NUMERO: 553

DATA: 13/06/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Bruni

MATERIA: Elettrotecnica
Prof. Canavero

PROF: Flavio Canavero

ORARIO: Lunedì 8.30 - 11.30 aula 1b || TEORIA
Mercoledì 8.30 - 11.30 || ESERCITAZIONE

RICEVIMENTO: Giovedì 18-19

MATERIALE DIDATTICO: uno dei primi 2 della lista sul portale

INFO: 05/10 no esercitazione
10/10 no lezione

22/10 NO LEZIONE
24/10 esercitazione 10-11:30 e 11:30-13:00

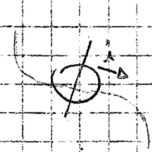
26/11 LEZIONE + ESERCIT
03/11 ~~lezione~~ esercit 10-11:30

17/12 No Lezione
19/12 Si
7/01 Si
9/01 No Lezione
14/01 Si Le
16/01 No Lezione

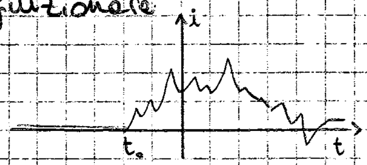
indica $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ (u.m. $C/s = A$) ← corrente media

Una definizione più precisa sarà $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

oss: è fondamentale definire la direzione delle cariche!!! $i \nearrow$ ma $-i \swarrow$


⇒ misuratore di corrente

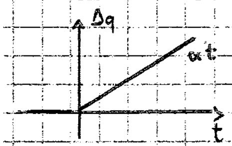
La carica passata nella sezione è data da $q = \int_{-\infty}^{t} i\,dt$ molto spesso possiamo sostituire il tempo $t = -\infty$ con il tempo $t = 0$ in cui il sistema ha cominciato a funzionare

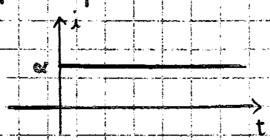


$$q = \int_{-\infty}^{t_0} i\,dt + \int_{t_0}^{t} i\,dt = \int_{t_0}^{t} i\,dt$$

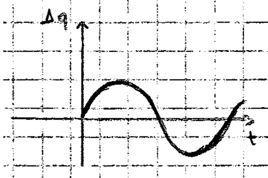
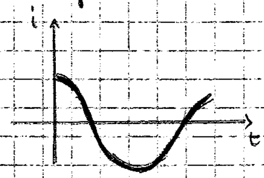
ESEMPIO:

Ho un sistema del tipo $q = \alpha t$ risulta che $i = \frac{dq}{dt} = \alpha$



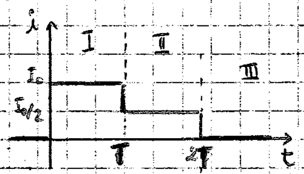


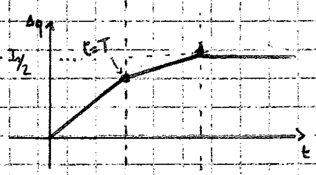
Se ho una distribuzione fluttuante $q = \sin \frac{2\pi t}{T}$ ⇒ andamento PULSANTE o ALTERNA

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Al contrario: abbiamo misurato i, quale sarà q?



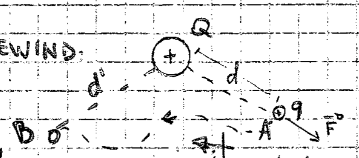


$$\text{I}: \; q = \int_0^t I_0\,dt = I_0 t \quad \text{con } 0 < t < T$$

pendenza dimezzata

$$\text{II}: \; q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^t \frac{I_0}{2}\,dt = I_0 T + \frac{I_0}{2}(t - T) \quad \text{con } T < t < 2T$$

$$\text{III}: \; q = \int_0^T I_0\,dt + \int_T^{2T} I_0/2\,dt + \int_{2T}^{0} 0\,dt = I_0 T + \frac{I_0}{2} T + 0 \quad \text{con } t > 2T$$

REWIND:


l'interazione tra cariche: CAMPO ELETTRICO ↓ mi fa compiere lavoro $\mathcal{L} = Fd = k\frac{Qq}{d}$

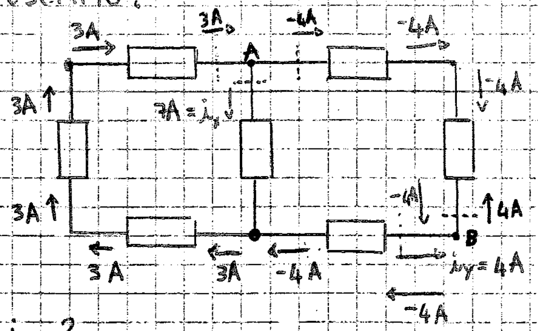
Uso q come carica prova → voglio capire il lavoro prodotto da Q indipendentemente dalla carica test: $\phi = \frac{\mathcal{L}}{q} = k\frac{Q}{d}$

Giunge a B attraverso una guida. $Q - B = d'$. In B la carica avrà una certa $\phi_B = k\frac{Q}{d'}$

$V_{AB} = \phi_A - \phi_B > 0$ il potenziale di $A > B$, perchè dipende dalla stessa Q, ma da distanza diversa

la quantità di carica che attraversa una sezione in un intervallo di tempo è la corrente: $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

ESEMPIO:



→ inizialmente sbagliato verso, basta invertire → il valore è lo stesso

$i_x = ?$

uso KCL, sul nodo A: $\sum_n i_n = \sum_m i_m$

$3 = -4 + i_x$

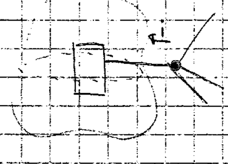
$i_x = 3 + 4 = 7\,A$

$i_y = ?$

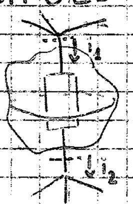
uso KCL, sul nodo B: $i_y = 4\,A$

MONOPÒLO

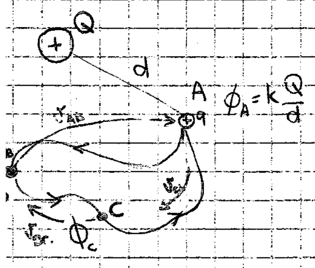
poichè nel mono-pòlo la corrente ~~entra~~, ma non esce usando KCL: $i_n = 0$



DIPOLO



tutte le volte che si ha un elemento con 2 soli fili la corrente entrante è uguale a quella uscente (rispecchiando la legge di kirchhoff) KCL: $i_1 = i_2$



$\phi_A = k\frac{Q}{d}$

Definiamo per ogni tratto del percorso chiuso la tensione

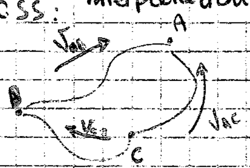
$$V_{AB} = \phi_A - \phi_B$$
$$V_{BC} = \phi_B - \phi_C$$
$$V_{CA} = \phi_C - \phi_A$$

$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$ Legge delle Tensioni formulata da kirchhoff (KVL)

KVL_1: Hp: percorso chiuso Th: somma tensioni in un percorso chiuso è nulla $\sum_k V_k = 0$

Le tensioni in un percorso chiuso affinchè questa legge valga devono essere equiverse

OSS: interpretazione sbagliata



$$V_{AB} = \phi_A - \phi_B$$
$$V_{BC} = \phi_B - \phi_C$$
$$V_{AC} = \phi_A - \phi_C$$

$\sum V = 2\phi_A \neq 0$ ⇒ devo cambiare segno a V_{AC} con $-V_{AC} = V_{CA}$

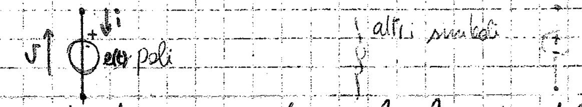
allora $\sum V = 0$

Risulta $V_{AB} + V_{BC} - V_{AC} = 0$ ⇒ $\underbrace{V_{AB} + V_{BC}}_{\text{rotazione oraria}} = V_{AC}$ ← rotazione antioraria

KVL_2: Hp: percorso chiuso, Th: $\sum_p V_p = \sum_q V_q$ ⇒ la somma delle tensioni in senso orario è uguale a quella delle tensioni che girano in senso antiorario

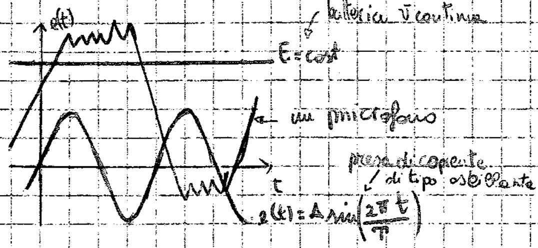
ELEMENTI ELETTRICI IDEALI

• GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE



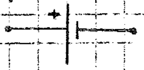
Il più indica il punto a potenziale più alto a cui noi dovremmo indicare la freccia della tensione. Questo elemento funziona dando una tensione $v = e(t)$ che egli produce

ESEMPIO:

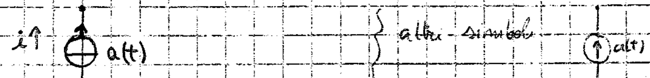


la tensione può essere rappresentata in vari modi

$e(t)$ è chiamata GRANDEZZA IMPRESSA, e l'equazione $v = e(t)$ si chiama EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO DEL GENERATORE che risulta essere indipendente dal valore della corrente per questo è necessario aggiungere, per meglio specificare l'equazione di funzionamento $v = e(t), \forall i$

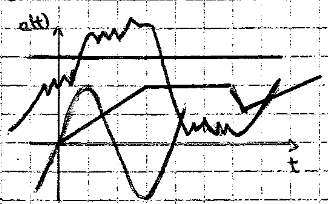
OSS. la batteria viene rappresentata  (vale solo per batterie, cioè per tensioni costanti).

• GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE



la freccia indica la direzione d'uscita delle cariche positive. Produce corrente secondo $i = a(t)$ (grandezza impressa)

ESEMPIO:

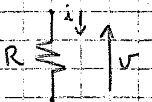


vs generatore di corrente = carica batterie

serve per spiegare il comportamento di dispositivi elettronici

Se la freccia è l'indicazione di cariche allora: $i = a(t), \forall v$, la freccia di indicazione della direzione della corrente segue quella del generatore, la convenzione di segno non è rilevante, l'altra variabile elettrica non influ

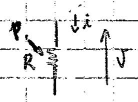
• RESISTORE



È essenziale che la convenzione di segno sia degli utilizzatori, a differenza dei 2 generatori precedenti nei quali era rilevante solamente una delle 2 grandezze. Qui invece è fondamentale perché esiste una proporzionalità tra tensione e corrente $v = Ri$ con R coefficiente di proporzionalità dato dal costruttore. L'equazione di funzionamento $v = Ri$ prende il nome di LEGGE DI OHM $\left(R \Rightarrow \text{U.m.}\ \frac{V}{A} = \Omega\right)$ Il coefficiente R prende il nome di RESISTENZA

OSS: Resistore = oggetto fisico vs Resistenza = grandezza

Potenza assorbita dal resistore:

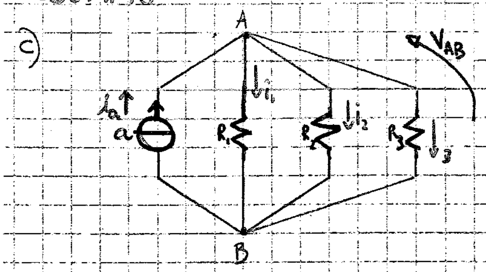


$$p = vi = Ri \cdot i = R\overset{>0}{i^2}$$

la potenza del resistore è sempre una quantità assorbita. Il resistore oppone una certa difficoltà alle cariche per passare all'interno del metallo. Per effetto dell'attrito converte energia calore. $p > 0$ vale per definizione della funzione del Resistore $\Rightarrow R > 0$ sempre!!

ESEMPIO

c)



tutti i resistori hanno la stessa tensione V_{AB} scelta arbitrariamente. le correnti sono obbligate

Posso pensare il nodo A come una superficie chiusa tagliata in 4 porzioni $\Rightarrow KCL_2: \sum_{n \text{ entra}} i_n = \sum_m i_m$ esce

$i_a = i_1 + i_2 + i_3$

↳ corrente del generatore $i_a = a$

uso 2° formulazione di Ohm per le altre correnti: $V/R = i$

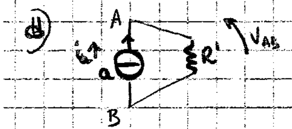
$$\Rightarrow a = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

$$a = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_{AB}$$

$$V_{AB} = \frac{a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$ $\Rightarrow$ tensione tra i 2 nodi del circuito (gli unici)

trovo una particolare corrente $i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{a/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$

d)



$V_{AB} = R' a$

CONFRONTO c e d: hanno stesso generatore e stessa struttura del circuito, ma il coefficiente ~~Generatore~~ di proporzionalità $R' = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$. Si dice che R_1, R_2, R_3 sono collegati in PARALLELO

REGOLA della Resistenza eq. del PARALLELO Hp: circuito chiuso con resistori con stessa tensione (tutti i resistori collegati tra gli stessi 2 nodi)

Th: posso sostituire i resistori con uno equivalente $R_{eq} = 1/\sum_i \frac{1}{R_i}$. Si può scrivere equivalentemente $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ o meglio $G_{eq} = \sum_i G_i$

Caso particolare solo 2 RESISTORI in // R_1, R_2

Scrivo la formula $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$

REGOLA del PARTITORE di corrente: Hp: un generatore di corrente e ~~m~~ resistori collegati tutti in parallelo

Th: la corrente parziale del ~~resistore~~ lato K è data da: $i_K = \frac{a/R_K}{1/R_{eq}}$

x 2 RESISTORI

$$i_2 = \frac{\frac{a}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{a}{R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = \frac{a}{R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{a R_1}{R_1 + R_2}$$

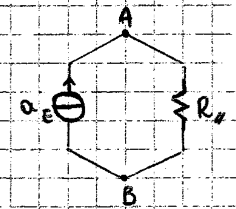
Applico KCL, considerando intorno ad A e B una superficie chiusa: $\sum_{\text{entranti}} i = 0$

KCL sul nodo A: $+i_{a_1} + (-i_1) + (-i_2) + (-i_{a_2}) + (-i_3) + i_{a_3} = 0$

$$i_{a_1} - i_{a_2} + i_{a_3} - i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$a_1 - a_2 + a_3 = i_1 + i_2 + i_3$$

sostituisco i generatori di corrente con uno equivalente dato dalla somma $\leftarrow$ $a_E = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3} = V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = V_{AB}\frac{1}{R_{/\!/}}$



COROLLARIO per generatori di corrente in parallelo $a_E = \sum_n a_n$

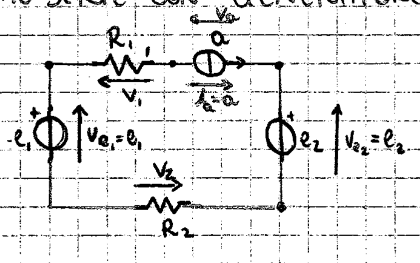
$$\frac{1}{R_{/\!/}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

COROLLARIO:

Se abbiamo $R_J << R_K$ $(K \neq J)$ poichè $R_{/\!/} = \frac{1}{\sum_K 1/R_K} \approx R_J$ ma in particolare $R_{/\!/} \leq R_J$

Supponiamo che $R_J << R_K$, $R_J = 0$ $\Rightarrow$ Corto circuito $\Rightarrow$ $R_{/\!/} = 0$ (la resistenza non può essere

CIRCUITO SERIE CON GENERATORE CORRENTE



Il generatore di corrente impone già il verso di percorrenza della corrente. Uso KVL ↻:

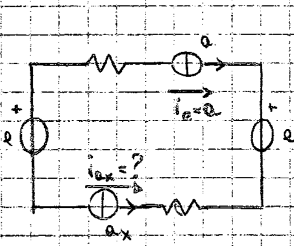
$$V_{e_1} - V_1 - V_a - V_{e_2} - V_2 = 0$$

$$e_1 - aR_1 - V_a - e_2 - aR_2 = 0$$

$$V_a = e_1 - aR_1 - e_2 - aR_2$$

!! V_a del gen di corrente non è influ… ↓ è incognita!

