$$Z = R - S_{23}$$

$$P_R = P(R \leq S_{23}) = P(R - S_{23} \leq 0) = P(Z \leq 0)$$

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_{S_{23}} = A_{23} \cdot \mu_{pV} - 10,67 \mu_p = 1382 \cdot 265 - 10,67 \cdot 22 \cdot 10^3 = 131,42 \text{ kN}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{S_{23}}^2} = 33,47 \text{ kN}$$

$$P(Z \leq 0) = P\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \leq \frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = P\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \leq \frac{-131,42}{33,47}\right) = 4,31 \cdot 10^{-5}$$

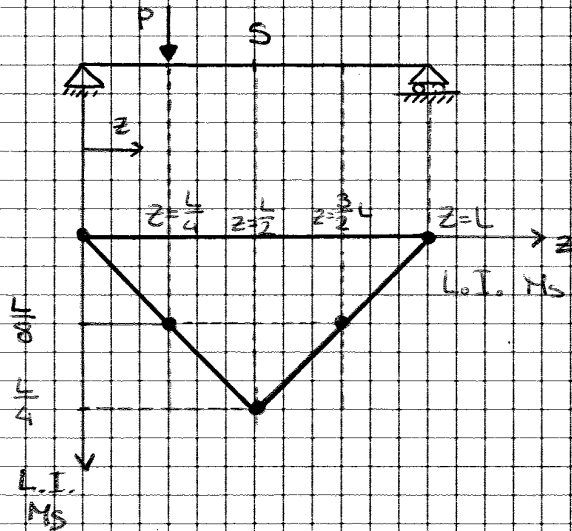
$$g(R, S_{23}) = R - S_{23}$$

MVFORM  $\rightarrow \beta$   
AFOSY  $\rightarrow \beta$

$$R'_i = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad ; \quad S'_{23} = \frac{S_{23} - \mu_{S_{23}}}{\sigma_{S_{23}}}$$

$$g(R'_i; S'_{23}) = (\mu_R + R'_i \sigma_R) - (\mu_{S_{23}} + S'_{23} \sigma_{S_{23}})$$

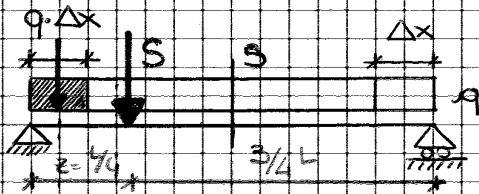
Valore del momento flettente:



$$M_s = P \left( L.I. \cdot M_s \cdot z = \frac{L}{4} \right) = P \cdot \frac{L}{8}$$

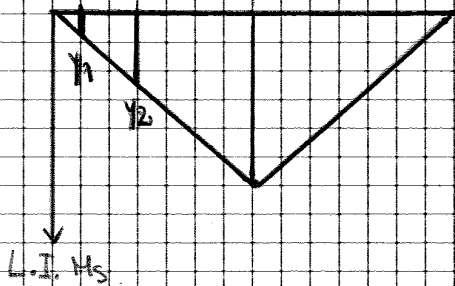
↑  
dovuto a P

ESEMPIO 2



$$M_{s,q} = (q \cdot \Delta x) \cdot y_1 + (q \cdot \Delta x) \cdot y_2 + \dots + (q \cdot \Delta x) \cdot y_n$$

$$= \int_L q \cdot y \, dz = q \cdot A_{\text{area}}, LI$$



$$M_{s,q} = q \cdot \left( \frac{1}{2} L \cdot \frac{L}{4} \right) = \frac{qL^2}{8}$$

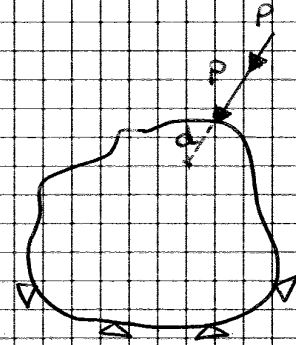
$$M_{s,p} = P \left( \frac{L}{8} \right)$$

$$M_s = \frac{qL^2}{8} + P \frac{L}{8}$$

## L.I. TRACCIATE CON METODI INDIRETTI

### TEOR BETTI

Riguardo al lavoro di deformazione. Considero un qualunque solido che sia vincolato e applichiamo una forza  $P$  su qst solido. Per effetto della forza  $P$  il pto di applicazione si sposta di " $d$ ".



FORZA + SPOSTAMENTO = LAVORO

$$L = \frac{1}{2} P \cdot d \quad \text{Clapeyron}$$

Applico un'altra forza:

$$L = \frac{1}{2} P \cdot d + \frac{1}{2} P \cdot d + P \cdot d$$

↑  
1<sup>a</sup> FORZA  
↑  
contributo di lavoro dovuto alla 1<sup>a</sup> forza

↑  
2<sup>a</sup> FORZA  
↑  
contributo di lavoro dovuto alla 2<sup>a</sup> forza

↑  
1<sup>a</sup> FORZA

LAVORO MUTUO ⇒ dovuto all'intervento delle 2 forze

↑  
Spostamento del pto di applicazione della 1<sup>a</sup> forza per effetto della 2<sup>a</sup> forza

LAVORO DIRETTO

⇒  $L = 2P \cdot d$

### DUE SISTEMI DI FORZE A & B (dal teor. Betti)

$$A+B: L = L_A + L_B + L_{AB}$$

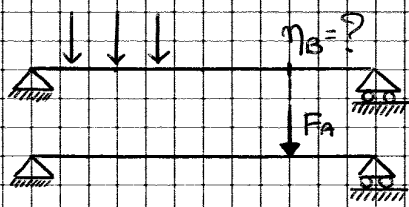
$L_A$ : lavoro che compie il sistema A pensando di applicare solo il sistema A

$L_B$ : lavoro che compie il sistema B pensando di applicare solo il sistema B

$L_{AB}$ : lavoro mutuo compiuto da A per spostamenti dei pti d'applicazione di A e qst spostamenti sono dovuti al lavoro compiuto dal sistema B

$$B+A: L = L_B + L_A + L_{BA}$$

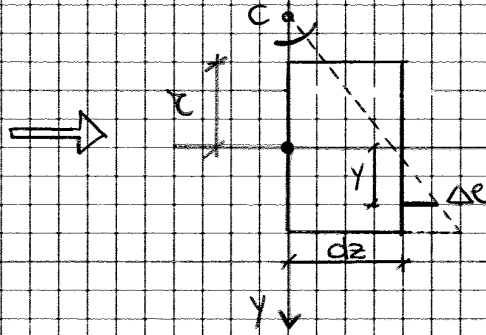
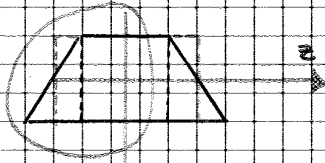
$L_{BA}$ : lavoro mutuo compiuto dal sistema B per gli spostamenti dei pti d'applicazione di B dovuti all'introduzione del sistema A



Problema della linea elastica



Concavo deformato per effetto del momento flettente  
 Considero sezione di sinistra:



C = centro attorno al quale avviene la rotazione  
 r = raggio di curvatura

Relazione:

$$\frac{\Delta e}{y} = \frac{dz}{r}$$

manipolo relazione:

$$\epsilon_z = \frac{\Delta e}{dz} = \frac{-y}{r}$$

sistema di riferimento con y rivolto verso il basso

(variazione di lunghezza) della fibra rapportata a dz

deform. longitudinale in direzione dz

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\Delta e}{dz} = \frac{-y}{r} \\ \sigma_z = E \cdot \epsilon_z = \frac{-E y}{r} \end{cases}$$

