



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 556

DATA: 13/06/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Cetani

MATERIA: Meccanica Razionale + Esercitaz. + temi

Prof. Delitala\_Rondoni

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# MECCANICA RAZIONALE

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow y(t)$$

$$(t, y, y', \dots, y^{(m)}) \quad F(t, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad \text{eq. differenziale ordinario scalare}$$

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dt^m} = D^m y \quad y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad \text{forma implicita o canonica}$$

$y(t)$  è soluzione se è di classe  $C^m$

Per individuare le soluzioni devo imporre le condizioni iniziali C.I.:

- devono essere  $m$  condizioni  
 per ottenere soluzione unica

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y_1$$

$$y^{(m)}(t_0) = y_m$$

→ le C.I. + l'eq. diff.  
 con. costituiscono il  
Problema di Cauchy

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE ( $m=1$ )

Problema di Cauchy  $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \text{ mi serve a uso } y = f(x, y) \\ y(t_0) = y_0 \text{ oppure } y'(t_0) = y_1 \end{array} \right.$

È NECESSARIA  
 UNA SOLA COND. INIZIALE

## A VARIABILI SEPARABILI

Si possono sempre ridurre a questa espressione:

$$y'(t) = a(t) \underbrace{b(y(t))}_{b(y)}$$

Ricerca delle soluzioni:

1)  $\bar{y}: b(y) = 0$

2) Posso  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$  mendo:  $\frac{dy}{dt} = a(t) b(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow B(y) = A(t) + C$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 primitive

$$y = be^{-Ax} + e^{-Ax} \cdot \int \frac{S(x)}{a} e^{Ax} dx = 0 + e^{-Ax} \left( \frac{t^2}{2} \right) \cdot \sqrt[2]{S(x)} = \frac{t^2}{2} \cdot \sqrt[2]{S(x)} = \boxed{t^2 \text{ part } t}$$

LINEARE DI II ORDINE (n=2)

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = S(t)$$

$$y'' + \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y' + \frac{a_2(t)}{a_0(t)}y = \frac{S(t)}{a_0(t)} = R(t) \quad \text{FORMA CANONICA}$$

OMOGENE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Ricerca delle soluzioni: • nuovo polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• se  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

• se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

• se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$   $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

①  $\bar{y} = e^{-\frac{b}{2a}t} (c_1 + c_2 t)$

②  $\bar{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

③  $\bar{y} = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

Esempio

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

trovo p.c:  $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

soluzione  $y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$

trovo  $c_1, c_2$ :  $y' = 4c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$c_1 e^4 + c_2 e^{-2} = 1$$

$$4c_1 e^4 - 2c_2 e^{-2} = 0$$

$$c_1 = \frac{1 - c_2 e^{-2}}{e^4}$$

$$4 - 4c_2 e^{-2} - 2c_2 e^{-2} = 0$$

$$6c_2 e^{-2} = 4$$

$$c_2 = \frac{2}{3e^{-2}}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} e^2 \\ c_1 = \frac{1 - 2e^2}{3} e^{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} e^2 \\ c_1 = \frac{1}{3} e^{-4} \end{cases}$$

Soluzione  $\bar{y} = \frac{2}{3} e^{2+4t} + \frac{1}{3} e^{-4-2t}$

Per trovare  $\lambda_k$ :

① Scrivere il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

② Trovare  $\lambda_k, k=1, \dots, m$  soluzioni

Se le soluzioni  $\lambda_k$  sono reali:

$$y_{OH} = \sum_{k=1}^m c_k t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}$$

↳ molteplicità della soluzione  $\lambda_k$

Se le soluzioni  $\lambda_k$  sono complesse:  $\lambda_i = \alpha_i + \beta_i i$

$$y_{OH} = \sum_{k=1}^m c_k t^{m_k-1} e^{\alpha_k t} (\cos(\beta_k t) + \text{sen}(\beta_k t))$$

CONTINUA DOPO ESERCI

Esempio

$$y''' - 7y' + 6y = 0 \quad \text{dove scriviamo } (D^3 - 7D + 6)y = 0$$

Scrivo p.c:  $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$

Soluzioni  $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -3$

$$y_{OH} = \sum_{k=1}^m c_k t^{m_k-1} e^{\lambda_k t} = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$$

Esempio

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Scrivo p.c:  $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i \\ \lambda_2 &= \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{2} = -1 - \sqrt{2}i \end{aligned} \right.$$

$$y_{OH} = \sum_{k=1}^m c_k t^{m_k-1} e^{\alpha_k t} (\cos(\beta_k t) + \text{sen}(\beta_k t)) = c_1 e^{-t} (\cos(\sqrt{2}t) + \text{sen}(\sqrt{2}t)) + c_2 e^{-t} (\cos(-\sqrt{2}t) + \text{sen}(-\sqrt{2}t))$$

Per trovare (b):

Dare la funzione  $S(t) = p(t) e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) \end{pmatrix}$

→ eventuale presenza

la soluzione particolare è:

$$y_p = c_1 (q(t) t^m e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + \text{sen}(\beta t))) \quad q(t) \text{ polinomio generico dello stesso grado della funzione } (p(t) e^{\alpha t})$$

# METODO DI VARIAZIONE DEI PARAMETRI (vale anche per coeff. non costanti)

$\forall S(t) \quad Ly = R(t) \rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \rightarrow L(y) = 0$   
 $Ly = S(t)$   
 soluzioni indipendenti della omogenea

ipotesi  $y_{part} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_m u_m$   $v$  sono funzioni  
 $= \sum_{k=1}^m v_k(t) u_k(t) = (v \cdot u)$

## Dimostrazione

$y_1 = (v \cdot u)$

$y_1' = (v' \cdot u) + (v \cdot u')$   
 $\stackrel{=0}{=} \rightarrow$  la seconda condizione di Cauchy

$y_1'' = (v'' \cdot u) + (v' \cdot u'') + (v \cdot u'')$   
 $\stackrel{=0}{=} \rightarrow$  (II cond. di Cauchy)

$y_1^{(m-1)} = (v^{(m-1)} \cdot u) + (v \cdot u^{(m-1)})$   
 $\stackrel{=0}{=} \rightarrow$

$y_1^{(m)} = (v^{(m)} \cdot u) + (v \cdot u^{(m)})$   
 $\stackrel{= S(t)}{=} \rightarrow$  m-esima condizione di Cauchy

$y_1^{(m)} = R(t) + (v \cdot u^{(m)})$  Per verificare che essa è soluzione affibbia  $S(t)$

$L(y_1) = (D^{(m)} + a_1 D^{(m-1)} + \dots + a_0)(y_1) = y_1^{(m)} + a_1 y_1^{(m-1)} + \dots + a_0 y_1 =$   
 $= R(t) + (v \cdot u^{(m)}) + a_1 (v \cdot u^{(m-1)}) + \dots + a_0 (v \cdot u) =$   
 $= R(t) + (v \cdot L(u)) = R(t) + (v \cdot 0) = R(t) \rightarrow$  l'ipotesi è soluzione!

$L(u) = 0 \Leftrightarrow L(y) = R(t)$

$L(y) = 0 \rightarrow$  se  $u$  sono le soluzioni di p.t. omogenea

## Per trovare $v_k$

$(v' \cdot u^{(i)}) = 0 \quad i = 0, \dots, m-2$   
 $(v' \cdot u^{(m-1)}) = R(t)$

Condizioni imposte  
 da usare i calcoli

Si ottiene ora il modo di ottenere una serie finita completa e un modo alternativo esplicitando la soluzione particolare cercata.

$$y_{part} = (u \cdot v) = (e^x, e^{-x}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 e^x + v_2 e^{-x}$$

$$y = y_{hom} + y_{part} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + v_1(t) e^t + v_2(t) e^{-t}$$

Esempio (è uno dei metodi di determinazione dei parametri: solo per esempio, è ausiliario il metodo + veloce)

$$y'' - y = e^x \quad \text{intervallo di soluzione } \mathbb{R}^+ \rightarrow c=0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad y_{hom} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \det W(t) = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \text{invertibile}$$

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^t \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^t \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^x \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(-e^{-x} - e^x) \\ -\frac{1}{2}(-e^x e^x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx = \int_0^t e^x \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(-e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x) \end{bmatrix} dx = \int_0^t -\frac{1}{2} e^x \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{pmatrix} dx <$$

$$\int_0^t \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^t = \frac{1}{2} t$$

$$\int_0^t -\frac{1}{2} e^{2x} dx = -\frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^t = -\frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (1 - e^{2t}) = -\frac{1}{4} (e^{2t} - 1)$$

$$y_{part} = (u \cdot v) = (e^t, e^{-t}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t \\ -\frac{1}{4} (e^{2t} - 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{4} e^{-t} (e^{2t} - 1) = \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{4} (e^t - e^{-t})$$

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{4} (e^t - e^{-t}) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t - \frac{f(x)}{2}$$

METODO DI RIDUZIONE AL PRIMO ORDINE (utile per tutti i casi a condizioni che le soluzioni del p.c.  $\in \mathbb{R}$ )

Esempio

$$y'' - 3y' + 2y = x e^{x+x^2}$$

$$(D-1)(D-2)y = x e^{x+x^2}$$

Risolvo  $u' - u = x e^{x+x^2}$

$$u = e^{t^2} + e^t \int e^{-x} x e^{x+x^2} dx = c_1 e^{t^2} + \frac{1}{2} e^{t^2}$$

Risolve  
di  
ordine

$$\begin{cases} (D-2)y = y' - 2y = u \\ (D-1)u = u' - u = x e^{x+x^2} \end{cases}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + K$$

se  
integrale  
diventa la  
funzione della  
 $e^{x^2}$

Risolvo  $y' - 2y = u = \frac{1}{2} e^{t^2}$

$$y = b e^{2t} + e^{2t} \int e^{-2x} \frac{1}{2} e^{x^2+x} dx$$

$$\int \frac{1}{2} e^{x^2-x} dx = \dots$$

$$y_{hom} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + e^{2t} \int e^{-2x} \frac{1}{2} e^{x^2+x} dx = y + u_{part}$$

Le eq. Sono a coefficienti costanti ovvero  $p_i$  non dipendono da  $t$   
 Formula risolvente  $A(t) = \int_0^t P dx = P \int_0^t dx = tP$

$$y(t) = y(0) e^{(t-0)A} = e^{tA} y(0)$$

$$e^{tA} = C^{-1}(t) e^{D(t)} C(t)$$

$D(t)$  è la  $M$  diagonalizzata di  $A$   $C^{-1}AC = D$

$$e^{tA} = C e^{tD} C^{-1}$$

Se  $A$  non è (o) diagonalizzabile, il sistema non ha soluzioni

ESEMPIO

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cond. di Cauchy

$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P \rightarrow \text{insieme coeff. costanti}$$

$$A(t) = \int P(x) dx = P \int dx = P \cdot t$$

Problema di diagonalizzare  $A$  (che coincide con  $P$  in questo caso)

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

trovo autovalori:

$$p.c. = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} \quad \lambda_1 = 6 \quad \lambda_2 = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C C^{-1} P C = C D$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5c_1 + 4c_3 & 5c_2 + 4c_4 \\ c_1 + 2c_3 & c_2 + 2c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c_1 & c_2 \\ 6c_3 & c_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5c_1 + 4c_3 = 6c_1 \\ 5c_2 + 4c_4 = c_2 \\ c_1 + 2c_3 = 6c_3 \\ c_2 + 2c_4 = c_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_4 \\ 4c_3 = c_1 \\ c_2 = c_2 \\ c_1 = 4c_3 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = C^{-1} e^{Dt} C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4-1 & e^{6t} - e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{pmatrix}$$

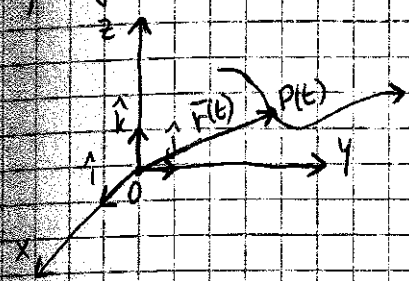
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{pmatrix}$$

$$y(t) = y(0) e^{tA} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8e^{6t} + 2e^t + 12e^{6t} - 3e^t \\ 2e^{6t} - 2e^t + 2e^{6t} + 12e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{6t} - 2e^t \\ 0 & 6e^{6t} - 9e^t \end{pmatrix}$$



# CINEMATICA DEL PUNTO

La descrizione del movimento è subordinata alla scelta di un osservatore.  
 Il quale dispone di un orologio temporale, sul quale è stata fissata un'origine,  
 e di un sistema di riferimento, costituito da 3 vettori ortogonali  
 $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  e da un'origine  $O$ .



Il movimento di un punto  $P$ , in un intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$   
 è descritto da una funzione (legge oraria) che associa  
 ad ogni istante  $t \in [t_1, t_2]$  una corrispondente  
posizione  $P(t)$  dello spazio.

Fissata l'origine  $O$ , la posizione di  $P$  è individuata dal vettore  $\overline{OP}(t)$ ,  
 detto vettore posizione.

Vettore posizione  $\vec{r} \rightarrow$  legge oraria  $F(t) = \overline{OP}(t) = (P-O)(t)$

$$\vec{F}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

L'insieme dei punti dello spazio occupati da  $P$  si dice traiettoria o orbita

$$\{P(t) \mid t \in [t_1, t_2] \text{ traiettoria}\}$$

insieme dei punti

La traiettoria oggetto di studio della Meccanica Classica è continua  
 "oggetti meccanici" differentiabili o frtti e continui

La velocità del punto  $P$  è definita come derivata del vettore  
posizione  $\overline{OP}(t)$ :

$$\vec{v}_P(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

Analogamente per l'accelerazione si ha:

$$\vec{a}_P(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

Lo spostamento finito  $\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$  relativo all'intervallo di  
 tempo  $[t, t+\Delta t]$  può essere espresso mediante lo sviluppo di Taylor  
 della funzione  $P(t)$  all'istante  $t$  come:

$$\Delta P = \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + o(\Delta t^2) \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

Lo spostamento infinitesimo o elementare  $dP = \vec{v}dt$

l'elemento lineare in traiettoria  $ds = |dP| = |\vec{v}(t)|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$

Si definisce la positiva CURVATURA:  $c = \left| \frac{d\hat{e}}{ds} \right|$

Essa ha un particolare significato geometrico: indica la rotazione su cui avviene la direzione della tangente rispetto al verso dell'asse curvilineo.

Si definisce inoltre raggio di curvatura  $\rho = \frac{1}{c}$ ,  $c \neq 0$ . Nel caso di traiettoria circolare,  $\rho$  è pari al raggio della circonferenza stessa.

Si definisce il versore normale principale  $\hat{m}$  nei punti in cui la curvatura è diversa da zero:

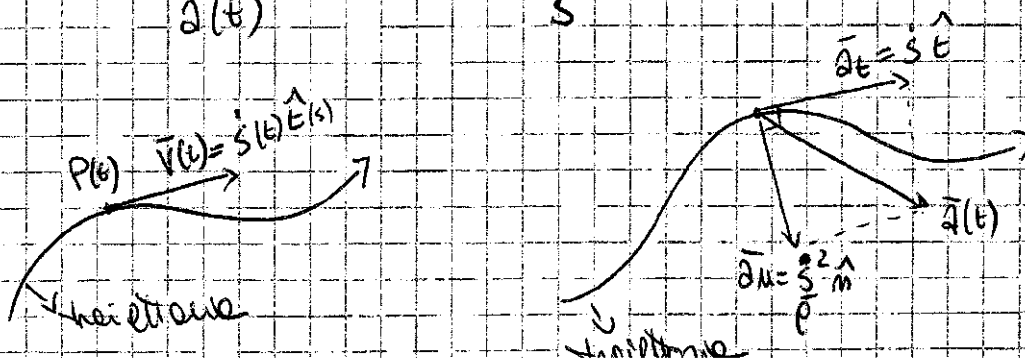
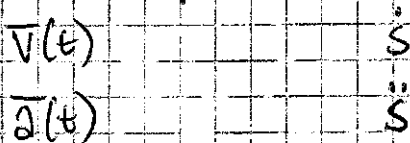
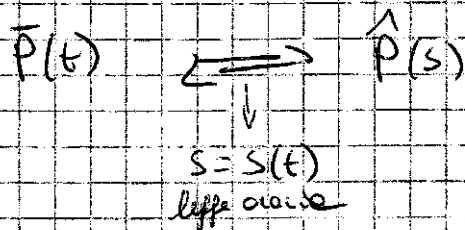
$$\hat{m} = \frac{1}{c} \frac{d\hat{e}}{ds} \quad [\text{VERSORE NORMALE PRINCIPALE}]$$

Si introduce infine il versore binormale  $\hat{b}$   $\hat{b} = \hat{e} \times \hat{m}$   
 $\hat{e}, \hat{m}$  e  $\hat{b}$  costituiscono una terna ortogonale alla traiettoria, detta terna intrinseca.