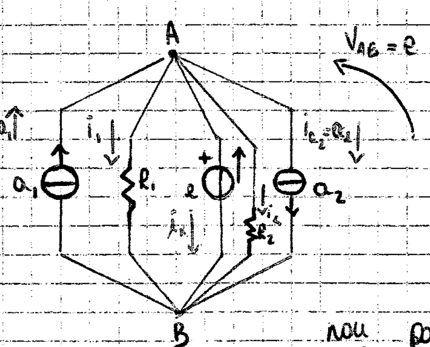
In un circuito con 1 a e diversi e non si può applicare la regola della partizione di ten…



Se le 2 correnti i_a e i_{a_x} non sono uguali e opposte ho u… contraddizione (abbiamo una fiammata)

COROLLARIO: Serie di generatori di corrente possono esistere solo se h… no correnti impresse uguali

CIRCUITO PARALLELO CON GENERATORE DI TENSIONE



Uso KCL sul nodo A:

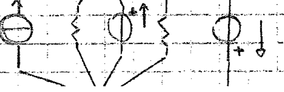
$$a_1 - i_1 - i_x - i_2 - a_2 = 0$$

$$a_1 - e/R_1 - i_x - e/R_2 - a_2 = 0$$

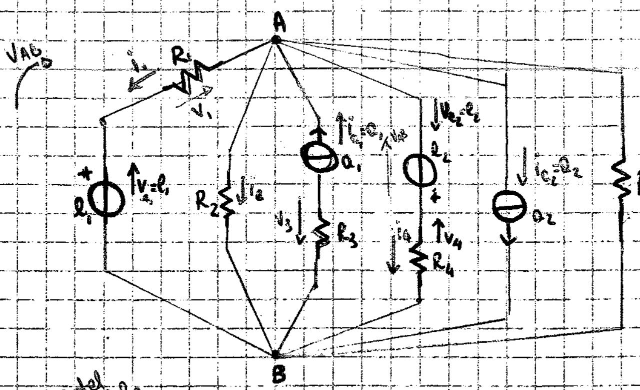
$$i_x = a_1 - a_2 - e\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

non posso usare la regola del partitore di corrente

COROLLARIO: Parallelo di generatori di tensione possono esistere solo se hanno funzioni impresse uguali



ESERCIZIO: CIRCUITO PARALLELO ~~CON~~ ELEMENTI SERIE



(uscenti)

KCL in A: $i_1 + i_2 + i_4 + a_2 + i_5 - a_1 = 0$

equazioni ausiliarie: $V_{AB} = R_2 i_2 \qquad V_{AB} = R_5 i_5$

$V_{AB} = e_1 + i_1 R_1 \qquad V_{AB} = -e_2 + i_4 R_4$

$$\frac{V_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB} + e_2}{R_4} + \frac{V_{AB}}{R_5} + a_2 - a_1 = 0$$

$$V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_4} + a_1 - a_2$$

tensione del parallelo

$$V_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_4} + a_1 - a_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$ tutti i generatori del circuito

OSS: e_2 è la tensione in serie con R_4, discorde con v_{AB}
- e_1 concorde con v_{AB}
- a_1 concorde a v_{AB}
- a_2 discorde a v_{AB}

|| R_3 non appare

bisogna sempre avere Hp.

REGOLA: Hp: circuito con struttura in parallelo, e i rami con dipoli in serie.

Allora:
$$v_p = \frac{\sum_{k\,\text{generat.}} \frac{\pm e_k}{R_k} + \sum_{J\,\text{corrente}} \pm a_J}{\sum_{n\,\text{rami} \neq \text{g.corrente}} 1/R_n}$$

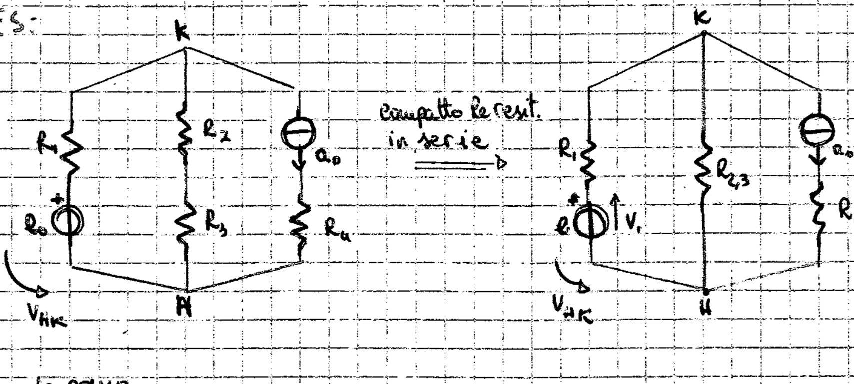
$\pm$ || se verso (x i generatori di tensione) e freccia (x quelli di corrente) concorde (+) o discorde (−) a v_p

|| non compaiono le resistenze dei rami con i generatori di cor

Questa regola prende il nome di TEOREMA DI MILLMANN

OSS: se in un ramo non ci fosse la resistenza in serie al generatore di tensione la tensione sa è già definita dal costruttore, non c'è bisogno di usare Millman, perché avrei già trovato la tensione tra A e B.

ES:



$$V_{HK} = \frac{-\frac{e}{R_1} + a_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}}$$

OSS: la somma l'inversa delle resistenze si chiama CONDUTTANZA.

Riprendiamo l'esercizio a inizio pagina e chiamiamo $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = G_e$ allora: $V_{AB} = \frac{e_1}{G_e R_1} - \frac{e_2}{G_e R_4} + \frac{a_1}{G_e} - \frac{a_2}{G_e}$

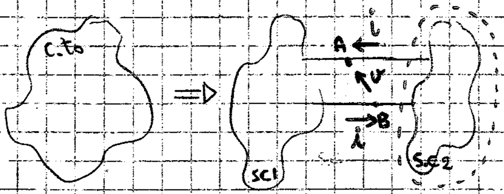
$= \left(\frac{1}{G_e R_1}\right) e_1 + \left(\frac{-1}{G_e R_4}\right) e_2 + \left(\frac{1}{G_e}\right) a_1 + \left(\frac{-1}{G_e}\right) a_2$ è l'espressione della tensione V_{AB} scritta come combinazione lineare dei generatori (formula applicabile in qualsiasi circuito).

REGOLA: Hp: bipoli lineari (= rappresentati da equazioni di funzionamento del tipo $v = Ki$)

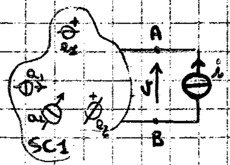
Allora per ogni circuito ogni variabile elettrica (tensione e corrente) è una combinazione posizione degli effetti vale solo per tensioni e correnti perchè la potenza è definita attraverso un'operazione non lineare (prodotto tra v e i)

TEOREMA di THÉVENIN

Abbiamo circuito che possiamo suddividere in 2 sottocircuiti (nessuna ipotesi su come sia creato, quali elementi e quali collegamenti ci siano),



l'unica Hp: i 2 sottocircuiti connessi solo attraverso 2 conduttori ⇒ è un bipolo

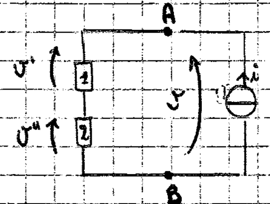


Allora posso tracciare superficie chiusa attorno al S.C.2. Allora le correnti che passano tra i 2 conduttori devono essere uguali e opposte ⇒ posso sostituire il sotto-circuito 2 e lo sostituisco con un generatore di corrente i

posso scrivere una variabile elettrica (v, i) come combinazione lineare di generatori:

$$v = \underbrace{k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 a_1 + k_4 a_2}_{\text{elementi interni} \Rightarrow \text{contributi di tensioni parziali che mi danno dove } v} + \boxed{k_5\, i} \text{ — generatore esterno}$$

K_5 ha le dimensioni di una resistenza ⇒ gli diamo il nome di R_E. Poniamo, per esempio $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 a_1 + k_4 a_2 = v_0$ (contributo interno) è certamente una tensione. Allora: $v = v_0 + R_E\, i$



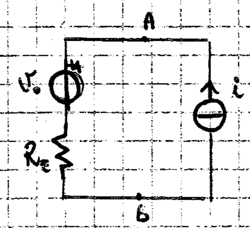
$v = v_0 + R_E i$ → prop corrente ⇒ Resistore

⇒ $v = v' + v''$ ⇒ 2 pezzi sono in serie

mi basta pensare che 1° scatola sia un generatore di tensione v_0

2° scatola non che essere un resistore R_E

allora possiamo interpretare S.C.1 come:



A patto che sia un bipolo:

1° Risultato: ogni sotto-circuito è equivalente, cioè rappresentabile, alla serie di un generatore di tensione e un resistore

v_0 rappresenta la tensione del circuito quando questo è aperto (nella sovrapposizione degli effetti dei contributi interni il generatore di corrente è 0)

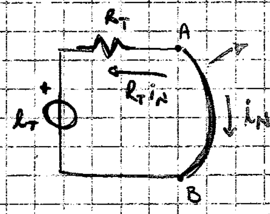
2° Risultato: v_0 si chiama TENSIONE A VUOTO ed è cioè la tensione del sottocircuito con uscita in circuito aperto;

R_E si chiama RESISTENZA EQUIVALENTE ed è la resistenza del sotto-circuito vista dall'uscita, con generatori annullati

OSS: per la proprietà transitiva: l'equivalente di Thèvenin e l'equivalente di Norton sono tra loro equivalenti.

FROM THÈVENIN TO NORTON

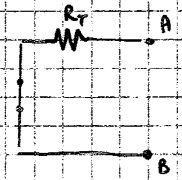
Supponiamo di partire dall'equivalente di Thèvenin e uso NORTON:



inserisco il corto circuito tra A e B allora $e_T = R_T i_N$ quindi:

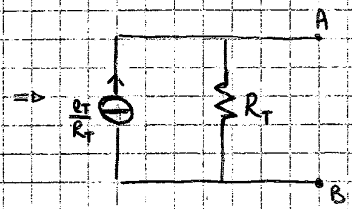
- $i_N = \dfrac{e_T}{R_T}$

- per trovare la R_N: la R_{eq} si ottiene quando tutti i generatori all'interno sono spenti. Quindi spengo e_T e ottengo un corto circuito

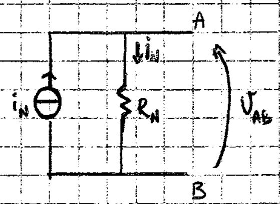


$R_N = R_T$ resistenza equivalente

$\Rightarrow$

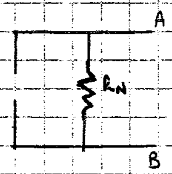


FROM NORTON TO THÈVENIN:



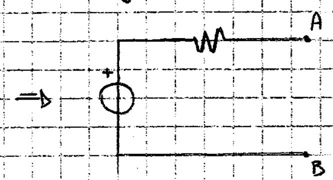
$V_{AB} = R_N i_N = e_T$ perchè V_{AB} è la tensione a vuoto

Spengo il generatore di corrente e ottengo un circuito aperto



$R_N = R_T$

$\Rightarrow$

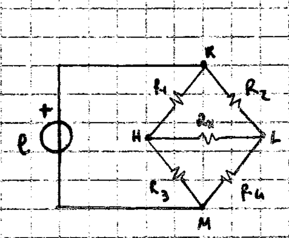


poichè $i_N = \dfrac{e_T}{R_T} \Rightarrow R_T = \dfrac{e_T}{i_N}$ dove: e_T: tensione a vuoto di A

i_N: corrente che circola in A in cortocircuito

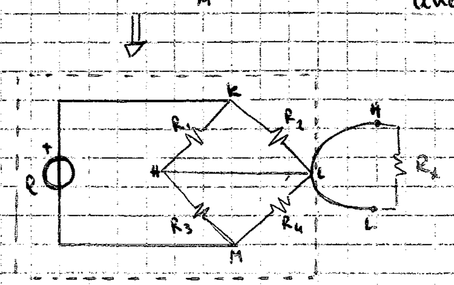
ESEMPIO:

$i_x = ?$



OSS: non si può utilizzare Millmam perchè R_x non è in parallelo. Ma non è possibile neanche applicare regola del partitore di tens

allora prendo R_x e la tiro fuori; supponendo di avere i terminali dei considero tutto il resto escluso R_x come un sottocircuito A connesso all'esterno con i poli H e L. Posso applicare Theven o Norton.



GENERATORI DIPENDENTI : producono corrente o tensione in dipendenza da altri componenti del circuito stesso → non è possibile trovarli fisicamente al supermercato

=> simbolo generico del generatore dipendente

GENERATORE DIPENDENTE DI TENSIONE

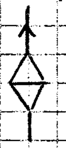
$\hat{e} = \alpha v_x$ con α = costante adimensionale nota

v_x = dipendente da un'altra tensione (v_x)

$\hat{e} = r_M i_x$ con i_x = dipendente da una corrente del circuito

r_M = costante con dimensioni di Resistenza nota

GENERATORE DIPENDENTE DI CORRENTE

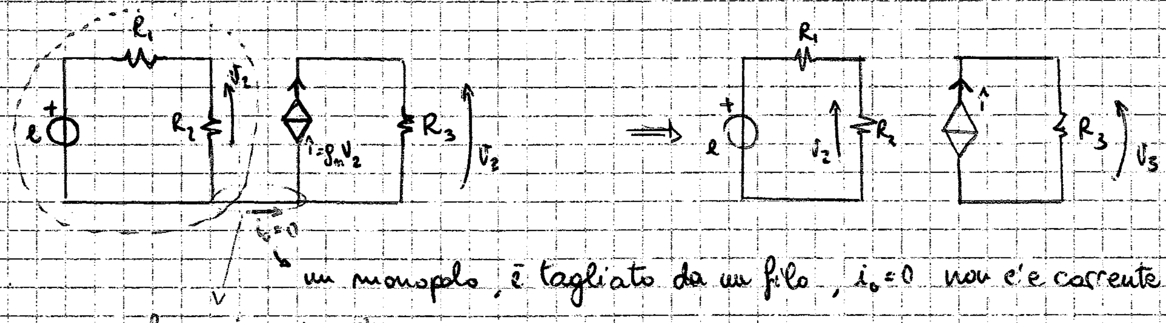


$\hat{i} = \beta i_x$ con β = costante adimensionale nota

$\hat{i} = g_m v_x$ con g_m = costante con u.m = siemens

I Generatori dipendenti si chiamano anche GENERATORI PILOTATI (v_x e i_x prendono il nome di quantità pilotanti o pilota)

ESEMPIO :



un monopolo, è tagliato da un filo, $i_0 = 0$ non c'è corrente => corto circuito

ho corto circuito

OSS: la dipendenza può anche venire con interazioni a distanza

applico partitore tensione a sinistra :

$$v_2 = e\frac{R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow \hat{i} = g_m\, e\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

a destra ho generatore di corrente in serie con R_3. LA corrente è $\hat{i}$, allora :

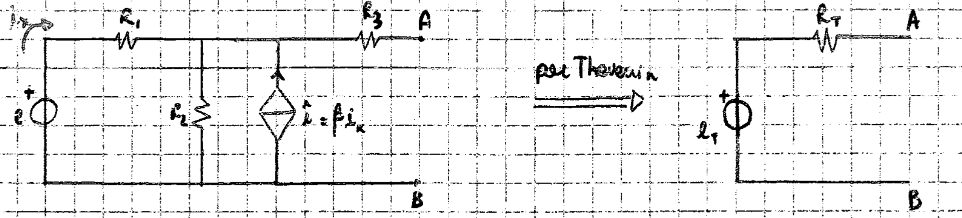
$$v_3 = R_3\,\hat{i} = R_3\, g_m\, e\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