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = -\frac{E}{r} \int_A y dA = 0 \quad \text{ma } \times \text{ concavo semplicemente inflesso}$$

Eqzoni di equilibrio momento flettente esterno:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = -\frac{E}{r} \int_A y^2 dA$$

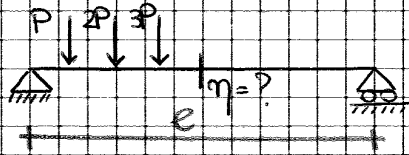
$I_x$  = momento d'inerzia baricentro

$$M_x = \frac{-E I_x}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{M_x}{E I_x}$$

risultato fondamentale della linea d'influenza

APPLICAZIONI TEOR. BETH

ESERCIZIO ①:



Determinare  $\eta$  in  $z = \frac{e}{2}$  dovuto alle forze

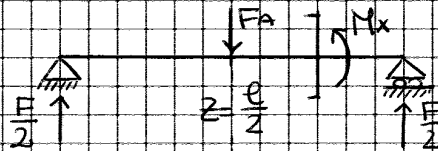
$P$  in  $z = \frac{2}{10} e$

$2P$  in  $z = \frac{3}{10} e$

$3P$  in  $z = \frac{4}{10} e$

$\sum F_B = P, 2P, 3P$

$F_A \cdot \eta_B = \sum F_B \cdot \eta_A$



Eqzno differenz. elastica

$\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x}$

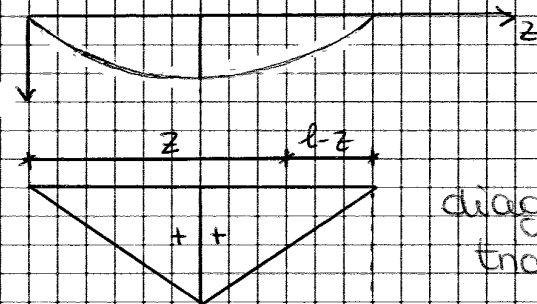


diagramma  $M_x$  triangolare

$0 \leq z \leq \frac{e}{2}$ :  $M_x = \frac{F_A}{2} \cdot z$

$\frac{e}{2} \leq z \leq e$ :  $M_x = \frac{F_A}{2} (l - z)$

Il diagramma tratteggiato non può presentarsi, xk le espressioni delle 2 linee elastiche sono  $\neq$

Scrivo i 2 integrali:

1)  $0 \leq z \leq \frac{e}{2}$ :  $\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = - \frac{F_A}{2EI_x} \cdot z$

$\frac{d\eta_A}{dz} = - \frac{F_A}{2EI_x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1$

$\eta_A(z) = - \frac{F_A}{4EI_x} \cdot \frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2$

2)  $\frac{e}{2} \leq z \leq l$ :  $\frac{d^2 \eta_A}{dz^2} = - \frac{F_A}{2EI_x} (l - z)$

$\frac{d\eta_A}{dz} = - \frac{F_A}{2EI_x} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) + C_3$

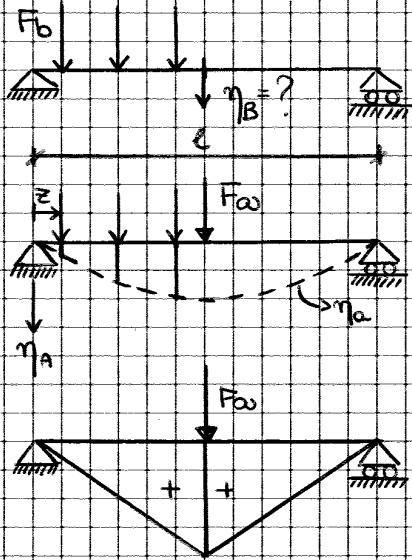
$\eta_A(z) = - \frac{F_A}{2EI_x} \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_3 z + C_4$

# ESERCITAZIONE 11

29/04/2013

## Applicazioni del teorema di Betti:

Continuazione esercizio esercitazione scorsa.



Sistema di forze due determinati  
un lavoro con gli spostamenti dei sistemi  
di forze determinate dalla deformazione  $F_b$

$$F_a \cdot \eta_b = \sum_i F_{b_i} \cdot \eta_{a_i}$$

$$\frac{d^2 \eta_{a0}}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI}$$

diagramma momento flettente

Per:  $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$

$$M_x = \frac{F}{2} \cdot z$$

$$\frac{d^2 \eta_{a0}}{dz^2} = -\frac{F}{2EI} \cdot z$$

Per:  $\frac{l}{2} < z \leq l$

$$M_x = \frac{F_a}{2} (l - z)$$

$$\frac{d^2 \eta_{a0}}{dz^2} = -\frac{F_a}{2EI} (l - z)$$

### Condizioni al contorno:

1)  $z=0$  ;  $\eta_{a0}=0$

2)  $z = \frac{l}{2}$  ;  $\left(\frac{d\eta_{a0}}{dz}\right)_{Sx} = \left(\frac{d\eta_{a0}}{dz}\right)_{Dx} \rightarrow$  mantiene continuità di rotazione

3)  $\eta_{a0Sx} = \eta_{a0Dx} \rightarrow$  mantiene continuità di spostamento

4)  $z=l$  ;  $\eta_{a0}=0$

ma  $C_2=0$

$$C_1 = \frac{3}{48} \cdot \frac{F_a \cdot l^2}{EI} = \frac{F_a \cdot l^2}{16EI}$$

$$C_3 = \frac{9}{48} \cdot \frac{F_a \cdot l^2}{EI} = \frac{3}{16} \cdot \frac{F_a \cdot l^2}{EI}$$

$$\begin{cases} z=0; & \eta_{\omega} = 0 \\ z = \frac{l}{2}; & \frac{d\eta_{\omega}}{dz} = 0 \end{cases} \quad \text{ma vale per una struttura in cui } F_{\omega} \text{ è in} \\ \text{mezzanella ed ha 2 vincoli che rendono la} \\ \text{struttura simmetrica in mezzanella}$$

determino  $C_1$  &  $C_2$ :

$$z=0 \rightarrow \eta_{\omega} = 0 = C_2$$

$$z = \frac{l}{2}; \quad \frac{d\eta_{\omega}}{dz} = 0 = \frac{-F_{\omega} \cdot l^2}{16EI} + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{F_{\omega} \cdot l^2}{16EI}}$$

$$\eta_{\omega} = -\frac{F_{\omega} \cdot z^3}{12EI} + \frac{F_{\omega} \cdot l^2}{16EI} \cdot z =$$

$$= \frac{F_{\omega}}{EI} \left( -\frac{z^3}{12} + \frac{l^2}{16} \cdot z \right)$$

