NUMERO: 540 DATA: 06/05/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Ganci

MATERIA: Meccanica Applicata alle Macchine
Prof. Ferraresi

VIDEO LEZIONE N 1

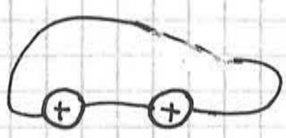
- PRESENTAZIONE
- COORDINATE DEL PUNTO NEL PIANO

FISICA:
- TERMODINAMICA
- ELETTROMAGNETISMO
- MECCANICA:
  - STATICA (STATICS)
  - CINEMATICA (KINEMATIC) } DYNAMICS
  - DINAMICA (KINETICS) } DYNAMICS

LA MECCANICA STUDIA IL MOTO DEI CORPI O SISTEMI MECCANICI INDIPENDENTEMENTE DALLE CAUSE CHE LO DETERMINANO, INVECE LA DINAMICA STUDIA ANCHE LE CAUSE CHE DETERMINANO UN CERTO MOVIMENTO, CIOÈ STABILISCE UNA RELAZIONE DI CAUSALITÀ TRA LE FORZE CHE AGISCONO SU UN SISTEMA E IL MOTO DEL SISTEMA INFINE LA MECCANICA APPLICATA STUDIA IL FUNZIONAMENTO DI UN SISTEMA.

SISTEMA REALE → MODELLO FISICO → MODELLO MATMATICO

AUTOMOBILE



$F = ma$

IL PASSAGGIO TRA IL SISTEMA REALE E IL MODELLO FISICO È IL PUNTO CRITICO. IL MODELLO FISICO DIPENDE DA COSA SI DEVE STUDIARE ED HA DIVERSI GRADI DI COMPLESSITÀ. PER ESEMPIO SE VOGLIO STUDIARE QUESTO AUTOMOBILE BIDIMENSIONALMENTE, QUESTO MODELLO VA BENE, ALTRIMENTI DEVO AUMENTARE IL GRADO DI COMPLESSITÀ.

IL MODELLO MATEMATICO È UNA SERIE DI EQUAZIONI CHE ANCHE A LORO VOLTA HANNO UN GRADO DI COMPLESSITÀ.

CINEMATICA

CINEMATICA STUDIA IL MOTO DEI CORPI O SISTEMI MECCANICI, SISTEMI SONO INSIEME DI CORPI CHE POSSONO ESSERE CONNESSI TRA DI LORO IN QUALCHE MODO. QUINDI DEFINIRE IN OGNI ISTANTE DI TEMPO CHE CONSIDERIAMO, LA POSIZIONE, LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA A PRESCINDERE DALLE CAUSE CHE DETERMINANO QUESTO MOVIMENTO.
QUINDI LA CINEMATICA CONSIDERA GRANDEZZE VETTORIALI E UNA GRANDEZZA SCALARE OVVERO IL TEMPO.

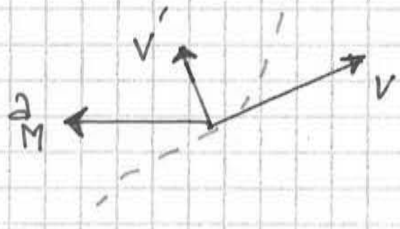
POSIZIONE, VELOCITÀ, ACCELERAZIONE } VETTORI { MODULO, DIREZIONE, VERSO

LA VELOCITÀ È CAMBIATA SIA IN MODULO, SIA IN DIREZIONE (IL VERSO È MANTENUTO) QUINDI C'È STATA UNA VERIAZIONE DI VELOCITÀ.

$$\Delta V = V' - V$$

$$V' = V + \Delta V$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = a_M \quad \text{'ACCELERAZIONE MEDIA'}$$



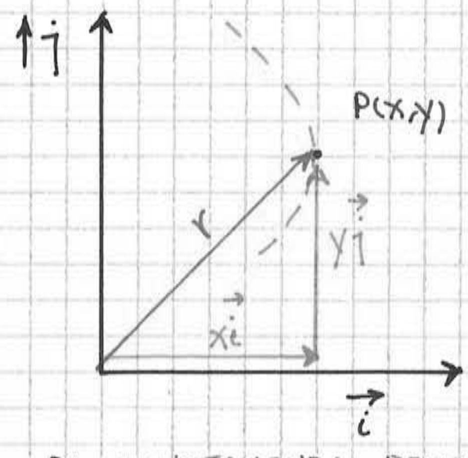
L'ACCELERAZIONE VUOL DIRE LA VARIAZIONE DI UNO DELLE CARATTERISTICHE DELLA VELOCITÀ (MODULO, DIREZIONE E VERSO) E NON NECESSARIAMENTE DEVONO CAMBIARE TUTTE E TRE.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a = \dot{v} = \ddot{r} \quad \text{'ACCELERAZIONE ISTANTANEA'}$$

- UNA CONSIDERAZIONE MOLTO IMPORTANTE È CHE ANCHE SE FACCIO TENDERE A ZERO IL TEMPO Δt, QUESTA ACCELERAZIONE MEDIA NON DIVENTA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA.

SISTEMI DI RIFERIMENTO

- CARTESIANE;
- LOCALE (COORDINATE INTRINSECHE);
- POLARE.



SICCOME LA POSIZIONE DEL PUNTO P VARIA NEL TEMPO, ALLORA ANCHE LE COORDINATE X, Y VARIANO NEL TEMPO.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

DI CONSEGUENZA POSSONO ESISTERE ANCHE LE LORO DERIVATE:

$$\left.\begin{matrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{matrix}\right\} \text{VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE LUNGO L'ASSE } X, Y$$

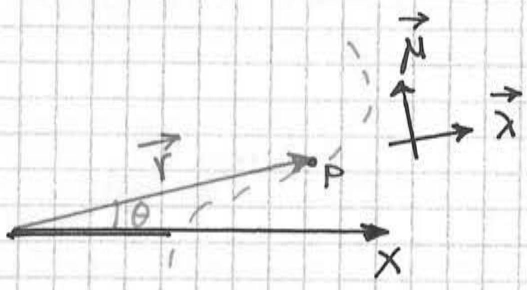
$$r = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$V = \frac{dr}{dt}$$

VIDEOLEZIONE N° II

- COORDINATE CARTESIANE E POLARI
- MOTO RETTILINEO
- MOTO CIRCOLARE

COORDINATE POLARI



IL VETTORE r È LA DISTANZA DEL PUNTO DALL'ORIGINE.

$$r = r(t) \quad \dot{r} \quad \ddot{r}$$

SE $\dot{r} > 0$, IL PUNTO SI STA ALLONTANANDO;
SE $\ddot{r} > 0$, IL PUNTO STA AUMENTANDO LA VELOCITÀ DEL SUO ALLONTANAMENTO RISPETTO AD O.

È CHIARO CHE QUESTA INFORMAZIONE NON È SUFFICIENTE A DEFINIRE LA POSIZIONE PERCHÉ A PARITÀ DI LUNGHEZZA DI r SI TROVANO TANTI PUNTI LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r. QUINDI DEVO DEFINIRE UNA SECONDA COORDINATA θ (VARIANTE ANCHE ESSO NEL TEMPO)

$$\theta = \theta(t) \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{'VELOCITÀ ANGOLARE'}$$

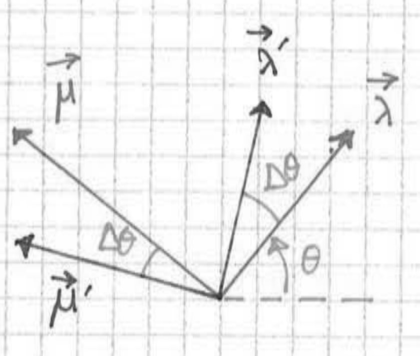
$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{'ACCELERAZIONE ANGOLARE'}$$

QUESTA VOLTA I VERSORI λ, μ NON SONO FISSI E VARIANO NEL PIANO, SEGUENDO IL MOVIMENTO DEL PUNTO P (SONO LOCALI)

$$r = r\lambda$$

$$v = \frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\lambda + r\frac{d\lambda}{dt}$$

DUNQUE DEVO VEDERE LA DERIVATA DI UN VERSORE:



QUESTA COORDINATA $\Delta\theta$ DIPENDE DAL PUNTO PER CUI HANNO RUOTATO.

$$d\theta = \dot{\theta}\, dt$$

SE QUESTO TEMPO È UN TEMPO FINITO:

$$\Delta\theta = \dot{\theta}\, \Delta t$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 283

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$V = \text{COST} \qquad a = 0$

$V = \frac{dx}{dt}$ 'EQUAZIONE DEL MOTO'

$dx = V dt \qquad \int_{x_0}^{x} dx = V \int_{t_0}^{t} dt$

$x = x_0 + V(t - t_0)$ 'LEGGE DEL MOTO'

SE $t_0 = 0$, QUINDI LA LEGGE DEL MOTO ASSUME LA SEGUENTE FORMA:

$$x = x_0 + Vt$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a = \frac{dV}{dt} = \text{COST}$ 'EQUAZIONE DEL MOTO'

$$\int_{V_0}^{V} dV = a \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow V = V_0 + a(t - t_0)$$

SE $t_0 = 0 \qquad V = V_0 + at \quad (I)$

$$\int_{x_0}^{x} dx = V_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

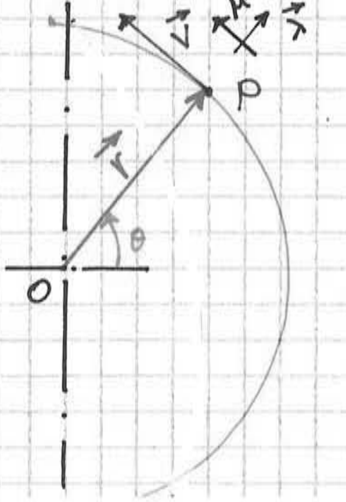
$$x = x_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

SE $t_0 = 0$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (II)$$

(I) E (II) SONO LEGGI DEL MOTO, (I) SI RIFERISCE ALL'ANDAMENTO DELLA VELOCITÀ NEL TEMPO E (II) SI RIFERISCE ALL'ANDAMENTO DELLA POSIZIONE NEL TEMPO.

MOTO CIRCOLARE



$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \ ; \ \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt}$

$\vec{r} = r\vec{\lambda}$

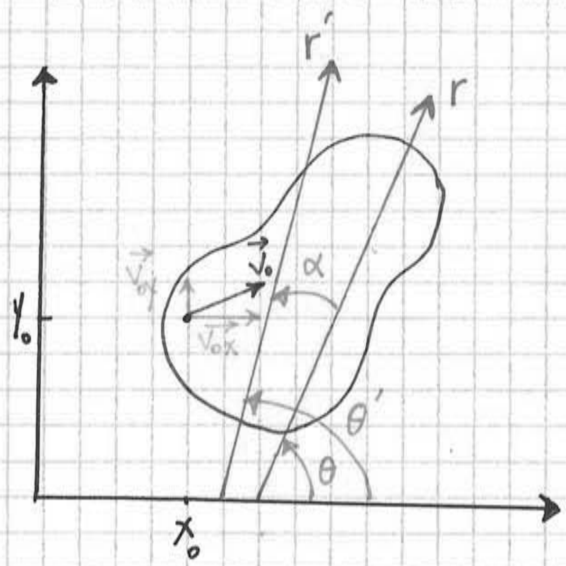
$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{\mu}$

IN QUESTO CASO r È COSTANTE, QUINDI NON SI DERIVA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 283

VIDEOLEZIONE N III

- CORPO RIGIDO NEL PIANO
- MOTO TRASLATORIO
- MOTO PIANO GENERICO



COME ABBIAMO VISTO, LE DUE COORDINATE x_o, y_o NON SONO SUFFICIENTI PER INDIVIDUARE LA POSIZIONE DEL PUNTO O, QUINDI HO BISOGNO DI UN'ALTRO ELEMENT SOLIDALE AL CORPO (RETTA r)

SE IN UN ISTANTE CONOSCO x_o, y_o, θ CONOSCO LA POSIZIONE E L'ORIENTAMENTO DEL CORPO.