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE in coord. intrinseche

$$\vec{v}_p(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d\hat{p}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \hat{e}(s) \quad \boxed{\vec{v} = \dot{s} \hat{e}}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_p(t) &= \frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = \frac{d(\dot{s} \hat{e}(s))}{dt} = \ddot{s} \hat{e}(s) + \dot{s} \frac{d\hat{e}(s)}{dt} = \ddot{s} \hat{e}(s) + \dot{s} \frac{d\hat{e}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \\ &= \ddot{s} \hat{e}(s) + c \dot{s}^2 \hat{m} = \underbrace{\ddot{s}}_{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} \hat{e}(s) + \underbrace{\frac{\dot{s}^2}{\rho}}_{\frac{\partial \vec{v}}{\partial m}} \hat{m} \end{aligned} \quad \boxed{\vec{a} = \ddot{s} \hat{e} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{m}}$$



Esercizio Dato la legge del moto  $P(t) = (c \cos t, s \sin t, t)$

trovare legge oraria  $s(t)$  ed esprimere  $v_p(t)$  e  $a(t)$  in coord. cilindriche

Derivando:  $v_p(t) = (-c \sin t, c \cos t, 1)$  e trovare  $v_p(s)$  e  $a(s)$

$a_p(t) = (-c \cos t, -s \sin t, 0)$

Per def:  $s(t) = \int_{t_0}^t |v_p(t)| dt$  si calcola  $|v_p(t)| = \sqrt{c^2 \sin^2 t + c^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

si ottiene  $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} dt \Rightarrow s(t) = \sqrt{2} t$  legge oraria  $\Rightarrow t = \frac{s(t)}{\sqrt{2}}$

$\dot{s}(t) = \sqrt{2}$

$\ddot{s}(t) = 0$

$\hat{v}_p(t) = \dot{s} \hat{e} = \sqrt{2} \hat{e}$

$\hat{e} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v}{|v|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} s \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} c \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\hat{e}(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} s \sin \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} c \cos \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\hat{v}_p(s) = \left( -s \sin \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, c \cos \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, 1 \right)$

$\hat{a}_p(t) = \ddot{s} \hat{e} + \dot{s}^2 \hat{m} = 0 + \hat{m}$

$c = \left| \frac{d\hat{e}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} c^2 \frac{s^2(t)}{s^2} + \frac{1}{4} s^2 \frac{s^2(t)}{s^2}} = \frac{1}{2}$   $c = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = 2$

$\frac{d\hat{e}}{ds} = \left( -\frac{1}{2} c \sin \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} s \cos \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$\hat{m} = \frac{1}{c} \frac{d\hat{e}}{ds} = \left( -c \sin \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, -s \cos \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$\hat{a}_p(s) = 0 + \left( -c \sin \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, -s \cos \frac{s(t)}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

↑ Per sostituire la legge oraria si trova  $\hat{a}(t)$

Esercizio Dato la velocità trovare la legge oraria, la traiettoria e scrivere in coord. polari

$v_x = bt^2$   $\frac{dx}{dt} = bt^2$   $\int dx = \int bt^2 dt$   $x(t) = \frac{bt^3}{3}$   $\text{chiamata } y = \frac{c}{2} \left( \frac{3x}{b} \right)^{\frac{2}{3}}$

$v_y = ct$   $\int dy = \int ct dt$   $y(t) = \frac{ct^2}{2}$   $t = \sqrt{\frac{3x}{b}}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{b^2 t^6}{9} + \frac{c^2 t^4}{4}} = \sqrt{\frac{4b^2 t^6 + 9c^2 t^4}{36}} = \sqrt{\frac{t^4 (4b^2 t^2 + 9c^2)}{36}} = t^2 \sqrt{\frac{4b^2 t^2 + 9c^2}{36}}$

$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{ct^2}{\frac{bt^3}{3}} = \arctan \left( \frac{3c}{bt} \right)$

Summando la def.  $\hat{e}_k(t)$  si ottiene

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{jk} \alpha_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad \det [\alpha_{jk}] = 1$$

Pertanto se i vettori direzionali  $\{\alpha_{jk}\}$  soddisfano tutte le relazioni ad above che i vettori  $\{\hat{e}_k\}$  risultano una terna ortogonale destrorsa, la può essere alla funzione  $Q(t)$ , definita in modo unico.

Si può definire una matrice  $R$ , trasformazione ortogonale e più precisamente una rotazione. Essa è costituita dagli elementi relativi alla terna  $\hat{e}_k$ , ovvero

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Costituisce una trasformazione lineare tale che  $R^T R = R R^T = I$ ,  $\det R = 1$ . Questa rotazione trasforma ogni vettore della terna  $\hat{e}_k$  in un corrispondente vettore della terna  $\hat{i}_k$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1(t) \\ \hat{e}_2(t) \\ \hat{e}_3(t) \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix}$$

La rotazione inversa, che coincide con la trasposta  $R^T$ , trasforma i vettori  $\hat{e}_k$  negli  $\hat{i}_k$ .

Per mezzo di  $R$  che dipende e modo non funzione del tempo, si può esprimere la posizione di P all'istante  $t$  come:

$$Q_P(t) = R(t) \bar{p}$$

dove  $\bar{p}$  è il vettore costante posizione rispetto alla terna fissa, prendendo come ipotesi che la terna  $\hat{e}_k$  coincide con quella fissa  $\hat{i}_k$  all'istante  $t=0$ .

$$\bar{p} = \sum_{h=1}^3 y_h \hat{i}_h$$

↳ Coord. di P a  $t=0$  rispetto terna fissa

Infine si avrà:

$$P(t) = \dot{P}(t) + OQ(t) = \dot{OQ}(t) + QP(t) = Q(t) + R(t) \bar{p}$$

È possibile dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i valori degli angoli di Eulero e gli orientamenti che può assumere un corpo rigido. Dato l'asse  $\hat{n}$  e l'asse  $\hat{e}_3$  finché  $\hat{n} \times \hat{e}_3 \neq \vec{0}$

→ è possibile individuare un unico valore di  $(\psi, \theta, \phi)$ .

Da i valori degli angoli di Eulero è possibile trasformare la terna fissa  $\{\hat{e}_i\}$  nella terna solidale  $\{\hat{e}'_i\}$  attraverso 3 successive rotazioni.

① Si esegue rotazione di angolo  $\psi$ : (si definisce una nuova terna  $\{\hat{e}'_i\}$ )

$$\begin{cases} \hat{e}'_1 = \hat{n} = \cos \psi \hat{1}_1 + \sin \psi \hat{1}_2 \\ \hat{e}'_2 = -\sin \psi \hat{1}_1 + \cos \psi \hat{1}_2 \\ \hat{e}'_3 = \hat{1}_3 \end{cases} \quad (\psi)$$

② Si esegue una rotazione di angolo  $\theta$ : (si definisce una nuova terna  $\{\hat{e}''_i\}$ )

$$\begin{cases} \hat{e}''_1 = \hat{n} = \hat{e}'_1 \\ \hat{e}''_2 = \cos \theta \hat{e}'_2 + \sin \theta \hat{e}'_3 \\ \hat{e}''_3 = -\sin \theta \hat{e}'_2 + \cos \theta \hat{e}'_3 \end{cases}$$

③ Infine si esegue una rotazione di angolo  $\phi$ :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \cos \phi \hat{e}''_1 + \sin \phi \hat{e}''_2 \\ \hat{e}_2 = -\sin \phi \hat{e}''_1 + \cos \phi \hat{e}''_2 \\ \hat{e}_3 = \hat{e}''_3 \end{cases}$$

Sostituendo si trova:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \hat{1}_1 + (\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \hat{1}_2 + (\sin \theta \sin \phi) \hat{1}_3 \\ \hat{e}_2 = (-\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{1}_1 + (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta) \hat{1}_2 + (\cos \phi \sin \theta) \hat{1}_3 \\ \hat{e}_3 = (\sin \theta \sin \psi) \hat{1}_1 + (-\sin \theta \cos \psi) \hat{1}_2 + (\cos \theta) \hat{1}_3 \end{cases}$$

La parentesi non serve che i componenti  $\alpha_{ik}$  della matrice di rotazione

si formano di  $\psi, \theta, \phi$ :  $\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \hat{1}_1 \\ \hat{1}_2 \\ \hat{1}_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{e}''_1 \\ \hat{e}''_2 \\ \hat{e}''_3 \end{pmatrix} = R' \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix}$

In particolare il nome del nodo (il verso)  $\hat{n}$  può essere così scritto:

$$\hat{n} = \hat{e}'_1 = \hat{e}_1 = \cos \psi \hat{1}_1 + \sin \psi \hat{1}_2 = \cos \phi \hat{e}_1 - \sin \phi \hat{e}_2$$

## CARATTERIZZAZIONE DEI MOTI RIGIDI

### TEOREMA: LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ

Qualunque movimento e sufficientemente affine in modo di un sistema rigido e che la distribuzione delle velocità soddisfa in ogni istante:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{QP}$$

in ogni Q, P.

Dimostrazione:

$$P(t) = Q(t) + \vec{QP}(t) \text{ derivando } \Rightarrow \dot{P}(t) = \dot{Q}(t) + \frac{d\vec{QP}(t)}{dt} = \dot{P}(t) = \dot{Q}(t) + \vec{\omega} \times \vec{QP}(t)$$

$$= \vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega} \times R(t) \vec{p} = \vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega} \times R(t) \sum_{h=1}^3 y_h(t) \hat{e}_h$$

$$= \vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega} \times \sum_{h=1}^3 y_h \hat{e}_h = \vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{QP}$$

### LEGGI DI DISTRIBUZIONE DELLE ACCELERAZIONI

Una componente delle accelerazioni soddisfa la relazione:

$$\vec{a}_p(t) = \vec{a}_q(t) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{QP})$$

Dimostrazione:

$$P(t) = Q(t) + \vec{QP}(t) \text{ derivando due volte } \Rightarrow \ddot{P}(t) = \ddot{Q}(t) + \sum_{h=1}^3 y_h(t) \frac{d^2 \hat{e}_h}{dt^2} =$$

$$= \ddot{P}(t) = \ddot{Q}(t) + \sum_{h=1}^3 y_h(t) \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \hat{e}_h) = \ddot{P}(t) = \ddot{Q}(t) + \sum_{h=1}^3 y_h(t) [\dot{\vec{\omega}} \times \hat{e}_h + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_h)]$$

$$= \vec{a}_p(t) = \vec{a}_q(t) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{QP})$$

## CLASSIFICAZIONE DEI MOTI

$\dot{s}(t) > 0$  moto progressivo o diretto

$\dot{s}(t) = 0$  moto stazionario o fisso

$\dot{s}(t) < 0$  moto retrogrado

$\ddot{s}(t) > 0$  moto accelerato

$\ddot{s}(t) < 0$  moto ritardato

$\ddot{s}(t) = 0$

$\dot{s}(t) = 0$  inversione del moto.

$\dot{s}(t) < 0$  cambio segno

## CLASSIFICAZIONE DEI MOTI RIGIDI

1)  $\vec{\omega}(t) = \vec{0}, \forall t$  MOTO TRASLATORIO

2)  $\vec{\omega}(t)$  ha direzione costante. MOTO ROTO TRASLATORIO

3)  $\vec{\omega}(t)$  direzione costante,  $Q$  ha traiettoria rettilinea // direzione  $\vec{\omega}$  MOTO EICOIDALE (trascinato)

4)  $\vec{\omega}(t) \perp$  piano  $\pi$  (solido rigido); piano  $\pi$  // moto  $\vec{u}$  e  $o \text{ dist} = \text{cost.}$  MOTO PRIMO  
(solido rigido piano)

5) C primo  $\rightarrow \vec{v}_c = \vec{0} \forall t \quad \vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{CP}$  MOTO SFERICO O POLARE

Dim: S'affetti il prodotto scalare

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}(Q) \cdot \vec{\omega} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{QP}) \cdot \vec{\omega}}_{=0} \Rightarrow \vec{v}(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}(Q) \cdot \vec{\omega}$$

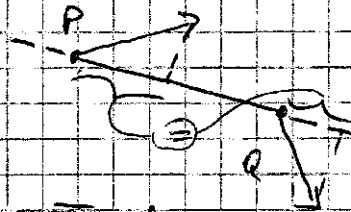
quello lo TEST =

2) le componenti delle velocità di 2 punti secondo la retta che li congiunge sono uguali.

Dim: Se  $P \neq Q$  moltiplichiamo scalarmete per  $\vec{QP}$

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{QP} = \vec{v}(Q) \cdot \vec{QP} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{QP}) \cdot \vec{QP}}_{=0}$$

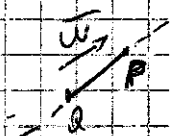
per questo lo TEST  $\vec{v}(P) \cdot \vec{QP} = \vec{v}(Q) \cdot \vec{QP}$



3) Punti appartenenti ad una retta parallela a  $\vec{\omega}$  hanno pari velocità. Tale componente comune prende il nome di velocità di scorrimento di rotazione.

Dim: Se ha  $\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times \vec{QP}$  ma  $\vec{QP} \parallel \vec{\omega}$

$$= \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(P) = \vec{v}(Q) \text{ per questo lo TEST}$$



### ASSE DI MOI (ASSE DI MOI)

Si consideri un fenomeno di moto rotazionale pur il quale  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$

È come asse di Moir la retta formata dai punti  $\leq$  tali che, all'istante

considerato:

$$\vec{QC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}(Q)}{|\vec{\omega}|} + \lambda \vec{\omega}, \lambda \in \mathbb{R}$$

È evidente che l'asse di Moir  $\vec{e} \parallel \vec{\omega}$ .

### TEOREMA DI MOIR

l'atto di moto rigido più generale possibile è elicoidale. l'asse di Moir risulterà essere proprio la retta contenente tutti i punti la cui velocità  $\vec{v}$  è  $\parallel$  alla retta stessa.

in casi particolari l'atto di moto può anche essere rotazione o traslazione

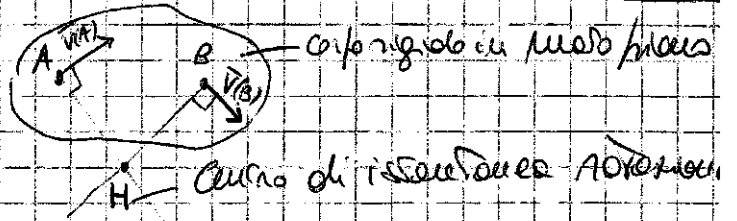
Dim: parallelismo tra velocità e punto dell'asse di Moir e la velocità angolare.

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times \vec{QC} = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times \left( \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}(Q)}{|\vec{\omega}|} + \lambda \vec{\omega} \right) = \vec{v}(Q) + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}(Q))}{|\vec{\omega}|} + \vec{\omega} \times \lambda \vec{\omega} =$$

$$= \vec{v}(Q) + \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{v}(Q)) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{v}(Q)}{|\vec{\omega}|^2} = \vec{v}(Q) + \frac{I \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} - \frac{|\vec{\omega}|^2}{|\vec{\omega}|^2} \vec{v}(Q) = \frac{I \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \Rightarrow \vec{v}(C) \parallel \vec{\omega}$$

$|\vec{v}(C)| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(Q) + \vec{\omega} \times \vec{QC} = 0$

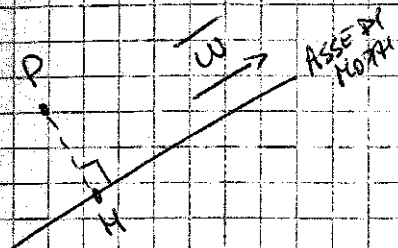
TEOREMA DI CHASLES Sono A e B 2 punti appartenenti ad un sistema e durante un moto rigido piano. Se, in un dato istante, la perpendicolare nel piano direttore alle velocità  $\vec{v}(A)$  e  $\vec{v}(B)$  incontra in A e B il segmento in solo punto H, esso è il centro di istantanea rotazione dell'otto di moto.