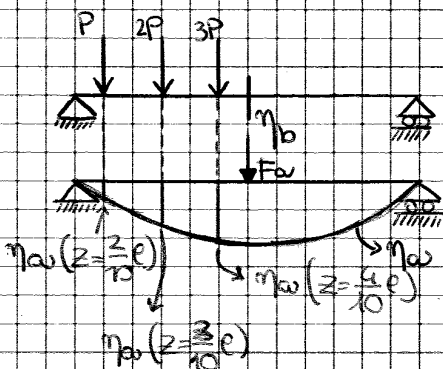
[vale solo per le  $0 < z < \frac{l}{2}$ ]

$$\hookrightarrow \eta_{\omega} \left( z = \frac{2}{10} l \right) = \frac{F_{\omega}}{EI} \left( -\frac{(0,2l)^3}{12} + \frac{l^2 \cdot 0,2l}{16} \right) = \frac{F_{\omega} \cdot l^3}{EI} \left( -\frac{0,2^3}{12} + \frac{0,2}{16} \right) =$$

$$= \frac{0,012 \cdot F_{\omega} \cdot l^3}{EI}$$

$$\hookrightarrow \eta_{\omega} \left( z = \frac{3}{10} l \right) = \frac{F_{\omega} \cdot l^3}{EI} \left( -\frac{0,3^3}{12} + \frac{0,3}{16} \right) = \frac{0,017 \cdot F_{\omega} \cdot l^3}{EI}$$

$$\hookrightarrow \eta_{\omega} \left( z = \frac{4}{10} l \right) = \frac{F_{\omega} \cdot l^3}{EI} \left( -\frac{0,4^3}{12} + \frac{0,4}{16} \right) = \frac{0,020 \cdot F_{\omega} \cdot l^3}{EI}$$



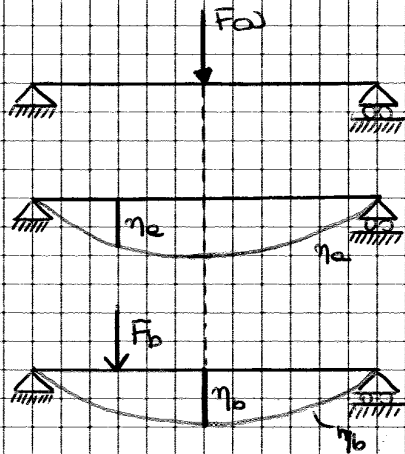
Calcolo  $\eta_{\omega}$  utilizzando il teor. di Betti:

$$F_{\omega} \cdot \eta_{\omega} = \sum F_{\omega} \cdot \eta_{\omega}$$

$$\text{dae } \sum F_{\omega} \cdot \eta_{\omega} = P \cdot \eta_{\omega} \left( z = \frac{2}{10} l \right) + 2P \cdot \eta_{\omega} \left( z = \frac{3}{10} l \right) + 3P \cdot \eta_{\omega} \left( z = \frac{4}{10} l \right)$$



Semplificazione:  $F_b$  unica forza verticale



$$F_a \cdot \eta_b = F_b \cdot \eta_a$$

Scelgo  $F_a = F_b = 1 \Rightarrow$  COROLLARIO DI MAXWELL del teor. di Betti

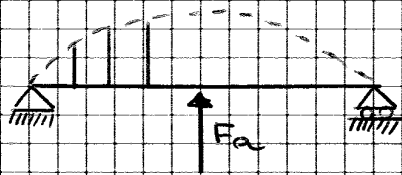
$$\eta_a = \eta_b$$

$\rightarrow$  def. del linea d'influenza

OSS: (scelta del sistema operativo)

$F_a$  non dà effetto sullo spostamento verticale  $\eta_b$  <sup>escluso</sup> se in mezzana

$\downarrow$   
 Posso scegliere anche una forza  $F_a$  (in mezzana) ma orientata verso l'alto (lavoro negativo).



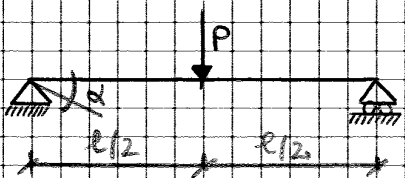
$$-F_a \cdot \eta_b = -\sum F_b \cdot \eta_a$$

Segno negativo poiché sono forze orientate diversamente  $\rightarrow$  segno opposto

$$+F_a \cdot \eta_b = +\sum F_b \cdot \eta_a$$

libera scelta dell'orientamento della forza ma sempre considerando l'effetto incognito.

ESEMPIO 2



$$\eta_b : EI \Rightarrow S.E. : F_a$$

$$F_b : eD \Rightarrow F.I. : \eta_a$$

$$EI : \text{rotazione } \alpha_b \rightarrow S.E. i C_a$$

$$eD : P_b \rightarrow F.I. \eta_a$$

$$\eta_{a_0} \left( z = \frac{l}{2} \right) = - \frac{C_{a_0}}{2EI} \left( \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) + \frac{C_{a_0} l}{3EI} \cdot \frac{l}{2} =$$

$$= - \frac{C_{a_0}}{2EI} \left( \frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{48} \right) + \frac{C_{a_0} \cdot l^2}{6EI}$$

$$\eta_{a_0} \left( z = \frac{l}{2} \right) = - \frac{C_{a_0} \cdot l}{2EI} \cdot \frac{5l^2}{48} + \frac{C_{a_0} \cdot l^2}{6EI} = \frac{C_{a_0} \cdot l^2}{EI} \left( -\frac{5}{48} + \frac{1}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{C_{a_0} \cdot l^2}{EI}$$

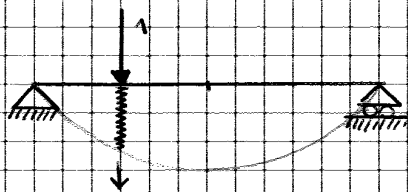
Utilizzo:  $C_{a_0} \cdot \alpha_b = P_b \cdot \eta_{a_0}$  per calcolare l'effetto incognito

$$C_{a_0} \cdot \alpha_b = P_b \cdot \eta_{a_0} \Rightarrow C_{a_0} \cdot \alpha_b = P_b \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{C_{a_0} \cdot l^2}{EI} \Rightarrow \boxed{\alpha_b = \frac{1}{16} \cdot \frac{P_b \cdot l^2}{EI}}$$

$C_{a_0}$  non ha alcun effetto su  $\alpha_b$ . Anche in qst caso poteva scegliere  $C_{a_0}$  in senso opposto.

$$\boxed{C_{a_0} \cdot \alpha_b = P_b \cdot \eta_{a_0}}$$

$\uparrow$     $\uparrow$     $\uparrow$     $\uparrow$   
 S.E.   EI    $C_{a_0}$    EI



rappresenta valore  $\alpha_b$  in funz della forza unitaria

## ESERCIZI DELL'ESAME

### TEOR di BETTI GENERALIZZATO

Parto da 2 sistemi d'azione:

$$\left. \begin{matrix} F_{a_0} \\ Y_{a_0} \\ E_{a_0} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \eta_{a_0} \\ E_{d_{a_0}} \\ C_{a_0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{systemi d'azione:} \\ \text{forze, cedimenti, def. impresse} \end{matrix}$$

$$a) \left. \begin{aligned} F_a &\neq 0 \\ \gamma_a &= 0 \\ \bar{E}_a &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \eta_a \\ \bar{E}_{a,b} \\ \bar{\sigma}_a \end{aligned}$$

$$b) \left. \begin{aligned} F_b &= 0 \\ \gamma_b &= 0 \\ \bar{E}_b &\neq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \eta_b \\ \bar{E}_{a,b} \\ \bar{\sigma}_b \end{aligned}$$

Per ogni singolo problema: bisogna caratterizzare i 2 sistemi a) e b).