SE OLTRE ALLA RETTA r, DISEGNASSI UN'ALTRA RETTA SOLIDALE AL CORPO COME LA RETTA r', IL CORPO ESSENDO RIGIDO, TRA LE DUE RETTE SI FORMANO UN ANGOLO DI SFASAMENTO COSTANTE α. QUINDI ESISTE UN'ALTRO COORDINATA θ'.
QUESTE COORDINATE POSSONO CAMBIARE NEL TEMPO.

$$\begin{cases} x_o(t) & \dot{x}_o & \ddot{x}_o \\ y_o(t) & \dot{y}_o & \ddot{y}_o \\ \theta(t) & \dot{\theta} & \ddot{\theta} \end{cases}$$

QUESTE TRE COORDINATE RAPPRESENTAN I TRE GRADI DI LIBERTA' CONCESSI AL CORPO NEL SUO MOVIMENTO SUL PIANO.

$$\frac{dx_o}{dt} = V_{ox}$$

$$\frac{dy_o}{dt} = V_{oy}$$

$$V_{o'} \neq V_o$$

IN GENERALE OGNI PUNTO DI QUESTO CORPO AVRA' VELOCITA' DIVERSA.

$$\theta' \neq \theta$$

$$\theta' = \theta + \alpha$$

α È UN ANGOLO COSTANTE, ESSENDO IL CORPO RIGIDO (NON DEFORMABILE)

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

SE SCELGO DUE PUNTI DIVERSI COME PUNTI LOCALI, QUESTI DUE PUNTI IN GENERALE AVRANNO VELOCITÀ PUNTALI DIVERSE, INVECE LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL CORPO ω È LA STESSA QUALUNQUE SIA IL PUNTO DI RIFERIMENTO CHE IO SCELGO PER ORIENTARE IL CORPO.

$$V_P = r\omega\mu$$

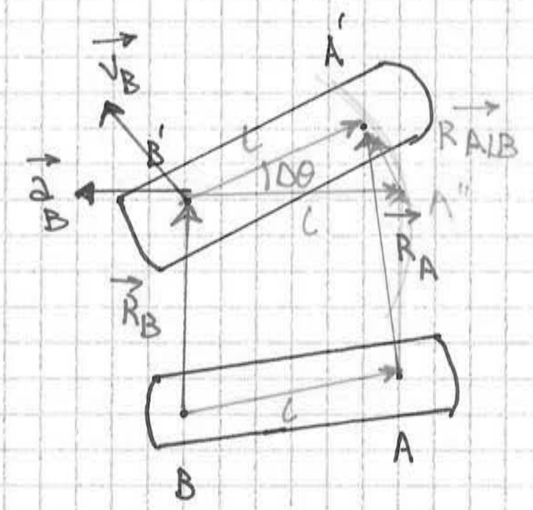
$$a_P = a_{P_n} + a_{P_t}$$

$$\begin{cases} a_{P_n} = r\omega^2(-\lambda) \\ a_{P_t} = r\dot{\omega}\mu \end{cases}$$

SE $\dot{\omega} = 0 \rightarrow a_{P_t} = 0,\ a_{P_n} \neq 0$

SIA LA VELOCITÀ, SIA LE COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE SONO PROPORZIONALI A r (DISTANZA DEL PUNTO CONSIDERATO DAL CENTRO DI ROTAZIONE)

3) MOTO ROTOTRASLATORIO



IMMAGINO CI SIA PRIMA TRASLAZIONE CHE PORTA $\overline{AB}$ AD $A''B'$ E POI C'È UNA ROTAZIONE $\Delta\theta$ CHE COMPLETA IL MOVIMENTO.

SECONDO MOVIMENTO È UNA ROTAZIONE ATTORNO AL PUNTO B.

$$r_A = r_B + r_{A/B}$$

$$\frac{r_A}{\Delta t} = \frac{r_B}{\Delta t} + \frac{r_{A/B}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \dots$$

$$V_A = V_B + V_{A/B}$$ "FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA"

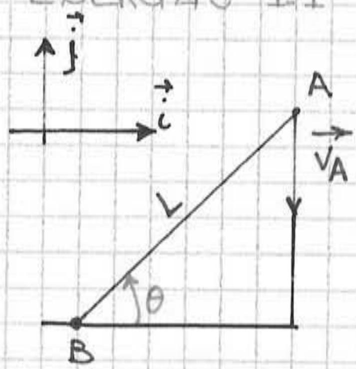
LA VELOCITÀ DI A INTORNO AL PUNTO B È LA VELOCITÀ CHE AVREBBE IL PUNTO A SE B FOSSE UN PUNTO FISSO, SE COSÌ FOSSE, A NON PUÒ CHE RUOTARGLI INTORNO PERCHÉ $\overline{AB}$ È UN SEGMENTO RIGIDO.
QUINDI IL MOTO DI A ATTORNO B È UN MOTO CIRCOLARE.

$$V_{A/B} = \omega AB\mu$$

VIDEOLEZIONE N° IV

- ESEMPIO DI MOTO PIANO GENERICO
- CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (PARTE 1)

ESERCIZIO 1.1



$L = 200\,mm$

$\theta = 30°$

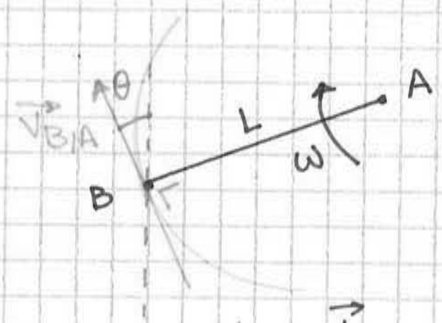
$V_A = 2\,m/s = cost$

V_B? ω? a_B?

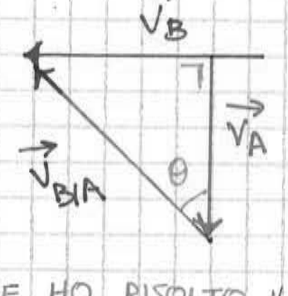
ABBIAMO VISTO CHE IL PROBLEMA DELLA VELOCITÀ SI AFFRONTA UTILIZZANDO LA FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA.

	$\vec{V}_B$	=	$\vec{V}_A$	+	$\vec{V}_{B/A}$
M	?		V_A		$(L\omega)$?
D	—				θ
V	?		$-\vec{j}$		?

ABBIAMO UN'EQUAZIONE VETTORIALE E LA POSSIAMO RISOLVERE CON UN POLIGONO DI VETTORI.



IL MOTO DI B ATTORNO AL PUNTO A È UN MOTO CIRCOLARE.



$V_B = V_A \, tg\theta$

$\omega L = V_A / \cos\theta$

$\omega = V_A / (L\cos\theta)$

ORA CHE HO RISOLTO IL TRIANGOLO, VEDO CHE IL VERSO DI $V_{B/A}$ È IN SU, QUINDI ω È ORARIO.

PER GLI ACCELERAZIONI POSSO USARE IL TEOREMA DI RIVALS

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A} + \vec{a}_{B/A}$$

PERCHÉ $V_A = cost$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 283

$$V_{P_1} = \omega \cdot \overline{CP_1}$$

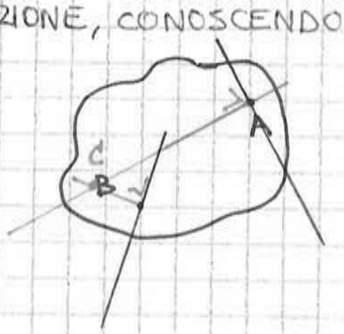
$$V_{P_2} = \omega \cdot \overline{CP_2} \qquad V_{P_1} \parallel V_{P_2} \parallel V_{P_3}$$

$$V_{P_3} = \omega \cdot \overline{CP_3}$$

$$V_{P_4} = \omega \cdot \overline{CP_4}$$

QUINDI IN QUESTO ISTANTE IL PUNTO C È IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (IN UN ISTANTE SUCCESSIVO, IL PUNTO C PUÒ ASSUMERE UNA VELOCITÀ E CHE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE ASSUME UN'ALTRA POSIZIONE) QUINDI IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE NON E' PERMANENTE.

INVECE PER TROVARE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE, CONOSCENDO LA DIREZIONE DI DUE VELOCITÀ e

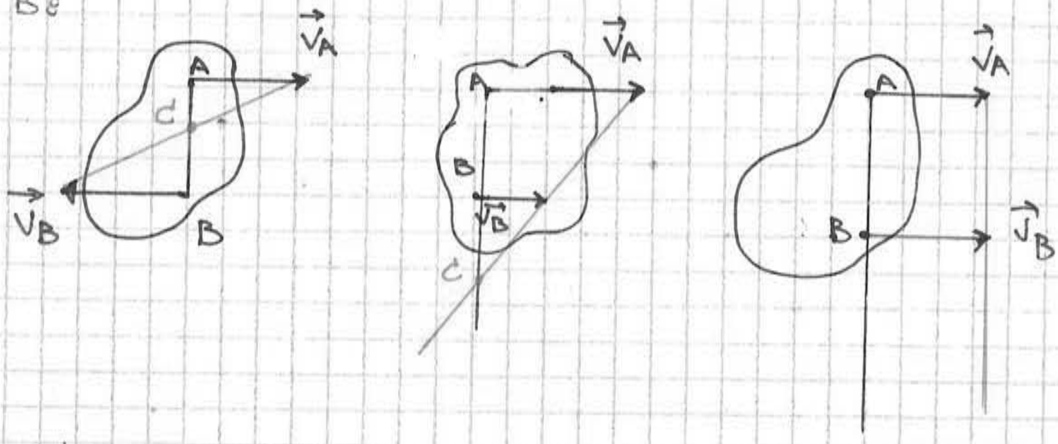


CONOSCENDO ANCHE IL MODULO E IL VERSO DELLA VELOCITÀ DI UN PUNTO POSSO CALCOLARE IL MODULO E IL VERSO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE.

$$\omega = V_A / \overline{AC}$$

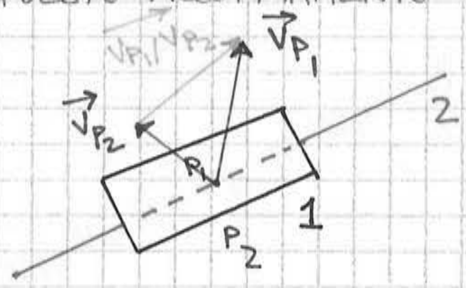
$$V_B = \omega \cdot \overline{BC}$$

SE INVECE LA VELOCITÀ DEL PUNTO A È PARALLELA A QUELLA DEL PUNTO B e



ANCHE L'ESERCIZIO 1.1 SI POTEVA CALCOLARE COL METODO DI CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE.