CAMPO SPAZIALE DELLE ACCELERAZIONI

Proposizione: Durante un moto rigido il campo spaziale delle accelerazioni

Soddisfa la relazione:  $\vec{a}(P) = \vec{a}(Q) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{QP})$



tra considerati nel punto P e nel H la sua proiezione sul piano di rotazione. Se il punto generico Q coincide con H:

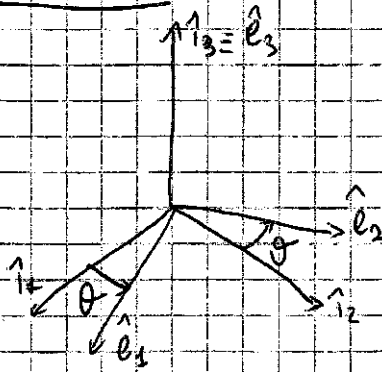
Con H:  $\vec{a}(P) = \vec{a}(H) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{HP} + (\vec{\omega} \cdot \vec{HP}) \vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2 \vec{HP}$

Inoltre se

- H è fisso  $[\vec{a}(H) = \vec{0}, \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}] \Rightarrow \vec{a}(P) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{HP} - |\vec{\omega}|^2 \vec{HP}$
- $\vec{\omega}$  è costante  $[\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}] \Rightarrow \vec{a}(P) = -|\vec{\omega}|^2 \vec{HP} \rightarrow$  i punti non sull'asse di rotazione hanno accelerazione centripeta

VELOCITÀ ANGOLARE E ROTAZIONI

Dimostrazione Si vuole dimostrare che  $\vec{\omega}$  è la derivata di  $\theta(t)$



Se prendo in esame un sistema di moto rotatorio

abbiamo  $\hat{1}_3 \equiv \hat{e}_3$ :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \cos\theta \hat{1}_1 + \sin\theta \hat{1}_2 \\ \hat{e}_2 = -\sin\theta \hat{1}_1 + \cos\theta \hat{1}_2 \\ \hat{e}_3 = \hat{1}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{e}_1}{dt} = -\dot{\theta} \sin\theta \hat{1}_1 + \dot{\theta} \cos\theta \hat{1}_2 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\dot{\theta} \cos\theta \hat{1}_1 - \dot{\theta} \sin\theta \hat{1}_2 \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

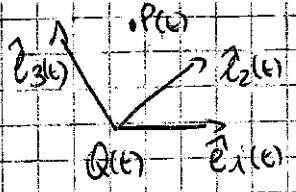
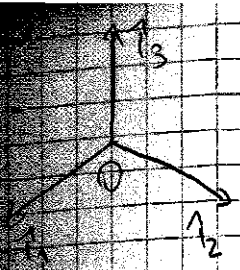
$$\vec{\omega} = \sum_{h=1}^3 \left( \hat{e}_h \times \frac{d\hat{e}_h}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left[ \hat{e}_1 \times \frac{d\hat{e}_1}{dt} + \hat{e}_2 \times \frac{d\hat{e}_2}{dt} + \hat{e}_3 \times \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right] = \frac{1}{2} [2\dot{\theta} \hat{1}_3] = \dot{\theta} \hat{1}_3$$

$$\theta = \begin{bmatrix} -\hat{1}_1 & \hat{1}_2 & \hat{1}_3 \\ \cos\theta \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta \cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin^2\theta + \dot{\theta} \cos^2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{1}_3 = \dot{\theta} \hat{1}_3$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \hat{1}_1 & \hat{1}_2 & \hat{1}_3 \\ -\sin\theta \cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta \sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\dot{\theta} \sin^2\theta + \dot{\theta} \cos^2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{1}_3 = \dot{\theta} \hat{1}_3$$

$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{1}_3$





$\vec{w}(t)$  = velocità angolare osservabile mobile

Le formule cinematiche relative all'osservatore fisso si mantengono valide, quelle relative all'osservatore mobile no.

**TEOREMA DI GALILEO (LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ)**

Consideri un punto P durante un moto che viene descritto da 2 osservatori. La velocità  $\vec{v}_d$  di P misurata dall'osservatore fisso è  $\neq$   $\vec{v}_r$  misurata dall'osservatore mobile e sono in relazione attraverso:

$$\vec{v}_d = \vec{v}_r + \vec{v}_z$$

$\vec{v}_z$  = velocità di trascinamento

dove  $\vec{v}_z = \vec{w} \times \vec{QP}$  [VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO]  $\rightarrow$  è l'angolo che cambia! se la linea mobile fosse solida Q-P.

Dim:  $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$  Derivando si ottiene:  $\dot{\vec{OP}} = \dot{\vec{OQ}} + \dot{\vec{QP}}$

$$\vec{QP} = y_1(t)\hat{e}_1 + y_2(t)\hat{e}_2 + y_3(t)\hat{e}_3$$

Le comp  $y$  dipendono dal tempo perché la linea  $\vec{QP}$  non è solida!

$$\dot{\vec{QP}} = \sum_{h=1}^3 \dot{y}_h \hat{e}_h + \sum_{h=1}^3 y_h \dot{\hat{e}}_h$$

$$\vec{v}_z = \vec{v}_d + \vec{v}_r + \vec{w} \times \vec{QP}$$

**TEOREMA DI CORIOLIS (LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI)**

L'accelerazione assoluta  $\vec{a}_d$  e l'accelerazione relativa  $\vec{a}_r$  di un punto P sono legate dalla relazione:  $\vec{a}_d = \vec{a}_r + \vec{a}_z + \vec{a}_c$

dove  $\vec{a}_z = \dot{\vec{w}} \times \vec{QP} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{QP})$  [ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO]

$\vec{a}_c = 2\vec{w} \times \vec{v}_r$  [ACCELERAZIONE DI CORIOLIS]

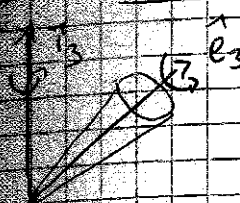
Dim:  $\vec{a}_d = \frac{d\vec{v}_d}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_z}{dt}$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \sum_{h=1}^3 \ddot{y}_h \hat{e}_h + \sum_{h=1}^3 \vec{w} \times \dot{y}_h \hat{e}_h = \vec{a}_r + \vec{w} \times \vec{v}_r$$

$$\frac{d\vec{v}_z}{dt} = \dot{\vec{a}}_d + \vec{w} \times \vec{QP} + \vec{w} \times \left[ \sum_{h=1}^3 \dot{y}_h \hat{e}_h + \sum_{h=1}^3 \vec{w} \times y_h \hat{e}_h \right] = \dot{\vec{a}}_d + \vec{w} \times \vec{QP} + \vec{w} \times \vec{v}_r + \vec{w} \times \vec{QP}$$

$$\vec{a}_d = \vec{a}_r + \dot{\vec{a}}_d + \vec{w} \times \vec{QP} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{QP}) + 2\vec{w} \times \vec{v}_r$$

Angolo Noto di Precessione



$$\vec{w} = \dot{\psi} \hat{e}_1 + \dot{\phi} \hat{e}_3$$

Ritornando che  $\hat{e}_3 = \tilde{e}_3 = -\sin\theta \tilde{e}_2 + \cos\theta \tilde{e}_3$

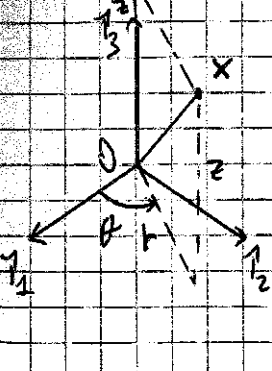
e che  $\tilde{e}_2 = -\sin\psi \hat{e}_1 + \cos\psi \hat{e}_2$  e  $\tilde{e}_3 = \hat{e}_3$

$$\text{si ottiene } \vec{w} = \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \hat{e}_1 + \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi \hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \hat{e}_3$$

Teorema derivata di un vettore rispetto a due osservatori  
 la derivata temporale  $\dot{\vec{c}}$  calcolata dall'osservatore fisso è legata  
 alla derivata temporale  $\bar{\dot{\vec{c}}}$  calcolata dall'osservatore mobile  
 dalla relazione:  $\dot{\vec{c}} = \bar{\dot{\vec{c}}} + \vec{w} \times \bar{\vec{c}}$

Corollario la derivata rispetto al tempo della velocità angolare  
 dell'osservatore mobile è lo stesso sia rispetto all'osservatore fisso  
 che all'osservatore mobile:  $\|\dot{\vec{w}}\| = \dot{w}$

ESERCIZIO



Dato il punto  $x$  in coordinate cartesiane, ottenere in coordinate  
 cilindriche posizione di  $x$ ,  $\vec{v}_x$  e  $\bar{\vec{v}}_x$

COORD. CARTESIANE  $\Rightarrow$  COORD. CILINDRICHE

$$\begin{cases} x_1 = r \cos\theta \hat{e}_1 \\ x_2 = r \sin\theta \hat{e}_2 \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_x &= (r, \theta, z) \\ r &\in [0, +\infty) \\ \theta &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Si determina il Jacobiano:

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dr} & \frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dx_1}{dz} \\ \frac{dx_2}{dr} & \frac{dx_2}{d\theta} & \frac{dx_2}{dz} \\ \frac{dx_3}{dr} & \frac{dx_3}{d\theta} & \frac{dx_3}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2\theta + r \sin^2\theta = r$$

Vettori del sistema di coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r \cos\theta, r \sin\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos\theta, r \sin\theta, z) = (-r \sin\theta, r \cos\theta, 0) = -\sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2 \end{aligned}$$

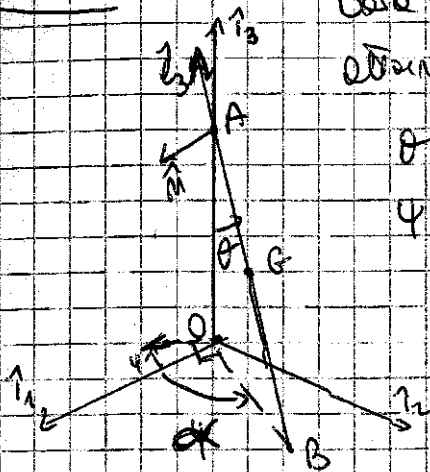
Poi si ottiene  $\vec{\omega} \cdot \vec{1}_3 = 0 = (\dot{\psi} \vec{1}_3 + \dot{\phi} \vec{e}_3) \cdot \vec{1}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \alpha = 0$

Si ottiene  $\dot{\psi} = -\dot{\phi} \sin \alpha$

Sostituendo si ottiene  $\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \alpha \vec{1}_3 + \dot{\phi} \vec{e}_3 = \dot{\phi} (-\sin \alpha \vec{1}_3 + \vec{e}_3)$

Ritornando che  $\vec{e}_3 = \vec{e}_3 = -\sin \theta \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 = \sin \theta \cos \psi \vec{1}_1 - \sin \theta \sin \psi \vec{1}_2 + \cos \theta \vec{1}_3$   
 e che  $\vec{e}_2 = -\sin \psi \vec{1}_1 + \cos \psi \vec{1}_2$  e  $\vec{e}_3 = \vec{1}_3$

ESERCIZIO



Dato una sbarra AB e un suo punto A e un suo vettore  $\vec{m}$ . Trovare  $\vec{v}(A)$  dati  $\theta$  e  $\psi$ .

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos \theta \geq 0$   $AB = l$   
 $\psi \in [0, 2\pi)$

Riferendosi agli angoli di Eulero  $(\psi, \theta, \phi)$  e alla legge di composizione delle velocità angolari si ha  
 $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{1}_3 + \dot{\theta} \vec{m} + \dot{\phi} \vec{e}_3$  Essendo la sbarra in A  $\Rightarrow \dot{\phi} = 0$

Poi si ottiene  $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{1}_3 + \dot{\theta} \vec{m}$

Si consideri il moto di mezzo rigido per la sbarra:

$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \times \vec{AB}$

Detta  $z$  la proiezione di A rispetto al piano  $1, 2$  si ha  $z = l \cos \theta$  e  $\vec{z} = -\dot{\theta} l \sin \theta \vec{1}_3$

Poi si deduce  $\vec{v}(A) = \vec{z} \vec{1}_3 = -\dot{\theta} l \sin \theta \vec{1}_3$

Si ottiene l'espressione per  $\vec{v}(B)$ :

$\vec{v}(B) = -\dot{\theta} l \sin \theta \vec{1}_3 + (\dot{\psi} \vec{1}_3 + \dot{\theta} \vec{m}) \times (-\frac{l}{2} \vec{e}_3) =$   
 $= -\dot{\theta} l \sin \theta \vec{1}_3 + \dot{\psi} \frac{l}{2} \vec{m} - \dot{\theta} \frac{l}{2} (\vec{m} \times \vec{e}_3)$

$\vec{m} = \vec{1}_3 \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{1}_1 & \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{vmatrix} = \sin \theta \cos \psi \vec{1}_1 - \sin \theta \sin \psi \vec{1}_2 + \cos \theta \vec{1}_3$

Ritornando che  $\vec{m} = \cos \psi \vec{1}_1 + \sin \psi \vec{1}_2$

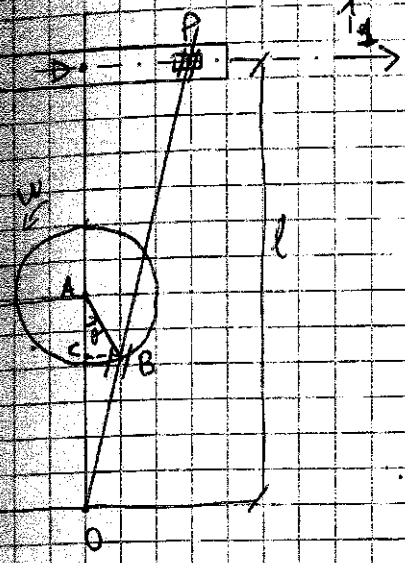
e che  $\vec{e}_3 = \vec{e}_3 = -\sin \theta \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 = \sin \theta \cos \psi \vec{1}_1 - \sin \theta \sin \psi \vec{1}_2 + \cos \theta \vec{1}_3$

e che  $\vec{e}_2 = -\sin \psi \vec{1}_1 + \cos \psi \vec{1}_2$  e  $\vec{e}_3 = \vec{1}_3$

Si calcola  $\vec{m} \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{1}_1 & \vec{1}_2 & \vec{1}_3 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{vmatrix} = (\sin \psi \cos \theta) \vec{1}_1 - (\cos \psi \cos \theta) \vec{1}_2 - (\sin \theta \cos \psi) \vec{1}_3$

$\vec{v}(B) = -\dot{\theta} l \sin \theta \vec{1}_3 - \frac{\dot{\psi} l}{2} \sin \theta \cos \psi \vec{1}_1 - \frac{\dot{\psi} l}{2} \sin \theta \sin \psi \vec{1}_2 - \dot{\theta} \frac{l}{2} \sin \psi \cos \theta \vec{1}_1 + \dot{\theta} \frac{l}{2} \cos \psi \cos \theta \vec{1}_2 + \dot{\theta} \frac{l}{2} \sin \theta \cos \theta \vec{1}_3$

esercizio



è dato un sistema composto da una fune  
 orizzontale sulla quale può scorrere il punto  
 P lungo l'asse  $x_1$ . Il punto P è collegato  
 ad una sfera il cui estremo O è vincolato  
 ed è in movimento attorno ad O. Infine  
 la sfera è collegata in B ad una ruota  
 che gira di velocità costante attorno ad A.  
 Dette  $l$  la distanza  $\overline{PO}$  e  $d$  la distanza  $\overline{AO}$ ,  
 trovare l'espressione di  $P$ ,  $v_p$  e  $\dot{p}$ .