$$\sum F_a \cdot \eta_b + \sum F_b \cdot \gamma_b = \int_V \underbrace{\{\bar{\sigma}_a\}^T \{\bar{E}_{a,b}\}}_{\uparrow} \cdot dV + \int_V \{\bar{\sigma}_a\}^T \{\bar{E}_b\} \cdot dV$$

$$\sum F_b \cdot \eta_a + \sum F_a \cdot \gamma_a = \int_V \{\bar{\sigma}_b\}^T \{\bar{E}_{a,b}\} \cdot dV + \int_V \{\bar{\sigma}_b\}^T \{\bar{E}_a\} \cdot dV$$

$$0 = \int_V \{\bar{\sigma}_b\}^T \{\bar{E}_{a,b}\} \cdot dV$$

$$\hookrightarrow \sum F_a \cdot \eta_b = \int_V \{\bar{\sigma}_a\}^T \{\bar{E}_{a,b}\} \cdot dV$$

Tensioni & deform. impresse:

$$\int_V \bar{\sigma}_a \cdot \bar{E}_b \cdot dV = \int_L dz \int_A \bar{\sigma}_a \cdot \bar{E}_b \cdot dA$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_a &= \frac{M_a}{I_x} \cdot y \\ \bar{E}_b &= \mu_b \cdot y \end{aligned} \right. \quad \text{Sostituisco nell'integrale:}$$

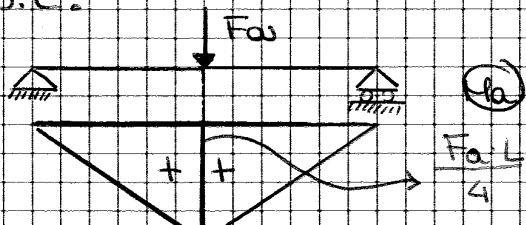
$$\hookrightarrow \int_L dz \cdot \int_A \bar{\sigma}_a \cdot \bar{E}_b \cdot dA = \int_L dz \int_A \left( \frac{M_a}{I_x} \cdot y \right) \cdot (\mu_b \cdot y) \cdot dA =$$

$$= \int_L M_a \cdot \mu_b \cdot \frac{1}{I_x} \cdot dz \cdot \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{I_x}$$

$$\Rightarrow F_a \cdot \eta_b = \int_L M_a \cdot \mu_b \cdot dz$$

Risoluzione in 1 passaggio:

S.E.



(b)

# ESERCITAZIONE (12)

30/04/2013

## ESAME SOLO ORALE

3 Domande

Esercizi: linee d'influenza - fattorizzazione

disegno strutturale soggetto ad forze verticali e disegno qualitativamente - linee d'influenza

Teoria della plasticità: stimare 3 metodi ≠ per collasso strutturale

Giorni esercitazioni: 6-7-20-21-23-27-28/5  
4/6

Riassunto volta scorsa:

Per calcolare grandezze cinematiche & statiche

↓  
procedimento rigoroso

↓  
Teor. Betti

↓  
LAVORO

→ Effetto incognito ma si può capire subito la causa

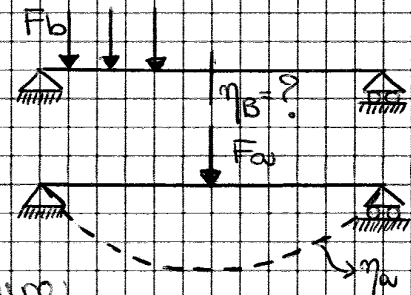
→ Sistema esplorativo ma lo deduco rapidamente

↓  
assieme all'effetto incognito sempre lavoro

$$(E.I.) (S.E.) = (e.D.) (F.I.)$$

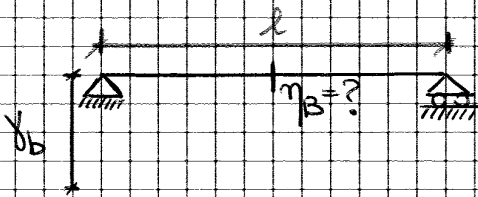
$$\eta_b F_b = \sum_i F_i \cdot \eta_{bi} \quad (2)$$

deformata della struttura × affettura della forza verticale  $F_b$

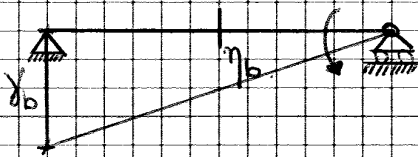


ESERCIZIO:

Calcolo spostamento verticale per trave appoggiata per effetto di forza applicata in mezzanella in seguito al cedimento vincolare sull'estremo di sinistra.



Spostamento che avviene.



Struttura che ruota rigidamente

Grafico

Spostamento verticale linea:

$$\eta_b = \frac{y_b}{2}$$

Metodo semplificato intuitivo

Risoluzione con teor. BETTI:

E.I. :  $\eta_b \rightarrow$  S.E.  $F_b$  (applicata in mezzanella).

C.D. :  $y_b \rightarrow$  F.I.  $R_{av}$  (= reaz. vincolare).

Si riconduce alla reazione:

$$(E.I.) (S.E.) = (C.D.) (F.I.)$$

$$\eta_b \cdot F_b = y_b \cdot R_{av}$$

MA non posso ancora definire i segni



$$F_b \cdot \eta_b = R_{av} \cdot y_b \quad \text{inverso i membri}$$

Scrivo i 2 sistemi d'azione:

$$a) \left. \begin{matrix} F_b \neq 0 \\ y_b = 0 \\ S_{av} = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \eta_b \\ y_b \\ S_{av} \end{matrix}$$

$$b) \left. \begin{matrix} F_b = 0 \\ y_b \neq 0 \\ S_{av} = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} S_{av} \\ \eta_b \\ y_b \end{matrix}$$

ordine casuale;  
no relazione

Scrivo i sistemi d'azione:

$$a) \left. \begin{aligned} F_a &= 0 \\ \gamma_a &\neq 0 \\ \varepsilon_a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} F_b &\neq 0 \\ \gamma_b &= 0 \\ \varepsilon_b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

↳ equazioni PLV:

$$\sum F_a \cdot \eta_a + \sum R_b \cdot \gamma_b = \int_V \sum \sigma_{ab} \varepsilon^T \sum \varepsilon_{ab} \cdot dV + \int_V \sum \sigma_{ba} \varepsilon^T \sum \varepsilon_{ba} \cdot dV$$

$$\sum F_b \cdot \eta_b + \sum R_a \cdot \gamma_a = \int_V \sum \sigma_{ba} \varepsilon^T \sum \varepsilon_{ba} \cdot dV + \int_V \sum \sigma_{ab} \varepsilon^T \sum \varepsilon_{ab} \cdot dV$$

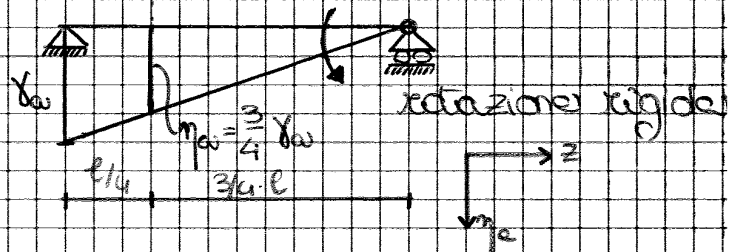
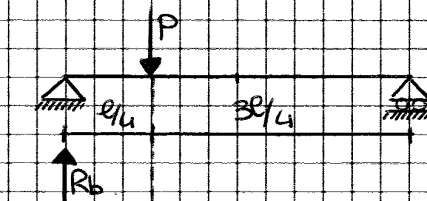
$$\sum R_b \cdot \gamma_b = - \sum F_a \cdot \eta_a$$