REGOLA : 1) Trovo quantità pilotante

2) Generatore dipendente diventa noto

3) Trovo l'incognita del circuito

ESEMPIO: THEVENIN PER GENERATORI PILOTATI

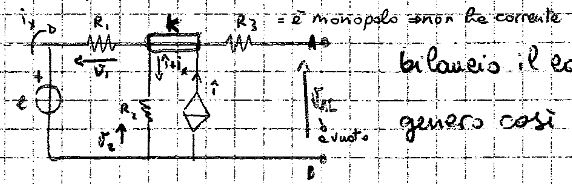


e_T: tensione a vuoto tra A

R_T: Resistenza equivalente A

1) Calcolo generatore equivalente e_T: mi devo trovare v_{AB} a vuoto

a) Calcolo quantità pilotante i_x



bilancio il corto circuito (in verde) secondo KCL: $i_x + \hat{i} = i_2$

genero così tensione in R_2 => $v_2 = (i_x + \hat{i}) R_2$

in R_1 => $v_1 = i_x R_1$

Applico KVL a sx: $e = v_1 + v_2$

$$e = R_1 i_x + R_2 (i_x + \beta i_x)$$

Allora: $i_x = \dfrac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)}$ ‖=> tutto espresso con dati iniziali

b) Calcolo il generatore pilotato => diventa indipendente $\hat{i} = \beta \dfrac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)}$

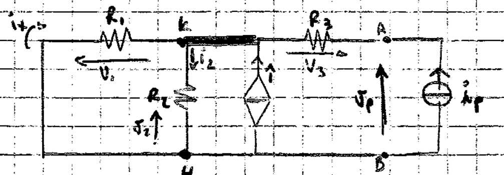
c) Calcolo v_{AB}:

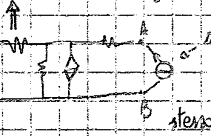
Sappiamo che su R_3 non c'è corrente nè tensione (lo elimino) => $v_{AB} = v_{KB} = v_2$

$$v_2 = v_{AB} = R_2 \frac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)} (\beta+1)$$

Thevenin: Generatori int + quello alla po[rta]

2) Calcolo R_T: considero i generatori spenti **INDIPENDENTI** R_T => collego quelli interni alle [porte]





Sia per Norton che Thevenin: spengo solo generatori indipendenti e devo collegare generato-re di corrente / tensione di prova

a) trovo quantità pilotante i_x:

i_2 è bilancio delle correnti entranti con KCL: $i_2 = i_x + i_p + \beta i_x$

su R_1 => $v_1 = R_1 i_x$

su R_2 => $v_2 = R_2 i_2$

‖ collegati tra gli stessi nodi => hanno la stessa tensione:

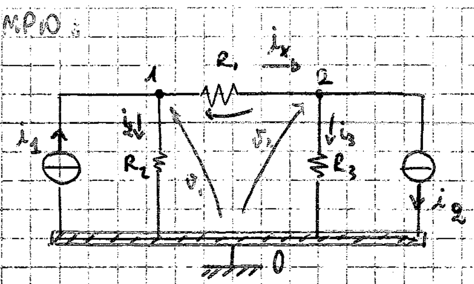
$$v_{KH} = R_2 i_2 = -R_1 i_x$$

$$-R_1 i_x = R_2 (i_x + \beta i_x + i_p)$$

Allora: $i_x = \dfrac{-R_2 i_p}{R_1 + R_2(\beta+1)}$ ← i_p alla fine deve scomparire nei calcoli perchè di prova!!

b) $\hat{i} = -\dfrac{\beta R_2 i_p}{R_1 + R_2(\beta+1)}$

ESEMPIO:



N = 3 nodi

2 tensioni nodali => sistema 2×2

R_2 soggetta alla sola tensione v_1 => $i_2 = \frac{v_1}{R_2}$

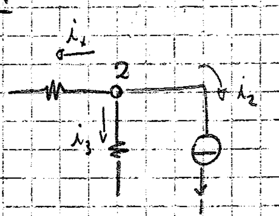
su R_1 => $i_x = \frac{v_1 - v_2}{R_1}$

KCL sul nodo 1: $i_1 = \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_1}$

su R_3 => $i_3 = v_2/R_3$

sul nodo 2 è collegata anche i_x => prendo segno diverso $i_x = \frac{v_2 - v_1}{R_1}$

KCL sul 2: $\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_3} + i_2 = 0$



Sistema d'equazioni

$$\begin{cases} v_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_1 \\ v_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) = -i_2 \end{cases}$$

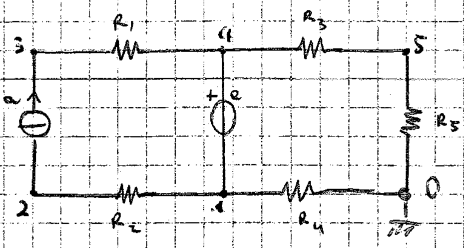
matrice dei coefficienti $\underline{A}$ — vettore incognite $\underline{v}$ — vettori termini noti $\underline{b}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

<u>OSS</u>: $-b_{M} = \pm \sum_s i_s$ (generatori di corrente attaccate al nodo) il segno dipende se è entrante nel nodo (+) o uscente (−).

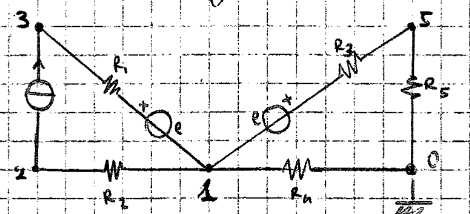
<u>OSS</u>:
- appaiono solo inversi delle resistenze (conduttanze) perché vengono moltiplicati per tensioni per dare i_1
- sulla diagonale principale sono presenti gli somme di $\frac{1}{R}$ delle resistenze collegate al nodo in questione: $A_{ii} = \sum_p \frac{1}{R_p}$ (attaccate al nodo i)
- fuori dalla diagonale hanno sempre segno negativo e contengono la somma delle $\frac{1}{R}$ delle resistenze collegate a cavallo tra i 2 nodi: $A_{ij} = -\sum_q \frac{1}{R_q}$ (tra il nodo i e j)
- A risulta essere SEMPRE simmetrica quando sono in presenza di GENERATORI DIPENDENTI

ESEMPIO:

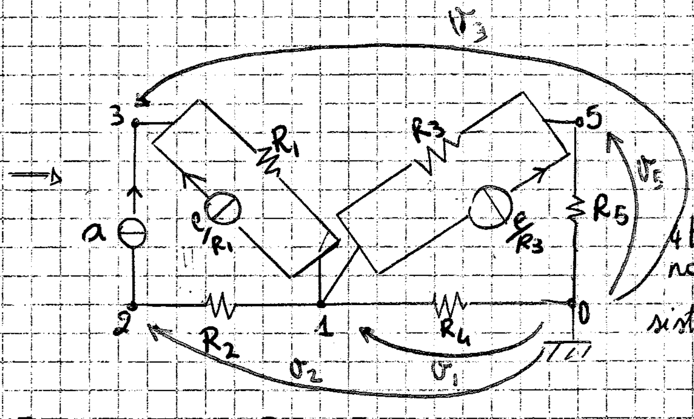


N = 6 nodi

1 generatore indipendente di tensione



N' : 5 nodi

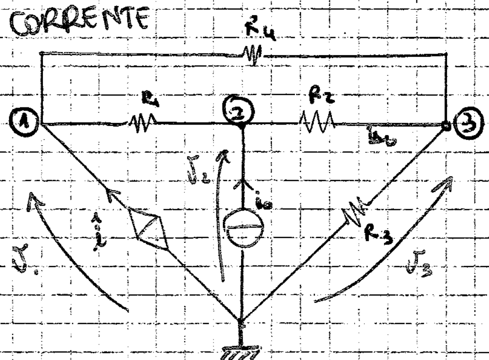


4 tensioni nodali ⇓ sistema 4x

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e}{R_1} \\ -a \\ a+\frac{e}{R_1} \\ \frac{e}{R_3} \end{bmatrix}$$

METODO DEI NODI PER GENERATORI PILOTATI

① di CORRENTE



Considerando il generatore pilotato come indipendente, per ispezione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{i} \\ i_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Ma $\hat{i} = \beta i_x$ con i_x si ottiene come tensione v su R_2 sulla resistenza. $v = v_2 - v_3$ quindi $i_x = \frac{v_2 - v_3}{R_2} \Rightarrow \hat{i} = \beta \frac{v_2 - v_3}{R_2}$. Risulta che il termine noto nella posizione 1 ora presenta le variabili v_2 e v_3, bisogna quindi operare come segue:

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)v_1 - \frac{1}{R_1}v_2 - \frac{1}{R_4}v_3 = \beta\frac{v_2}{R_2} - \beta\frac{v_3}{R_2} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{\beta}{R_2}\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_4}+\frac{\beta}{R_2}\right)v_3 = 0$$

Allora $\underline{A}$ sarà:

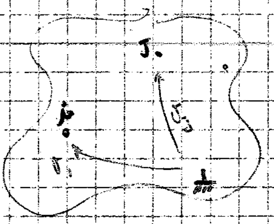
modifico solo la 1ª riga (quella del 1) →

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\beta}{R_2}\right) & -\left(\frac{1}{R_4}+\frac{\beta}{R_2}\right) \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oss: - i generatori pilotati distruggono la simmetria della matrice
- poiché $\hat{i}_x$ l'ho espresso attraverso altre variabili del sistema il valore sol...

Preso un circuito qualsiasi

OSSERVAZIONE



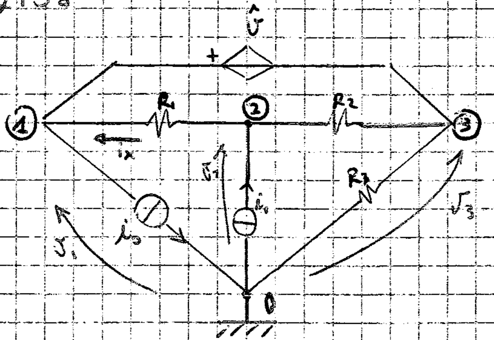
$\underline{\underline{A}}\ \underline{v} = \underline{b}$ con **b** vettore che contiene solo i generatori indipendenti

Uso metodo di Cramer per la soluzione del problema:

$$v_J = \frac{\det\left[\ \ \ |b|\ \ \ \right]}{\det A = \Delta_A}$$ con b alla J-sima posizione

una qualsiasi tensione nodale è la combinazione lineare di generatori

ESERCIZIO:



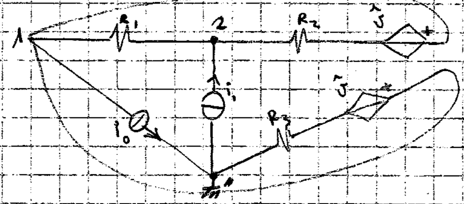
$\hat{v} = r_m i_x$

KVL: $v_1 + v = v_2 \Rightarrow v = v_2 - v_1$

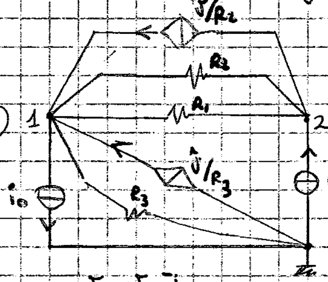
Allora $i_x = \frac{v}{R_1} = \frac{v_2 - v_1}{R_1}$

$\hat{v} = r_m i_x = r_m \frac{v_2 - v_1}{R_1}$

elimino nodo 3 facendo scorrere il generatore pilotato lungo i rami



Norton $\Longrightarrow$ entrante in 1



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_0 + r_m \frac{v_2-v_1}{R_3 R_1} + r_m \frac{v_2 - v_1}{R_1 R_2} \\ i_1 - r_m \frac{v_2 - v_1}{R_1 R_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1^a \text{ eq:} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_2 = -i_0 + r_m \frac{v_2}{R_3 R_1} - r_m \frac{v_1}{R_3 R_1} + r_m \frac{v_2}{R_1 R_2} - r_m \frac{v_1}{R_1 R_2} \\ 2^a \text{ eq:} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_2 = i_1 - r_m \frac{v_2}{R_1 R_2} + r_m \frac{v_1}{R_1 R_2} \end{cases}$$

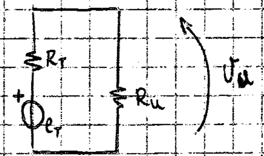
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} + r_m\left(\frac{1}{R_3 R_1}+\frac{1}{R_1 R_2}\right) & -\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+r_m\left(\frac{1}{R_3 R_1}+\frac{1}{R_1 R_2}\right)\right] \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{r_m}{R_1 R_2}\right) & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{r_m}{R_1 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_0 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Se $A \to +\infty$ $\quad v_u = A v_d \approx -\frac{A e_T / R_T}{A / R_F}$ => Allora $v_u \cong -\frac{e_T R_F}{R_T}$

Se $R_F > R_T$ allora $v_u > e_T$ cioè il valore della tensione all'uscita è maggiore di quello all'ingresso. Il meno indica la CONFIGURAZIONE INVERTENTE.

Se scelgo ~~il~~ R_F e R_T in modo opportuno allora $v_u > e_T$.

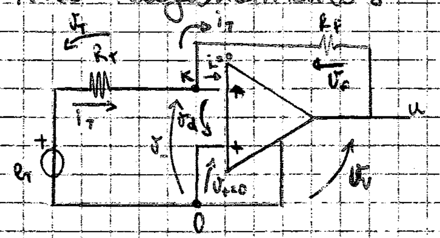
Siano R_T, e_T l'equivalente di un circuito che abbiamo schematizzato con Thevenin e sia chiuso:



$v_u = \frac{R_u e_T}{R_u + R_T}$ mi riduce il segnale che avevo in ingresso

L'amplificatore operazionale mi da in uscita una tensione più grande.

Altro ragionamento:



se considero $v_d \cong 0$ e $v_+ = 0$ allora $v_- = 0$. Non è un corto circuito (come accade per v_+). Si dice che il nodo K è in CORTO CIRCUITO VIRTUALE (no corto circuito che lo collega al riferimento)

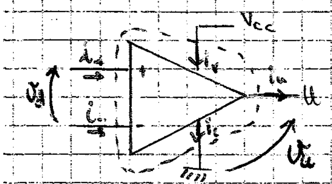
$v_T = R_T \cdot i_T$, $v_F = R_F \cdot i_F$

Se considero il percorso chiuso $0 \xrightarrow{TR} K \xrightarrow{OpAmp} 0$ e applico KVL: $e_T = R_T i_T + \cancel{v_-}$

Allora $i_T = \frac{e_T}{R_T}$

Considero $u \xrightarrow{R_F} K \xrightarrow{OpAmp} 0 \to u$ e uso KVL: $v_u + v_F = \cancel{v_-}$ Allora $v_u + R_F i_T = 0$

quindi $v_u = -e_T \frac{R_F}{R_T}$

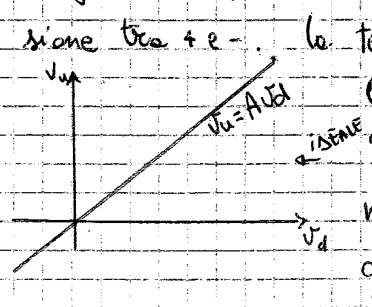


Se ingloba il mio OpAmp in superficie chiusa, posso allora usare il KCL

$i_+ + i_- + i_V = i_0 + i_u$ ma poichè $i_+ = i_- = 0$ (Resistenza tra i 2 morsetti elevata che si pensa non passa corrente => CIRCUITO APERTO)

$i_V = i_0 + i_u$

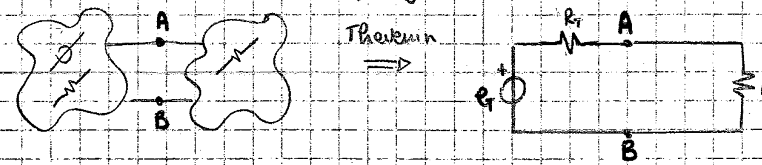
Il generatore pilotato che consideriamo attaccato tra $u - 0$, è pilotato da $\hat{v} = A v_d$ con v_d = tensione tra + e -. La tensione a vuoto dell'uscita è $v_u = A v_d$, prese A come costante.



Questo grafico si chiama la CARATTERISTICA dell' ~~ospedale~~ operazionale.