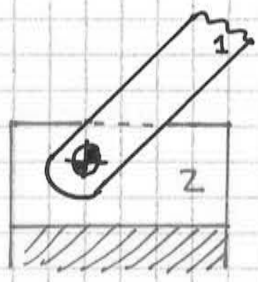
POSSIAMO IMMAGINARE CHE IL CORPO 2 È UNA PARETE FISSA E IL CORPO 1 PUÒ COMPIERE UN MOVIMENTO ORIZZONTALE.
SE INVECE IL CORPO 1 SIA LIBERO, PUÒ MUOVERSI OLTRE ORIZZONTALMENTE ANCHE VERTICALMENTE E PUÒ ANCHE RUOTARE. QUINDI QUESTO ACCOPPIAMENTO HA UN GRADO DI LIBERTÀ.

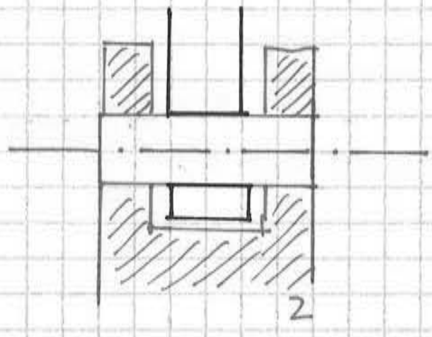


IN UN CERTO ISTANTE, I DUE PUNTI P_1 E P_2 SI POSSONO INCONTRARE.

I DUE PUNTI POSSONO AVERE DUE VELOCITÀ DIVERSE, QUESTO PERCHÉ LUNGO L'ASTE È POSSIBILE UN MOTO RELATIVO. PERÒ LUNGO LA LINEA PERPENDICOLARE I DUE PUNTI DEVONO AVERE LA STESSA VELOCITÀ (ASSOLUTA) OVVERO VELOCITÀ RELATIVA NULLA, QUEST PERCHÉ NON DEVONO COMPENETRARSI.

2) COPPIA ROTOIDALE (CERNIERA)



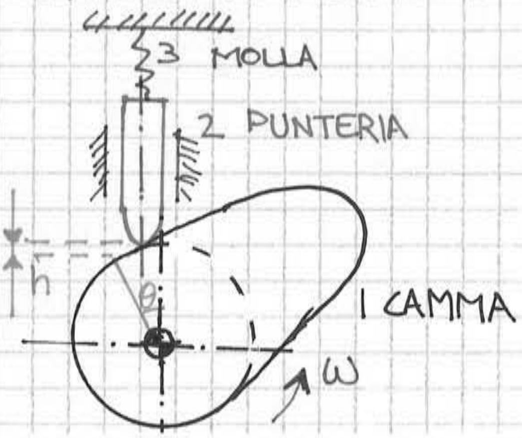


PER CONOSCERE UN MOVIMENTO RELATIVO TRA I DUE CORPI CI DEVE ESSERE UN CERTO GIUOCO, ALTRIMENTI SI PIANTANO. L'ACCOPPIAMENTO CONSENTE SOLO UNA ROTAZIONE. QUINDI HA UN GRADO DI LIBERTÀ.

IL GRADO DI LIBERTÀ CONSENTITA DAI CORPI ACCOPPIATI DIPENDE DAL TIPO DI SUPERFICIE A CONTATTO.
LA SUPERFICIE A CONTATTO È DETTA ANCHE LA SUPERFICIE CONIUGATE E SE IL MOTO RELATIVO È DOVUTO SOLO ALLA FORMA DELLE SUPERFICI CONIUGATE ALLORA ABBIAMO COPPIE CINEMATICHE.

ESISTE ALTRO TIPO DI ACCOPPIAMENTO CHE IL MOVIMENTO NON DIPENDE SOLO DALLA FORMA DELLE SUPERFICIE CONIUGATE MA ANCHE DALLA FORZA CHE QUESTE SUPERFICI SI SCAMBIANO. IN QUESTO CASO SI PARLA ALLORA DI ACCOPPIAMENTI DI FORZA.

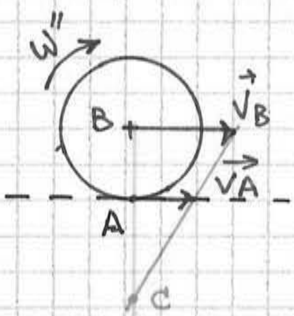
3) ACCOPPIAMENTO DI FORZA (CAMMA A DISCO)



LA PUNTERIA VIENE APPOGGIATA SULLA CAMMA E VIENE PREMUTA DA UNA MOLLA; QUESTA MOLLA SERVE AFFINCHÉ SEMPRE LA PUNTERIA SPINGA LA CAMMA.

$$\omega' = \frac{V}{r}$$
$$r = BC$$

- STRISCIAMENTO

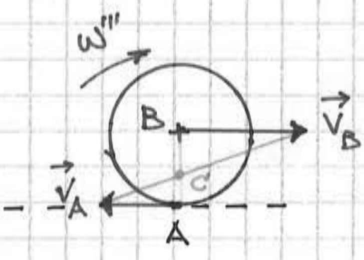


IN QUESTO CASO SIAMO IN CONDIZIONE DI STRISCIAMENTO OVVERO SONO SULLA STRADA BAGNATA E FRENANDO LA RUOTA CONTINUA A RUOTARE.

QUESTA VOLTA LA RUOTA NEL PUNTO DI CONTATTO NON HA LA VELOCITA' NULLA MA STA SCIVOLANDO IN AVANTI CON UNA CERTA VELOCITÀ.
CON I METODI PRECEDENTI, TROVO IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE AL DI SOTTO DELLA RUOTA.

$$\omega'' = \frac{V}{BC} < \omega'$$

- SLITTAMENTO



SUPPONIAMO CHE QUESTA RUOTA È MOTRICE E QUESTA RUOTA STA SLITTANDO SUL TERRENO (CONDIZIONE CHE SI VERIFICA ESAGERANDO ACCELERAZIONE)

LA RUOTA QUESTA VOLTA NON È IN ADERENZA COL TERRENO E STA SCIVOLANDO.

LA VELOCITÀ DEL PUNTO DI CONTATTO SARÀ RIVOLTA AL'INDIETRO.

$$\omega''' = \frac{V}{BC} > \omega'$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 283

$$\begin{cases} \dot{x}_C = r\omega - r\omega\cos\theta = r\omega(1-\cos\theta) \\ \ddot{x}_C = r\dot{\omega}(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_C = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \\ \dot{y}_C = r\omega\sin\theta \\ \ddot{y}_C = r\dot{\omega}\sin\theta + r\omega^2\cos\theta \end{cases}$$

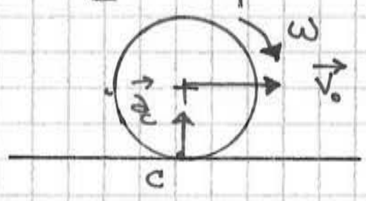
ORA ANDIAMO A VEDERE QUANDO IL PUNTO C SI TROVA SULLA SUPERFICIE DI CONTATTO OVVERO QUANDO $\theta = 0$:

$$\begin{cases} \theta = 0 & C' \equiv C \\ x_C = 0 & y_C = 0 \\ \dot{x}_C = 0 & \dot{y}_C = 0 \\ \ddot{x}_C = 0 & \ddot{y}_C = 0 \end{cases}$$

QUINDI QUANDO IL PUNTO C SI TROVA SULLA SUPERFICIE DI CONTATTO NON CI SARA' VELOCITA' RELATIVA CHE VUOL DIRE CHE IL PUNTO C SARA' IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE.

VEDENDO LA COMPONENTE VERTICALE TROVO CHE E' DIPENDENTE DALLA VELOCITA' ANGOLARE QUINDI ANCHE SE IL DISCO SI MUOVESSE CON LA VELOCITA' COSTANTE, IL PUNTO C APPARTENENTE AL DISCO CHE COMPIE QUESTA TRAIETTORIA A CICLOIDE HA UN'ACCELERAZIONE:

$$a_C = r\omega^2$$

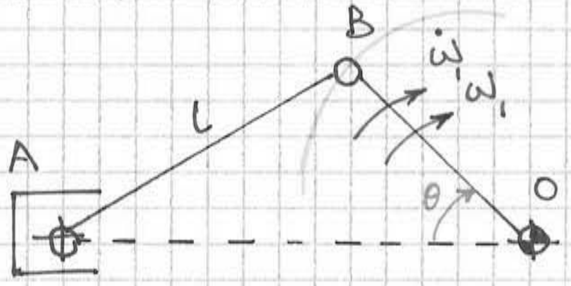


MECCANISMI ARTICOLATI

SONO DEI SISTEMI MECCANICI COSTITUITI DA UN CERTO NUMERO DI CORPI RIGIDI COLLEGATI TRA DI LORO.

"GUARDARE LA VIDEOLEZIONE PER CAPIRE MEGLIO"

BIELLA - MANOVELLA

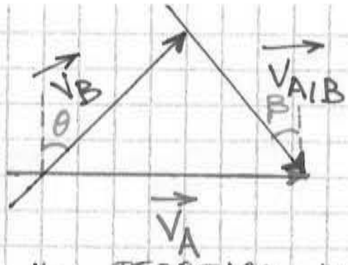


DATI:

$r, l, \theta, \omega_1, \dot{\omega}_1 = 0, \omega_1 = cost$

INCOGNITE:

$\omega_2, \dot{\omega}_2, V_A, a_A$



QUINDI IN QUESTA CONDIZIONE IL PISTONE SI STA SPOSTANDO VERSO DESTRA.

USANDO IL TEOREMA DEI SENI, AVRÒ:

$$r\omega_1 \cos\theta = l\omega_2 \cos\beta$$

$$V_A = r\omega_1 \sin\theta + l\omega_2 \sin\beta$$

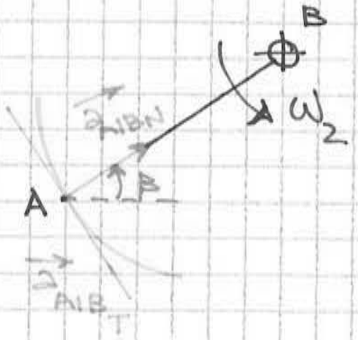
ORA PASSIAMO AL PROBLEMA DELLE ACCELERAZIONI:

$$a_A = a_B + a_{A/B}$$

SICCOMÈ QUESTI CORPI STANNO NEL PIANO, ALLORA POSSONO AVERE SIA UNA TRASLAZIONE SIA UNA ROTAZIONE NEL PIANO.
IL PISTONE STA SOLO TRASLANDO QUINDI HA SOLO UNA COMPONEN DELL'ACCELERAZIONE LUNGO IL PIANO ORIZZONTALE.
MA PER QUANTO RIGUARDA GLI ALTRI DUE CORPI, STIAMO PARLAN DI DUE CORPI CHE RUOTANO NEL PIANO E QUINDI POSSONO AVER DUE COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE.

QUINDI POSSONO AVERE UNA COMPONENTE NORMALE LUNGO LA TRAIETTO RIA E UNA COMPONENTE TANGENZIALE.