⇓

$$+ R_b \cdot \gamma_b = + F_a \cdot \eta_a$$

contributo positivo

$$\Rightarrow (-) \cdot (+) = (-)$$



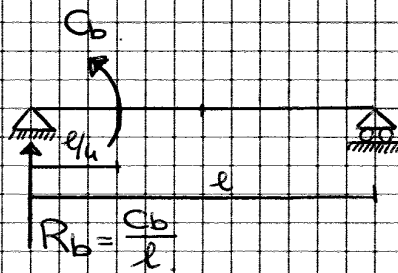
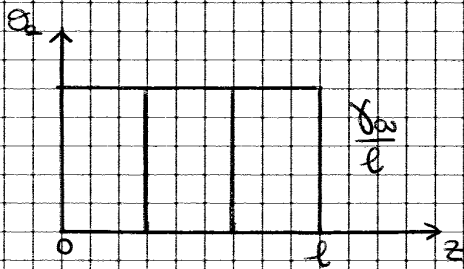
$$\Rightarrow R_b \cdot \gamma_b = P \cdot \frac{3}{4} \gamma_b$$

$$\Rightarrow R_b = \frac{3}{4} P$$

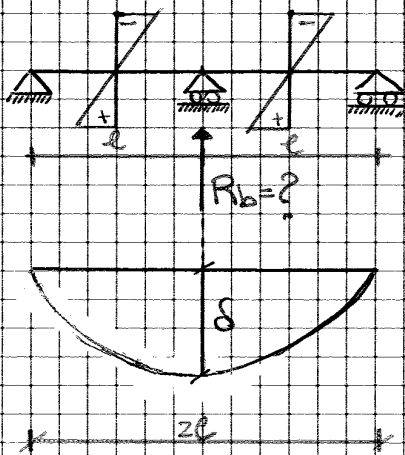
Funzioni dal pto di vista statico?

Eqni di equilibrio:

(linee d'influenza) costante



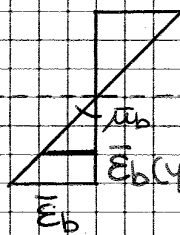
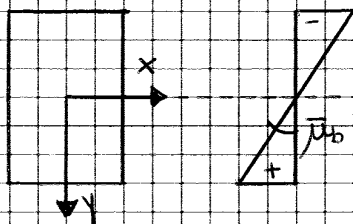
### ESERCIZIO



Se tolgo l'appoggio di continuità  
linea d'influenza per effetto della  
temperatura.

EI  $R_b \rightarrow$  S.E.  $\gamma_w$  nell'appoggio di continuità (spostamento verticale)

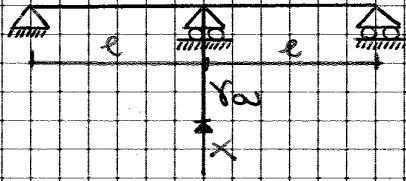
CD  $\bar{\epsilon}_b \rightarrow \bar{\mu}_b \Rightarrow$  FI  $M_{01}$  (= momento flettente dovuto all'applicazione' elemento  $\gamma_w$ )



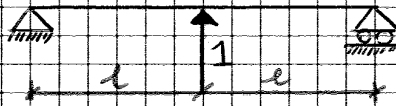
$$\bar{\epsilon}_b(y) = \bar{\mu}_b \cdot y \quad \text{dove} \quad \bar{\mu}_b = \frac{2\alpha \Delta T}{R}$$

$\hookrightarrow$  pendenze diagrammi delle deformazioni

## Struttura iperstatica:



## Scelgo sistema ausiliario:



$$\sum F_c \cdot \eta_{00} + \sum R_c \cdot \eta_{00} = \int_0^{2l} M_c \cdot \frac{M_{00}}{EI} dz$$

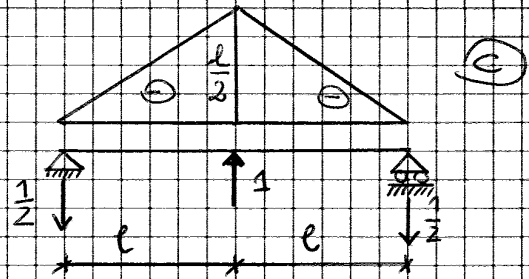
$$-1 \cdot \eta_{00} = \int_0^{2l} M_c \cdot \frac{M_{00}}{EI} dz$$

$$M_{00} = M_0 + X \cdot M_c$$

con  $M_0 =$  contributo dovuto ad carichi esterni

$$-1 \cdot \eta_{00} = \frac{X}{EI} \int_0^{2l} M_c^2 dz$$

$$= \frac{X}{6} \frac{l^3}{3}$$



$$\Leftrightarrow \int_0^{2l} M_c^2 dz = 2 \int_0^l M_c^2 dz = \text{applica formula di Simpson}$$

↑  
XK simmetrica

$$= 2 \cdot \frac{l}{6} \left[ M_c^2(z=0) + 4 M_c^2\left(z=\frac{l}{2}\right) + M_c^2(z=l) \right] =$$

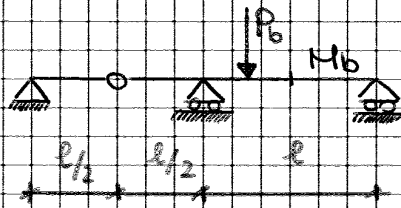
$$= \frac{l}{3} \left[ 0 + 4 \cdot \frac{l^2}{16} + \frac{l^2}{4} \right] = \boxed{\frac{l^3}{6}}$$



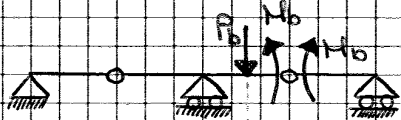
# L'ESERCITAZIONE (13)

2/05/2013

## Esercizio:

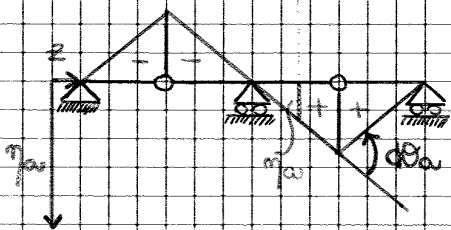


Introduco una rotazione  $\theta$  affinché la struttura diventi labile



Struttura è diventata labile

## Diagramma degli spostamenti:



da rotazione relativa

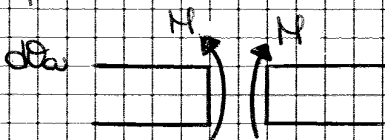
La linea d'influenza della rotazione d'azione di una struttura ipostatica è rettilinea



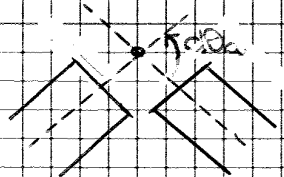
E.I.  $M_b \rightarrow$  S.E. da

C.D.  $P_0 \rightarrow$  F.I.  $(\eta_{P_0})$

Il grafico di  $\eta_{P_0}$  (F.I.) è una linea d'influenza del momento flettente  $M_b$  nella sezione C (E.I.) per forze verticali (C.D.).