Il moto della ruota è C.I.  $\left. \begin{aligned} \omega = \omega_0 t \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t \\ \theta(0) = 0 \end{aligned} \right\}$

Sfruttando la geometria del problema si può scrivere

$$\frac{|P-O|}{|B-O|} = \frac{|O-A|}{|C-O|} \quad \text{invece tempi simili}$$

da cui  $x = |P-O| = \frac{l|B-O|}{|C-O|}$

Si trovano i vettori liberi in fun. di  $\theta$ :

$$\begin{aligned} |B-O| &= R \sin \theta \\ |C-O| &= |A-O| - |A-C| = d - R \cos \theta \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{l R \sin \theta}{d - R \cos \theta} \quad \begin{array}{l} \text{posizione di P} \\ \frac{l R \sin(\omega_0 t)}{d - R \cos(\omega_0 t)} \end{array}$$

Velocità di P si trova derivando

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{l R \sin(\omega_0 t)}{d - R \cos(\omega_0 t)} = \frac{[l R \omega_0 \cos(\omega_0 t)] [d - R \cos(\omega_0 t)] - (l R \sin(\omega_0 t)) [R \sin(\omega_0 t)]}{(d - R \cos(\omega_0 t))^2}$$

$$= \frac{l R \omega_0 d \cos(\omega_0 t) - l R^2 \cos^2(\omega_0 t) - l R^2 \sin^2(\omega_0 t)}{(d - R \cos(\omega_0 t))^2} = \frac{l R \omega_0 d \cos(\omega_0 t) - l R^2}{(d - R \cos(\omega_0 t))^2}$$

$$= \frac{l R \omega_0 [d \cos(\omega_0 t) - R]}{(d - R \cos(\omega_0 t))^2}$$

$$\dot{p} = \frac{dv_p}{dt} = - \frac{[l R \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)] [d - R \cos(\omega_0 t)]^2 - [l R \omega_0 d \cos(\omega_0 t) - l R^2] [2 R \omega_0 \sin(\omega_0 t)]}{(d - R \cos(\omega_0 t))^3}$$

$$= - \frac{l R \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) [d^2 - 2 R d \cos(\omega_0 t) + 2 R^2 \cos(\omega_0 t) - 2 R^2]}{(d - R \cos(\omega_0 t))^3} = \frac{- l R \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) [d^2 - 2 R^2 + 2 R d \cos(\omega_0 t)]}{(d - R \cos(\omega_0 t))^3}$$

## SISTEMI VINCOLATI

VINCOLO: Restrizione o limitazione sulle possibilità di moto di punti materiali e corpi rigidi del sistema.

① Vincoli di POSIZIONE o olonomi (esterni e interni, fissi e mobili, unilaterali e bilaterali): sono restinzioni o limitazioni imposte alle posizioni di punti.

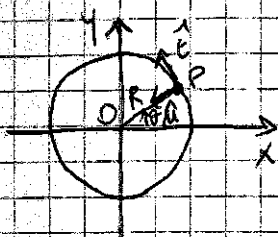
② SISTEMI di COORDINATE LIBERE: sono le parametrizzazioni, localizzate,  $N$ -uple di numeri reali, delle configurazioni del sistema.

③ ATI di VELOCITÀ VIRTUALI, cioè variabili con i vincoli fissi, ad un dato istante.

④ SPOSTAMENTI VIRTUALI: spostamenti infinitesimi, quelli esplicitamente compatibili.

### PUNTO SU UNA GUIDA CIRCOLARE FISSA

2 COORD. LIBERE



Consideriamo un punto  $P$  vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $O$ . Sello un opportuno sistema di coord. la restinzione che il vincolo impone ad ultima posizione  $\vec{OP}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  è descritta dalle relazioni:

Vincolo  $\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{array} \right.$  È conveniente porre ora alle coordinate polar:

$$\vec{OP}(t) = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

Definire posizione di  $P$ : - Senza vincolo 3 parametri:  $(x, y, z)$   
 - Con vincolo 1 parametro  $(\theta)$

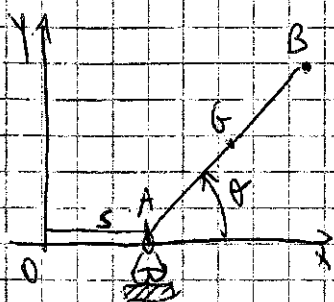
$$\vec{v}_P(t) = -R\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + R\dot{\theta} \cos \theta \hat{j} = R\dot{\theta} \hat{e} \quad \text{dove } \hat{e} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{a}_P(t) = (-R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta) \hat{i} + (R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) \hat{j} = R\ddot{\theta} \hat{e} + R\dot{\theta}^2 \hat{n} \quad \text{dove } \hat{n} = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$$

Questo vincolo è localmente espresso nelle condizioni  $\vec{v} \cdot \hat{n} = 0$   
 $(\dot{P}(t) \cdot \hat{n}) = 0$

### ASTA CON ESTREMO VINCOLATO SU GUIDA FISSA

2 COORD. LIBERE



VINCOLO CARRELLI: un punto di un corpo rigido è vincolato a muoversi lungo una guida fissa mentre il corpo stesso resta libero di muoversi intorno ad esso, nel piano direttore del moto.

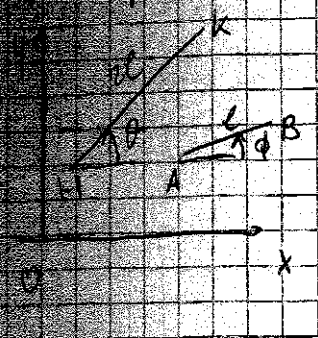
VINCOLATE IN UN SISTEMA BIELLA-MANOVELLA

GIUNTE: vincolo per sistemi piani utile nato per impedire ad un corpo di muoversi oppure lo si vuole far coincidere con un altro, vincolo per la possibilità di rotore intorno ad esso

Giunte fisse  $\rightarrow$  vincoli esterni; Giunte mobili  $\rightarrow$  vincoli interni al sistema

Il sistema biella-manovella, costituito da 2 giunte e un cuneo, permette di trasformare un movimento rotatorio in un moto rettilineo e viceversa

Se consideriamo, in assenza di vincoli, 2 aste rigide  $HK$  e  $AB$  di lunghezza  $2l$  e  $l$ , a non distrette e muovibili di moto piano, il sistema è descritto genericamente da 6 parametri:



$$\left. \begin{aligned} & (x_A, y_A, \phi) \\ & (x_H, y_H, \theta) \end{aligned} \right\} \text{6 gradi di libertà}$$

Il vincolo che i vincoli permettono il sistema un sistema biella-manovella

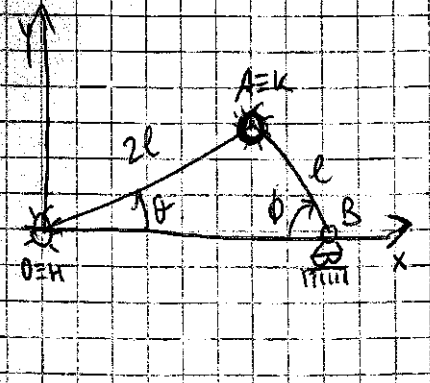
$\rightarrow$  Giunzione  $H$  in  $O \Rightarrow H \equiv O \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_H = 0 \\ y_H = 0 \end{aligned} \right\} \text{2 vincoli ESTERNO}$

$\rightarrow$  Giunzione  $A$  e  $K \Rightarrow A \equiv K \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_A = x_K \\ y_A = y_K \end{aligned} \right\} \text{2 vincoli INTERNO}$

$\rightarrow$  Il cuneo in cuneo in  $B \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow \text{1 vincolo ESTERNO}$

Si ottiene:

1 vincolo interno forniscono 5 relazioni:



$$\left. \begin{aligned} x_H = 0 \\ y_H = 0 \\ x_A - 2l \cos \theta = 0 \\ y_A - 2l \sin \theta = 0 \\ y_B = 0 \end{aligned} \right\} \text{5 relazioni}$$

$y_A = l \sin \phi = 0$   
 $\uparrow$   
Giunzione A-K

Il sistema di 5 equazioni, in generale non lineari, fra i 6 parametri soppresse la possibilità di esprimere 5 di essi in funzione esplicita del rimanente

La relazione  $2l \sin \theta = l \sin \phi \Rightarrow \theta = \arcsin(\frac{1}{2} \sin \phi)$   $\phi \in [0, 2\pi]$

E l'intero n° loro esprime tutto in fz. di solo  $\phi$  mentre  $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

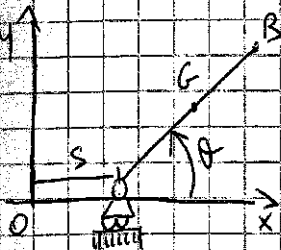
# VINCOLI UNILATERI

VELOCITÀ (O SPOSTAMENTO) VIRTUALE  $\rightarrow$  REVERSIBILE: se ammette l'opposto virtuale  
 $\rightarrow$  IRREVERSIBILE: è una configurazione in cui l'opposto NON è virtuale.

VINCOLI UNILATERI: Sistemi per i quali è configurazioni che ammettono velocità o spostamenti virtuali non reversibili. Le configurazioni per cui questo avviene si dicono di confine o di frontiera.

VINCOLI BILATERI: Se in tutte le configurazioni ogni velocità (o spostamento) virtuale è reversibile.

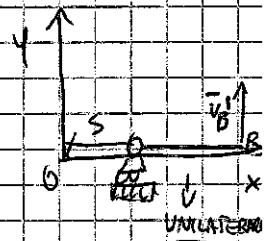
## ESEMPIO



Se impongo che l'estremità non possa superare l'asse x  
 allora vincolo  $AB \cdot \sin \theta \geq 0$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Configurazioni di frontiera



Nelle configurazioni di frontiera non si hanno opposti  
 di velocità virtuali  $\Rightarrow$  vincolo è UNILATERO

## ATI DI HARD E SPOSTAMENTI RIGIDI VIRTUALI

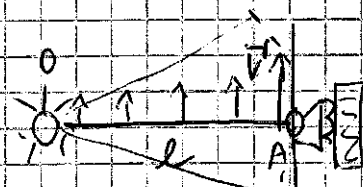
Per esprimere l'insieme delle velocità virtuali vale:

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(Q) + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

velocità virtuali compatibili con il vincolo

dove  $\vec{V}(Q)$  e  $\vec{\omega}$  in presenza di altri vincoli sono da considerarsi vettori arbitrari

### ESEMPIO



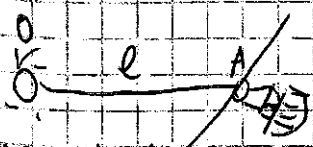
Le velocità e lo spostamento virtuale non sono nulli in questo caso la velocità  $\vec{V}(P)$  è // alla guida e quindi compatibile col vincolo!

Non vincolo, nessuna condizione libera

$$\vec{V}(P) = \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

essendo  $\vec{V}(O) = 0$

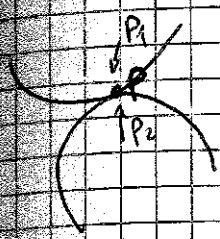
[un altro di movimento virtuale possibile]



$\rightarrow$  In questo caso  $\vec{V}(A) = 0$ . Non vi è nessuna velocità virtuale compatibile con il vincolo! [compatibilità allungamento]

# CAI DI PURO ROTOLAMENTO E DI CONTATTO

Modello di puro rotolamento o di rotolamento senza strisciamento:

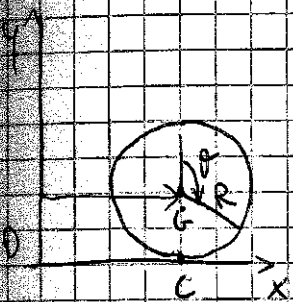


Impulsi:  $P_1 \equiv P \equiv P_2$   
 $v_1 = v_2$  in P

Modello di contatto: fa sì che le 2 superfici rimangano a contatto, annullando lo strisciamento.

Impulsi  $v_1 \cdot \vec{n} = v_2 \cdot \vec{n}$  ovvero che le velocità dei punti P1 e P2 abbiano uguale componente nelle direzioni delle superfici stesse.  
 $P_1 \equiv P \equiv P_2$

Esempio Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea fissa.



Vincolo  $y_G = R \Rightarrow y_G - R = 0$   
 è anolonomo  $v_C = 0$  è anolonomo  
 Attenzione: si usa coordinate polari a mano.  
 $\vec{v}_G = \dot{x} \hat{i}$      $\vec{\omega} = -\dot{\theta} \hat{k}$      $\vec{GC} = -R \hat{j}$

Si ottiene  $\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{GC} = \dot{x} \hat{i} + (-\dot{\theta} \hat{k} \times -R \hat{j}) = \dot{x} \hat{i} - \dot{\theta} R \hat{i} = (\dot{x} - \dot{\theta} R) \hat{i}$

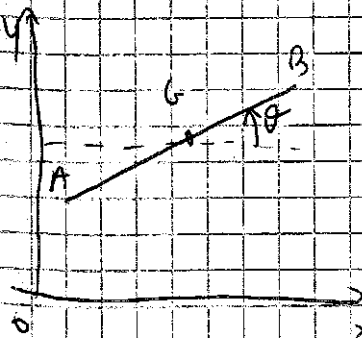
Si impone dunque il vincolo  $v_C = 0 \Rightarrow (\dot{x} - \dot{\theta} R) \hat{i} = 0$

$\dot{x} - \dot{\theta} R = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{\theta} R$

integrando la differenziale  $\int dx = \int \dot{\theta} R dt \Rightarrow x(t) = \theta R + x_0$

è un vincolo di cinematica (o cinetica) equivalente ad un vincolo olonomo.

## Esempio Vincolo Anolonomo



Un'asta di lunghezza l è libera di muoversi nel piano rispetto al solo vincolo che il punto medio G abbia velocità in ogni istante parallela ad esse, dimostrare l'anolomia del vincolo.

$\vec{v}_G = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j}$

$\vec{AB} = l \cos \theta \hat{i} + l \sin \theta \hat{j}$

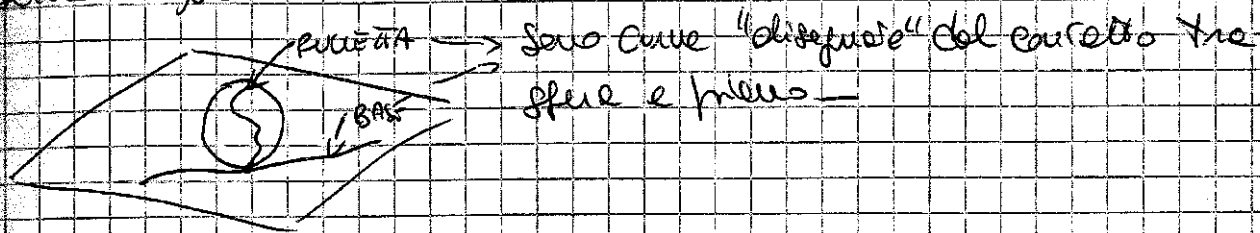
$\vec{v}_G \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ l \cos \theta & l \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = (\dot{x} l \sin \theta - \dot{y} l \cos \theta) \hat{k}$



Tipi di moti cinematici.

BASE E RULLETTA

In ogni moto piano di un corpo rigido è possibile determinare due curve, una fissa e una solidale al corpo, tali che durante il moto la seconda detta rullotta, rotoli senza strisciare sulla prima, detta base del moto. Base e rullotta sono definite come le curve tracciate dalla posizione del punto di istantanea rotazione, rispettivamente, nel mano fisso dell'osservatore fisso e nel mano solidale dell'osservatore mobile.



GEOMETRIA DELLE MASSE

Ogni punto materiale è caratterizzato da una posizione positiva, detta massa, che determina la sua risposta dinamica alle sollecitazioni che su di esso vengono applicate. Nel caso di sistemi estesi, la massa si distribuisce lungo tutta la regione occupata dal corpo. Per questo di massa  $\rho$  si intende una funzione sufficientemente regolare, che in generale dipende dalla posizione. Dato un corpo  $B \in \mathbb{R}^3$  è possibile esprimere la sua massa come:

$$M = \int_B \rho(P) dV$$

Il punto  $dV$  rappresenta un elemento

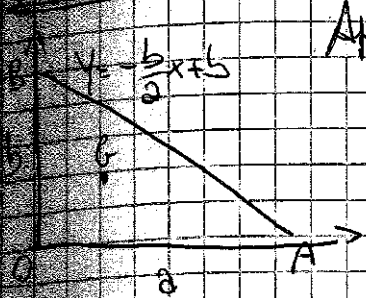
infinitesimo di volume per i corpi 3D, di superficie per i 2D, di linea per quelli lineari. Se  $\rho = \text{cost}$  il corpo si definisce omogeneo.