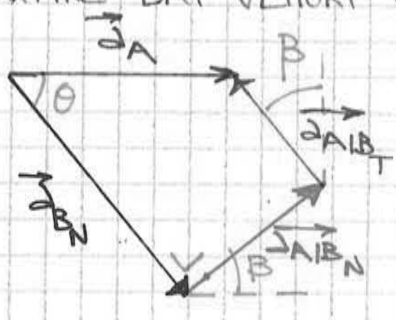
	$a_A =$	a_{B_N} +	$\cancel{a_{B_T}}$ +	a_{A/B_N} +	a_{A/B_T}
M	?	$r\omega_1^2$	$\cancel{\dot{\omega}_1 r}$	$l\omega_2^2$	$(l\dot{\omega}_2)$?
D/V	—	θ	$\cancel{\theta_1}$	β	β_1



CONOSCO IL VERSO DI ω_2, PERCHÈ ESSENDO IN BASSO IL VERSO DI $V_{A/B}$ ALLORA ω_2 SARA' ANTIORARIA.

NON CONOSCO IL VERSO DI a_{A/B_T} PERCHÈ NON CONOSCO IL VERSO DI $\dot{\omega}_2$.

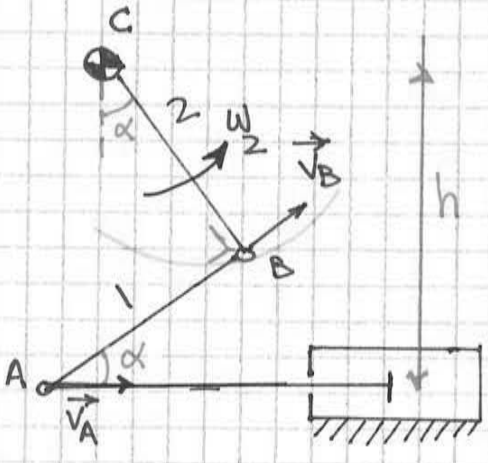
CONVIENE PARTIRE DAI VETTORI NOTI:



VIDEOLEZIONE N° VII (ESERCITAZIONE)

- MECCANISMO GINOCCHIERA
- QUADRILATERO ARTICOLATO

ES. 1.10 MECCANISMO A GINOCCHIERA



$AB = BC = a = 125\ mm$
$h = 175\ mm$
$V_A = 0{,}5\ m/s$

ω_1? ω_2?

COME AL SOLITO POSSIAMO USARE O IL METODO DI CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE O LA FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA.

PRIMA DI TUTTO CALCOLO L'ANGOLO α:

$$h = a\sin\alpha + a\cos\alpha = a(\sin\alpha + \cos\alpha)$$
$$h^2 = a^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$h^2 = a^2(1 + \sin 2\alpha)$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right) = 36{,}9^\circ$$

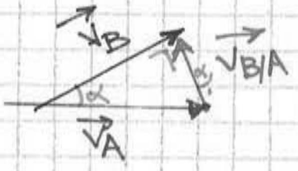
ORA USO LA FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

M $(a\omega_2)$? V_A $(a\omega_1)$?

DIV

SICCOMÈ IL PUNTO B RUOTA INTORNO AL PUNTO C, ALLORA LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ SARÀ TANGENTE ALLA TRAIETTORIA CIRCOLARE CON IL CENTRO IN C OVVERO SARÀ PERPENDICOLARE AL MEMBRO 2, DI CONSEGUENZA PARALLELA AL MEMBRO 1.



$\vec{V}_B = a\omega_2 = V_A\cos\alpha$

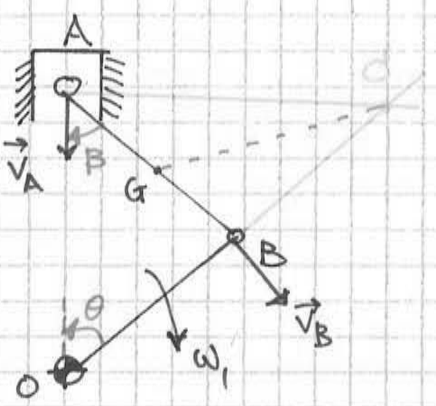
$\omega_2 = 2{,}40\ rad/s$

$V_{B/A} = a\omega_1 = V_A\sin\alpha$

$\omega_1 = 3{,}19\ rad/s$

VIDEOLEZIONE N° VIII (ESERCITAZIONE)

- BIELLA - MANOVELLA
- MECCANISMO DISCO-LEVA



$\omega_1 = 1500$ GIRI/MIN

$OB = 42{,}5$ mm
$AB = 107{,}5$ mm
$AG = 75$ mm
$\theta = 60°$

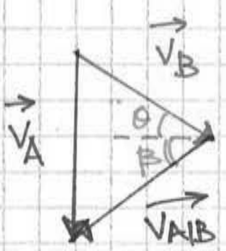
ω_2? V_G? $\dot{\omega}_2$? a_A?

USANDO IL TEOREMA DEI SENI RICAVO L'ANGOLO β:

$$\frac{AB}{\sin\theta} = \frac{OB}{\sin\beta} \rightarrow \beta = \arcsin\frac{42{,}5}{107{,}5}\cdot\sin 60° = 20{,}02°$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

M	?	$OB\omega_1$	$(AB\omega_2)$?
D/V		θ	β



$V_B \cos\theta = V_{A/B}\cos\beta$

$\omega_2 = 33{,}05$ rad/s

ANALIZZANDO IL SISTEMA BIELLA POSSO TROVARE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

$$V_G = \omega_2 GC$$

ORA DEVO TROVARE IL VALORE DI GC:

$$OA = AB\cos\beta + OB\cos\theta = 122{,}25 \text{ mm}$$
$$AC = AO\,tg\,\theta = 211{,}74 \text{ mm}$$

ORA CONSIDERO $\overset{\triangle}{ABC}$ E APPLICANDO IL TEOREMA DI CARNOT:

$$GC = (AC^2 + AG^2 - 2AC\cdot AG\sin\beta)^{1/2} = 198{,}96 \text{ mm}$$

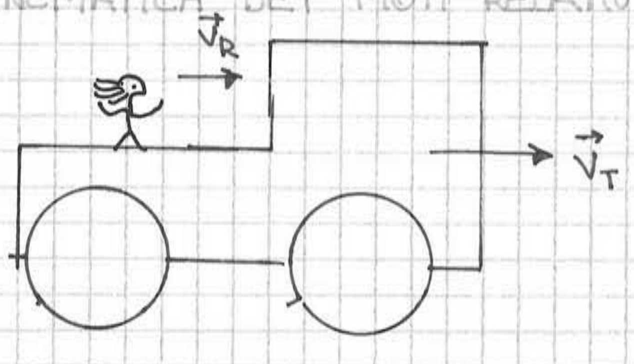
$$V_G = \omega_2 GC = 33{,}05\cdot 198{,}96 / 1000 = 6{,}58 \text{ m/s}$$

ORA CALCOLO LE ACCELERAZIONI:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 283

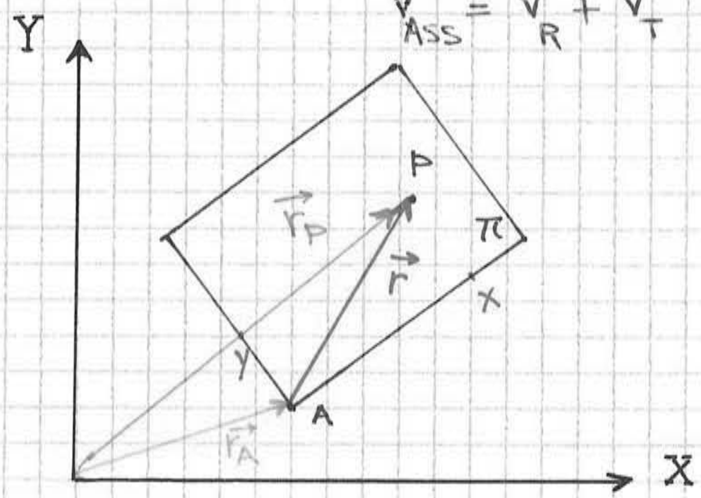
VIDEOLEZIONE N° IX

– CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI



IL VEICOLO STA PROSEGUENDO E UNA PERSONA AL BORDO STA CORRENDO SUL VEICOLO.
UN OSSERVATORE A TERRA PERCEPISCE UNA VELOCITÀ SUPERIORE A QUELLA PERCEPITA DALL'UOMO CHE CORRE, PERCHÉ QUESTO UOMINO A SUA VOLTA È TRASCINATO DAL VEICOLO. A QUESTO PUNTO ABBIAMO:

$$V_{ASS} = V_R + V_T$$



IL PIANO π SI STA MUOVENDO NEL PIANO FISSO. IL VETTORE r RAPPRESENTA LA POSIZIONE DEL PUNTO RISPETTO AL PIANO MOBILE E IL VETTORE r_P QUELLA RISPETTO AL PIANO FISSO.

$$r_P = r + r_A$$

$$r = x i + y j = r\lambda \quad \text{"MOTO RELATIVO"}$$

$$\frac{d}{dt} = \dot{x} i + \dot{y} j = v_{R_P}$$

$$\frac{dV_{R_P}}{dt} = a_{R_P} = \ddot{x} i + \ddot{y} j$$

$$V_{R_P} = V_A + V_{T_{P/A}}$$

$$V_P = V_A + V_{T_{P/A}} = V_A + \omega r \mu$$

$$a_{T_P} = a_A + a_{T_{P/A}} = a_A + a_{T(P/A)_N} + a_{T(P/A)_T} = a_A - \omega^2 r \lambda + \dot{\omega} r \mu$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{R_A} + \vec{a}_{T_A} + \vec{a}_{C_A}$$

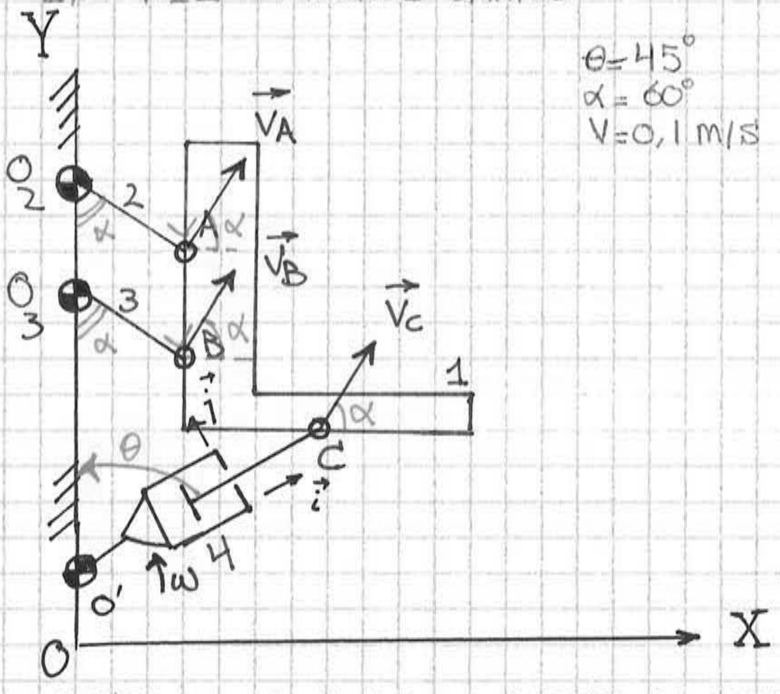
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{R_A} + \vec{a}_{T_A(N)} + \vec{a}_{T_A(T)} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{R_P}$$

$$\vec{a}_A = \ddot{r}\vec{i} + \omega^2 r(-\vec{i}) + \dot{\omega} r \vec{j} + 2\omega V_{R_P} \vec{j}$$

$$|\vec{V}_A| = (\dot{r}^2 + (r\omega)^2)^{1/2} = 0{,}613\ m/s$$

$$|\vec{a}| = [(\ddot{r} - r\omega^2)^2 + (\dot{\omega} r + 2\omega V_{R_P})^2]^{1/2} = 0{,}625\ m/s^2$$

ES 1.22 PIANALE CARICO



$\theta = 45°$
$\alpha = 60°$
$V = 0{,}1\ m/s$

CONSIDERO IL CILINDRO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE. IL PUNTO C SI MUOVE SUL PIANO ORIZZONTALE E QUINDI SI SPOSTA RISPETTO AL PIANO DI RIFERIMENTO MOBILE.