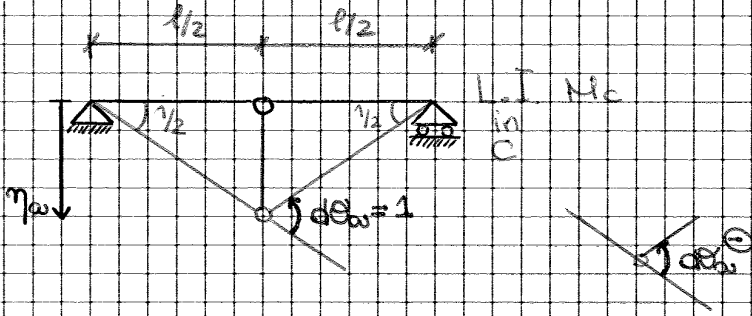
momento flettente positivo per la convenzione di scienza delle costruzioni



distorsione positive

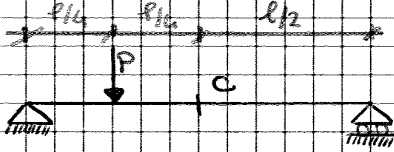


② introduco una distorsione relativa



C.D. forze verticali che compiranno lavoro con le C.D.

Ritornando all'inizio:



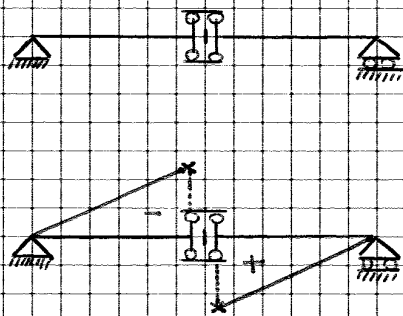
Considero una distorsione unitaria

$$M_c \cdot 1 = P \cdot \frac{l}{8}$$

Ritorno al problema:



Introduco un doppio pendolo:



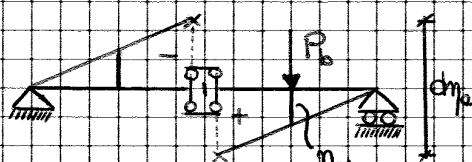
Introduco uno spostamento relativo negativo.

L.I. = diagramma degli spostamenti

↓  
Sostituito da tratti rettilinei poiché è una struttura labile

Perché ho introdotto uno spostamento verticale rettilineo?

Supponendo di introdurre una forza P:



Se spostamento avviene dall'alto verso il basso allora è positivo.

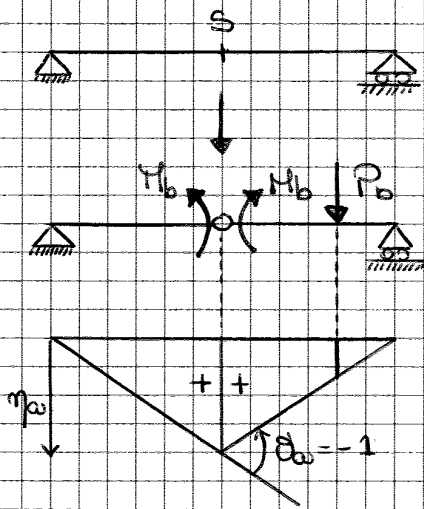
Se spostamento dal basso verso l'alto è negativo

# L'ESERCITAZIONE (14)

6/05/2013

Continuazione argomento scorsa lezione.

## LINEE D'INFLUENZA DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



L.I. Ms

rotazione relativa  
negativa

Diagramma degli spostamenti verticali.

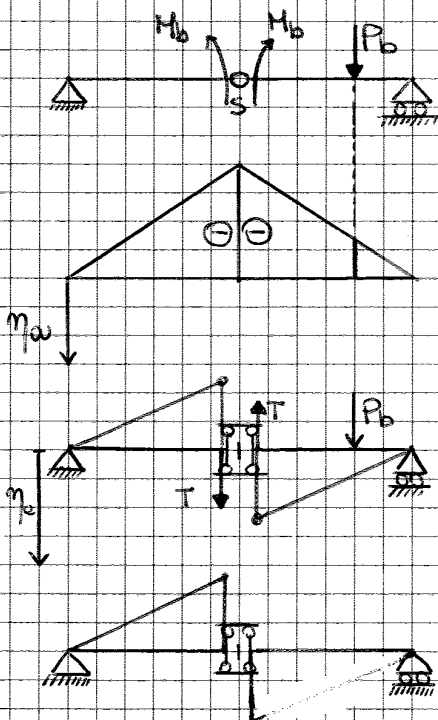
Struttura iniziale ISOSTATICA → introduco una CERNIERA

ottengo una struttura LABILE.

$$-M_b \cdot \theta_w + P_b \cdot \eta_w = 0 \rightarrow \text{lucro interno} = 0 \text{ perché struttura labile}$$

$$M_b \cdot \theta_w = P_b \cdot \eta_w \quad \text{ma momento flettente } \boxed{M_b = P_b \cdot \eta_w}$$

Supponendo invece:



$$M_b \cdot \theta_w - P_b \cdot \eta_w = 0$$

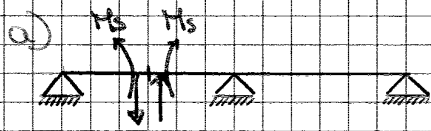
non cambia nulla dal caso precedente

$$T_b \cdot \eta_w = P_b \cdot \eta_w$$

ordinata della L.I. applicata  
in corrispondenza dell'azione  
verticale  $P_b$ .

Applicazione teor. BEEM:

determino forze sistema a)



$$M_s \cdot (-1) + T_s \cdot 0 + P \cdot \eta_b = 0 \cdot 0 + V \cdot 0$$

↑  
Ore. risultante negativa

$$M_s \cdot (-1) = P \cdot \eta_b \Rightarrow \boxed{M_s = \underset{=1}{P} \eta_b}$$

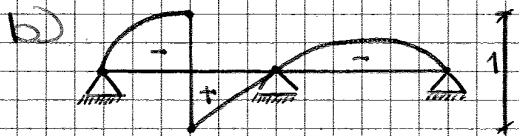
$$\boxed{M_s = \eta_b}$$

L.I. = deformata della struttura ottenuta andando ad applicare alla sezione s qst momento di torcente che sono dati dalle forze verticali.

Disegno L.I. Ts: Nella sezione s ho solo spostamenti verticali relativi



applico teor BEEM:



$$P \begin{cases} L_{ab} = L_{ba} \\ M_s = 0 + T_s(-1) + P \cdot \eta_b = 0 \cdot 0 + V \cdot 0 \end{cases}$$

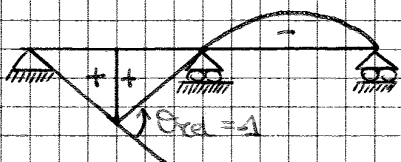
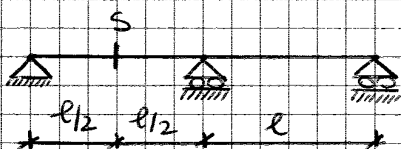
$$\hookrightarrow T_s = P \cdot \eta_b \quad \text{con } P=1 \quad \text{ma } \boxed{T_s = \eta_b}$$