BARICENTRO

Il baricentro  $G$  di un corpo discreto, costituito da  $n$  punti materiali di massa  $m_i$  e rispettivamente, moltiplicati dai vettori  $\vec{OP}_i$  e diviso da

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OP}_i$$

Esercizio Trovare il baricentro del triangolo,  $\rho = 685$



Applicando la definizione si ha:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D \rho x \, dx \, dy = \frac{\rho}{\rho \frac{ab}{2}} \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} x \, dx \, dy = \frac{2}{\rho \frac{ab}{2}} \int_0^a \left[ -\frac{1}{2}x^2 + bx \right]_0^{-\frac{b}{a}x+b} dx$$

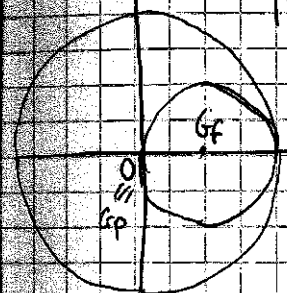
$$= \frac{2}{\rho \frac{ab}{2}} \left[ -\frac{1}{6} \left( -\frac{b}{a}x + b \right)^3 + \frac{1}{2} b \left( -\frac{b}{a}x + b \right)^2 \right]_0^a = \frac{2}{\rho \frac{ab}{2}} \left( -\frac{1}{6} \frac{b^3}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{a^2} \right) = \frac{2}{\rho \frac{ab}{2}} \left( \frac{1}{6} \frac{b^3}{a^3} \right)$$

$$= \frac{a}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_D \rho y \, dx \, dy = \frac{2}{\rho b} \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} y \, dx \, dy = \frac{1}{\rho b} \int_0^a \left[ \frac{1}{2} y^2 - \frac{b}{a} y^2 + \frac{b^2}{2} y \right]_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy$$

$$= \frac{1}{\rho b} \left[ \frac{b^2}{3a^2} \left( -\frac{b}{a}x + b \right)^3 - \frac{b^2}{2} \left( -\frac{b}{a}x + b \right)^2 + \frac{b^3}{2} \left( -\frac{b}{a}x + b \right) \right]_0^a = \frac{1}{\rho b} \left[ \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^2} \right] = \frac{b}{3}$$

Esercizio Determinare la posizione del baricentro di una lamina piana omogenea circolare di raggio R nella quale sia stato praticato un foro circolare, di raggio  $\frac{R}{2}$



lamina piena ( $G_p, M_p$ ) lamina foro ( $G_f, M_f$ )  
 È possibile sfruttare la composizione di baricentri:

$$x_{G_{pieno}} = \frac{1}{M} (M_p x_{G_p} + M_f x_{G_f}) = 0$$

$$M_p = \rho \pi R^2$$

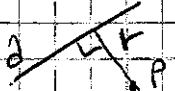
$$M_f = \rho \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$M = \frac{3}{4} \rho \pi R^2$$

$$x_{G_p} = \frac{M x_{G_{pieno}} - M_f x_{G_f}}{M} = \frac{0 - \frac{\rho \pi R^2}{4} \frac{R}{2}}{\frac{3}{4} \rho \pi R^2} = -\frac{R}{6}$$

MOMENTI DI INERZIA

Si definisce momento d'inerzia di un punto materiale di massa m, rispetto ad un asse z, lo scalare  $I_z = m r^2$ , dove r è la dist. del punto dall'asse.



Per un sistema materiale B è definito  $I_z = \int_B \rho r^2 \, dz$

È detto raggio di gyration  $d_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$  e rappresenta la distanza dalla z per la quale si deve passare una massa M per ottenere il medesimo momento d'inerzia del sistema.  $\Rightarrow I_z = M d_z^2$

massimo.

Inoltre dati due assi  $d_1, d_2$  paralleli e distanti  $a_1, a_2$  dall'asse passante per il baricentro del corpo si ha:

$$I_{d_1} = I_{d_2} + M(d_1^2 - d_2^2)$$

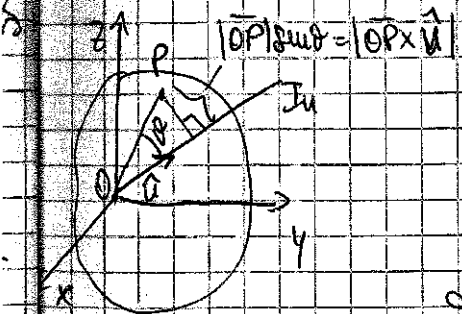
M, distanza rispetto a  $d_1$       M, distanza rispetto a  $d_2$       differenza tra i due assi.

MOMENTI D'INERZIA RISPETTO AD ASSI CONCORRENTI

Per studiare come varia il momento d'inerzia di un sistema materiale rispetto ad un'asse di direzione costante ricordare che gli assi che appartengono alle stelle di rette baricentriche in un piano  $O$  dello spazio tridimensionale, sono in corrispondenza biunivoca con i vettori  $\hat{u}$  che descrivono la sfera unitaria con centro in  $O$ . Si indicherà  $I_u$  il momento d'inerzia di un dato corpo relativo alle rette passanti per  $O$  e //  $\hat{u}$ .

La distanza  $r$  del generico punto  $P$  (elemento del corpo) dall'asse unitario  $\hat{u}$  dal vettore  $\hat{u}$  è esprimibile come:

$$r = |\overline{OP}| \sin \theta = |\overline{OP} \times \hat{u}|$$



Per calcolare il prodotto vettoriale si introduce un sistema di riferimento in cui vale:

$$\overline{OP} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 \quad \hat{u} = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \gamma\hat{e}_3$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori e  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Si ottiene

$$\overline{OP} \times \hat{u} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma z - z\beta)\hat{e}_1 + (z\alpha - x\gamma)\hat{e}_2 + (x\beta - y\alpha)\hat{e}_3$$

Si calcola il momento d'inerzia:

$$I_u = \int_B \rho [(y\gamma - z\beta)^2 + (z\alpha - x\gamma)^2 + (x\beta - y\alpha)^2] dV = \int_B \rho [(\alpha^2 z^2 + \beta^2 y^2) + (\gamma^2 x^2 + \alpha^2 z^2) + (\beta^2 x^2 + \gamma^2 y^2)] dV$$

$$= \alpha^2 \int_B \rho (z^2 + y^2) dV + \beta^2 \int_B \rho (x^2 + z^2) dV + \gamma^2 \int_B \rho (x^2 + y^2) dV +$$

$$- 2\beta\gamma \int_B \rho yz dV - 2\alpha\gamma \int_B \rho xz dV - 2\alpha\beta \int_B \rho xy dV$$

← Momenti d'inerzia rispetto agli assi concorrenti  
 ← Problemi di inerzia

rispettivi autovalori  $I_i$ ; Sono i momenti principali di massa rispetto ad  $O$ . Se la matrice d'inerzia che i suoi assi e momenti principali sono centrali se sono calcolati rispetto al baricentro.

Definizione GYROSCOPIO: Un corpo a due gradi di libertà può essere considerato un giroscopio quando 2 dei momenti principali centrali d'inerzia coincidono:  $I_{G1} = I_{G2}$  l'asse  $e_3$  è detto asse giroscopico.

ESERCIZIO DELLE ASSE PRINCIPALI

Un approccio a  $I_O$  è sufficiente trovare gli autovalori

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

e si trovano  $I_1, I_2, I_3$  ovvero i momenti principali d'inerzia.

Sarebbe dunque possibile scrivere la forma quadratiche in forma canonica

$$I_1 \xi^2 + I_2 \eta^2 + I_3 \rho^2 = 1$$

dove  $\xi, \eta, \rho$  sono gli assi principali di inerzia.

Invece è altrettanto possibile scrivere  $I_u$  in funzione delle  $I$  canoniche:

$$I_u = I_1 \alpha^2 + I_2 \beta^2 + I_3 \gamma^2$$

PROPRITÀ: Tra tutti gli assi appartenenti alla stessa dritta passante per un dato punto, quelli che possiedono il momento principale d'inerzia rispettivamente massimo e minimo sono 2 degli assi principali.

ESERCIZIO Si richiama  $I_u = I_1 \alpha^2 + I_2 \beta^2 + I_3 \gamma^2$  ricordando che  $\hat{u} = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3$  e  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

Se si suppone  $I_1 \leq I_2 \leq I_3$  (senza perdere generalità)  $\Rightarrow$  deve essere che  $I_u$  è f.t. limitata e continua, definita su dominio compatto.

Ne deve pertanto che essa assume tutti i valori tra il minimo  $I_1$  e il massimo  $I_3$  [sufficentemente per cui  $\alpha = \pm 1, \beta = \gamma = 0$  e  $\alpha = \beta = 0, \gamma = \pm 1$ ].

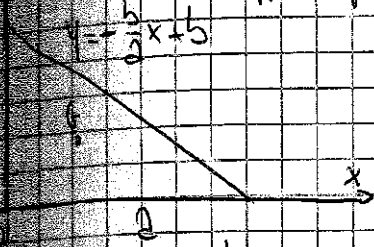
SISTEMI PIANI

Nel caso di corpi piani è conveniente scegliere il modo della forma come piano condizionale (per esempio  $xy$ ). In questo modo il momento

$$I_x = I_{x_0} + md^2 \Rightarrow I_{x_0} = I_x - md^2 = \frac{3}{20} \mu a^2 + \frac{\mu a^4}{10} - \frac{\mu a^2}{16} = \frac{3}{80} \mu (4a^2 + a^2)$$

Da cui per simmetria  $I_{x_0} = I_{y_0}$ .

Determinare la terza principale d'inerzia e i relativi momenti principali rispetto all'origine O.



$$\mu = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \rho dy dx = \rho \int_0^a \left( -\frac{b}{2a} a^2 + ab \right) dx = \frac{1}{2} \rho ab \quad \rho = \frac{2\mu}{ab}$$

$$I_z = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \rho (x^2 + y^2) dy dx = \rho \int_0^a \left[ x^2 \left( -\frac{b}{2a}x + b \right) + \frac{1}{3} \left( -\frac{b}{2a}x + b \right)^3 \right] dx$$

$$I_z = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \rho y^2 dy dx = \rho \int_0^a \frac{1}{3} \left( -\frac{b}{2a}x + b \right)^3 dx \Rightarrow t = -\frac{b}{2a}x + b \Rightarrow dx = -\frac{2}{b} dt \Rightarrow \rho \int_b^0 \frac{t^3}{3} \left( -\frac{2}{b} \right) dt =$$

$$= \frac{\rho 2}{3b} \int_0^b t^3 dt = \frac{\rho 2}{3b} \left( \frac{b^4}{4} \right) = \frac{2\mu}{3b} \frac{b^4}{4} = \frac{\mu b^2}{6}$$

$$I_y = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \rho x^2 dy dx = \rho \int_0^a \left( -\frac{b}{2a}x^3 + bx^2 \right) dx = \rho \left( -\frac{b}{4a} a^4 + \frac{b}{3} a^3 \right) = \frac{\mu b a^2}{6} = \frac{\mu a^2}{6}$$

$$I_{xy} = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \rho xy dy dx = \rho \int_0^a \left( \frac{b^2}{2} x^2 - \frac{b^2}{2} x + \frac{b^2}{2} \right) dx = \rho \left( \frac{b^2}{2} \frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{2} \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} a \right) = \frac{1}{12} \frac{b^2 a^2}{2} \frac{2\mu}{ab} = \frac{\mu a b}{12}$$

Essendo un sistema piano  $I_z = I_x + I_y = \frac{\mu}{6} (a^2 + b^2)$  e  $I_{xz} = I_{yz} = 0$

A trovarlo i momenti principali d'inerzia

$$I_3 = I_z$$

$$I_1 = \frac{1}{2} (I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu a^2}{6} + \frac{\mu b^2}{6} - \sqrt{\left( \frac{\mu a^2}{6} - \frac{\mu b^2}{6} \right)^2 + 4 \frac{\mu^2 a^2 b^2}{144}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{6} (a^2 + b^2) - \sqrt{\frac{\mu^2}{36} (a^2 - b^2)^2 + \frac{\mu^2 a^2 b^2}{36}} \right) = \frac{\mu}{12} \left( a^2 + b^2 - \sqrt{b^4 - 2a^2 b^2 + a^4 + 2a^2 b^2} \right)$$

$$I_2 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2 + \sqrt{b^4 - 2a^2 b^2 + a^4 + 2a^2 b^2})$$

La direzione degli assi principali è data da

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\frac{2}{12} \mu a b}{\frac{\mu}{6} (a^2 - b^2)} = \frac{1}{2} \arctan \frac{ab}{b^2 - a^2}$$

## LAVORO, POTENZIALE

→ Costanti (nel tempo e nello spazio)

→ posizionali:  $\vec{F} = \vec{F}(P)$


→ dipendenza dalla velocità:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$

→ dipendenza dal tempo:  $\vec{F} = \vec{F}(t)$

→ Attive: campo di forze esplicitamente da  $P, \vec{v}, t \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$

## LEGGI DI FORZE

LEGGI DI APPLICAZIONE: Dato un vettore applicato  $(P, \vec{f})$  si definisce retta di azione che passa per  $P$  e  $\parallel \vec{f}$ .

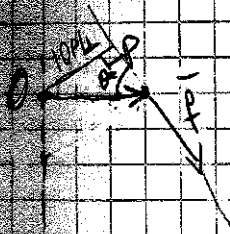
VECTORE CONCORRENTI: Due vettori applicati  $\vec{f}_1$  e  $\vec{f}_2$  concorrenti in un punto  $Q$  hanno una retta di applicazione  $\vec{r}$  risultante in  $Q$ .   $\vec{r}$  vettore di applicazione

SISTEMA PIANO: Un sistema di vettori applicati  $S = \{(P_i, \vec{f}_i), i=1, \dots, n\}$  in un piano pendo  $P_i \in \pi \perp \hat{e}_3$  e  $\vec{f}_i \perp \hat{e}_3 \forall i$ .

## MOMENTO DI UNA FORZA

Si è definito momento di un vettore applicato  $(P, \vec{f})$  rispetto al polo  $O$ , il vettore

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{f} \quad [\text{MOMENTO DI UN VETTORE } \vec{f}]$$



$$M_O = |\vec{OP}| \cdot |\vec{f}| = |\vec{OP}| \cdot |\vec{f}| \sin \theta = b \cdot |\vec{f}|$$

Braccio  $b = |\vec{OP}| \sin \theta = |\vec{OP}| \sin \theta$  ossia la distanza della retta di applicazione di  $\vec{f}$  dal polo  $O$ .

Proprietà: - il momento di un vettore applicato dipende dal polo rispetto al quale si calcola:  $\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{f} = (\vec{QO} + \vec{OP}) \times \vec{f} = (\vec{QO} \times \vec{f}) + \vec{M}_O$   
- il momento non cambia se il vettore è applicato su un qualsiasi altro punto e alla sua retta di applicazione.

def. risultante, momento risultante: Dato un sistema di vettori applicati

$S = \{(P_i, \vec{f}_i), i=1, \dots, n\}$  si definisce il risultante del sistema,  $\vec{R}$ , e il momento risultante rispetto al polo  $O$ ,  $\vec{M}_O$ , come:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \quad [\text{RISULTANTE}]$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \times \vec{f}_i \quad [\text{MOMENTO RISULTANTE}]$$

Due sistemi equivalenti rispetto ad un polo  $O$ , lo sono anche rispetto ad qualunque altro polo  $Q$ .  $\vec{R}_Q = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O = \vec{M}_Q$

In un sistema  $S$ , le seguenti questioni elementari forniscono sempre un sistema equivalente:

1) traslazione di un vettore lungo la sua retta di applicazione

$$(\vec{P}, \vec{F}) \rightarrow (\vec{P} + \lambda \vec{F}, \vec{F}) \quad \text{in quanto} \quad \vec{OP} \times \vec{F} = (\vec{OP} + \lambda \vec{F}) \times \vec{F}$$

2) sostituzione di vettori applicati nello stesso punto  $P$  con il loro risultante, applicato nel comune punto di applicazione.

$$\sum_{i=1}^m \vec{OP} \times \vec{F}_i = \vec{OP} \times \left( \sum_{i=1}^m \vec{F}_i \right) = \vec{OP} \times \vec{R}$$

3) Aggiunta o sottrazione di una coppia di momento nullo.

4) Sostituzione di vettori concorrenti con il loro risultante, applicato nel punto di intersezione della retta.