Se A è molto grande, bastano pochi valori di v_d, per creare v_u molto grande. Questa cosa non ha molto senso (avere in uscita una quantità più grande della quantità in entrata. La CARATTERISTICA vale fino a $v_u = V_{cc}$ => Caratteristica REALE

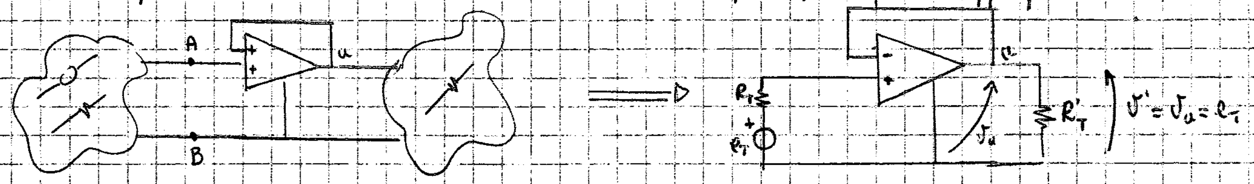
Siano 2 sotto-circuiti. Suppongo che nel SCdx non ci siano generatori:



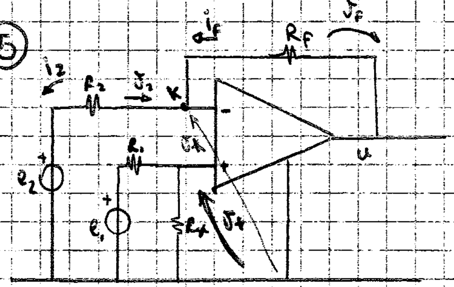
con v' che rappresenta il segnale utile. $v' = \frac{e_T R'_T}{R_T + R'_T} <$

$\Rightarrow v' < e_T$ con e_T = segnale vero

Allora, nella pratica il VOLTAGE FOLLOWER dell'esempio 4, si può rappresentare:



5)



$v_+ = e_1 \frac{R_+}{R_1 + R_+}$

$v_K = v_+ = e_2 + v_2 = e_2 + R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{-e_2 + v_K}{R_2} = \frac{-e_2 + e_1 \frac{R_+}{R_1 + R_+}}{R_2}$

$i_f = i_2$

Guardo a destra e uso KVL: $v_u = v_K + v_f$

$$v_u = v_f + v_K = i_2 R_f + R_2 i_2 + e_2 = \underbrace{e_2 + R_2 \cdot \frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2}}_{v_K} + \underbrace{R_f \cdot \frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2}}_{v_f} =$$

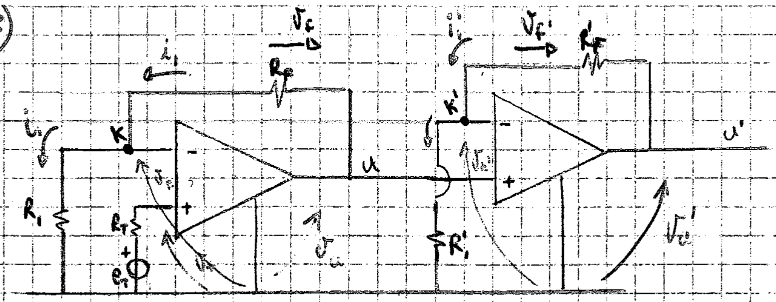
$$v_u = e_1 \frac{R_+}{R_1 + R_+} + \frac{R_f}{R_2} e_1 \frac{R_+}{R_1 + R_+} - \frac{R_f}{R_2} e_2 =$$

$$= e_1 \frac{R_+\left(1 + \frac{R_f}{R_2}\right)}{R_1 + R_+} - \cancel{\frac{R_1 + R_+}{R_1 + R_+}} \cdot \frac{R_f}{R_2} e_2 = \text{ecc. ... ecc..}$$

Amplificatore differenziale: confronto tra 2 segnali

$\frac{R_2}{R_f} = \frac{R_1}{R_T} \Rightarrow$ differenza secca tra i 2 segnali

3)



Uscita del 1° collegata all'ingress del secondo Op Amp = CASCATA

$v_+ = e$, $v_d = 0$

$v_k = e$, $i_1 = \frac{e}{R_1}$, $v_f = \frac{e}{R_1} R_f \Rightarrow v_u = v_f + v_k = e\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right)$

v_u diventa ora la v_+' del 2° OpAmp $\quad v_u = v_+' = e\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right)$

$v_f' = R_f' \cdot i_1' = R_f' \cdot \frac{e}{R_1'}\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) = R_f' \cdot \frac{v_u}{R_1'}$

$v_k' = v_u = e\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right)$, $i_1' = \frac{v_u}{R_1'} = \frac{e}{R_1'}\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) = \frac{v_u}{R_1'}$

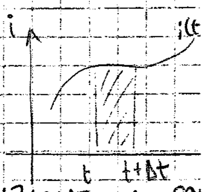
$v_{u'} = v_u + v_f' = v_u\left(1 + \frac{R_f'}{R_1'}\right) = v_u + v_u\left(\frac{R_f'}{R_1'}\right) = v_u\left(1 + \frac{R_f'}{R_1'}\right)$

$v(t) - v_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$ ricalcolo la tensione per $t+\Delta t$

$v(t+\Delta t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)dt + v_0$ faccio la sottrazione

$v(t) - \cancel{v_0} - v(t+\Delta t) + \cancel{v_0} = \frac{1}{C}\left[\int_{t_0}^{t} i(t)dt - \int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)dt\right]$ cambio segno

$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t)dt - \int_{t_0}^{t} i(t)dt\right] = \frac{1}{C}\left[\int_{t_0}^{t} i(t)dt + \int_{t}^{t+\Delta t} i(t)dt - \int_{t_0}^{t} i(t)dt\right] =$

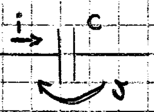


$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i(t)dt$

se $\Delta t \to 0$ $v(t+\Delta t) - v(t) = 0$ ⇒ tensione v non ha dei salti ⇒ CONDIZIONE di CONTINUITÀ di una funzione, in questo caso della tensione sul condensatore. (NON VALE per la corr

SI dice che il condensatore ha MEMORIA di tensione, perché essa è influenzata da tutta la storia della corrente.

PROPRIETÀ:



$i = C\frac{dv}{dt}$. Potenza assorbita dal condensatore $p = vi$ secondo la convenzione degli utilizzatori ⇒ $p = Cv\frac{dv}{dt}$

se $v>0$ crescente ⇒ p è positiva

se $v>0$ decrescente ⇒ p è negativa

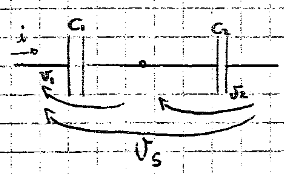
Si ricordi che $p = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ ⇒ $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \int_{t_0}^{t} p(t)dt$ → $v(t_0) =$ → $i_0 = 0$

sia t_0 l'istante in cui il condensatore inizia a funzionare, prima era spento ⇒ $\mathcal{E}_0 = 0$

$E = \int_{t_0}^{t} Cv\frac{dv}{dt}dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = C\left[\frac{v(t)^2}{2} - \frac{v(t_0)^2}{2}\right] = \frac{Cv(t)^2}{2}$. Siamo sicuri che E è sempre una quantità positiva

CONDENSATORI IN SERIE

$i = C\frac{dv}{dt}$ $v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$ serie



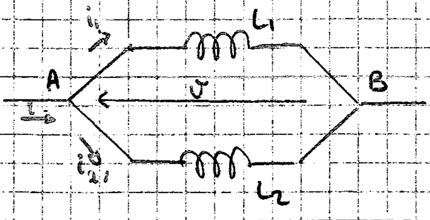
$v_1 = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$ $v_2 = \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$

$v_s = v_1 + v_2 = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i(t')dt$

$v_s = \frac{1}{C'}\int_{t_0}^{t} i(t')dt$ con $\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ equivalente

Risulta che per condensatori in SERIE, l'inverso della capacità equivalente è uguale alla somma degli inversi delle varie capacità

INDUTTORI IN PARALLELO



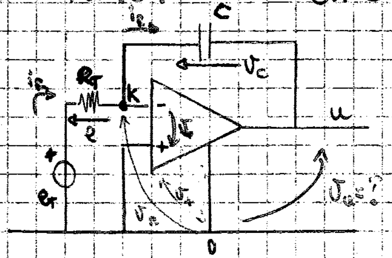
uso KCL in A: $i = i_1 + i_2$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)dt = \left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$i = \frac{1}{L'}\int_{t_0}^{t} v(t)dt \quad \text{con} \quad \frac{1}{L'} = \frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$

Induttori in parallelo, l'inverso dell'induttanza equivalente sarà la somma degli inversi delle singole induttanze.

ESEMPIO: CIRCUITO INTEGRATORE



$v_K = 0$, $v_+ = v_d = 0$

$i_R = \frac{e}{R}$, $v_{R_1} = e$

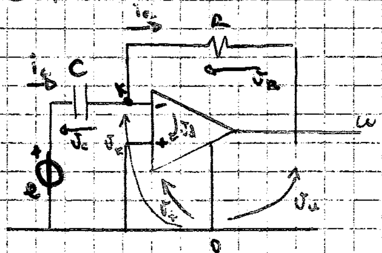
Sul condensatore $i = i_R \Rightarrow v_c = \frac{1}{C}\int_{t_0} i(t)dt' = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \frac{e}{R}dt'$

$$v_c = \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e\,dt'$$

uso KVL $0 \to u \xrightarrow{c} K \to 0$

$$v_u + v_c = \cancel{v_K} \Rightarrow v_u = -v_c = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e\,dt'$$

ESEMPIO



$v_+ = v_d = 0 \Rightarrow v_K = 0 \qquad v_c = e$

$i_c = C\frac{de}{dt}$ uso KVL $0 \to u \to K \to 0 \quad v_u + v_R = v_K$

$$v_u = -v_R = -R i_c = -RC\frac{de}{dt}$$

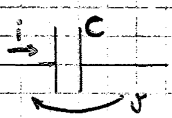
CIRCUITO DERIVATORE

REWIND:

Bipoli $\begin{cases} \text{differenziali} \\ \text{dinamici} \\ \text{con memoria} \end{cases}$

sono:

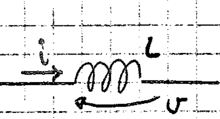
CONDENSATORI



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

v deve essere funzione continua

INDUTTORI



$$v = L\frac{di}{dt}$$

i deve essere funzione continua.

se $s(t)$ = costante ⇒ circuito contiene solo generatori costanti.

Allora: $x(t) = x_o(t) + x_p(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + K_o$. Per calcolare K_o e K devo operare così:

Introduco la condizione iniziale: - per $t=0 \Rightarrow x(t=0) = x_o$. $x_o = K + K_o \Rightarrow K = (x_o - K_o)$

Allora $x(t) = (x_o - K_o)e^{-t/\tau} + K_o$ per $t \geq 0$. Ma quanto vale K_o? Calcolo la soluzione:

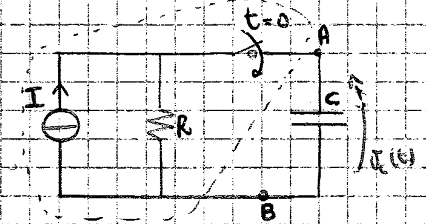
- per $t \to \infty \Rightarrow x(t \to \infty) = K_o$.

Allora: $x(t) = (x_o - x(t\to\infty))e^{-t/\tau} + x(t\to\infty)$, $t \geq 0$

REGOLA: Hp: 1 solo elemento con memoria; solo generatori costanti

Solo in queste condizioni posso applicare quella formula

ESEMPIO 1:

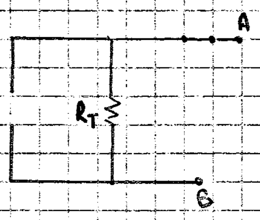


Supponiamo di chiudere l'interruttore ad un certo istante di tempo $t=0$. Cosa capita al condensatore? Qual è la sua tensione v_c al variare del tempo?

Questo circuito rispetta le ipotesi per poter subito scrivere la soluzione:

$$v_c(t) = \big(\underbrace{v_c(0) - v_c(\infty)}_{\text{incognite}}\big)e^{-t/\tau} + v_c(\infty), \quad \text{per } t \geq 0$$

- Calcolo $\tau = R_T C$ cioè equivalente di Thèvenin, con interruttore chiuso perchè $t=0$ chiudo l'interruttore quindi



$R_T = R \Rightarrow \underline{\tau = CR}$

con tutti generatori spenti

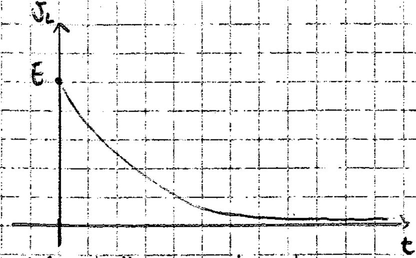
- Calcolo condizione iniziale $v_c(0)$ in cui l'interruttore si è chiuso e il circuito inizia a funzionare. Le cariche dal generatore iniziano a fluire in parte sulla resistenza e in parte sul condensatore. Si ricordi che sul condensatore, v è quantità CONTINUA (non può fare salti) ⇒ Anche a $t=0$, allora la tensione deve essere uguale all'ultimo istante prima della chiusura: $v_c(0^-) = v_c(0^+)$. La mia incognita è $v_c(0^+)$.

In $v_c(0^-)$ il circuito è scarico ⇒ sul condensatore nè corrente, nè tensione:

$$\underline{v_c(0^-) = 0 = v_c(0^+)}$$

- Calcolo condizione finale $v_c(\infty)$. Interruttore già chiuso a $t=0$. So che all'∞ l'esponenziale tende a 0. ⇒ se avevo a che fare con generatori costanti, dopo che l'exp si è esaurito continuerò ad avere tutto costante, cioè anche la tensione sul condensatore ⇒ $i_c = 0$. Ma un elemento con corrente nulla è un circuito aperto. Allora il circuito, nella condizione iniziale sarà equivalente a:

SIGNIFICATO FISICO: per $t=0$ passa corrente nel circuito. Se sfrutto equazione di funzionamento dell'induttore $V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{E}{R}\frac{d}{dt}\left(1-e^{-\frac{tR}{L}}\right) = L\frac{E}{R}\left[-\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{tR}{L}}\right] = +Ee^{-\frac{Rt}{L}}$, $t \geq 0$

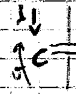


$V_L(0) = E$
$V_L(\infty) = 0$

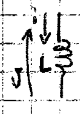
- In tutti i circuiti con elementi differenziali, tensione e corrente non hanno più stesso andamento (sebbene la costante di tempo sia la stessa)
- Nell'ultimo istante $i_L(0^-) = 0 = i_L(0^+)$ primo istante, mentre $V_L(0^-)=0$ e $V_L(0^+)=$ Confermato che su un induttore corrente è funzione continua mentre tensione può avere salti.