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{R_C} + \vec{V}_{T_C}$$

$$\vec{V}_{R_C} = V\vec{i}$$

IL MOTO DI TRASCINAMENTO È UN MOTO CIRCOLARE.

$$\vec{V}_{T_C} = \omega \cdot O'C\,\vec{j}$$

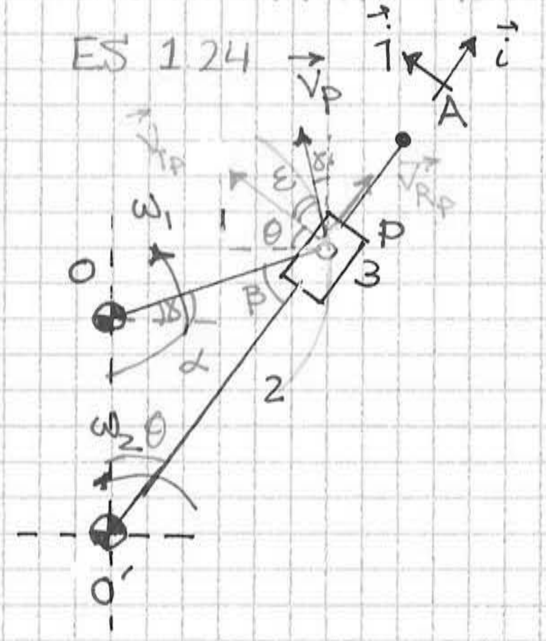
IL PUNTO A NEL SUO MOTO ASSOLUTO HA UN MOTO CIRCOLARE ATTORNO A O_2 (B ATTORNO A O_3)

ORA RAGIONANDO SUL CORPO 1 POSSO INDIVIDUARE IL SUO CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE. POSSO TROVARLO SE CONOSCO LA DIREZIONE DEL MOTO DI DUE PUNTI QUALSIASI. IN QUESTO CASO IO CONOSCO LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ DEL PUNTO A E B. SONO PARALLELI E UGUALI TRA DI LORO (PERCHÈ LA LUNGHEZZA DELLE DUE BIELETTE SONO UGUALI) QUINDI IL PIANALE AVRÀ TUTTE LE VELOCITÀ UGUALI TRA DI LORO (IN MODULO, DIREZIONE E VERSO) CIOÈ SI STA MUOVENDO DI MOTO TRASLATORIO.

VIDEOLEZIONE N° X

ESERCITAZIONE MECCANISMO A GLIFO

ES 1.24 →



OP = 0,3 m
O'A = 0,8 m
OO' = 0,4 m
$\omega_1 = 100$ rad/s $(\dot{\omega}_1 = 0)$
$\theta = 25°$

ω_2? V_A?

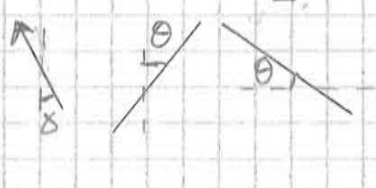
a_A? $\dot{\omega}_2$?

ELEMENTO NUMERO 3 È UN CORSOIO, QUESTO CORSOIO È UN CORPO CHE PRESENTA UN FORO E DENTRO QUESTO FORO SI INFILA QUESTA ASTA RIGIDA, GLIFO. QUINDI TRA IL GLIFO E IL CORSOIO C'È UN ACCOPPIAMENTO PRISMATICO. IL CORSOIO HA POSSIBILITÀ DI SCIVOLARE, STRISCIARE LUNGO IL GLIFO. PERÒ ESISTE ANCHE UN COLLEGAMENTO TRA IL CORSOIO E MANOVELLA.
QUESTA MANOVELLA RUOTA ATTORNO AL CENTRO O CON UNA CERTA VELOCITÀ ANGOLARE ω_1.
COSÌ ANCHE IL GLIFO RUOTA ATTORNO AL SUO CENTRO FISSO CON UNA VELOCITÀ ANGOLARE ω_2.

QUINDI LA MANOVELLA RUOTA CON UN MOTO ROTATORIO ATTORNO AD O, IL GLIFO 2 SI PUÒ MUOVERE CON UN MOTO ROTATORIO ATTORNO AD O_2. IL CORSOIO PUÒ MUOVERSI CON UN MOTO RELATIVO DI STRISCIAMENTO RISPETTO A GLIFO.

IL PUNTO P (IL PUNTO DI COLLEGAMENTO TRA LA MANOVELLA, GLIFO E IL CORSOIO, AVRÀ UN MOTO ASSOLUTO ATTORNO AD O, POI ABBIAMO UN MOTO RELATIVO DEL PUNTO P CHE È SCORRIMENTO LUNGO IL GLIFO QUINDI IL MOTO DI TRASCINAMENTO È IL MOTO ROTATORIO DEL GLIFO ATTORNO AD O'.

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{R_P} + \vec{V}_{T_P}$$

M	$\omega_1 \cdot OP$	?	$(\omega_2 O'P)$?
D/V			

ORA PROIETTANDO I LATI IN DUE DIREZIONI, LA SOMMA DEVE ESSERE UGUALI.

$$\omega_1^2 \, OP \cos(\gamma+\theta) = 2\omega_2 V_{RP} + \dot{\omega}_2 O'P$$

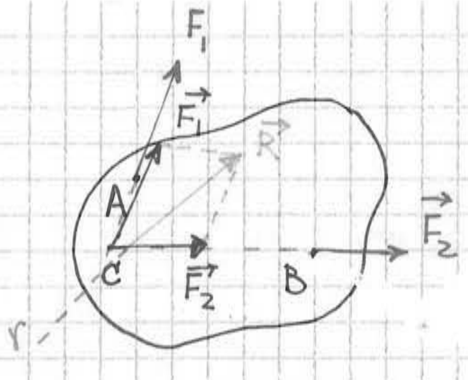
$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{O'P} \left(\omega_1^2 \, OP \cos(\gamma+\theta) - 2\omega_2 V_{RP} \right)$$

$$\dot{\omega}_2 = 519 \text{ rad/s}^2$$

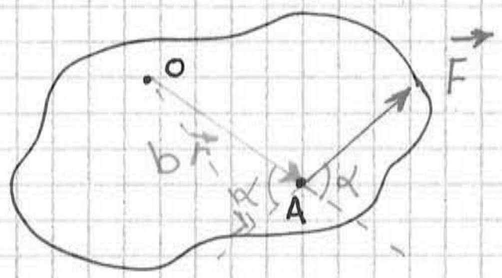
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_N} + \vec{a}_{A_T}$$

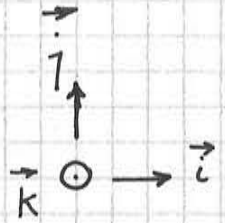
$$= \omega_2^2 \, O'P(-\vec{i}) + \dot{\omega}_2 O'P(\vec{j})$$

$$|\vec{a}_A| = O'P\left(\dot{\omega}_2^2 + \omega_2^4\right)^{1/2} = 1384 \text{ m/s}^2$$



r: RETTA D'AZIONE DELLE FORZE





O: POLO DI RIFERIMENTO

MOMENTO DI UNA FORZA È UNA GRANDEZZA VETTORIALE CHE DAL PUNTO DI VISTA DEL MOTO DI UN SISTEMA PUÒ PRODURRE UN EFFETTO ROTATORIO.
IL MOMENTO DI UN SISTEMA VA CALCOLATO CONSIDERANDO NON SOLTANTO LA FORZA APPLICATA AL CORPO MA ANCHE UN PUNTO DI RIFERIMENTO.
IL VETTORE r È LA POSIZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA A RISPETTO AL POLO DI RIFERIMENTO.

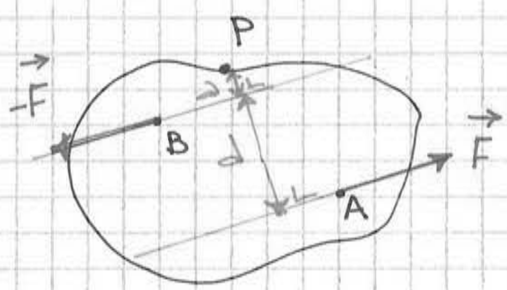
QUINDI ABBIAMO DUE VETTORI COMPLANARI CHE FORMANO UN ANGOLO α

$$M_o = r \wedge F = rF\sin\alpha\, k$$

$r.\sin\alpha = b$ 'BRACCIO DELLA FORZA'

IL BRACCIO DELLA FORZA È LA DISTANZA TRA IL PUNTO DI RIFERIMENTO E LA RETTA D'AZIONE DELLA FORZA.

$$M_o = bF.k$$



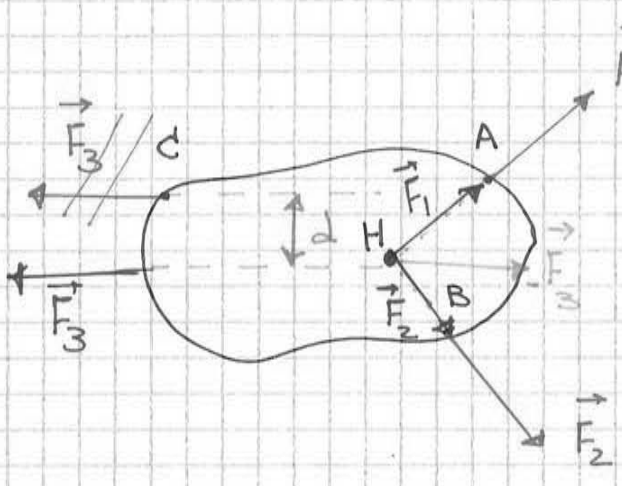
- STESSA DIREZIONE
- VERSO OPPOSTO
- STESSO MODULO

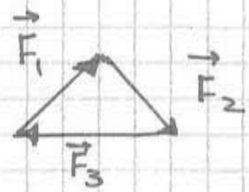
UN SISTEMA DI QUESTO TIPO VIENE DEFINITO COPPIA DI FORZE.

RISPETTO AD UN PUNTO QUALSIASI APPARTENENTE AL CORPO, POSSO CALCOLARE IL MOMENTO COMPLESSIVO.

$$M_P = F(a+d)k + Fa(-k)$$
$$M_P = Fdk = M$$

QUINDI PER AVERE IL CORPO IN EQUILIBRIO BISOGNA CHE LE FORZE DIANO UN MOMENTO NULLO. QUINDI BISOGNA CHE LE FORZE NON FORMINO UNA COPPIA MA AGISCONO SULLA STESSA RETTA D'AZIONE.