L.I. = deformata della struttura



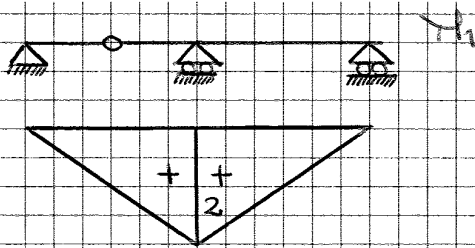
spostamento verticale unitario negativo relativo, nella sez S

Ricavare espressione analitica della linea d'influenza del momento flettente della struttura:



andamento qualitativo

Na spostamento verticale relativo grazie alla cerniera non ce l'ho



Applico reazioni

$$\Rightarrow \int_0^{2e} M_0 \cdot \frac{M_1}{EI} dz = 2 \int_0^e M_0 \cdot \frac{M_1}{EI} dz \quad \times \text{simmetrica}$$

Utilizzo formula di Simpson per risolvere l'integrale:

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{e}{3EI} \left[ M_0(z=0) \cdot M_1(z=0) + 4M_0\left(z=\frac{e}{2}\right) \cdot M_1\left(z=\frac{e}{2}\right) + M_0(z=e) \cdot M_1(z=e) \right] =$$

$$= \frac{e}{3EI} [0 + 4C^* \cdot 1 + 2C^* \cdot 2] = \frac{8eC^*}{3EI}$$

$$\frac{8eC^*}{3EI} = -1 + 1 \Rightarrow \boxed{C^* = -\frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{e}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{mi permette di avere in } S \\ \text{una rotazione unitaria} \\ \text{relativa negativa} \end{array} \right.$

Però non esiste un'espressione analitica per un andamento di quel tipo.

$$\Rightarrow \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} = \frac{+2C^*}{eEI} \cdot z$$

$$\left[ 0 \leq z \leq \frac{e}{2} \right]: \quad \frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{eEI} \cdot z^2 + C_1$$

$$\eta = \frac{C^*}{eEI} \cdot \frac{z^3}{3} + C_1 \cdot z + C_2$$

$$\left[ \frac{e}{2} \leq z \leq e \right]: \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = \frac{2C^*}{eEI} \cdot z$$

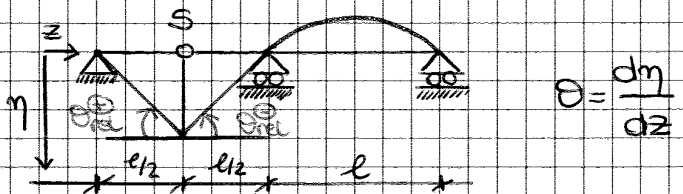
$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{C^*}{eEI} \cdot z^2 + C_3$$

$$\eta(z) = \frac{C^*}{eEI} \cdot \frac{z^3}{3} + C_3 z + C_4$$

$\left\{ \begin{array}{l} C_3 \neq C_1 \\ C_4 \neq C_2 \end{array} \right.$

Necessito di 4 condizioni al contorno:

- ①  $z=0 \quad \eta=0$
- ②  $z=l \quad \eta=l$
- ③  $z=\frac{l}{2} \quad \theta_{rel} = \theta_{ox} - \theta_{sx} = -1$

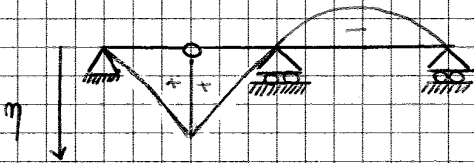


$C_4 = \frac{1}{2}$  nulla sostituisco nell'espressione della 2ª equazione al contorno

$$0 = \frac{C_4 \cdot e^{kz}}{3EI} + C_3 \cdot e + \frac{e}{2}$$

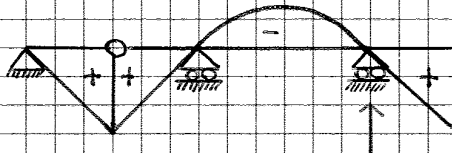
$$C_3 = -\frac{1}{2} - \frac{C_4 \cdot e}{3EI} \rightarrow C_1 = C_3 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{C_4 \cdot e}{3EI}$$

Osservo deformabili  $\eta$



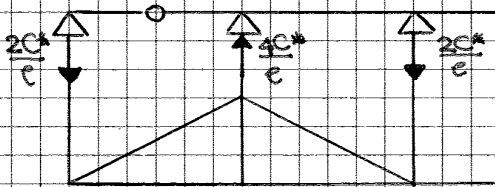
Tratti curvilinei e non rettilinei

Supponendo invece che



tratto rettilineo a salto

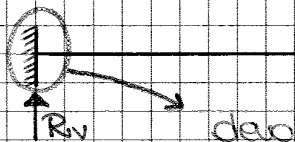
nell'intorno del carrello le 2 pendenze devono essere uguali.



$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dz} = C_1 \rightarrow \eta = C_1 z + C_2$$

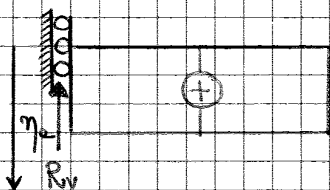
CASI VARI:



devo sostituirlo con un pattino

Tracciare L.I. reaz. verticale

Per tracciare la L.I. devo modificare  
 l'asse la struttura  
 devo renderla labile



$\gamma_{av} = 1$   
 segno (+) xk  
 reaz. verticale (+)

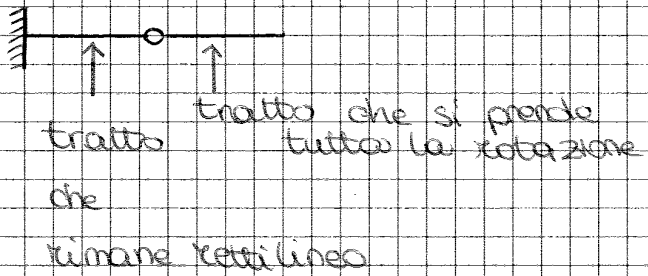
Il cedimento  $\gamma_{av}$  lo faccio avvenire verso il basso

$$F_b \cdot \eta_{av} + R_b \cdot \gamma_{av} = 0$$

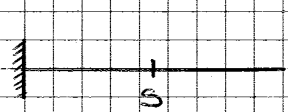
Più semplice x il calcolo della reaz. verticale

$$\left[ R_b \cdot \gamma_{av} = F_b \cdot \eta_{av} \right] \text{ da Betti}$$

Qst è l'andamento giusto:

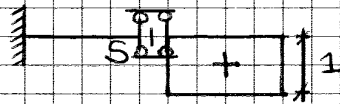


Diagrammi del taglio:



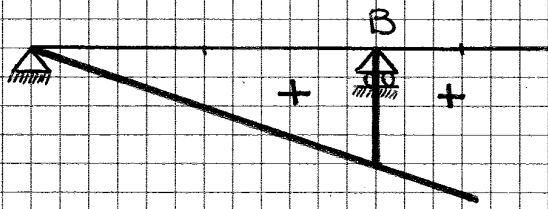
Introduco scnessore (doppio pendolo)

↓  
permette solo spostamenti verticali, no rotazioni



2 tratti rettilinei ma struttura labile

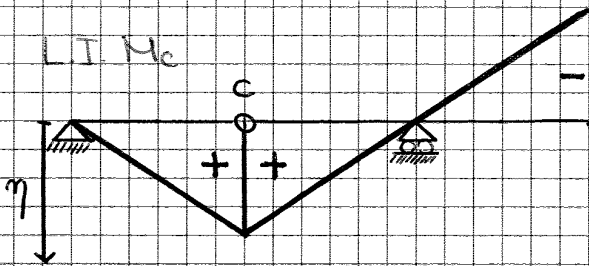
b) L.I.  $R_B$  per forze verticali.



diagrammi, deve soddisfare condizioni di vincolo.