REWIND:

Transitori Hp: 1 solo elemento differenziale
generatori costanti $\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{S}{\tau}$, per $t \geq 0$



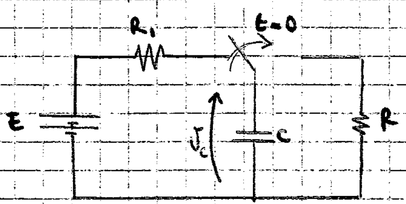
$x = V_C$
$\tau = CR_{eq}$



$x = i_L$
$\tau = L/R_{eq}$

Le soluzioni sono del tipo:
$$x(t) = \left[x(0^+) - x(\infty)\right]e^{-t/\tau} + x(\infty), \quad t \geq 0$$

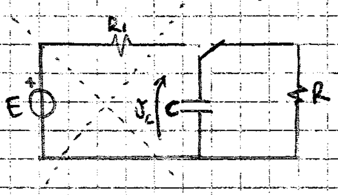
ESEMPIO: COMMUTATORE



$t<0$ interruttore chiude circuito di sinistra
$t=0$ interruttore si sposta dall'altro lato del circuito

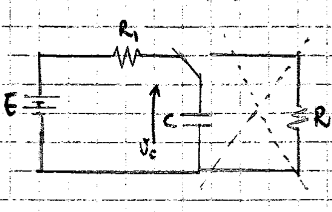
$$V_C(t) = \left[V_C(0^+) - V_C(\infty)\right]e^{-t/\tau} + V_C(\infty), \quad \text{per } t \geq 0$$

- Calcolo $\tau = CR_{eq}$ in $t \geq 0$



$R_{eq} = R$
$\underline{\tau = RC}$

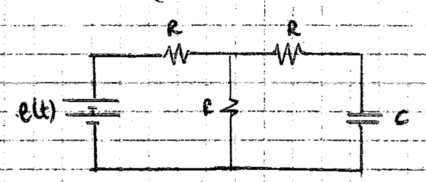
- Calcolo condizione iniziale $V_C(0^+)$. Poiché tensione continua allora $V_C(0^-) = V_C(0^+)$



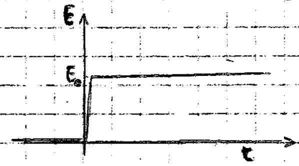
OSS: circuito è nato in questo modo, con generatore costante, dopo tanto tempo tutti gli altri elementi sono costanti $\Rightarrow$ Consideriamo il circuito in condizioni STAZIONARIE. Se tensione sul condensatore V_C(...) $\Rightarrow i_C = 0 \rightarrow$ CIRCUITO APERTO. $\Rightarrow \underline{V_C(0^-) = E}$, per $t<0$

$V_C(0^-) = \underline{E = V(0^+)}$

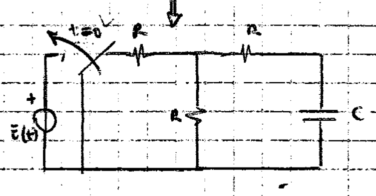
ESEMPIO: (BATTERIA CON ANDAMENTO A GRADINO)



Con generatore che tensione non costante con grafico

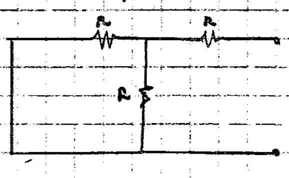


FUNZIONE A GRADINO



$$V_c(t) = \left[V_c(0^+) - V_c(\infty)\right] e^{-t/\tau} + V_c(\infty), \quad t \geq 0$$

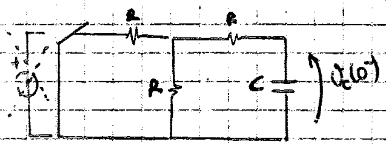
- Calcolo $\tau = R_{eq} C$, per $t \geq 0$



Faccio equivalente di Thevenin: $R_{eq} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2} R$

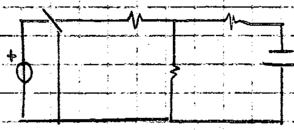
$\underline{\tau = \frac{3}{2} RC}$

- Calcolo condizione iniziale $V_c(0^+)$. Poichè tensione continua $V_c(0^-) = V_c(0^+)$



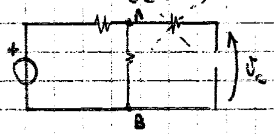
CIRCUITO INERTE : $V_c(0^-) = 0 = V_c(0^+)$

- Calcolo condizione all'infinito $V_c(\infty)$



CONDIZIONI STAZIONARIE : $V_c(\infty) = cost \quad i_c = 0 \Rightarrow$

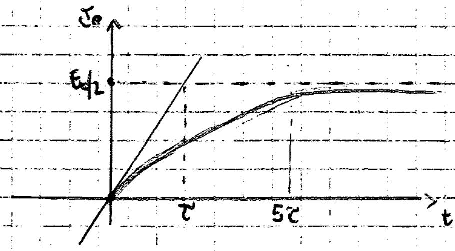
CIRCUITO APERTO



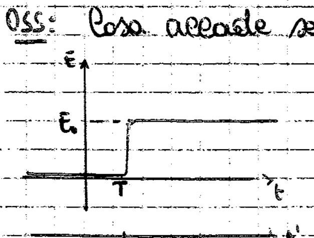
$\underline{V_c(\infty)} = V_{AB} = E_0 \frac{R}{2R} =$

Soluzione: $V_c(t) = -\frac{E_0}{2} e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2} = +\frac{E_0}{2}\left(-e^{-\frac{2t}{3RC}} + 1\right), \; t \geq 0$

GRAFICO



OSS: Cosa accade se il cambiamento del circuito avviene in $t \neq 0$?



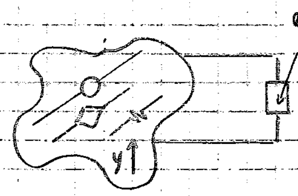
$t' = t - T$ → prende il nome di RITARDO del GRADINO

la soluzione sarà $V_c(t') = \left[V_c(0) - V_c(\infty)\right] e^{-\frac{t'}{\tau}} + V_c(\infty), \; t' \geq 0$

faccio tutti i passaggi convenzionali come variabile t', il cui salto è al tempo $t' = 0$. (Preso esempio di prima)

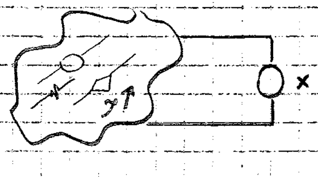
$V_c(t') = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t'}{3RC}}\right), \; t' \geq 0$ faccio cambio variabili:

$$V_c(t) = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2(t-T)}{3RC}}\right), \; t \geq T$$



Hp: Siano i generatori COSTANTI

Supponiamo di aver trovato la soluzione del nostro elemento differenziale. Esso è diventato noto, posso considerarlo come un generatore dell'eaguita trovata (condens → gen. tensione, indutt → gen corrente)



Sappiamo, per la sovrapposizione degli effetti, che è possibile avere y come comb. lineare di tutti gli elementi interni + il generatore esterno: $y = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \beta_1 \hat{i}_1 + \beta_2 \hat{i}_2 + \ldots}_{\text{effetto dei generatori interni del circuito } U = \text{cost} \times Hp} + \gamma x$

Quindi $y = U + \gamma x$. Derivo: $\frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{dU}{dt}} + \frac{d}{dt}(\gamma x)$

OSS: γ dipende dalle resistenze e eventualmente dai coefficienti dei generatori all'interno del circuito ⇒ $\gamma = \text{cost}$. Allora: $\frac{dy}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt}$

Si ricorda che l'equazione differenziale dei transitori è: $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{S}{\tau}$. Allora:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{x}{\tau}\right)$$

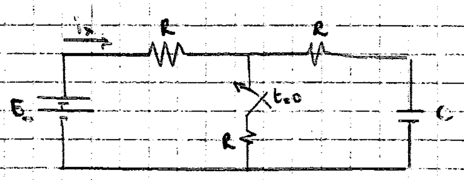
ricavo x dall'equazione di sopra $x = \frac{y-U}{\gamma}$ e sostituisco: $\frac{dy}{dt} = \gamma\left(\frac{S}{\tau} - \frac{y-U}{\gamma\tau}\right)$

$\frac{dy}{dt} = \gamma\frac{S}{\tau} - \frac{y-U}{\tau}$ S e U dipendono dai generatori indipendenti del circuito $\gamma S + U = M$

$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{M}{\tau}$ la cui soluzione sarà: $y(t) = \left[y(0^+) - y(\infty)\right]e^{-t/\tau} + y(\infty)$, $t \geq 0$

OSS: la costante di tempo, in un circuito, non importa di quale variabile, è sempre la stessa

ESERCIZIO:

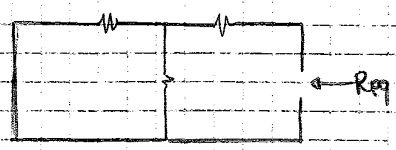


Calcolo di $i_x(t) = \left[i_x(0^+) - i_x(\infty)\right]e^{-t/\tau} + i_x(\infty)$, $t \geq 0$

NON è più verificata la condizione per cui $y(0^-) = y(0^+)$

- Calcolo $\tau = R_{eq} C$

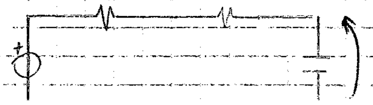
R_{eq}: stacco generatore e considero per $t \geq 0$, stacco il condensatore



$$R_{eq} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$$

$$\tau = \frac{3}{2}RC$$

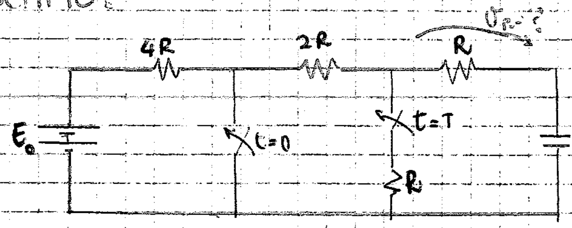
- Calcolo condizione iniziale $i_x(0^+)$. Sfrutto la continuità della tensione sul condensatore. Per $t<0$ regime stazionario $V_c = \text{cost} \Rightarrow i_c = 0 \Rightarrow$ CIRCUITO APERTO



$V_c(0^-) = E_0 = V_c(0^+)$ → la rappresento come una batteria

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 86

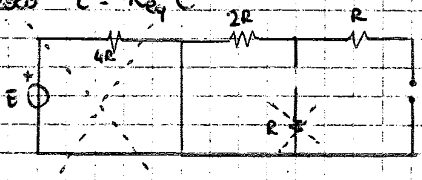
ESEMPIO:



Soluzione: $v_R(t) = \left[v_R(0^+) - v_R(+\infty)\right] e^{-t/\tau} + v_R(+\infty)$,

$0 < t < T$

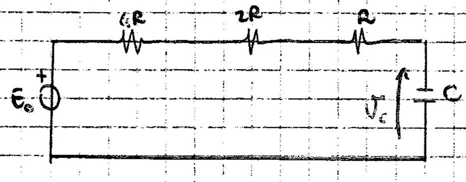
- Calcolo $\tau = R_{eq} C$



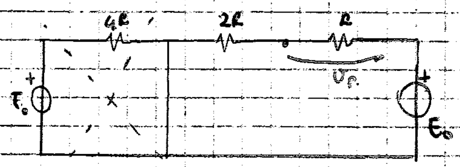
tolgo il condensatore per calcolarmi $R_T = 2R + R = 3R$

$\underline{\tau = 3RC}$

- Calcolo $v_R(0^+)$. Non essendo variabile privilegiata, non è funzione continua: $v_R(0^+) \neq v_R(0^-)$.
Allora calcolo $v_c(0^-)$ e poi ricavo la mia incognita. Per $t<0$ il circuito sarà:



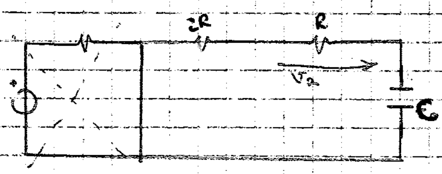
Poichè creato così il circuito è in condizioni STAZIONA- RIE ⇒ tutto costante ⇒ $v_c = cost$ ⇒ $i_c = 0$ ⇒ CIRCUITO APERTO. Allora $v_c(0^-) = E_0$ (sulle resistenze non passa corrente). Per calcolarmi $v_R(0^+)$ riscrivo circuito all'istante 0^+. Per la continuità di



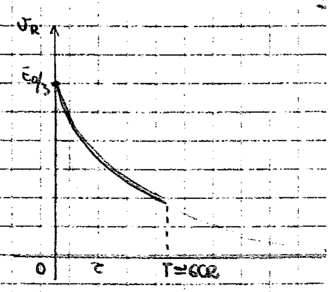
v_c sarà $\underline{v_c(0^-) = E_0 = v_c(0^+)}$. Lo scrivo come un generatore di tensione.

CIRCUITO SERIE: partitore tensione $\underline{v_R(0^+)} = \frac{E_0 R}{2R + R} = \frac{E_0}{3}$

- Calcolo $v_R(\infty)$ (Non consideriamo il secondo interruttore chiuso)



$\underline{\text{CIRCUITO INERTE}}$ ⇒ $\underline{v_R(+\infty) = 0}$
⇓
anche $v_c(+\infty) = 0$



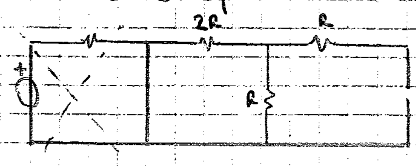
Soluzione della prima parte: $v_R(t) = \frac{E_0}{3} e^{-\frac{t}{3RC}}$, $0 < t < T$

$t > T$

Cambio di variabili in modo che la chiusura dell'interruttore capiti a $t' = 0$. Allora $t' = t - T$

Soluzione: $v_R(t') = \left[v_R(0^+) - v_R(\infty)\right] e^{-t'/\tau'} + v_R(\infty)$, $t' > 0$

- Calcolo $\tau' = C R_{eq}$



$R_T = R + 2R /\!/ R = R + \frac{2R^2}{3R} = \frac{5}{3} R$

$\underline{\tau' = \frac{5}{3} RC}$ $(\neq \tau)$

- Calcolo $v_R(0^+)$. Calcolo la tensione sul condensatore. Ma $t' = 0^-$ ⇒ $t = T$. $v_c(T) = v_c($
per $0 < t < T$ la $v_c(t) = E_0 e^{-t/3RC}$
Allora $t' = 0^-$ ⇒ $t = T$ quindi $v_c(t' = 0 \Rightarrow t = T) = E_0 e^{-\frac{T}{R3C}} = E_0 e^{-2} = \frac{E_0}{e^2}$ ($T = 6CR$)

Soluzione sarà: $\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{X}_p$ → soluzione partiol $x_p = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$

con $\underline{x}_0$ soluzione dell'omogenea: nel nostro caso (C+L): $\begin{cases} v_c = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \\ i_L = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

λ_1, λ_2 sono autovalori della matrice $\underline{\underline{A}}$ ottenuti:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow \text{ottengo gli auto}$$

η_1, η_2 sono componenti degli autovettori della matrice $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

Devo, poi, imporre la condizione iniziale $(t=0)$: $\begin{cases} v_c(0) = K_1 + K_2 + W_1 \\ i_L(0) = K_1\eta_1 + K_2\eta_2 + W_2 \end{cases}$

Sappiamo se W_1 e W_2 sono noti? Sono la soluzione per tempi infiniti

per $t \to \infty$ $\begin{cases} v_c(t \to +\infty) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + W_1 \\ i_L(t \to +\infty) = k_1 \cdot \eta_1 \cdot 0 + k_2 \cdot \eta_2 + W_2 \end{cases}$ || è impossibile avere tensioni e correnti infinite, perché sono valori fin

Allora: $\begin{cases} v_c(0) = k_1 + k_2 + v_c(\infty) \\ i_L(0) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + i_L(\infty) \end{cases}$

k_1 e k_2 vengono fuori dalla soluzione del sistema.