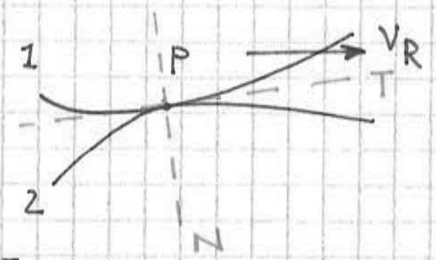
$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 = 0$

IL CORPO È RIGIDO QUINDI SFRUTTO IL PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ.

VEDO CHE LA RISULTANTE $-F_3$ E F_3 FORMANO UNA COPPIA. QUINDI PER ANNULLARE IL MOMENTO BISOGNA CHE LA FORZA F NON SIA APPLICATA IN UN PUNTO QUALSIASI MA IN UN PUNTO DA POTER ANNULLARE LA RISULTANTE.

3 FORZE:
- RISULTANTE = 0
- CONCORRENTI NELLO STESSO PUNTO H.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 283

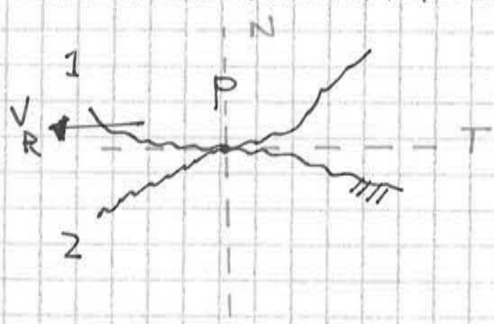


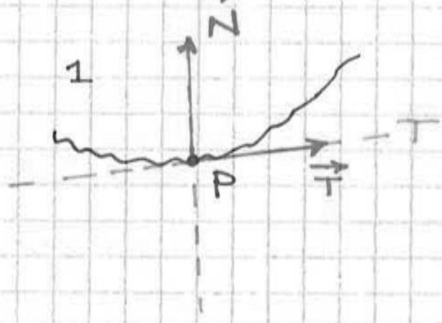
NEL PUNTO DI CONTATTO QUESTI SUPERFICI HANNO UN CERTO PROFILO

I CASO: DUE CORPI A CONTATTO SU SUPERFICI LISCE.

SE DUE SUPERFICI A CONTATTO SONO LISCE, LA FORZA CHE SCAMBIANO AVRÀ DIREZIONE SOLTANTO NORMALE.
IL VERSO È PREMENTE PERCHÉ LA FORZA CHE SCAMBIANO IMPEDISCE ALLA COMPENETRAZIONE.

II CASO: SUPERFICI SCABRE

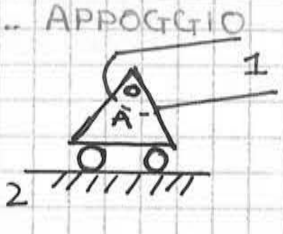


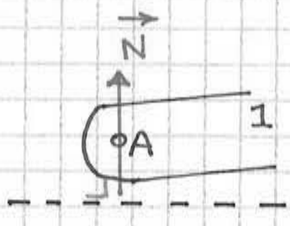


DI NUOVO ABBIAMO UN COMPONENTE NORMALE CHE IMPEDISCE LA COMPENETRAZIONE DEI DUE CORPI. POI PERÒ A CAUSA DI SCABRITÀ DI QUESTE SUPERFICI CERCANDO DI FAR SCIVOLARE UN CORPO SUL'ALTRO QUESTO CORPO NEL SUO MOTO RELATIVO RICEVO UNO STACOLO. QUESTO STACOLO QUINDI AVRÀ LA FORMA DI UNA FORZA IN DIREZIONE TANGENZIALE (IL SUO VERSO SARÀ OPPOSTO AL VERSO DELLA VELOCITÀ)

VINCOLI

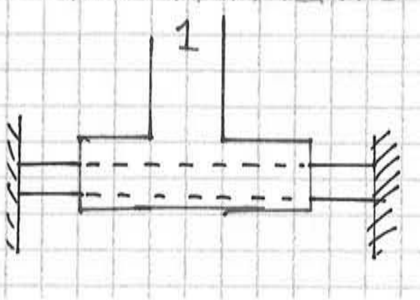
- APPOGGIO SEMPLICE

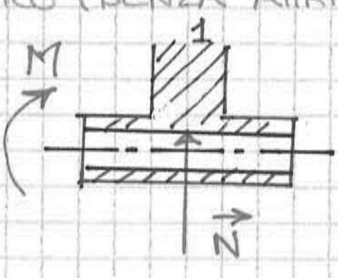




- DIREZIONE NORMALE ALLA SUPERFICIE D'APPOGGIO
- VERSO PREMENTE (SI OPPONE ALLA COMPENETRAZIONE DEI DUE CORPI)

- ACCOPPIAMENTO PRISMATICO (SENZA ATTRITO)



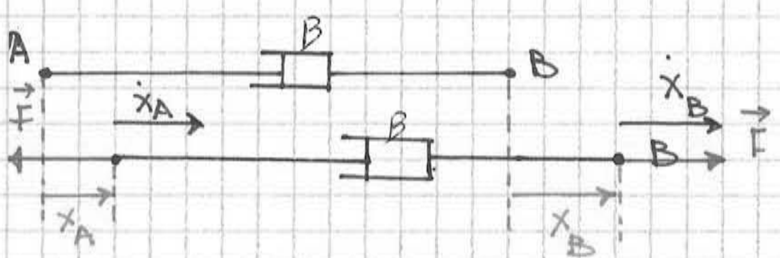


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 283

$$F = k \cdot \Delta x$$

$$F = k(x_B - x_A)$$

_ FORZE VISCOSE



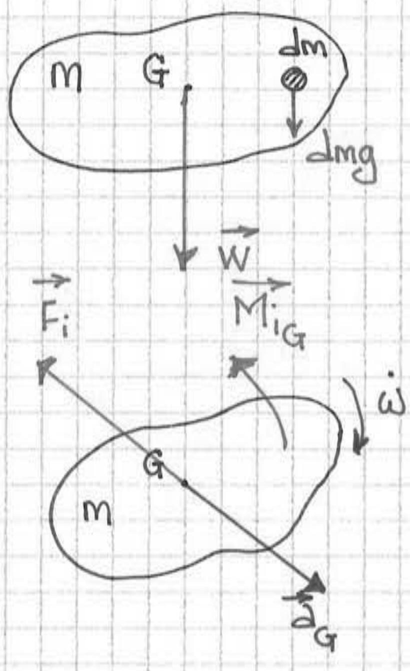
QUESTO ELEMENTO SI DEFORMA TIRANDO O SPINGENDO SULLE SUE ESTREMITÀ.

QUESTO CORPO AVENDO LA CARATTERISTICA DI ESSERE VISCOSA, NON ESERCITANDO PIÙ LA FORZA IL CORPO RIMANE NELLA SUA CONDIZIONE ATTUALE.
LA FORZA ESERCITATA INFLUISCE SULLA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE.

$\dot{x}_B - \dot{x}_A$ = VELOCITÀ DI ALLUNGAMENTO DEL CORPO

$$F = \beta(\dot{x}_B - \dot{x}_A)$$

FORZE DI MASSA



$$W = mg$$

QUESTO CORPO RISULTA SOGGETTO A DELLE FORZE CHE SI CHIAMANO FORZE D'INERZIA.

$F_i = -m a_G$ "RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA"

$M_{iG} = -I_G \cdot \dot{\omega}$ "MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA"

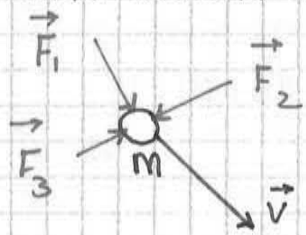
VIDEOLEZIONE N° XIII

- EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA
- DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO

I PROBLEMI DELLA DINAMICA SI POSSONO AFFRONTARE CON DIVERSI APPROCCI CHE SI DIFFERENZIANO SOSTANZIALMENTE DAGLI STRUMENTI MATEMATICI CHE SI UTILIZZANO.

METODO DELLE EQUAZIONI CARDINALI

SI BASA SULLE LEGGI CHE VENGONO DEFINITI LEGGI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA O LEGGI DI NEWTON.

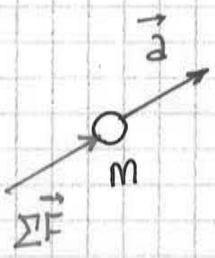


IN GENERALE QUESTO CORPO PUNTIFORME AVRÀ ANCHE UNA CONDIZIONE DI MOTO PER ESEMPIO VELOCITÀ (IL SUO MOTO IN QUESTO ISTANTE È RAPPRESENTATO DALLA SUA VELOCITÀ.

$$1)\quad \Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 = 0 \rightarrow V = \text{COSTANTE}$$

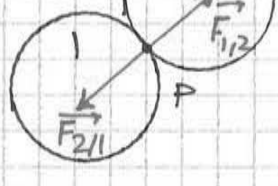
SUPPONIAMO CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE SIA UGUALE A ZERO OVVERO SISTEMA EQUILIBRATO (LE FORZE PASSANO PER LO STESSO PUNTO) SE LA PARTICELLA ERA FERMA, RIMANE FERMA. SE INVECE HA UNA CERTA VELOCITÀ CONTINUA A MUOVERSI CON LA STESSA VELOCITÀ. QUINDI AVRÀ MOTO RETTILINEO UNIFORME.

$$2)\quad \Sigma F \neq 0 \qquad \Sigma F = ma$$

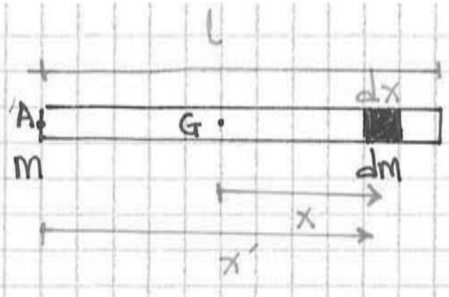


COME SI VEDE L'ACCELERAZIONE HA LO STESSO VERSO E LA STESSA **DIREZIONE** DELLA RISULTANTE DELLE FORZE E LA MASSA È LA COSTANTE DELLA PROPORZIONALITÀ (IN REALTÀ RAPPRESENTA L'INERZIA, PIGRIZIA DEL SISTEMA)

$$3)\quad F_{1/2} = -F_{2/1}$$ "PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE"



TUTTO QUESTO VALE PER CORPO PUNTIFORME. ORA PASSIAMO AD ANALIZZARE UN SISTEMA PIÙ COMPLESSO PER ESEMPIO UN CORPO RIGIDO CHE SI MUOVE SUL PIANO.