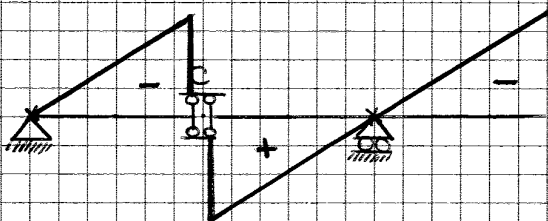
La trave resta rigidamente attorno alla cerniera.

c) L.I. momento flettente  $M_c$  in sezione C:  
 inserisco una cerniera in C.



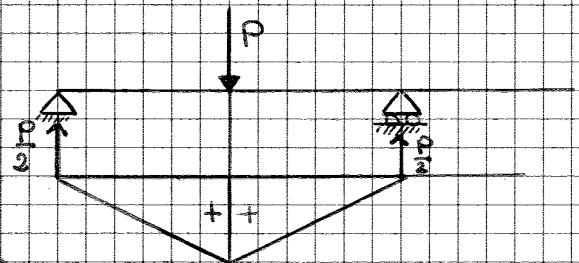
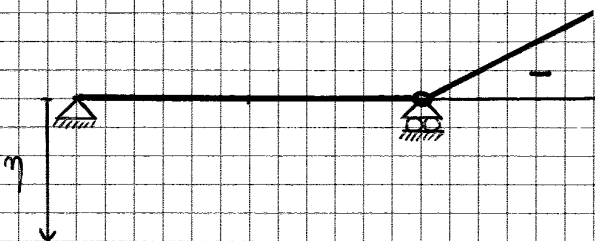
L.I. costituita da tratti rettilinei (momento flettente in C).  
 Introducendo una cerniera in C la struttura da isostatica diventa labile.

L.I. taglio  $T_c$  in sezione C:  
 Introduco in C un doppio pendolo.



Condizioni di vincolo:  
 dove passerei x cerniera A e appoggio B.

d) L.I.  $M_B$ :

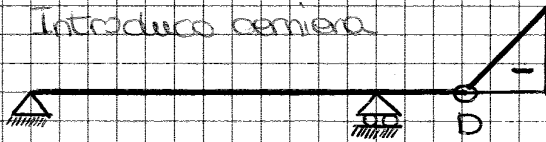


Verifico con convenzione di segno se i segni sono corretti.



e) L.I.  $M_D$

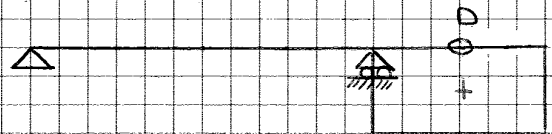
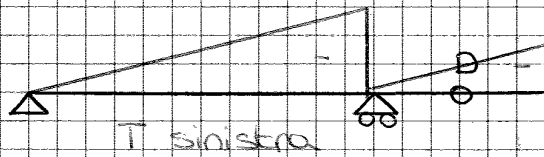
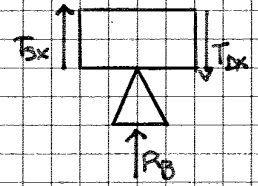
Introduco cesura



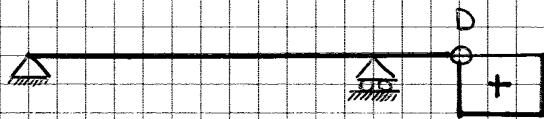
L.I. taglio: come caso precedente

taglio a sinistra e taglio a destra

Per l'equilibrio:  $\uparrow +) R_B - T_{sx} + T_{dx} = 0$

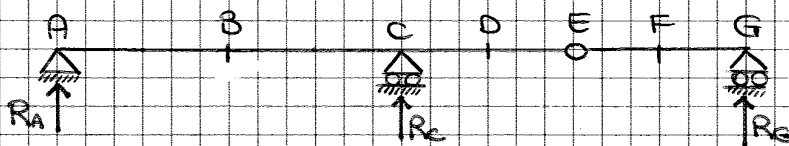


L.I.  $T_D$

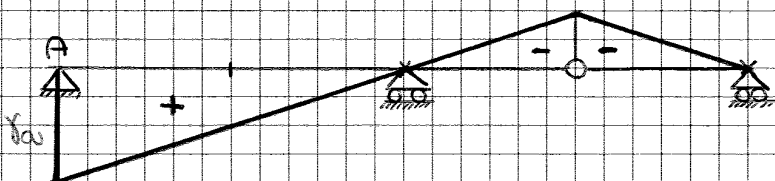


## ESERCIZIO 2

Struttura ipostatica



a) L.I.  $R_A$



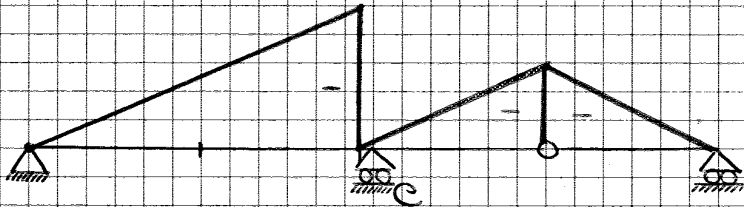
Ho provocato un cedimento in A.

L.I.  $T_c$

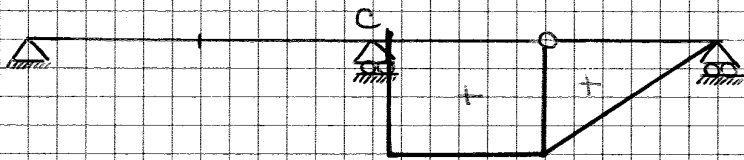
Per tracciare il diagramma, procedo come nell'esercizio precedente cioè divido il taglio a destra e sinistra.

In q.l. di sinistra, disegnerò il taglio in B e poi traccio in C.

L.I.  $T_{sx}$

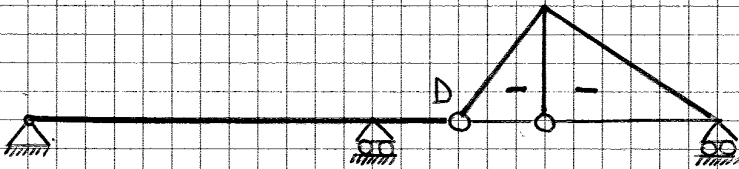


L.I.  $T_{dx}$



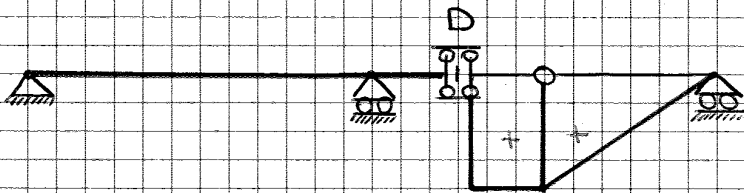
f) L.I.  $M_0$

Introduco cerniera in D



L.I.  $I_0$

Introduco un doppio pendolo



g) L.I.  $H_E$



No cerniere su cerniere  
 ↳ molto più semplice, è tutto zero. Momento nullo rimane così.

L.I.  $T_e$