SCHEMA RIASSUNTIVO:

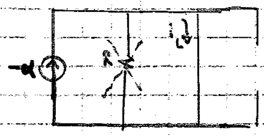
- $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovalori}} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda) = 0$

  $\xrightarrow{\text{autovettori}} \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \end{bmatrix}$

- Condizione iniziale: $x_1(0)$, $x_2(0)$
- Condizioni finali $(t \to +\infty)$ $x_1(\infty)$, $x_2(\infty)$
- risolvere $\begin{cases} x_1(0) = k_1 + k_2 + x_1(\infty) \\ x_2(0) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + x_2(\infty) \end{cases}$

Soluzione del circuito di ordine 2:

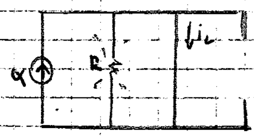
$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + x_1(\infty) \\ x_2(t) = k_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + x_2(\infty) \end{cases}, \quad t \geq 0$$



$v_c(0^-)=0$

$$\begin{cases} i_L(0^-) = -\alpha \\ v_c(0^-) = 0 \end{cases}$$

(*) Condizioni finali ($t \to \infty$) condizioni STAZIONARIE



$$\begin{cases} v_c(\infty) = 0 \\ i_L(\infty) = \alpha \end{cases}$$

(*) Metto tutto insieme per trovarmi k_1 e k_2:

$$\begin{cases} v_c(0) = k_1 + k_2 + v_c(\infty) \\ i_L(0) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + i_L(\infty) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -k_2 \\ -\alpha = -\left(\frac{1}{R} + \lambda_1 C\right)k_1 - \left(\frac{1}{R} + \lambda_2 C\right)k_2 + \alpha \end{cases}$$

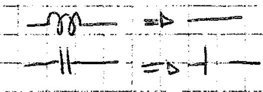
$$-2\alpha = \left(\frac{1}{R} + \lambda_1 C\right)k_2 - \left(\frac{1}{R} + \lambda_2 C\right)k_2 = \left(\cancel{\frac{1}{R}} + \lambda_1 C - \cancel{\frac{1}{R}} - \lambda_2 C\right)k_2 = C(\lambda_1 - \lambda_2)k_2$$

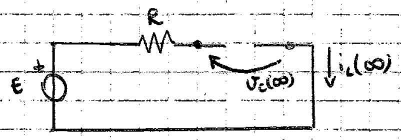
$$k_2 = -\frac{2\alpha}{C(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

(*) Soluzione:

$$\begin{cases} v_c(t) = \dfrac{2\alpha}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 t} - \dfrac{2\alpha}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_2 t} + \cancelto{0}{v_c(\infty)} \\ i_L(t) = \dfrac{-2\alpha}{\cancel{C}(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \cancel{C}\left(\dfrac{1}{RC} + \lambda_1\right) e^{\lambda_1 t} + \dfrac{2\alpha}{\cancel{C}(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \cancel{C}\left(\dfrac{1}{RC} + \lambda_2\right) e^{\lambda_2 t} + \alpha \end{cases}$$

(*) Condizioni finali ($t \to \infty$) Condizioni STAZIONARIE :





$\Rightarrow i_L(\infty) = 0$

$v_C(\infty) = E$

Scrivo il sistema

$$\begin{cases} v_C(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + v_C(\infty) \\ i_L(t) = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + i_L(\infty) \end{cases} \quad t \geq 0$$

K_1 e K_2 sono ancora incogniti

(*) Calcolo k_1 e k_2

$$\begin{cases} v_C(0) = k_1 + k_2 + v_C(\infty) \\ i_L(0) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + i_L(\infty) \end{cases} ; \begin{cases} 0 = k_1 + k_2 + E \\ \frac{E}{R} = k_1 C\lambda_1 + k_2 C\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -k_2 - E \\ \frac{E}{R} = k_2(\eta_2 - \eta_1) - \eta_1 E \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = \frac{(1+\eta_1 R)E}{R} \cdot \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)} = \frac{(1 + C\lambda_1 R)E}{R} \cdot \frac{1}{C\lambda_2 - C\lambda_1} \\ k_1 = \frac{-ER(C\lambda_2 - C\lambda_1) - E(1 + C\lambda_1 R)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-E(1 + RC\lambda_2)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{cases} \begin{cases} k_2 = \frac{E(1 + CR\lambda_1)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ k_1 = -\frac{E(1 + CR\lambda_2)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{cases}$$

(*) soluzione:

$$\begin{cases} v_C(t) = -\frac{E(1+RC\lambda_2)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{E(1+CR\lambda_1)}{RC(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t} + E \\ i_L(t) = -\frac{E(1+RC\lambda_2)}{R(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{E(1+RC\lambda_1)}{R(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

OSS: Gli autovalori influenzano l'andamento nel tempo:

Caso $\alpha^2 > \omega_0^2$: autovalori REALI NEGATIVI ($\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$) avremo:

expo decrescenti

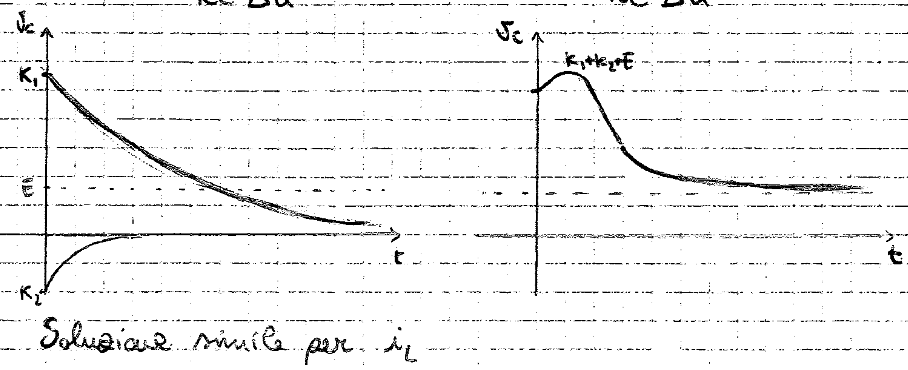
$$\begin{cases} v_C(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t} + E \\ i_L(t) = -K_1 C\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} - K_2 C\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \end{cases}$$

costituisco in k_1 e k_2 il valore di λ

$$K_1 = +\frac{E(1 - CR\alpha_2)}{RC(\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad K_2 = -\frac{E(1 - CR\alpha_1)}{RC(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\alpha_1 < \alpha, \quad \alpha_2 > \alpha \quad \Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1) = \Delta\alpha > 0$$

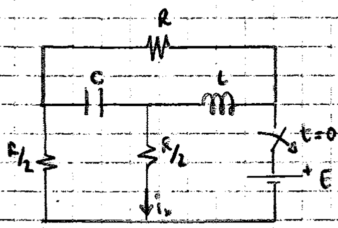
$$K_1 = \frac{E(1 - CR\alpha_2)}{RC\,\Delta\alpha} > 0 \qquad K_2 = -\frac{E(1 - CR\alpha_1)}{RC\,\Delta\alpha} < 0$$



Soluzione simile per i_L

Caso $\alpha^2 = \omega^0$: autovalori COINCIDENTI ($\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$)
andamento esponenziale decrescente

ESEMPIO (completo):



- rilavare sistema differenziale
- trovare autovalori e autovettori
- trovare condizione iniziale
- trovare condizione finale
- scrivere soluzione per v_C e i_L e i_x

dati i seguenti valori di $\frac{R}{L}$ e $\frac{1}{RC}$, scrivere la soluzione per v_C e i_L, con valori numerici, tracciare i grafici

- $\frac{R}{L} = 2 \quad \frac{1}{RC} = 2$
- $\frac{R}{L} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{RC} = \frac{1}{2}$
- $\frac{R}{L} = 1 \quad \frac{1}{RC} = 1$

CONClusione: ~~per~~ ogni funzione sinusoidale si può associare un numero compless e viceversa (è una relazione biunivoca).

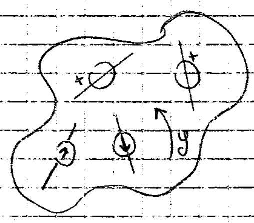
ES: $\hat{S} e^{J\omega t} = A e^{J\varphi} \cdot e^{J\omega t} = A e^{J(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + JA\sin(\omega t+\varphi)$. Risulta che la p reale è la funzione di partenza.

Quindi
$$\begin{cases} s(t) = \dfrac{\hat{S} e^{J\omega t} + \hat{S}^* e^{-J\omega t}}{2} \\ s(t) = \mathrm{Re}\left\{ \hat{S} e^{J\omega t} \right\} \end{cases}$$

In entrambi i casi ω non interviene nelle relazioni (bisogna calcolarlo a parte)

DEF: Il numero complesso che corrisponde ad una funzione sinusoidale si chiama FASORE (per interpretare il risultato dobbo tornare sulle funzione sinusoidale perchè complessi sono artificio)

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



Sia y una qualsiasi variabile elettrica allora:

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$$

Siano i nostri generatori tutti di tipo sinusoidale con, però, stessa ω Frequenz

cioè
$$\begin{aligned} e_1 &= E_1\cos(\omega t+\varphi_1) & &\longrightarrow \hat{E}_1 = E_1 e^{J\varphi_1} \\ e_2 &= E_2\cos(\omega t+\varphi_2) & &\longrightarrow \hat{E}_2 = E_2 e^{J\varphi_2} \\ &\vdots \\ a_1 &= A_1\cos(\omega t+\vartheta_1) & &\longrightarrow \hat{A}_1 = A_1 e^{J\vartheta_1} \end{aligned}$$
FASORI

Se considero esauriti i transitori allora $y = Y_0\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow \hat{Y} = Y_0 e^{J\phi}$

Risulta che: $\underbrace{\mathrm{Re}\left[\hat{Y} e^{J\omega t}\right]}_{y} = \alpha_1 \underbrace{\mathrm{Re}\left[\hat{E}_1 e^{J\omega t}\right]}_{e_1} + \alpha_2 \mathrm{Re}\left[\hat{E}_2 e^{J\omega t}\right] + \ldots + \beta_1 \mathrm{Re}\left[\hat{A}_1 e^{J\omega t}\right]$

Risulta sicuramente che i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1 \ldots \in \mathbb{R}$ perchè dipendono da Resistori e altri elementi del circuito, posso portarli all'interno dell parte reale e sommare ~~tt~~ le F

$$\mathrm{Re}\left[\hat{Y} e^{J\omega t} - \alpha_1\hat{E}_1 e^{J\omega t} - \alpha_2\hat{E}_2 e^{J\omega t} - \ldots - \beta_1\hat{A}_1 e^{J\omega t}\right] = 0$$

sarà $\hat{Y}\cancel{e^{J\omega t}} - \alpha_1\hat{E}_1\cancel{e^{J\omega t}} - \alpha_2\hat{E}_2 e^{J\omega t} - \ldots - \beta_1\hat{A}_1\cancel{e^{J\omega t}} = 0$

$$\hat{Y} = \alpha_1\hat{E}_1 + \alpha_2\hat{E}_2 + \ldots + \beta_1\hat{A}_1$$

Conclusione: Si dimostra dunque che la sovrapposizione degli effetti vale anche p i fasori

- Prodotto: $\hat{z}_p = \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + j a_1 b_2 + a_2 j b_1 - b_1 b_2 =$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ LUNGO PROCEDIMENTO

oppure:

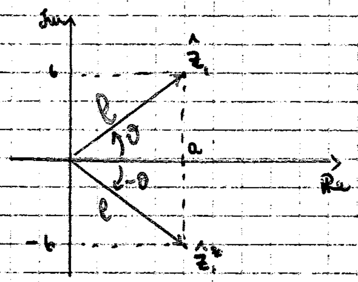
$$= \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \boxed{\rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}}$$ DA USARE!

- Rapporto: $\hat{z}_R = \frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 + jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{(a^2 + b^2) + j(\cancel{a_2 b_2 - a_2 b_2})} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 ...}{a^2 + b^2}$

oppure:

$$= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}}$$ DA USARE!

complesso coniugato:



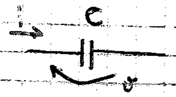
$\hat{z} = a + jb = \rho e^{j\theta}$

$\hat{z}^* = a - jb = \rho e^{-j\theta}$

Prodotto tra coniugati: $\hat{z}_p = \hat{z} \cdot \hat{z}^* = \rho e^{j\theta} \cdot \rho e^{-j\theta} = \rho^2 e^{j(\theta - \theta)} = \rho^2$

OSS: $|j| = 1$ $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$

- CONDENSATORE



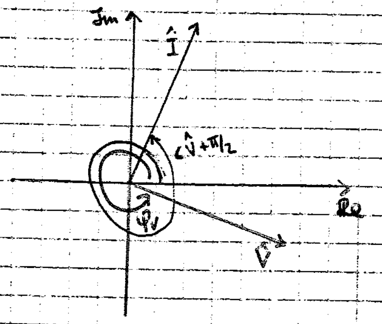
$$i = C \frac{dv}{dt}$$

supponiamo di essere in Regime sinusoidale
$$\begin{cases} v(t) = Re\left[\hat{V} e^{j\omega t}\right] \\ i(t) = Re\left[\hat{I} e^{j\omega t}\right] \end{cases}$$

$$Re\left[\hat{I} e^{j\omega t}\right] = C\, Re\left[\frac{d}{dt} \hat{V} e^{j\omega t}\right]$$

$$Re\left[\left(\hat{I} - C\hat{V} j\omega\right) e^{j\omega t}\right] = 0$$

Allora: $\hat{I} = j\omega C \hat{V}$



$$\hat{I} = I e^{j\angle\hat{I}}$$
$$\hat{V} = V e^{j\angle\hat{V}}$$

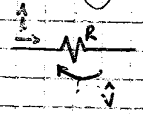
Allora: $\hat{I} : I e^{j\angle\hat{I}} = e^{j\pi/2} \omega C V e^{j\angle\hat{V}}$

$I = \omega C V$, $\angle\hat{I} = \angle\hat{V} + \frac{\pi}{2}$

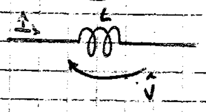
$\hat{I}$ e $\hat{V}$ sono in QUADRATURA con il fasore $\hat{I}$ in ANTICIPO sul fasore $\hat{V}$

MEMO:

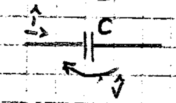
$\hat{V} = R\hat{I} \Rightarrow \hat{I} = \frac{1}{R}\hat{V}$



$\hat{V} = j\omega L \hat{I} \Rightarrow \hat{I} = \frac{1}{j\omega L}\hat{V}$



$\hat{I} = j\omega C \hat{V} \Rightarrow \hat{V} = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}$



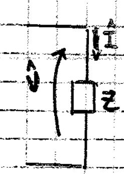
Definizione: • Si chiama IMPEDENZA il coefficiente di proporzionalità da moltiplicare alla corrente per ottenere la tensione $\hat{V} = Z\hat{I}$

• Si chiama AMMETTENZA il coefficiente di proporzionalità da moltiplicare alla tensione per ottenere la corrente $\hat{I} = Y\hat{V}$

In generale Z e Y sono numeri complessi

	IMPEDENZA	AMMETTENZA
Condensatore	$z = R$	$Y = 1/R$
Induttore	$Z = j\omega L$	$Y = 1/j\omega L$
Resistore	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$

IMPEDENZA



$$\hat{V} = Z\hat{I}$$

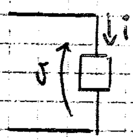
$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{V e^{j\angle\hat{V}}}{I e^{j\angle\hat{I}}} = \frac{V}{I} e^{j(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}$$

su un bipolo, l'impedenza Z ha $\begin{cases} \text{come modulo } \frac{V}{I} = Z \\ \text{come fase } \angle\hat{V} - \angle\hat{I} = \angle Z \end{cases}$

POTENZA

Una quantità sinusoidale si può scrivere in due diversi modi:

$$v(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\hat{V} e^{j\omega t}\right] \\ \dfrac{\hat{V} e^{j\omega t} + \hat{V}^* e^{-j\omega t}}{2} \end{cases} \qquad i(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\hat{I} e^{j\omega t}\right] \\ \dfrac{\hat{I} e^{j\omega t} + \hat{I}^* e^{-j\omega t}}{2} \end{cases}$$



a regime sinusoidale la potenza assorbita da un bipolo è $p = v$

Avremo: $\dfrac{\hat{V} e^{j\omega t} + \hat{V}^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \dfrac{\hat{I} e^{j\omega t} + \hat{I}^* e^{-j\omega t}}{2} \overset{\text{forma polare}}{=} p$

considero la forma polare $\begin{cases} \hat{V} = V e^{j\angle\hat{V}} \\ \hat{I} = I e^{j\angle\hat{I}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{V}^* = V e^{-j\angle\hat{V}} \\ \hat{I}^* = I e^{-j\angle\hat{I}} \end{cases}$

$$= \frac{\left(V e^{j\angle\hat{V}} \cdot e^{j\omega t} + V e^{-j\angle\hat{V}} \cdot e^{-j\omega t}\right)\left(I e^{j\angle\hat{I}} e^{j\omega t} + I e^{-j\angle\hat{I}} \cdot e^{-j\omega t}\right)}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[VI e^{j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})} e^{2j\omega t} + VI e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + VI e^{j(-\angle\hat{V}+\angle\hat{I})} + VI e^{-j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})} e^{-2j\omega t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[VI\left(\frac{e^{j(2\omega t + \angle\hat{V}+\angle\hat{I})} + e^{-j(2\omega t + \angle\hat{V}+\angle\hat{I})}}{2}\right) + VI\left(\frac{e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + e^{-j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{VI\cos(2\omega t + \angle\hat{V}+\angle\hat{I})}_{\text{variabile nel tempo sinusoidale}} + \underbrace{VI\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}_{\text{costante}}\right]$$

la potenza oscilla con frequenza doppia rispetto tensione e corrente.