$m = l\rho$ ρ = DENSITÀ DI MASSA LINEARE

$dm = \rho\, dx$

$$dI_G = x^2 dm = x^2 \rho\, dx$$

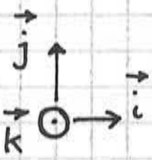
$$I_G = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{\rho}{3}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{ml^2}{12} \quad [kgm^2]$$

SE INVECE LO FACCIO RUOTARE ATTORNO ALL'ESTREMITÀ DI SINISTRA AVRÒ:

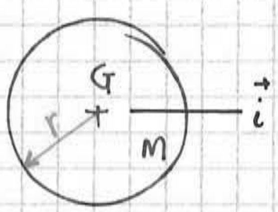
$$I_A = \rho \int_0^A x'^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = m\frac{l^2}{3}$$

QUINDI A SECONDA DELL'ASSE DI ROTAZIONE TROVO DEI VALORI DI MOMENTO D'INERZIA DIVERSI.

VEDO CHE C'È ANCHE UNA RELAZIONE TRA IL MOMENTO DI INERZIA BARICENTRICO E I_A.
IL MOMENTO D'INERZIA DI UN PUNTO SI PUÒ CALCOLARE COME:

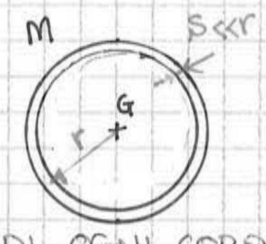


$$I_A = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m\frac{l^2}{12} + m\frac{l^2}{4} = m\frac{l^2}{3}$$



$$I_{G(k)} = \frac{mr^2}{2}$$

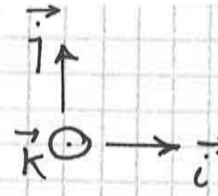
$$I_{G(i)} = \frac{mr^2}{4}$$



$$I_{G(k)} = mr^2$$

QUINDI OGNI CORPO A SECONDA DELLA SUA MASSA MA ANCHE A SECONDA DI COME LA SUA MASSA È DISTRIBUITA NELLO SPAZIO MA A SECONDA ANCHE ALL'ASSE INTORNO ALLA QUALE IO IMMAGINO DI FARLO RUOTARE PRESENTA QUESTA CARATTERISTICA INERZIALE CHE ABBIAMO CHIAMATO MOMENTO D'INERZIA CHE PUÒ ESSERE CALCOLATO INTEGRANDO, CONSIDERANDO APPUNTO QUESTA DISTRIBUZIONE SPAZIALE DI MASSA.

$$\begin{cases} \sum F_e + F_i = 0 \\ \sum M_e + M_i = 0 \quad (*) \end{cases}$$



* RIFERITI AD UNO STESSO PUNTO (QUALSIASI)

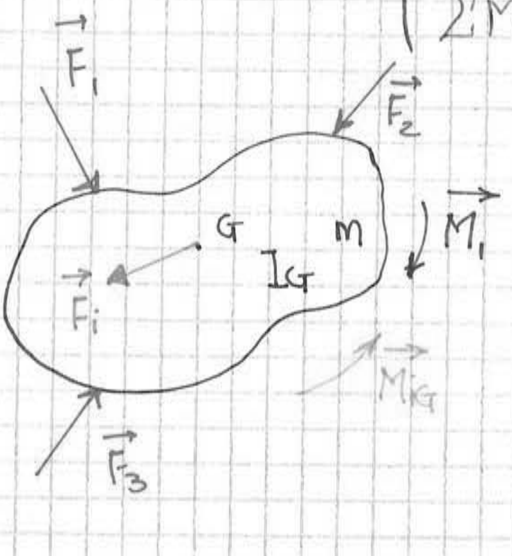
SE IL CORPO SI MUOVE DI MOTO PIANO:
- TUTTE LE FORZE SONO NEL PIANO i-j
- TUTTI I MOMENTI SONO PARALLELI A k.

QUINDI OGNIUNO DI QUESTE DUE EQUAZIONI CARDINALI POSSON ESSERE PROIETTATE LUNGO x, y, z.

$$\begin{cases} \sum F_{ex} + F_{ix} = 0 \\ \sum F_{ey} + F_{iy} = 0 \\ \sum F_{ez} + F_{iz} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_{ex} + M_{ix} = 0 \\ \sum M_{ey} + M_{iy} = 0 \\ \sum M_{ez} + M_{iz} = 0 \end{cases}$$

SICCOME STO PROIETTANDO NEL PIANO i, j VUOL DIRE CHE NON CI SONO LE FORZE LUNGO Z. TUTTI I MOMENTI SONO LUNGO k, QUINDI NON ESISTONO I MOMENTI LUNGO x, y. QUINDI AVRÒ:

$$\begin{cases} \sum F_{ex} + F_{ix} = 0 \\ \sum F_{ey} + F_{iy} = 0 \\ \sum M_{ez} + M_{iz} = 0 \end{cases}$$



QUESTO DIAGRAMMA VIENE DEFINITA, DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO, VUOL DIRE CHE IO HO IMMAGINATO DI SCOLLEGARE QUESTO SISTEMA DAL MONDO LIBERO.

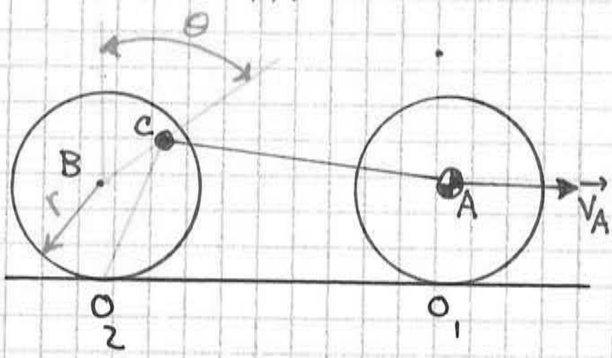
TUTTE LE FORZE E TUTTI I MOMENTI SONO ESERCITATI DAL "MONDO ESTERNO" SUL CORPO (SISTEMA) COMPRESE FORZE E COPPIE D'INERZIA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 283

VIDEOLEZIONE N° XIV

- ESERCIZI DI CINEMATICA

ESERCIZIO 1.17



$V_A = 5 m/s$

$AC = 800 mm$

$r = 250 mm$

$BC = 200$

$\theta = 0°, 30°$ $\quad \omega_{AC}$? $\; V_C$? $\; V_B$?

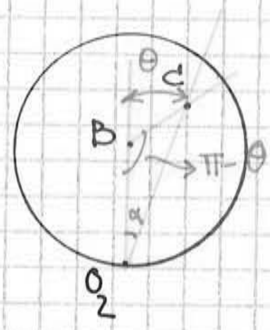
ANDIAMO SUBITO A CALCOLARE LA VELOCITÀ ANGOLARE DELLA RUOTA 1 ESSENDO NOTA LA VELOCITÀ DEL PUNTO A.

RICORDIAMO CHE LE RUOTE ESSENDO ROTOLANO SENZA STRISCIARE ALLORA I PUNTI DI CONTATTO O_1, O_2 SONO CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE.

$$V_A = \omega_1 r \rightarrow \omega_1 = 20 \text{ rad/s}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{A/C}$$

M	V_A	?	?
D/V	→	\	/

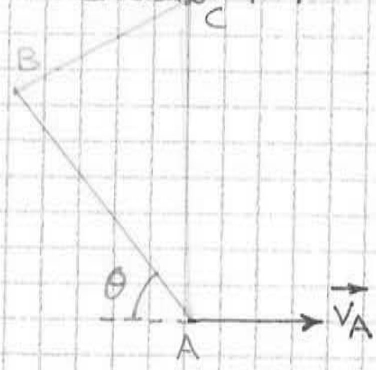


$$O_2C = (r^2 + BC^2 - 2rBC\cos(\pi-\theta))^{1/2} =$$
$$= (r^2 + BC^2 + 2rBC\cos\theta)^{1/2} =$$

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{O_2C}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{O_2C}{\sin\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{O_2C}\sin\theta$$

ESERCIZIO 1.19



TROVO IL CENTRO DI ISTANTANEA DI ROTAZIONE.

$$AB = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$AB = AC\sin\theta \rightarrow AC = \frac{a}{\sin^2\theta}$$

$$V_A = \omega_{AB} AC \rightarrow \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_A}{a/\sin^2\theta} = 1 \ \frac{rad}{s}$$

$$V_B = \omega_{AB} BC$$

$$BC = AC\cos\theta \rightarrow V_B = 0{,}866 \ \frac{m}{s}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 283

I VERSI DELLE REAZIONI VINCOLARI LI HO APPLICATI A PRIORI PERCHE' NON CONOSCO CON SICUREZZA I VERSI. QUESTO NON È UN PROBLEMA PERCHE' RISOLVENDO EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA SE IO TROVASSI UN SEGNO NEGATIVO, VORREBBE DIRE CHE IL VERSO SAREBBE OPPOSTO A QUELLO CHE HO RIPORTATO SUL DIAGRAMMA.

A QUESTO CASO POSSIAMO SCRIVERE LE TRE EQUAZIONI DELLA DINAMICA (ANCHE SE IN REALTÀ IN QUESTO CASO SARÀ STATICA PERCHE NON C'È MOVIMENTO)

$$\rightarrow \quad R_{AX} = 0$$

$$\uparrow \quad R_{AY} - mg + R_B = 0$$

$$\circlearrowleft A \quad R_B L - mg\frac{L}{2} = 0$$

$$R_{AY} = R_B = mg/2$$

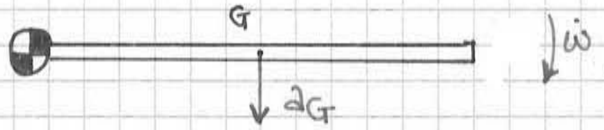
ORA IMMAGINANDO DI TOGLIERE L'APPOGGIO IN PUNTO B, VEDIAMO COSA PUÒ SUCCEDERE:
AVREMMO QUESTA TRAVE NON PIÙ APPOGGIATA IN B MA SOLO INCERNIERATA IN A. QUINDI DEVO SAPERE IN QUALE ISTANTE PERCHÉ ORA ESSENDO IN CONDIZIONI DI DINAMICA LE REAZIONI VINCOLARI ISTANTE PER ISTANTE POSSONO CAMBIARE.

QUINDI LO CALCOLO IN ISTANTE INIZIALE, QUESTA TRAVE SARÀ ANCORA ORIZZONTALE, ANCORA AVRÀ LA VELOCITÀ NULLA IN QUANTO LA SUA VELOCITÀ DI ROTAZIONE SARÀ NULLA MA AVRÀ UN'ACCELERAZIONE PERCHÉ QUESTA VELOCITÀ È DESTINATA A CAMBIARE UN MICRO SECONDO DOPO (COMINCERÀ A CADERE)

PER $t=0$, $\omega=0$, $\dot{\omega}\neq 0$

QUESTA CONDIZIONE PARTICOLARE VIENE CHIAMATA CONDIZIONE DI MOTO INCIPIENTE (SARA' ANCORA FERMO IL CORPO MA STA PER INIZIARE IL MOTO)

LA PRESENZA DI ACCELERAZIONE IMPLICA LA PRESENZA DELLE FORZE D'INERZIA. POI IL FATTO CHE QUESTA TRAVE SI MUOVE CON UNA CERTA ACCELERAZIONE ANGOLARE FA NASCERE ANCHE RISULTANTE DEI MOMENTI D'INERZIA.



QUANDO SI STUDIANO I PROBLEMI DELLA DINAMICA DI QUESTO GENERE, LA PRIMA COSA DA FARE È UNA IDENTIFICAZIONE CINEMATICA OVVERO CAPIRE COME SI MUOVE IL SISTEMA.