Teoremi (di riduzione dei sistemi): Siano  $\vec{R}_S$  e  $\vec{M}_S$  i vettori caratteristici del sistema  $S$  e sia  $I_S = \vec{R}_S \cdot \vec{M}_S$ , allora:

1)  $\vec{R}_S = \vec{0}, \vec{M}_S = \vec{0} \Rightarrow S$  equivalente al sistema nullo

2)  $\vec{R}_S = \vec{0}, \vec{M}_S \neq \vec{0} \Rightarrow S$  equivalente ad una coppia

3)  $\vec{R}_S \neq \vec{0}, I_S = 0 \Rightarrow S$  equivalente ad un sistema composto da un solo vettore  $\vec{R}_S$  applicato in un punto della retta di applicazione del risultante.

4)  $\vec{R}_S = \vec{0}, I_S \neq 0 \Rightarrow S$  equivalente ad un sistema composto da un vettore  $\vec{R}_S$  più una coppia.

### LAVORO ELEMENTARE

$\vec{F}$  con valore in un punto  $P$  mobile sottoposto all'azione di una forza  $\vec{F}$  nello intervallo di tempo  $[t, t+dt]$  e se  $dP$  è corrispondente spostamento elementare.  $\delta$  definisce lavoro elementare lo scalare:  $\boxed{\delta L = \vec{F} \cdot dP}$

Scritto in componenti:  $\delta L = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  essendo  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

percorso il lavoro è una particolare forma differenziale.

Si consideri una generica forma:  $df = y_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + y_m(x_1, \dots, x_n) dx_m$

invarianti, il lavoro dipenderà anche dalla particolare traiettoria  
 che non è univoca e finale. In generale per una forza  $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$   
 dipenderà anche dalla legge oraria, o anche dalla traiettoria.

E POTENZA

Se  $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$  e si conosce la legge del moto  $P(t)$ .  
 Conoscendo  $P(t)$  è possibile esprimere la  $f$ -differenziale in  
 7 variabili indipendenti, come una  $f$ -diff. in una sola

$$dL = \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \frac{dP}{dt} dt = \vec{F}(P, \vec{v}, t) \cdot \vec{v}(t) dt = \Pi(t) dt$$

dove  $\Pi = \vec{F} \cdot \vec{v}_P$  (POTENZA)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t) dt$$

Il lavoro fatto lungo un cammino è dato da

Conservazione: Per un cammino chiuso ( $P_1 \equiv P_2$ ) il lavoro, in generale, non è  
 nullo. In particolare, per una forza conservativa del tipo  $\vec{F} = -\nabla\psi(P, v)$ , con  
 $\psi(P, v) > 0$ , si ha  $\Pi(t) = -\psi v^2 \leq 0 \Rightarrow L < 0$  per ogni cammino chiuso non  
 banale.

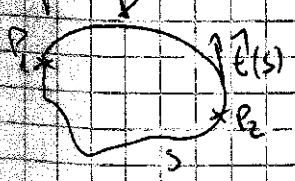
FORZE POSIZIONALI  $\vec{F} = \vec{F}(P)$

Affinché il lavoro  $dL$  sia differenziale e sotto diviso essere unipolare e  
 sufficienti condizioni necessarie:  $\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}$ ;  $\frac{dF_x}{dz} = \frac{dF_z}{dx}$ ;  $\frac{dF_y}{dz} = \frac{dF_z}{dy}$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

Se anche solo 1 condizione è falsa, sebbene la forza sia potenziale, la  
 forza fornisce un lavoro potenziale che non è un diff. esatto!

Per il calcolo del lavoro di una forza potenziale è sufficiente la sola  
 equazione della traiettoria, non occorre conoscere la legge oraria.



Dato la traiettoria  $P = P(s)$  si ha:

$$dL = \vec{F}(P(s)) \cdot \frac{dP(s)}{ds} ds = \vec{F}(P(s)) \cdot \hat{e}(s) ds = F_t(s) ds$$

Componente tangenziale

In questo caso dunque  $dL$  non è esatto  $\Rightarrow \oint dL$

Il lavoro sarà  $L = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s) ds$   $s_1, s_2$  sono le ascisse di  $P_1$  e  $P_2$ .  
 $\rightarrow$  inoltre se  $P_1 \equiv P_2$  il lavoro non è detto zero!



Però dove  $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{r}$  e  $r = |\vec{OP}|$

non è né una curva polare: una retta passante per l'origine (come  $\vec{u}$ ). Lungo tale curva  $s=r$  e  $\hat{t}=\hat{u}$ .

però  $\frac{dU}{dr} = (\psi(r)\hat{u}) \cdot \hat{u} = \psi(r)$

il potenziale (per essere):  $U(r) = \int^r \psi(\rho) d\rho$

FORZA ELASTICA

$\vec{F} = -k\vec{OP} \Rightarrow \psi(r) = -kr \Rightarrow \vec{F} = -kr\hat{u}$

$U(r) = \int -kr dr = -\frac{1}{2}kr^2 + \text{cost}$  [POTENZIALE ELASTICO]

FORZA GRAVITAZIONALE

$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{u} \Rightarrow \psi(r) = -G \frac{mM}{r^2}$

$U(r) = \int -G \frac{mM}{r^2} dr = +G \frac{mM}{r} + \text{cost}$  [POTENZIALE GRAVITAZIONALE]

ENERGIA POTENZIALE

Il potenziale meccanico di un corpo ha significato fisico di energia ed è detta ENERGIA POTENZIALE  $V = -U$

LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE

Considera un sistema di forze  $\vec{F}_i$  applicate ai punti  $P_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Il lavoro elementare del sistema sarà:  $dL = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{OP}_i$

CORPO RIGIDO

Per un corpo rigido lo spostamento elementare effettivo è  $d\vec{OP}_i = d\vec{OQ} + \vec{\omega} dt \times \vec{QP}_i$

Il lavoro elementare sarà:

$dL = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{OQ} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} dt \times \vec{QP}_i) = \vec{R} \cdot d\vec{OQ} + \sum_{i=1}^n (\vec{QP}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega} dt =$

$dL = \vec{R} \cdot d\vec{OQ} + \vec{M}_Q \cdot \vec{\omega} dt$  [LAVORO ELEMENTARE PER UN CORPO RIGIDO]

ossia dividendo per  $dt \Rightarrow \vec{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}_Q + \vec{M}_Q \cdot \vec{\omega}$  [POTENZA PER UN CORPO RIGIDO]

Il lavoro virtuale analiticamente è  $\delta L = \vec{R} \cdot \delta\vec{OQ} + \vec{M}_Q \cdot \delta\vec{\omega}$

... o di moto rettilineo uniforme.

PRINCIPIO di AZIONE e REAZIONE: III PRINCIPIO DELLA DINAMICA!

... tra coppie di punti materiali può rappresentarsi osservando che formano una coppia di braccio nullo.

... e forze che agiscono su punti materiali isolati e distinti => ... alla volta che la superficie, di centri concorrenti e ... delle loro risultanti è una costante pari all'inverso del ... delle masse dei punti stessi.

PRINCIPIO di SOvrAPPoStIone delle FORZE  $\sum_{i=1}^m \vec{F}_i = \sum_{i=1}^m m_i \vec{a}_i$

MECCANICA

... le forze sono del tipo  $\vec{F} = \vec{F}(P, v, t)$ .

... funzione è esplicitamente nota e si intende cercare la ... del moto del punto materiale, e sufficiente mostrare  $\vec{F} = m\vec{a}$

... ottenendo 3 eq. scalari del 2° ordine nella 3-dimensio ... le 6 condizioni iniziali di posizione e velocità

... della funzione, sebbene sia data l'ipotesi  $\vec{F} = \vec{F}(P, v, t)$ , ciò non è sufficiente a garantire che vi sia una e una sola soluzione, in modo che vi sia il determinismo del moto.

... è necessario che la forza  $\vec{F}$  sia compatibile con le ipotesi del Teorema di Cauchy.

TEOREMA di Cauchy

Il problema differenziale  $\ddot{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$   $x_i(t_0) = x_{i0}; \dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_{i0}$   $i = 1, \dots, n$

... almeno una soluzione in un intervallo temporale  $t_0 \leq t \leq t_1$  se le  $\varphi_i$  sono continue. Tale soluzione è unica se le  $\varphi_i$  sono

lipschitziane in un insieme di valori  $(x_i, \dot{x}_i, t)$  che comprende il dato

def: LIPSCHITZIANITA': Una fz. di più variabili  $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  è lipschitziana in una delle sue variabili (mes.  $x_1 \in [a, b]$ ) se  $\exists K$  tale che  $|f(x_1', x_2, \dots, x_m) - f(x_1'', x_2, \dots, x_m)| \leq K |x_1' - x_1''|$   $\forall x_1', x_1'' \in [a, b]$   $\forall x_2, \dots, x_m$

Moto in piano  $x, y \Rightarrow z=0$

Punto vincolato ad una circonferenza  $x^2 + y^2 = R^2(t)$  con raggio variabile nel tempo.

$$\begin{cases} x(t) = R(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = R(t) \sin \theta(t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{R}(t) \cos \theta(t) - R \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}(t) = \dot{R}(t) \sin \theta + R \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Indichiamo i versori  $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$  e  $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$

$R \hat{e}_r + R \dot{\theta} \hat{e}_\theta$  dove  $\vec{v}_e = R \dot{\theta}$  e  $\vec{v}_m = \dot{R} \hat{e}_r$

La legge del vincolo  $R=R(t) \rightarrow \vec{v}_m$  è completamente determinata.

Ma se abbiamo in piano il  $\hat{e}_\theta$  è anch'essa determinata.

Accelerazione:  $\vec{a}_p = R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{R} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{R} \ddot{\theta} \hat{e}_r + R \ddot{\theta} \hat{e}_r = R \ddot{\theta} \hat{e}_r = (\ddot{R} - R \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (2\dot{R} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$

Da questo esempio si deduce che la legge della forza attiva che agisce sull'elemento  $\vec{e}$  è in piano completamente arbitraria, mentre il vettore accelerazione deve soddisfare alle restrizioni imposte dal vincolo ovvero  $\vec{a} \in A(P, \vec{v}, t)$ .

Perché in generale  $F(P, \vec{v}, t) \in A(P, \vec{v}, t) \rightarrow$  l'eq. delle dinamiche deve essere soddisfatta introducendo un vettore che, presumendo che lo scelerò della forza attiva, permetta al vettore accelerazione di soddisfare alle restrizioni imposte dal vincolo, ovvero

$$M \vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) + \vec{\Phi} \quad [\text{EQ. FONDAMENTALE DELLA DINAMICA}]$$

Risulta possibile interpretare dal punto di vista dinamico i versori  $\vec{\Phi}$  come forze vincolari dove postulato che l'azione del vincolo esplica su un punto materiale è rappresentabile con una forza.

### IL PUNTO DI VISTA DI MACH

Un punto osservativo, sua equivalente a quello storico fittizio, è stato formulato da Mach.

Una volta definiti i sistemi inerziali Mach introduce il postulato di inerzia di Poincaré (P. di Mach in forma isolata): nel caso di ogni corpo di punto

altro in un riferimento inerziale, solo l'impulso della mossa

per un punto:  $\vec{F}_{ij} = \gamma_{ij} \hat{e}_{ji}$ ;  $\vec{F}_{ji} = \gamma_{ji} \hat{e}_{ij}$

$\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i$  Anche per la sovrapposizione degli effetti.

Il determinismo non implica prevedibilità in pieno (non è causa  
 e effetto degli effetti) (P. indeterminazione di Heisenberg)

ma la prevedibilità è persa sebbene il determinismo →  
 CAOS DETERMINISTICO

## DINAMICA

### DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

PUNTO LIBERO Per un punto libero vale  $m\vec{a} = \vec{F}(P, v, t)$   
 e l'eq. diff. è risolvibile date le C.I.  $\left. \begin{array}{l} P(t_0) = P_0 \\ \dot{v}(t_0) = v_0 \end{array} \right\}$

### INTEGRALE DELL'ENERGIA

Il caso che le forze obbediscano alla conservazione dell'energia permette un  
 integrale primo, ovvero che può essere trasformato in un'eq. diff. del 1° ordine  
 ricordando che se  $\exists U \rightarrow \vec{F} = -\nabla U$

Si moltiplica  $m\vec{a} - \vec{F} = 0$  e moltiplica separatamente per  $\vec{v}$   $\vec{v} \cdot (m\vec{a} - \vec{F}) = 0$

$$\Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} - \nabla U \cdot \vec{v} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{dU}{dt} =$$

$$= m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 - U \right)$$

Ed integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 - U = \text{cost} \quad \boxed{\text{ENERGIA MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_M = T - U = T + V}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

PUNTO VINCOLATO Per un punto vale  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi}$

Questo problema differenziale ha carattere ipercorrelato (nesso di path  
 che costruisce la dinamica del punto materiale libero. La  $\vec{\Phi}$  non  
 ha solo un'eq. o più e non tutte le soluzioni sono ammissibili. In

$$\frac{1}{2} \mu \dot{s}^2 - U = 0 \quad \text{Dove } U(s) = \int_0^s F_t(s') ds'$$

Il  $\mu \dot{s}$  è il potenziale cinetico che in modo equivalente è quello potenziale: i suoi punti stazionari forniscono le posizioni di equilibrio solo se  $F(P)$  è conservativa allora  $U(s)$  è il potenziale. Tuttavia non tutte le potenze sono finite e libere e dunque possibile trovare

$$\text{integrale primo: } \frac{1}{2} \mu \dot{s}^2 - U(s) = C \text{ costante}$$

SCABRA

una scabra se in caso statico e si ha  $\Phi_T \neq 0$

LEGE DI COULOMB - ROBIN (legge derivata dall'esperienza)

$$|\Phi_T| = \mu_d \sqrt{\Phi_u^2 + \Phi_b^2} \quad \mu_d < \mu_s$$

il coeff. d'attrito risulta sperimentalmente essere

sempre  $<$  di  $\mu_s \Rightarrow$  perché se una forza riesce a muovere un corpo su una piana scabra, lo stesso forza riesce anche a muoverlo in movimento.

Nella dinamica  $\Phi_T$  è sempre opposto alla velocità del punto vincolato:

$$\Phi_T \cdot \dot{s} < 0 \quad \text{inoltre se sempre } \dot{s} \neq 0 \text{ si ha:}$$

$$\Phi_T = - \mu_d \sqrt{\Phi_u^2 + \Phi_b^2} \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \quad \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \text{ fornisce solo il segno della velocità}$$

Per ricavare l'eq del moto si sostituiscono i valori di  $\Phi_u$  e  $\Phi_b$ :

$$\mu \ddot{s} = F_t - \mu_d \sqrt{(\mu_p \dot{s}^2 - F_u)^2 + F_b^2} \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \rightarrow \text{vale } \pm 0 - 1$$

Bisogna risolvere 2 eq. diff. differenti e secondo vede avanti o indietro.