Considero: $\cos(2\omega t + \angle\hat{V} + \angle\hat{I}) \overset{\pm\angle\hat{I}}{=} \cos(\underbrace{2\omega t + 2\angle\hat{I}}_{\alpha} + \underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{\beta}) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

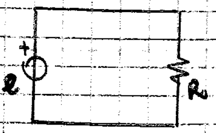
$$= \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) - \sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})$$

Sostituisco: $\frac{1}{2}\left[VI\cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\overbrace{\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}^{\text{fase dell'impedenza}} - VI\sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) + VI\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})\right] =$

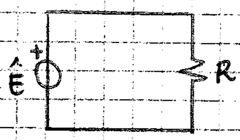
$$= \frac{1}{2}VI\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})\left(1 + \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\right) - \frac{1}{2}VI\sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) = p$$

2 termini dipendenti entrambi dal tempo, oscillano con frequenza doppia

ESEMPIO:



$e = E_0 \cos(\omega t + \vartheta)$ $\Longrightarrow$



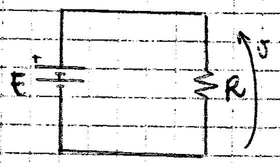
$\hat{E} = |E_0| e^{j\vartheta}$ (ω)

$P = \bar{p}$ = potenza attiva + reattiva $= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})$ poiché potenza reattiva oscilla intorno ad una potenza media nulla. Si ricorda che $\angle\hat{V} - \angle\hat{I} = \angle Z$

poiché $\ast$ reali $\Rightarrow 0$

Per il nostro circuito $P_R = \frac{1}{2}|\hat{E}|\left|\frac{\hat{E}}{R}\right|\cos 0 = \frac{1}{2}\frac{|\hat{E}|^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{R}$

CASO 2:



$E = cost$

$P_B = v \cdot i = E \cdot \frac{E}{R} = \frac{E^2}{R}$

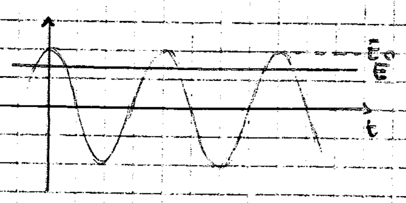
luce/calore

Per avere lo stesso effetto, alimentando con generatore o con batteria, le potenze devono essere uguali: $P_R = P_B$

$$\frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{R} = \frac{E^2}{R} \Rightarrow |E_0| = E\sqrt{2}$$

$$E = |E_0|/\sqrt{2}$$

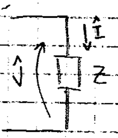
La batteria deve essere a livello costante pari al 70% della sinusoide



Questo valore di E si chiama **Valore EFFICACE**

Definizione (alternativa): Sia $e = E_0\cos(\omega t + \vartheta)$ allora si definisce il FASORE come $\hat{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta}$

MEMO:



potenza istantanea sarà:

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})\left(1 + \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\right)}_{\text{P. ATTIVA}} + \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\sin(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})\sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})}_{\text{P. REATTIVA}}$$

Sia $\left.\begin{array}{l}\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} \\ \hat{I} = |\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}\end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|e^{j\angle\hat{V}}e^{-j\angle\hat{I}} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}$

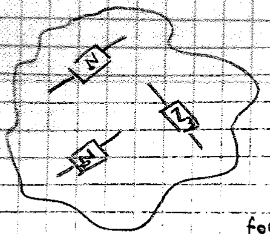
passiamo in rappresentazione cartesiana: $= \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}_{\text{parte reale}} + \underbrace{j\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\sin(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})}_{\text{parte immaginaria}}$

$P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I})$ potenza media è uguale a Re ↑

parte immaginaria rappresenta oscillazioni della potenza reattiva $= Q$

Quindi: $S = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = P + jQ$

CONSERVAZIONE DELLA POTENZA



Considerato un circuito su ogni bipolo avrò una potenza complessa [illegible]bita. A rigor di Fisica tutte le potenze devono bilanciarsi.

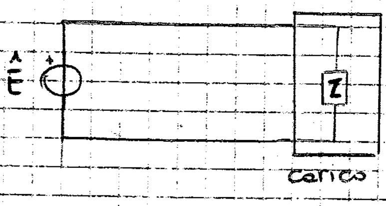
Allora: $\sum_k S_k = 0$ (in tutto il circuito)

Corollario: $\sum_k (P_k + jQ_k) = 0$ (forma cartesiana di S) $\Rightarrow \sum_k P_k + j\sum_k Q_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_k P_k = 0 \\ \sum_k Q_k = 0 \end{cases}$

TEOREMA DI BOUCHEROT:

In un circuito si conserva la potenza complessa, ma anche quella attiva e re[attiva] separatamente

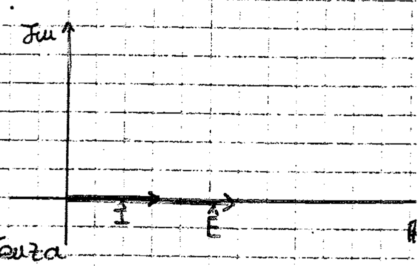
Corollario: $\sum_k |S_k| e^{j\varphi_k} = 0$ (forma polare di S) **non** è vero che $\sum_k |S_k| = 0$. **Non** vale la regola della conservazione per la potenza apparente



dati di targa: $\begin{cases} V_{eff} \\ P \\ \cos\varphi \end{cases}$ Suppongo che $\hat{E}$ abbia fase 0 (si può conside[rare] di fase 0 solo [un] elemento)

$\varphi = 0$ valori di tensione e corrente sono in parallelo
↑ non c'è sfasamento

1° Caso: supponiamo che il carico $Z = R \Rightarrow \cos\varphi = 1$ (lampada ad incandescenza)

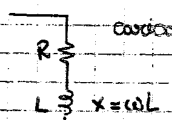


$$|\hat{I}| = \frac{2P}{\sqrt{2}\, V_{eff} \cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}\, P}{V_{eff}}$$

$\hat{E} = \sqrt{2}\, V_{eff}\, e^{j0}$ tensione sul carico

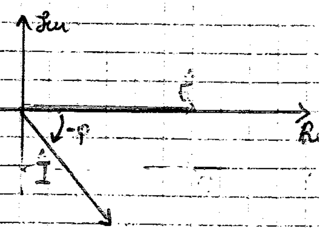
Una piccola resistenza dei fili mi producono una potenza
$P_{sprecata} = r \cdot |\hat{I}|^2$ con r = resistenza dei fili — non arriva al carico
devo cercare di tenere la corrente più piccola possibile altrimenti spreco ener[gia]

2° caso: supponiamo che $Z = R + jX$



carico tipico

la potenza utile è quella utile, consumata in R (induttori e condensatori hanno solo potenza reattiva)



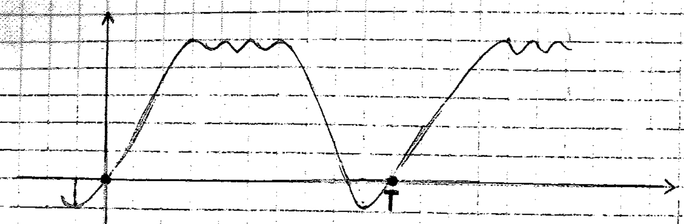
$\cos\varphi \neq 1$ Allora $|\hat{I}| = \frac{\sqrt{2}\, P}{V_{eff}\cos\varphi}$ maggiore di quella $Z = R$

Risulta che $P_{spr}^{(1)} < P_{spr}^{(2)}$ ← perchè corrente è + grande
⇓
richiedo + energia

deve essere che $\cos\varphi \geq 0{,}9$

SERIE DI FOURIER

Hp: funzione (fn) periodica (dopo un certo Δt, si ripete uguale a sé stessa)

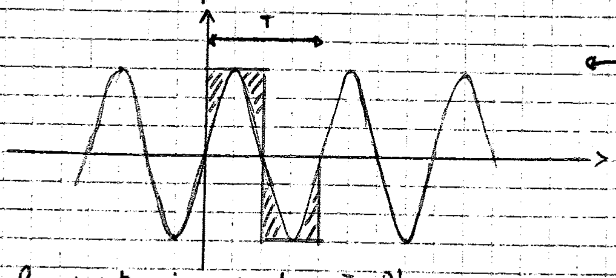


Una qualsiasi fn periodica si scrive:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k\right)$$

dove φ_k è la fase. ↳ cioè sono infiniti coseni i quali differiscono tra loro soltanto dal coefficiente e dalla fase (a_k e

Considero però solo N coseni, risulterà che la fn avrà un piccolissimo errore

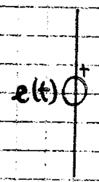


← funzione elemento base

per $k = 1$ ho coseno con periodo T, ho ... ne ARMONICA FONDAMENTALE

per $k > 1$ ho funzioni ARMONICHE SUPERIORI

la parte in verde è l'errore che compio, allora vado a sommare altri coseni fino ad arrivare ad approssimare la squadratura



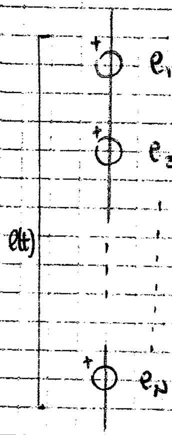
$e(t)$ è un funzione periodica (T) e media nulla ($\Rightarrow a_0 = 0$)

uso Fourier per rappresentarla)

ω_0 = PULSAZIONE FONDAMENTALE

$$e(t) \approx \sum_{k=1}^{N} E_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k\right) = E_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right) + E_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T} t + \varphi_2\right) + \dots$$

cioè rappresentabili come tanti generatori di tensione in serie:



$e_1 = E_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right)$

$e_2 = E_2 \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} t + \varphi_2\right)$ ($\frac{2\pi}{T} = \omega_0$)

e_N

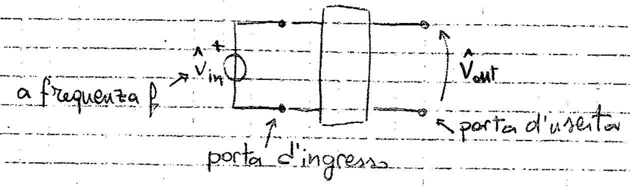
Al posto del singolo generatore, posso mettere N generatori ma tutti SINUSOIDALI.

Posso quindi risolvere il circuito con il metodo ... fasore.

Ogni generatore differisce per AMPIEZZA, FASE e FREQU...

(il fasore è definito per 1ω, in questo caso abbia... diversi $\omega \Rightarrow$ diversi fasori)

L'unica soluzione è usare la SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, nel circuito co... N fasori a N frequenze



A regime $\hat{V}_{out}$ ha stessa frequenza di $\hat{V}_{in}$

$H(f) = \frac{\hat{V}_{out}}{\hat{V}_{in}}$ dotato di ampiezza e ... che possono dipendere

$\angle H(f) = \angle \hat{V}_{out} - \angle \hat{V}_{in}$

FdT : $H = \frac{1}{1+J\frac{kf}{f_0}} \longrightarrow H(f') = \frac{1}{1+J\frac{f'}{f_0}}$ Invece di guardare solo su un insieme finito di f lo estendo per un qualsiasi valore.

$\Rightarrow H(f')$ è una funzione complessa ma f' è una variabile reale e positiva.
$\Rightarrow$ funzione complessa di variabile $f' \in \mathbb{R}e^+$.

Per la rappresentazione di FdT, faccio due grafici separati (del modulo e della fase)

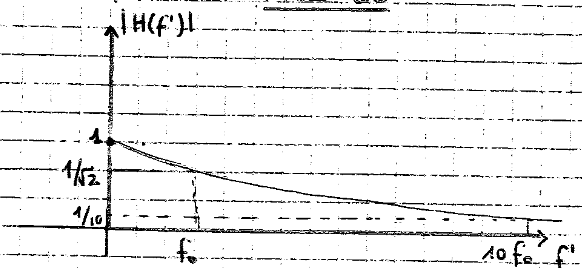
Modulo : $|H(f')| = \frac{1}{\sqrt{1+(f'/f_0)^2}}$

Fase : $\angle H(f') = \underbrace{\cancel{\angle 1}}_{0} - \angle 1+J\, f'/f_0 \rightarrow$ fase di un numero complesso $\arctan \frac{f'/f_0}{1}$

$= 0 - \arctan \frac{f'/f_0}{1}$

OSS: funzione di trasferimento di un filtro è importante xkè mostra come verranno alterate le componenti

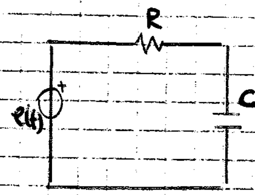
GRAFICO del MODULO



per $10f_0$ ho $\frac{1}{10} = |H(f')|$

- Per basse frequenze, l'ampiezza ~ 1 e $\angle H \sim 0$
  componenti a basse frequenza vengono passate ~uguali
- Se $f \gg f_0$ ampiezza $\rightarrow 0$ (ampiezza d'out << ampiezza in)
  $\angle H \rightarrow -90°$ ridotte d'ampiezza e traslate di fase
- Se $f = f_0$ $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ f_0 = frequenza di metà potenza

Ricordo che il circuito di partenza era:



Alla f_0, moltiplico generatore per $\frac{1}{\sqrt{2}}$
per $2f_0$ moltiplico un valore più piccolo
per $10f_0$ lo moltiplico per $\frac{1}{10} = 0,1$

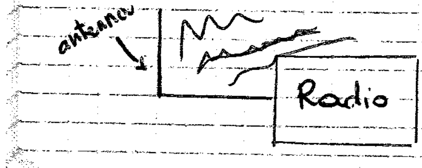
I contributi al mio segnale, dovuti alle frequenze più alte diventano sempre più piccoli.

Quindi, ho una serie di generatori che mi rappresentano e(t), dalla parte di V_x mi ritrovo solo alcune delle frequenze del generatore $\Rightarrow$ ho segnale deformato di V_x rispetto a e(t).

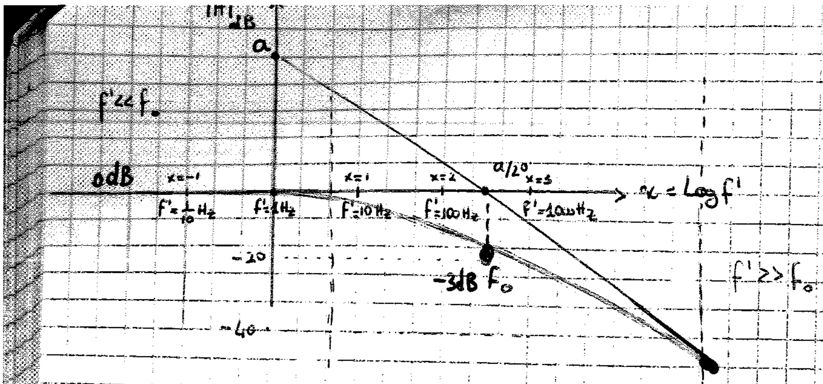
Solo frequenze vicino alla f_0 danno contributo, le altre si annullano:

FILTRO PASSABASSO 1° ordine
↓
fa passare certe frequenze (quelle basse vicino a f_0) ed elimina quelle in alto

ESEMPIO: • radio della macchina



antenna: "sente" campo elettromagnetico dell'ambiente (ce ne ha ∞) nel ricevitore c'è un filtro che butta tutte le frequenze che non mi interessano, catt



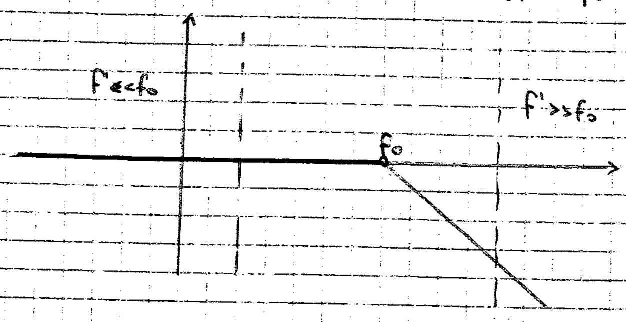
OSS: una *decade* è un intervallo di freq per le quali il rapporto fra la più alta e la più bassa frequenza è 10

un' ottava è un raddoppio di Frequenza

DIAGRAMMA DI BODE

siccome perde $-20x$, si dice che la pendenza è $-20\frac{dB}{dec}$

Oppure estendo le 2 rette ($f' \ll f_0$ e $f' \gg f_0$) e le congiungo in f_0



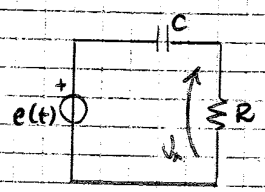
f_0 = frequenza di taglio $|H(f_0)|_{dB} = -3dB$