Se la piana è rettilinea  $\Rightarrow \rho = \infty$  (non può più flessione l'estremità)

Se si parlava delle restrizioni ovvero ci si limita ad un caso i quali in cui  $\dot{s} = \text{costante}$  in segno e si considerano solo forze come

possibili si ottiene:

$$\mu \ddot{s} = F_t(s) - \mu_d \sqrt{F_u^2(s) + F_b^2(s)} = H(s)$$

dove il termine  $H(s)$  diventa integrabile primo.

momento angolare rispetto al baricentro G del sistema (con velocità assoluta)

momento angolare rispetto all'origine misurato nel moto relativo a G (vel. relative)

dove  $\boxed{\bar{K}_G = \bar{K}_O^{(G)}}$  ovvero il momento angolare rispetto a qualunque

origine misurato con la velocità relative al baricentro coincide col momento

rispetto al baricentro -

$$\bar{V} = \bar{V}' + \bar{V}_G$$

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times m_i \bar{V}_i = \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times m_i (\bar{V}_i' + \bar{V}_G) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times m_i \bar{V}_i' + \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times m_i \bar{V}_G = \bar{K}_O^{(G)} + \overline{OG} \times M \bar{V}_G$$

ovvero le Teos -

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \overline{OP}_i \times m_i \bar{V}_i = \sum_{i=1}^n (\overline{OG} + \overline{GP}_i) \times m_i \bar{V}_i = \sum_{i=1}^n \overline{OG} \times m_i \bar{V}_i + \sum_{i=1}^n \overline{GP}_i \times m_i \bar{V}_i = \bar{K}_G + \overline{OG} \times \bar{Q}$$

ovvero le Teos -  $\bar{K}_G$

$$\bar{K}_G + \overline{OG} \times M \bar{V}_G$$

ovvero le Teos -

osservazioni:  $\bar{Q}^{(G)} = 0$  infatti  $\bar{Q}^{(G)} = \sum m_i \bar{V}_i' = \sum m_i (\bar{V}_i - \bar{V}_G) = \sum m_i \bar{V}_i - \sum m_i \bar{V}_G = \bar{Q} - \bar{Q} = 0$

MOMENTO ANGOLOSO IN ATO DI UNO RIPOSO

Proprietà: il momento angolare di un corpo rigido rispetto al polo O è

espresso come:  $\boxed{\bar{K}_O = \overline{OG} \times M \bar{V}_O + \bar{I}_O \omega}$  dove  $\bar{V}_O$  è la velocità del punto del corpo rigido che sta in O in quell'istante -

se  $O \equiv G$  si ottiene  $\bar{K}_G = \bar{I}_G \omega$

$$\boxed{\bar{K}_O = \overline{OG} \times M \bar{V}_G + \bar{I}_G \omega}$$

ENERGIA CINETICA

def: è l'energia cinetica di un sistema lo si calcola:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2}$$

discreto

$$\text{ovvero } T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$$

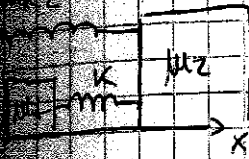
continuo

TEOREMA: T di KÖNIG per l'energia cinetica

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M V_G^2 + T^{(G)}} \quad [T \text{ di König}] \quad \text{se il corpo è rigido } T^{(G)} = \frac{1}{2} \bar{I}_G \omega^2$$

Ovvero la T del sistema è uguale alla somma di  $E_k$  che contribuirebbe al baricentro se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema più l' $E_k$  del sistema misurato con la velocità relative al baricentro -

Le forze esterne di sistema sono:  $\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_G$  IF 700 CORSO DI FISICA  
 Sono dati 2 punti  $P_1$  e  $P_2$  di masse  $m_1$  e  $m_2$  vincolati,  
 a scorrere su una guida liscia orizzontale.



Si ottiene 
$$\begin{cases} P_1 + \vec{\Phi}_1 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el} = m_1 \vec{a}_1 \\ P_2 + \vec{\Phi}_2 + \vec{F}_{el2} + \vec{F}_{el} = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

Quando corpo libero:

$$\begin{cases} m_1 g_1 + \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = m_1 g_1 & -m_2 g = \Phi_2 \Rightarrow \Phi_2 = m_2 g \\ k \Delta P_1 - k \Delta P_2 = m_1 a_1 & -k_2 \Delta P_2 - k \Delta P_1 = m_2 a_2 \end{cases}$$

Quando  $\Delta P_1 = x_1$ ;  $\Delta P_2 = x_2$   $P_1 P_2 = x_2 - x_1$   $P_1 P_1 = x_1 - x_2$

$$k_1 x_1 - k(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2$$

Quando vincolo  $\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_G$   $\Rightarrow$  no sempre

$$\begin{cases} m_1 \vec{F}_{el2} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{P} = M\vec{a}_G \text{ oltro} & -Mg = -\Phi_1 - \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 = Mg \\ & \text{(*)} -kx_1 - kx_2 = M \ddot{x}_G \end{cases}$$

Il  $\Phi$  in generale non è un'eq. differenziale nell'incognita  $x_G = x_G(t)$  e quindi non permette di determinare il moto del baricentro.

Ritornando  $M \ddot{x}_G = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$  per diff. si può risolvere l'eq diff come:

$$x_1 = \frac{(m_1 + m_2) x_G - m_2 x_2}{m_1} \quad -\frac{k_1 M x_G}{m_1} + \frac{k m_2}{m_1} x_2 - k_2 x_2 = M \ddot{x}_G$$

$$\Rightarrow -\frac{k_1 M}{m_1} x_G + \frac{k_1 m_2 + k_2 m_1}{m_1} x_2 = M \ddot{x}_G \Rightarrow \text{risolvere risolubile se solo se } k_1 m_2 = k_2 m_1$$

Perciò la Dip. Condizionale della dinamica non permette sempre la determinazione del moto del baricentro e che quindi il moto del baricentro di un sistema dipende in generale dalle forze interne e anche il moto dipende dalle forze esterne, ma dipende dalle posizioni e velocità dei singoli elementi  $\vec{R}^{(e)} = \vec{R}^{(e)}(P_i, \vec{v}_i, t) = M\vec{a}_G$   $\Rightarrow$  i phi possono essere direttamente influenzati dalle forze interne.

Il moto del baricentro è determinato completamente se  $\vec{R}^{(e)} = \vec{R}^{(e)}(G, \vec{v}_G, t)$

## MECANICA DEL CORPO RIGIDO

Le equazioni cardinali sono soddisfatte da tutti i punti di un sistema rigido, ma nel caso di corpo rigido esse diventano anche sufficienti. In un punto tutti i momenti del corpo rispetto ad un asse fisso esterno.

Nota: Sia il polo  $Q \equiv G$  di un corpo rigido, oppure  $Q$  fisso apparentemente rispetto all'asse di rotazione istantanea del corpo rigido stesso.

Equazioni cardinali semplificate:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(e)} = M \bar{a}_G \\ \bar{M}_Q^{(e)} = I_Q \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times I_Q \bar{\omega} \end{cases}$$

Si chiama l'identità delle 2<sup>a</sup> eq. cardinali.

Per un polo  $Q$  diverso da  $G$ :  $\bar{K}_Q = \bar{K}_G + QG \times M \bar{K}_G$

In caso di  $Q \equiv G$ , o  $Q = C$  fisso di rotazione  $\Rightarrow \bar{K}_Q = \bar{K}_G = I_Q \dot{\bar{\omega}}$

Le equazioni possono ottenersi in sistemi di riferimento:  $\bar{K}_Q$  è calcolato nel riferimento fmo,  $\bar{K}_G$  nel sistema solido al baricentro. Per effettuare la derivata bisogna usare la seguente formula  $\dot{\bar{c}} = \dot{\bar{c}}' + \bar{\omega} \times \bar{c}$

Infatti:  $\dot{\bar{K}}_Q = \dot{\bar{K}}_G + \bar{\omega} \times \bar{K}_G = I_Q \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times I_Q \bar{\omega}$  da cui la tesi.

Risultando la II eq. cardinale sulla terna  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , formata dagli assi principali in  $Q$ , si ottengono le equazioni di Eulero:

Equazioni di Eulero: 
$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1^{(e)} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2^{(e)} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3^{(e)} \end{cases}$$
  $I_1, I_2, I_3 =$  momenti principali di inerzia

NB: la formula non è sempre possibile separare le 2 eq. cardinali in 2 eq. indipendenti, una dedicata allo studio del moto del baricentro e l'altra volta a studiare il comportamento degli angoli di Eulero.

Si possono ora in base alle configurazioni particolari sulle quali si muove è possibile studiare le 2 eq. indipendenti: - corpo rigido libero - corpo rigido con asse fisso - corpo rigido con asse fisso



MOTO ALLA POINCARÉ

Moto alla Poincaré: il moto di un corpo rigido si dice alla Poincaré se esso ruota attorno ad un punto fisso  $Q$ , l'asse di rotazione ed il centro, tale che il momento angolare rispetto a  $Q$  sia nullo a tutti gli istanti:

$$\vec{M}_Q^{(tot)} = \vec{0} \quad [\text{MOTO ALLA POINCARÉ}]$$

Conservazione del momento angolare: Nel moto alla Poincaré di un corpo rigido si conserva il momento angolare rispetto al polo  $Q$ :

$$\vec{K}_Q = I_Q \vec{\omega} \equiv \text{costante}$$

Conservazione dell'energia cinetica: Nel moto alla Poincaré di un corpo rigido si conserva la quantità  $T_0 = \frac{1}{2} I_Q \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \vec{K}_Q \cdot \vec{\omega}$

se punto fisso  $\Rightarrow T = T_0$

$\vec{\omega} = \vec{\omega} \Rightarrow T^{(c)} = T_0$  dove l'energia cinetica generata nel moto relativo a  $Q$

CONDIZIONI PERMANENTI

Moto delle rotazioni permanenti, moti alla Poincaré che si svolgono a velocità angolare costante.

Condizione di permanenza delle rotazioni permanenti: Un moto alla Poincaré è una rotazione permanente se e solo se la velocità angolare istantanea è parallela ad un asse principale d'inerzia rispetto a  $Q$ .

Essendo moto alla Poincaré  $\Rightarrow \vec{M}_Q^{(tot)} = \vec{0} = I_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I_Q \vec{\omega}$

Ne segue  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\omega} \times I_Q \vec{\omega} = \vec{0} \Leftrightarrow I_Q \vec{\omega} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow I_Q \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega}$

$I_Q \vec{\omega} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega}$  è un autovettore di  $I_Q$  e dunque essendo autovalore reale è esso che una direzione principale.  $\lambda$  ha inoltre  $|\vec{\omega}| = \omega$  dove  $\omega$  è quella della velocità istantanea angolare.

MOTO ALLA POINCARÉ DI UN CORPO RIGIDO

Un corpo rigido è un proposito se i momenti principali centrali d'inerzia sono uguali, per l'ellipsoide  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ , e  $\vec{\omega}$  rappresenta la direzione dell'asse principale.

Si ipotizza il punto  $Q$  e all'asse principale

Corpo rigido pesante

si consideri un corpo rigido con un punto fisso  $Q$  nel caso di un campo pesante.

La legge della dinamica è  $\vec{T}_Q^{(e)} = \vec{O}G \times m\vec{g} = \vec{K}a$

Si ha una terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  solidale al corpo, di assi principali di inerzia  $\{I_1, I_2, I_3\}$  i relativi momenti principali d'inerzia -

indichiamo con  $\{x_1, x_2, x_3\}$  le coordinate di  $G$  rispetto ad  $\{x, y, z\}$  -

Si introduce il versore  $\hat{u} = \hat{e}_3$  e si ha  $\{u_1, u_2, u_3\}$  le componenti rispetto la terna  $\{\hat{e}_i\}$ .  $\vec{u} = \hat{e}_3$   $m\vec{g} = -mg\hat{u}$

Si ha  $\{w_1, w_2, w_3\}$  le comp. di

il sistema solidale -

Le equazioni di Eulero forniscono

$$\begin{cases} I_1 \dot{w}_1 - (I_2 - I_3) w_2 w_3 = mg(u_2 x_3 - u_3 x_2) \\ I_2 \dot{w}_2 - (I_3 - I_1) w_3 w_1 = mg(u_3 x_1 - u_1 x_3) \\ I_3 \dot{w}_3 - (I_1 - I_2) w_1 w_2 = mg(u_1 x_2 - u_2 x_1) \end{cases}$$

che si ricavano

$$\begin{cases} u_1 = \sin\theta \sin\phi \\ u_2 = \cos\theta \sin\phi \\ u_3 = \cos\theta \end{cases}$$

Infine per ipotesi  $\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{0} = \vec{\omega}' + \vec{\omega} \times \hat{u}$

si sceglie  $\vec{\omega}'$  solidale

Proiettando questa equazione sulla terna solidale si ottengono

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + u_3 w_3 - u_2 w_3 = 0 \\ \dot{u}_2 + u_1 w_3 - u_3 w_1 = 0 \\ \dot{u}_3 + u_2 w_1 - u_1 w_2 = 0 \end{cases}$$

Il che rappresenta un sistema di eq. differenziali risolubile -

# STATICA

## QUIETE ed EQUILIBRIO

Si consideri un sistema di forze attive indipendenti del tempo:

$$\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}) \Rightarrow \vec{F}(P, \vec{v}) = m\vec{a}$$

def: (QUIETE): Una soluzione costante dell'eq.  $\vec{F} = m\vec{a}$ , con  $\vec{F}(P, \vec{v})$ ,  $P(t) = P^*$ ,  $\forall t \geq t_0$ , corrispondente ai dati iniziali  $P(t_0) = P^*$ ,  $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ , si dice quiete.

def: (EQUILIBRIO): Una configurazione  $P^*$  si dice di equilibrio se è soluzione di  $\vec{F}(P^*, \vec{0}) = \vec{0}$

ovvero è una posizione in cui si annulla la forza risultante per valori nulli della velocità.

Se  $P^*$  è di quiete  $\Rightarrow P^*$  equilibrio

Se  $P(t_0) = P^*$  è di equilibrio con  $\vec{v}(t_0) = \vec{0} \Rightarrow$  è soluzione di quiete ma non è detto sia unica!

Una forza deve soddisfare i criteri menzionati del teorema di Cauchy al fine di evitare l'esistenza di più soluzioni corrispondenti agli stessi dati iniziali.

esempio (sol. di quiete c'è, ma non è unica)

Se la forza  $F(x) = a\sqrt{x}$ ,  $a > 0$

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = a\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x(t) = 0 \\ x(t) = \left(\frac{a}{6am}\right)^{\frac{2}{3}} t^3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m\ddot{x} = a\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array}} \right\} \text{le soluzioni possono variare!}$$

NB: Si verificherebbe lo stesso risultato solo forze che forniscono espressioni conformi al T. di Cauchy  $\Rightarrow$  quiete ed equilibrio sono sinonimi, ovvero ogni soluzione di quiete è di equilibrio e che se al tempo  $t = t_0$  il sistema è in una posizione di equilibrio con velocità nulla, si trova la quiete.

## EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE

P materiale libero  $\vec{F}(P) = \vec{0}$  P materiale vincolato  $\vec{F}(P) + \vec{Q} = \vec{0}$

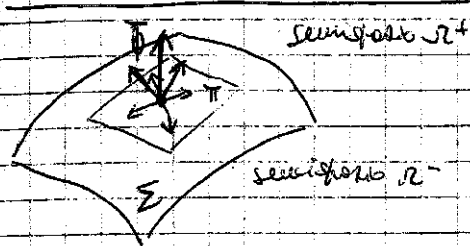
avere l'isobotta pormetricamente che la reazione vincolare  $\Phi$  deve essere orientata verso la parte di spazio consentita dal vincolo.

VINCOLO LIBRO

Un vincolo a libro libero ha il suo coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0$  e nulla  $[\mu_s = 0]$ , ovvero l'attrito è trascurabile. In questo caso la reazione vincolare  $\Phi$  è normale alla superficie.

VINCOLO IDEALE

PUNTO VINCOLATO SU UNA SUPERFICIE LISA CON VINCOLO UNILATERO



Si consideri un punto materiale P vincolato ad appartenere alla superficie  $\Sigma$ , oppure a stare nel semispazio  $R^+$  delimitato da  $\Sigma$ . In assenza di attrito ( $\mu_s = 0$ ) la reazione vincolare  $\Phi$  è

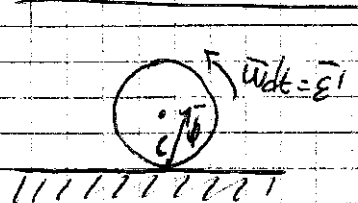
normale a  $\Sigma$  e deve essere orientata verso  $R^+ \Rightarrow \Phi \cdot \vec{n} \geq 0$

Per piccoli spostamenti virtuali  $\delta P$  che si può immaginare a partire da P si avrà:

$$\delta L^{(R.V)} = \Phi \cdot \delta P \geq 0 \quad \forall \delta P$$

tutti i piccoli spostamenti virtuali consentiti e al punto P tangente a  $\Sigma$ , mentre quelli non consentiti formano un angolo con  $\vec{n}$ .

VINCOLO DI RUOTO FOROLATAMENTO



Si consideri un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea. Detto C il punto di istantanea rotazione, è evidente che il profilo non potrà essere

libero in punto d'innesto di attrito, non permetterebbe che e non scivola sulla guida, tuttavia  $\delta L^{(R.V)} = \Phi \cdot \delta C = 0$  in punto il vincolo di puro rotolamento impone  $\delta C = 0$ .

dei (VINCOLO IDEALI); i vincoli ideali non permettono di esprimere tutti e soli per i sistemi di reazioni vincolari tali che

$$\delta L^{(R.V)} \geq 0, \quad \forall \delta P$$

a partire da una generica configurazione.

$$L^{(R.V)} = \dots$$

# STATICA DEI SISTEMI OLONOMI

Il lavoro delle forze attive si può esprimere come  $\delta L^{(a)} = \sum_{h=1}^N Q_h \delta q_h = Q \cdot \delta q$

## VINCOI BILATERI

Si considerino vincoli bilateri: si suppone tutti gli spostamenti siano reversibili

Il numero dei lavori virtuali ottenute  $\delta L^{(a)} = Q \cdot \delta q = 0 \quad \forall \delta q$

grazie all'indipendenza delle coordinate libere, si sceglie di volta in volta un  $\delta q_h \neq 0$  e tutti gli altri nulli  $\Rightarrow$  si dimostra che esistono

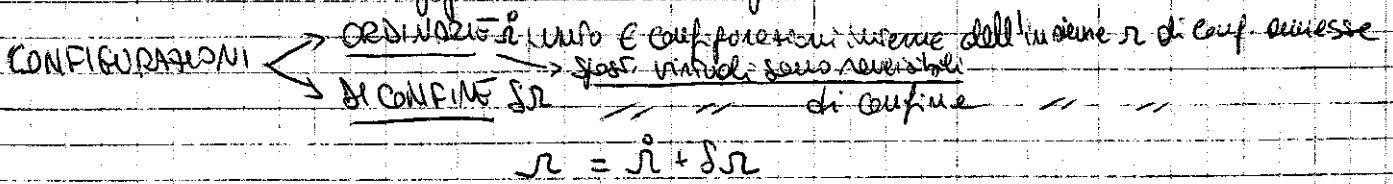
$Q_h = 0$  e ciò implica che le posizioni di equilibrio sono quelle per cui vale  $Q(q) = 0$  ovvero quelle per cui la forza generalizzata  $Q$  si annulla

Un punto in equilibrio nello spazio  $n$ -dimensionale soggetto alle forze  $Q$  è rappresentabile dalle equazioni in  $N$  incognite

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0 \\ \vdots \\ Q_N(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0 \end{cases} \quad q_1^*, \dots, q_N^*$$

## VINCOI UNILATERI

In presenza di suddetti vincoli bisogna distinguere le configurazioni ordinarie dalle configurazioni di confine.



Per le configurazioni ordinarie le configurazioni di equilibrio ordinarie sono tutte e sole quelle che soddisfano  $Q(q) = 0$  con  $q \in \mathcal{R}$

L'equilibrio nelle configurazioni di confine dipende invece dalle forze sul dominio conf. punto.

Esempio (conf. di confine)  $q_h \in [a_h, b_h]$

Se  $q_h = a_h$  per  $h=1, \dots, j < N$   $\rightarrow$  conf. di confine  
 Se  $q_h \in (a_h, b_h)$  per  $h=j+1, \dots, N$   $\rightarrow$  conf. ordinaria

Per spostamenti virtuali sono  $\delta q_h \geq 0$  per conf. di confine

Per l'equilibrio; infatti l'equilibrio sussiste in tal caso proprio grazie alla presenza di una reazione vincolare di segno opposto. Viceversa, se tutte le altre risultano nulle, la posizione di equilibrio di confine esisterebbe anche se i corrispondenti vincoli vincolari non fossero presenti!

TEOREMA DI STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE

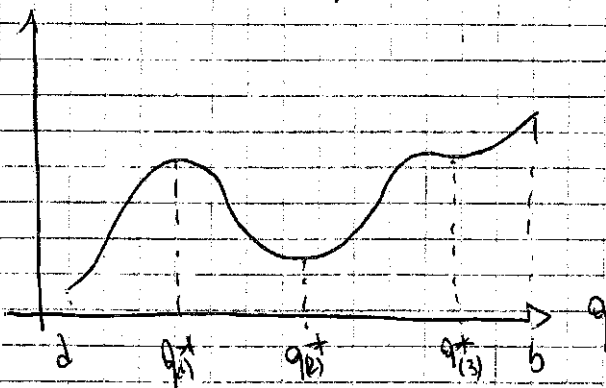
Se le forze attive sono conservative  $\Rightarrow \exists U = U(q)$  e si ha che

$$Q_i(q) = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

In questo caso la ricerca delle posizioni di equilibrio è riconducibile allo studio del potenziale.

TEOREMA (STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE): Le configurazioni ordinarie d'equilibrio di un sistema autonomo sono tutte e sole quelle che annullano le derivate del potenziale rispetto a tutte le coordinate libere, esse coincidono quindi con i punti di stazionarietà del potenziale.

Esempio



Per il suddetto teorema  $q_{(1)}^*$ ,  $q_{(2)}^*$ ,  $q_{(3)}^*$  sono posizioni di equilibrio.

Le posizioni di confine vanno analizzate:

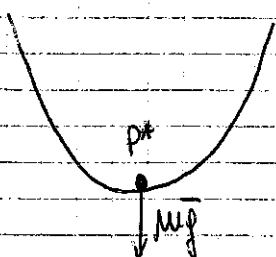
in  $a$ ;  $\partial q \geq 0$  mentre  $\frac{\partial U}{\partial q}(a) \geq 0$

perché non si equilibria

in  $b$ ;  $\partial q \leq 0$  mentre  $\frac{\partial U}{\partial q}(b) \geq 0$

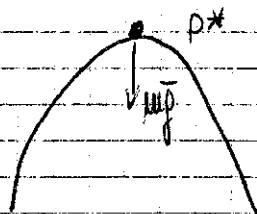
perché  $q_{(3)}^* = b$  è pos. di equil. di confine.

EQUILIBRIO STABILE IN SENSO STATICO



EQ. STABILE

(a)



EQ. INSTABILE

(b)

Due posizioni di equilibrio  $P^*$ :

caso (a): il punto inizialmente in quiete viene spostato nei pressi di  $P^*$   $\rightarrow$  il punto rimane nelle vicinanze di  $P^*$

caso (b): il punto inizialmente in quiete viene spostato nei pressi di  $P^*$   $\rightarrow$  il punto scende ed

Primo equilibrio al confine

Per  $\theta = 0$  la forza virtuale  $\delta p \geq 0 \Rightarrow$  cond. d'eq. (influenza  $Q \leq 0$  per il principio dei lavori virtuali).

$$Q(0) = \frac{dV}{d\theta}(0) = \mu g l \sin 0 - k l e^2 \sin 0 \cos 0 = 0 \leq 0 \Rightarrow \theta_2^* = \theta_3^* = 0 \text{ è pos. d'eq. di confine.}$$

Prendendo influenza  $Q(0) \leq 0 \Rightarrow$  il unico equilibrio al fine dell'equilibrio.

Per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  la forza virtuale  $\delta p \leq 0 \Rightarrow$  cond. d'eq. (influenza  $Q \geq 0$  per p. l. virtuale).

$$Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{dV}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mu g l \frac{\pi}{2} - k l e^2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \mu g l > 0 \Rightarrow \theta_3^* = \theta_2^* = \frac{\pi}{2} \text{ è pos. d'eq. di confine}$$

Prendendo  $Q\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  il unico equilibrio è espansivo.

Studio della stabilità:

Si calcola  $V''(\theta) = \mu g l \cos \theta - k l e^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

Per  $\theta_1^* = \arccos \lambda$  con  $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \text{La } \frac{\delta^2 V}{\delta \theta^2} &= \frac{\mu g l \cos \theta}{k l e^2} - k l e^2 (\lambda^2 - 1 + \lambda^2) = k l e^2 \lambda^2 - k l e^2 (2\lambda^2 - 1) = k l e^2 (\lambda^2 - 2\lambda^2 + 1) \\ &= k l e^2 (1 - \lambda^2) > 0 \rightarrow \text{minimo relativo} \\ &\quad \underbrace{> 0} \quad \underbrace{> 0} \quad \text{INSTABILE} \end{aligned}$$

Per  $\theta_2^* = 0$  la  $\frac{\delta^2 V}{\delta \theta^2}(0) = \mu g l - k l e^2 = k l e^2 (\lambda - 1)$

STABILE se  $\frac{\delta^2 V}{\delta \theta^2}(0) < 0 \Rightarrow \mu g l - k l e^2 < 0 \Rightarrow \frac{k l e^2}{\mu g l} < k l e^2 \Rightarrow k l e^2 \lambda < k l e^2$

$$\Rightarrow k l e^2 (\lambda - 1) < 0$$

$$\underbrace{> 0} \quad \underbrace{< 0} \quad \lambda - 1 < 0 \text{ se } \lambda < 1 \text{ STABILE}$$

se  $\lambda > 1$  INSTABILE

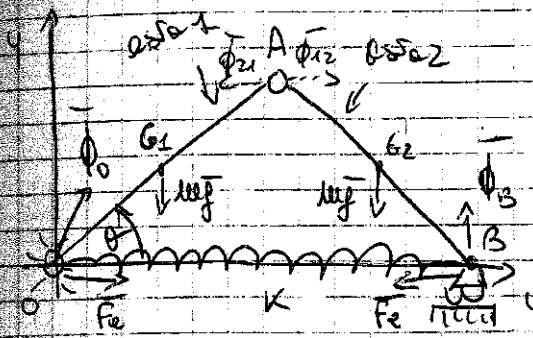
Per  $\theta_3^* = \frac{\pi}{2}$  la  $\frac{\delta^2 V}{\delta \theta^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = +k l e^2 > 0$  funzione  $\frac{dV}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  dunque è

un minimo relativo (solo)  $\rightarrow$  STABILE (ALLA LAPUNOV)

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA NB: per un sistema non può presentarsi un equilibrio insufficiente per trovare config. di equilibrio  $\Rightarrow$  3 vincoli  $\rightarrow$  3 forze reattive

Tenore: Un sistema rigido è in equilibrio in una configurazione  $C$  se e solo se le eq. cardinali della statica sono soddisfatte, vale a dire se e solo se l'insieme delle forze esterne è equilibrato.

Esempio (TECNICA BINOCOLARE + EQ. CARDINALI) per un certo tipo di vincoli è possibile per trovare eq. e non vincoli



Due aste rigide, collegate da una cerniera mobile in A, si muovono nel piano verticale x,y. O è fisso per l'asse OA (asse x), l'estremo B è vincolato ad un anello. Le aste hanno la stessa massa m e lunghezza  $l$ . B è collegato con una molla di costante  $k$  all'origine. I vincoli sono ideali.  $q = (\theta)$

Determinare posizioni di equilibrio nell'intervallo  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  e il corrispondente valore delle reazioni vincolari.

Essendo i vincoli ideali e tutte le forze esterne conservative si applica per trovare le posizioni di equilibrio il teor. di conservazione del potenziale.

$$V(\theta) = V_{POT1} + V_{POT2} + V_{MOLTA} = -mgl\gamma_{G1} - mgl\gamma_{G2} - \frac{k}{2}l^2\theta^2 = -2mgl\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta$$

$$\gamma_{G1} = l\sin\theta \quad \gamma_{G2} = l\sin\theta \quad x_B = 2(2l\cos\theta) \quad = -2mgl\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta$$

Per trovare le pos. di equilibrio è necessario che  $Q_\theta = 0$  ovvero  $\Phi_\theta = 0$

$$Q_\theta = \frac{dV}{d\theta} = -2mgl\cos\theta + 16kl^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\text{Prendendo } \cos\theta \neq 0 \Rightarrow -2mgl + 16kl^2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{mgl}{8kl^2} = \lambda$$

$$\theta_1^* = \arcsin\lambda, \quad \lambda < 1$$

Per trovare le reazioni vincolari in A e B si scrivono le eq. della statica

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_3 = \vec{0} \quad (\vec{F}_e \text{ è una f. interna data la conf. del sistema})$$

$$\vec{O}G_1 \times m\vec{g} + \vec{O}G_2 \times m\vec{g} + \vec{O}B \times \vec{\Phi}_3 = \vec{0}$$

Proiettando su  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  si ottiene

$$\vec{i} \cdot (-mgl = mgl + \Phi_3 + \Phi_0y = 0 \Rightarrow \Phi_0x = 0$$

$$\vec{j} \cdot \Phi_0x = 0$$

$$\vec{k} \cdot \Phi_0x = 0$$

Si scrivono anche  $R_0$ , insieme è sufficiente scrivere per trovare le eq. della statica

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{\Phi}_0 + \vec{F}_e = \vec{0}$$

$$\vec{O}G_1 \times m\vec{g} + \vec{O}A \times \vec{\Phi}_1 = \vec{0}$$



# MECCANICA LAGRANGIANA

La meccanica lagrangiana cambia il punto di vista di analisi: si rinuncia ad un'indagine e a risolvere le equazioni vincolari e si intraprende la via per determinare le configurazioni di equilibrio e i moti dei sistemi di punti e sistemi di vincoli - I vincoli vengono caratterizzati dagli altri moti che essi consentirebbero piuttosto che dalle forze che esercitano. Il limite della meccanica lagrangiana è il grado di trattare solo vincoli ideali (almeno nelle formulazioni standard) -

## FORSE INERTIALI

Seo un qualunque punto materiale, esso rimane O w iderente in pratica rispetto al sistema di riferimento (in generale non inerziale) che scende con origine coincidente al punto stesso. La f di massimazione  $F_2 = -m\ddot{x}$  viene detta forza d'inerzia e la legge fondamentale della dinamica relativa diventa in'ap.  $\sum (\vec{F}_i + \vec{F}_2) + \vec{\Phi} = (\vec{F} - m\ddot{x}) + \vec{\Phi} = \vec{0}$   
R. forze attive                      forza perduta

TEOREMA (PRINCIPIO DI D'ALEMBERT): In un sistema di punti materiali è possibile passare dalle equazioni di equilibrio alle eq. dinamiche, un di insieme tra le forze agenti sul sistema tutte le forze d'inerzia.

## EQUAZIONE FUNZIONALE DELLA DINAMICA

TEOREMA (relazione funzionale della dinamica): Se  $\{P_i, m_i\}, i=1, \dots, n$  un sistema di punti materiali liberi, agisce sottoposti a vincoli ideali. Se inoltre  $\{P_i, \vec{F}_i\}, i=1, \dots, n$  il sistema di forze attive agenti sul sistema condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme delle accelerazioni  $\{P_i, \vec{a}_i\}, i=1, \dots, n$  fornisca il moto del sistema è che

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta P_i \leq 0$$

per ogni spostamento virtuale  $\{P_i, \delta P_i\}, i=1, \dots, n$  ammissibile.

## TEOREMA (EQUAZIONE SCALARE DELLA DINAMICA)

$$P \text{ ... } \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta P_i = 0$$

Lemma: partendo dalla definizione di  $Z_k$  si ha:

$$Z_k = \sum_{i=1}^M \mu_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^M \mu_i \frac{d\dot{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^M \mu_i \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^M \mu_i \dot{v}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \dot{r}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) - \sum_{i=1}^M \mu_i \dot{r}_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial t \partial q_k}$$

La posizione di ogni punto materiale dipende esplicitamente da almeno una delle coordinate libere del tempo  $P_i(t) = P_i(q_1(t), \dots, q_n(t), t)$ , e ha sempre:

$$\dot{r}_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

La velocità dell'  $i$ -esimo punto dipende anche dalle velocità lagrangiane  $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$ :

$$\frac{d\dot{r}_i}{dt} = \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial t} \rightarrow \text{è il nuovo termine che dipende da } \dot{q}_k$$

Ma se derivando l'espressione sopra ottenuta per  $\dot{r}_i$  si ottiene rispetto la derivata (Coord. libere):

$$\frac{d\dot{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \text{ appunto l'ordine di derivazione è ininfluente.}$$

Si sostituisce nell'espressione di  $Z_k$  e si ottiene:

$$Z_k = \sum_{i=1}^M \left[ \mu_i \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) - \mu_i \dot{r}_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial t \partial q_k} \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mu_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mu_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dt} \right) - \frac{dT}{dt} \text{ ovvero } \frac{dT}{dt} \text{ ovvero } \frac{dT}{dq_k}$$

Introducendo i termini lagrangiani nella equazione finale del moto si ottengono le EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] = Q_k \text{ per ogni } k=1, \dots, N \text{ [EQ. DI LAGRANGE]}$$

### DETERMINANTO LAGRANGIANO

Le eq. pure del moto sono eq. del II ordine rispetto al tempo e si possono scrivere in forma normale, ovvero in funzione di  $\dot{q}_k$ . Il teorema di Cauchy garantisce così l'esistenza di una e una sola soluzione al problema di valori iniziali, purché le forze dipendano in maniera sufficientemente regolare da posizione e velocità. Le eq. di Lagrange sono dunque determinate