DIAGRAMMA ASINTOTICO DI BODE

l'errore che compio è di 3 dB (non gross

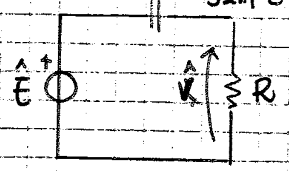
Si usa questo grafico

FILTRO PASSA-ALTO 1° Ordine



$e(t) = E\cos(2\pi f' + \varphi)$ $\Longrightarrow$

$Z_C = \frac{1}{J2\pi f'C}$



con $f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$

Partitore:

$$\hat{V}_x = \frac{\hat{E}\,R}{Z_C + R} = \hat{E}\frac{R}{R + \frac{1}{J2\pi f'C}} = E\frac{J2\pi f'CR}{J2\pi f'CR + 1} = \hat{E}\frac{J\, f'/f_0}{1 + J\, f'/f_0}$$

Funzione di trasferimento $H = \frac{\hat{V}_x}{\hat{E}} = \frac{J\frac{f'}{f_0}}{1 + J\, f'/f_0}$

modulo $|H(f')|_{dB} = 20\log\frac{f'/f_0}{\sqrt{1 + (f'/f_0)^2}}$

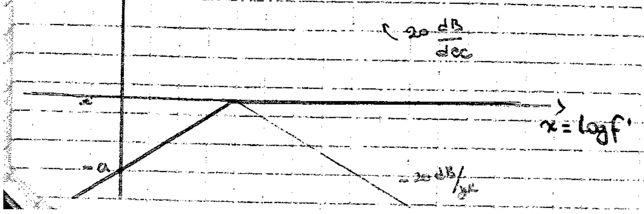
fase di H : $\angle H(f') = \angle J\, f'/f_0 - \angle 1 + J\, f'/f_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{f'}{f_0}$

DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO DI $|H(f')|$

$$|H(f')|_{dB} = \underbrace{20\log\left(\frac{f'}{f_0}\right)}_{20\log f' - 20\log f_0 = 20x - a} - 20\log\sqrt{1 + (f'/f_0)^2}$$

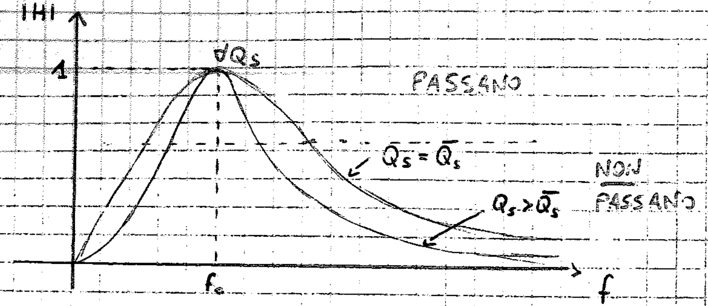
se $f' \ll f_0 \Rightarrow \log 1 = 0$

se $f' \gg f_0 \Rightarrow -20\log(f'/f_0) = -20x + a$



Verde = diagramma di Bode asintotico del mio circuito

Ricaviamo il grafico: $FdT = V_u / \hat{E}$



per $f=0 \Rightarrow |H|=0$

per $f \to \infty$ $|H| \to 0$

$f = f_0$ $|H| = 1$

Che effetto ha $Q_s = ?$

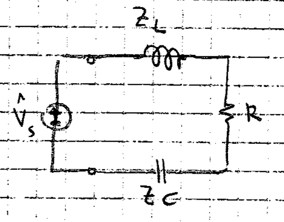
per $f = f_0$ Q_s viene annullata

più è grande Q_s, più la funzione decresce rapidamente, eccetto per $f_0 = f$ che annulla tutto.

SIGNIFICATO FISICO: se $f = f_0$ la $FdT = 1 \Rightarrow$ tutta la tensione del generatore è su R

se $f_0 > f$ ho che $H < 1$ cioè il segnale su R è più piccolo del segnale sul generatore: sono in presenza di un FILTRO PASSA-BANDA (fa passare tutte le frequenze nell'intorno di f_0.

Tutti i sistemi di comunicazione hanno questo filtro



$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_s}{Z(f)} = \frac{\frac{\hat{V}_s}{R}}{1 + jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

$$H(f) = \frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_s} = \frac{1}{1 + jQ_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

OSS. Modulo impedenza è minimo alla frequenza di risonanza

+ $Q_s >>$ più minimo diventa stretto

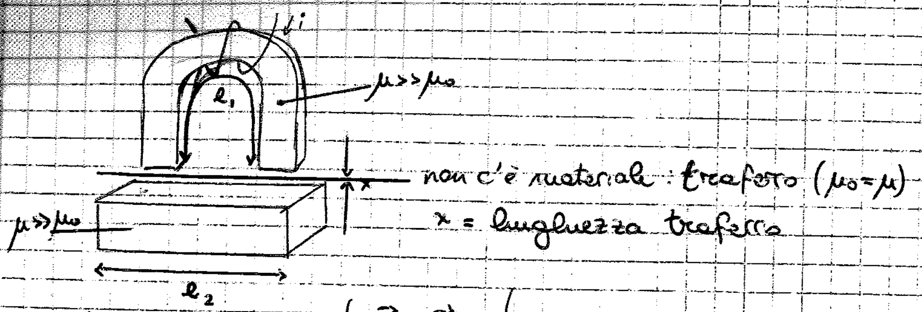
Larghezza di Banda $B = f_H - f_L$ frequenze di potenza

$$B = \frac{f_0}{Q_s} \Rightarrow f_H \sim f_0 + \frac{B}{2}$$

$$f_L \sim f_0 - \frac{B}{2}$$

CASO 2:

OSS. (i fenomeni di induttanza funzionano solo se ho variazione nel tempo fenomeni costanti non danno vita a fenomeni magnetici)



Legge Ampere: $\oint_{\Gamma} \vec{h} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} J d\Sigma$ con $\Gamma = \cap + t_{dx} + b + t_{sx}$

Quando passa da mezzo ad un altro non cambia l'induzione

Il campo magnetico cambia quando cambio materiale.

b (induzione) è la stessa ovunque:

nel material $h = \dfrac{b}{\mu}$

nel traferro $h' = \dfrac{b}{\mu_0}$

Calcolo l'integrale del 1° termine: $h l_1 + h' x + h l_2 + h' x = \dfrac{b}{\mu} l_1 + \dfrac{b}{\mu_0} x + \dfrac{b}{\mu_0} l_2 + \dfrac{b}{\mu_0} x =$

$$= 2\frac{b}{\mu_0} x + \frac{b}{\mu}(l_1 + l_2) = b\left(\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right)$$

2° termine $= Ni$

$$\Rightarrow b\left(\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}\right) = Ni$$

Ora $\phi = bA = \dfrac{Ni}{\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} A$

la tensione che si sviluppa sulla spira reagisce alla variazione del flusso:

$$V_{avv} = N \frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{N^2 A}{\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}}}_{L} i$$

APPLICAZIONE Supponiamo 2 situazioni:

① traferro $(x \neq 0)$

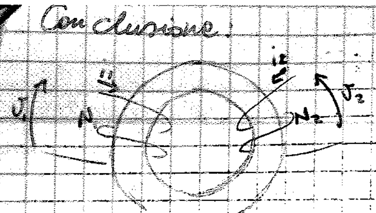
$$L_1 = \frac{N^2 A}{\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} \qquad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} L_1 i^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 A}{\frac{l_1 + l_2}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0}} i^2$$

② muoviamo la barretta fino a toccare materiale superiore $(x = 0)$

$$L_2 = \frac{N^2 A}{\frac{l_1 + l_2}{\mu}} \qquad \boxed{\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} L_2 i^2} = \frac{1}{2} \frac{N^2 A}{\frac{l_1 + l_2}{\mu}} i^2$$

con $\mathcal{E}$ energia dell'induttore

Conclusione:



$$V_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$V_2 = L_{22}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

legge dell'induttore aumentata => MUTUO INDUTTORE oppure TRASFORMATOR (trasforma le correnti in tensioni)

* Se sono a regime costante il trasformatore NON esiste ($di = 0$)
* con generatore sinusoidale (fasori) le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \hat{V}_1 = j\omega L_{11}\hat{I}_1 + j\omega M\hat{I}_2 \\ \hat{V}_2 = j\omega M\hat{I}_1 + j\omega L_{22}\hat{I}_2 \end{cases}$$

MEMO: $\hat{V} = j\omega\hat{I}$

* $\phi = \frac{\mu A}{l}(N_1 i_1 + N_2 i_2)$
* $V_1 = N_1\frac{d\phi}{dt}$, $V_2 = N_2\frac{d\phi}{dt}$
* Idealizzazione $\mu \to \infty \Rightarrow \phi \to \infty$ ma non ha senso!

$\Downarrow$

ϕ deve rimanere finito

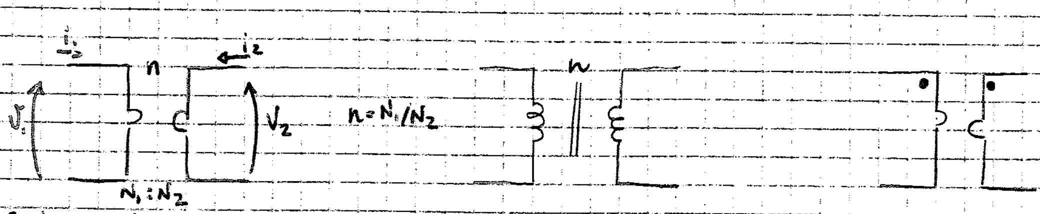
non agisco sulla geometria, allora deve essere che $(N_1 i_1 + N_2 i_2) \to 0$

$$i_1 = -\frac{i_2 N_2}{N_1}$$

quindi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1\, d\phi/dt}{N_2\, d\phi/dt} = \frac{N_1}{N_2}$

Chiamo $n = \frac{N_2}{N_1}$ rapporto spire, allora $\begin{cases} V_2 = nV_1 \\ i_2 = -\frac{1}{n} i_1 \end{cases}$ equazioni semplificate del trasformatore (eq. trasformatore ideale $\mu \to \infty$ NON ESIS

TRASFORMATORE IDEALE:



Sistema di 2 bipoli

Il puntino è un'indicazione ausiliaria per indicare il verso entrante della corrente

POTENZA:

Porta 1: convenzione utilizzatori => potenza assorbita (o entrante) $p_1 = v_1 i_1$

Porta 2: convenzione utilizzatori => potenza assorbita $p_2 = v_2 i_2$

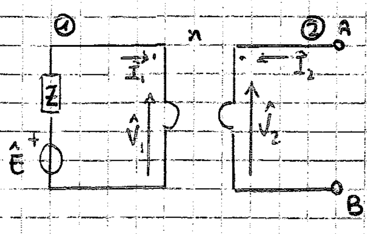
Ora $p_2 = n v_1\left(-\frac{1}{n} i_1\right) = -v_1 i_1$

la potenza in valore assoluto è la stessa per porta ① e ②. ma se sulla porta 1 è entrante e assorbita, sulla porta 2 è uscente o erogata (negativa

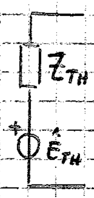
Quindi: $-p^2 = p_2^e$ potenza erogata (o uscente) $= v_1 i_1$

IDEALE: trasparente alla potenza, nella pratica quasi impossibile.

ESEMPIO



③ trovare equivalente Thevenin sulla porta 2



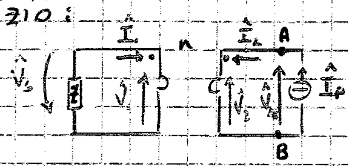
② Calcolo generatore equivalente di Thévenin $\hat{E}_{TH}$

Risulta che $\hat{I}_2$ è nulla perché monopolo $\Rightarrow \hat{I}_2 = -\frac{1}{n}\hat{I}_1 = 0 \Rightarrow \hat{I}_1 = 0$

Allora $\hat{V}_1 = \hat{E}$

Con eq.ne trasformatore $\hat{V}_2 = n\hat{V}_1 = n\hat{E}$ è proprio la tensione a vuoto vista da AB $\Rightarrow \hat{V}_2 = n\hat{E} = \hat{E}_{TH}$

③ Calcolo Z_{TH}. Spengo generatori e utilizzo il metodo usato nell'altro esercizio:



$Z_{TH} = \frac{\hat{V}_{AB}}{\hat{I}_P}$ ora: $\hat{I}_2 = \hat{I}_P$

con eq. trasform: $\hat{I}_1 = -n\hat{I}_2 = -n\hat{I}_P$

$\hat{V}_S = Z_S I_1 = -n I_P Z_S$ risulta che $\hat{V}_1 = -\hat{V}_S = Z_S n I_P$

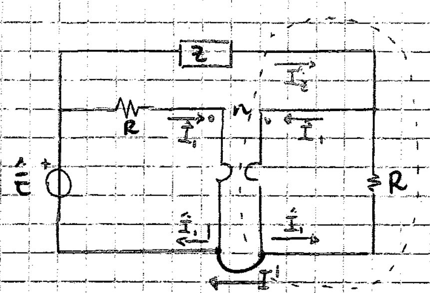
eq. trasformatore: $\hat{V}_2 = n\hat{V}_1 = n^2 Z_S I_P$ ovviamente $\hat{V}_2 = \hat{V}_{AB}$

Risulta che: $Z_{TH} = \frac{V_2}{I_P} = n^2 Z_S$

OSS: Confrontando con l'esercizio precedente se guardo Z_{in} dalla porta 1: $Z_{in} = \frac{Z_S}{n^2}$ invece se la guardo dalla porta 2: $Z_{in} = n^2 Z_S$ dove Z_S indica l'impedenza del carico sull'altro lato del trasformatore

ESEMPIO:

Trasformatore: avvolgimenti collegati in modo magnetico non in modo elettrico

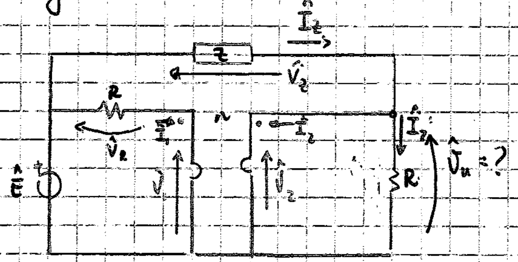


⑧ Calcolare $\hat{V}_{RL} = ?$

Considero la superficie chiusa: per Kirchhoff sicuramente $\hat{I}_z = 0$ solo per un solo filo di collegamento.

Aggiungo un collegamento tra i 2 bipoli (non vale più la considerazione di prima)

Ridisegno:



- KVL su percorso chiuso all'interno a sx:

$$\hat{E} = \hat{V}_R + \hat{V}_1 \qquad \text{con } \hat{V}_R = \hat{I}_1 R$$

$\hat{V}_2$ è tensione su R $\quad \hat{I}_2' = \frac{\hat{V}_2}{R}$

Allora $\hat{I}_z = \hat{I}_2 + \frac{\hat{V}_2}{R}$

- KVL su percorso esterno: $\hat{E} = Z\hat{I}_z + \hat{V}_2 = Z\left(\hat{I}_2 + \frac{\hat{V}_2}{R}\right) + \hat{V}_2$

eq.ni trasformatore: $\hat{V}_2 = n\hat{V}_1$; $\hat{I}_2 = -\frac{1}{n}\hat{I}_1$

$$\hat{E} = \hat{I}_1 R + \frac{\hat{V}_2}{n} \Rightarrow \hat{I}_1 = \frac{1}{R}\left(\hat{E} - \frac{\hat{V}_2}{n}\right)$$

$$\hat{E} = Z\left(-\frac{1}{n}\hat{I}_1 + \frac{\hat{V}_2}{R}\right) + \hat{V}_2 = Z\left(-\frac{\hat{E}}{nR} + \frac{\hat{V}_2}{n^2R} + \frac{\hat{V}_2}{R}\right) + \hat{V}_2 = \left(\frac{Z}{n^2R} + 1 + \frac{Z}{R}\right)\hat{V}_2 - \frac{Z\hat{E}}{nR}$$

$$\hat{V}_2 = \frac{E + \frac{ZE}{nR}}{\frac{Z + n^2R + n^2Z}{n^2R}} = \frac{\hat{E}nR + Z\hat{E}}{nR} \cdot \frac{n^2R}{Z + n^2R + n^2Z} = \frac{(nR+Z)\hat{E}R}{Z + n^3R + n^2Z}$$