QUESTO SISTEMA SI MUOVE ATTORNO AL PUNTO A, HA UN BARICENTRO PIAZZATO A METÀ CHE QUESTO BARICENTRO HA UN'ACCELERAZIONE.

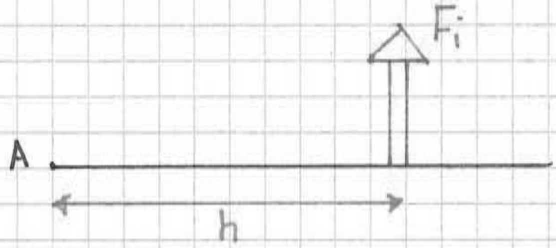
$$dF_i = -dm\,a$$

SUL CORPO CI SONO TANTE ALTRE MASSE INFINITESIME DI CUI VALORE DELLA FORZA D'INERZIA DIPENDE DALLA POSIZIONE DELLA MASSA INFINITESIMA ALL CENTRO DI ROTAZIONE.
DI CONSEGUENZA LA FORZA D'INERZIA È PROPORZIONALE CON LA DISTANZA x.
QUINDI POSSO RAPPRESENTARE IL DIAGRAMMA DELLE FORZE D'INERZIA CON UN TRIANGOLO. VUOL DIRE CHE NEL COMPLESSO LE FORZE D'INERZIA RAPRESENTANO UNA DISTRIBUZIONE LINEARE CON UN ANDAMENTO TRIANGOLARE. QUESTO DIAGRAMMA TRIANGOLARE DI CARICO, RAPRESENTA IL CARICO COMPLESSIVO DELLE FORZE D'INERZIA CHE AGISCONO SU QUESTA STRUTTURA.
CONOSCENDO QUESTO ANDAMENTO POSSO CALCOLARE LA RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA.

$$F_i = \int dF_i = \dot{\omega}\rho \int_0^L x\,dx = \dot{\omega}\rho \frac{L^2}{2}$$

$$F_i = \dot{\omega}\frac{L}{2}\rho L = a_G m$$

QUINDI ANZICHÈ QUELLA DISTRIBUZIONE TRIANGOLARE SULLA TRAVE POSSO SOSTITUIRLA CON UN'UNICA RISULTANTE DELLE FORZE.
PERÒ SICCOMÈ LE FORZE SONO VETTORI APPLICATI, DEVO CONOSCERE ANCHÈ IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE.
DEVO APPLICARLA NEL BARICENTRO, MA NON BARICENTRO DELLA TRAVE MA NEL BARICENTRO DELLE FORZE.
IL BARICENTRO SI INDIVIDUA PONENDÒ CHE L'EFFETTO PRODOTTO DALLE FORZE DISTRIBUITE AI FINI DEL MOMENTO COMPLESSIVO RISPETTO AD UN PUNTO DEVE ESSERE UGUALE AL MOMENTO DELLA RISULTANTE.



$$F_i h = \int x\,dF_i = \dot{\omega}\rho \int_0^L x^2\,dx$$

$$F_i h = \dot{\omega}\rho \frac{L^3}{3} = \frac{2a_G}{L}\rho L \frac{L^2}{3}$$

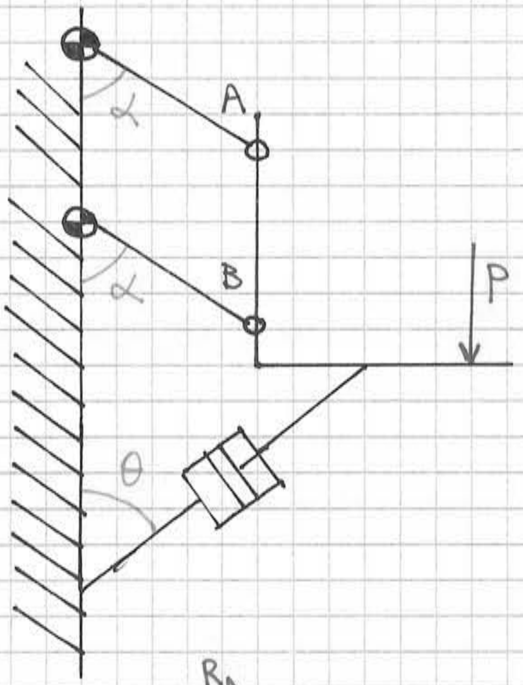
$$m a_G h = m a_G \frac{2}{3}L$$

$$\rightarrow h = \frac{2}{3}L$$

VIDEOLEZIONE N° XVI (ESERCITAZIONE)

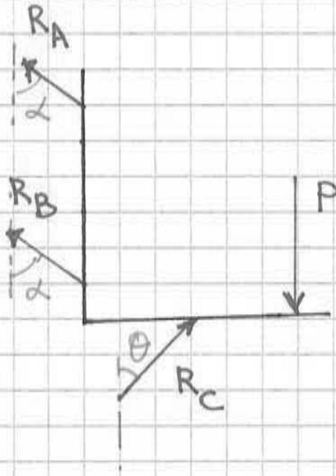
ESERCIZI RELATIVI ALL'EQUILIBRIO STATICO DEI CORPI

ESERCIZIO 2.18



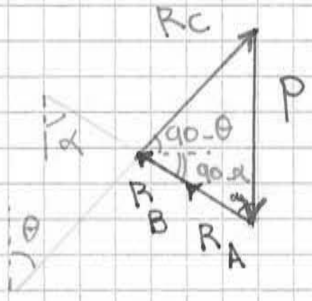
$\theta = 45°$
$\alpha = 60°$
$\varnothing = 5\,cm$
$P = 500\,kg$

p? / EQUILIBRIO STATICO



AFFINCHÉ IL SISTEMA SIA IN EQUILIBRIO STATICO:

$$\vec{P} + \vec{R}_C + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$



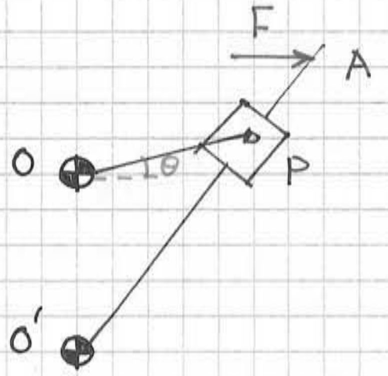
ORA APPLICANDO IL TEOREMA DEI SENI AVRÒ:

$$\frac{P}{\sin(180-\alpha-\theta)} = \frac{R_C}{\sin\alpha}$$

$\rightarrow R_C = 4998\,N$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 283

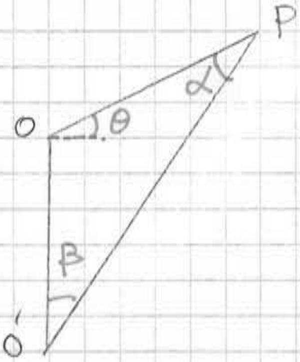
ESERCIZIO 2.20



$OP = 0{,}3\,m$
$O'A = 0{,}8\,m$
$O'O = 0{,}4\,m$
$\theta = 25°$
$F = 100\,N$

C_0?

R_0?



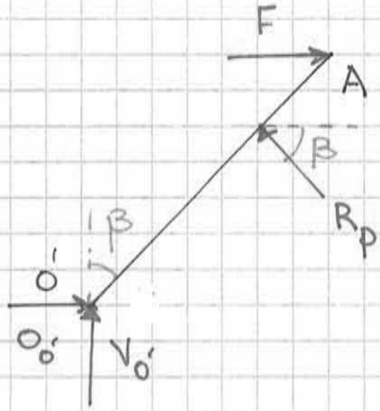
ATTRAVERSO CARNOT AVRÒ:

$$PO = \left(PO'^2 + OO'^2 - 2\,OO'\,PO'\cos(90+\theta)\right)^{1/2} = 0{,}59\,m$$

ORA APPLICANDO IL TEOREMA DEI SENI:

$$\frac{PO}{\sin\beta} = \frac{PO'}{\sin(90+\theta)} = \frac{OO'}{\sin\alpha}$$

$$\alpha = 37{,}7° \qquad \beta = 27{,}3°$$



$$\sum \vec{F}_e = 0$$

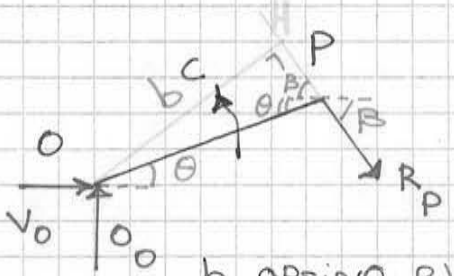
$\circlearrowleft O')$ $R_p\,O'P - F\,AO'\cos\beta = 0$

$\rightarrow R_p = 119{,}92\,N$

$\uparrow$ $V_{O'} + R_p \sin\beta = 0$

QUINDI HA VERSO OPPOSTO A QUELLO INDICATO.

$\rightarrow$ $O_{O'} + F - P\cos\beta = 0$



$b = OP\sin(\theta+\beta)$

$\circlearrowleft O)$ $R_p\,b - C = 0$

$\rightarrow C = R_p\,OP\sin(\theta+\beta) = 28{,}4\,Nm$

$$m\ddot{y}R + I_G\ddot{\theta} = 0$$

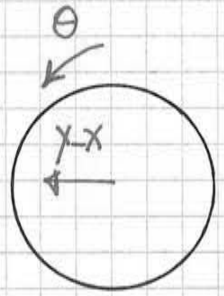
$$m\ddot{y}R + I_G\frac{\ddot{y}-\ddot{x}}{R} = 0 \qquad \pm m\ddot{x}R$$

$$m(\ddot{y}-\ddot{x})R + m\ddot{x}R + \frac{I_G}{R}(\ddot{y}-\ddot{x}) = 0$$

$$-(\ddot{y}-\ddot{x})\left(mR + \frac{I_G}{R}\right) = m\ddot{x}R$$

$$(\ddot{x}-\ddot{y})\underbrace{\left(1 + \frac{I_G}{mR^2}\right)}_{A} = \ddot{x} \rightarrow \ddot{x}-\ddot{y} = \frac{\ddot{x}}{A}$$

QUINDI AVRÒ TROVATO ANCHE I VERSI;



$\ddot{x}$ = COSTANTE

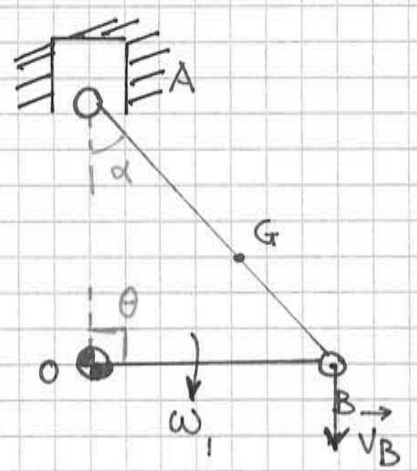
$$S = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$$

$$\frac{t^2}{2} = \frac{S}{\ddot{x}}$$

$$d = \frac{1}{2}(\ddot{x}-\ddot{y})t^2 = (\ddot{x}-\ddot{y})\frac{S}{\ddot{x}} = \frac{\ddot{x}}{A}\cdot\frac{S}{\ddot{x}} = \frac{S}{A}$$

$$S = d\left(1 + \frac{I_G}{mR^2}\right) = d\left(1 + \frac{\frac{mR^2}{2}}{mR^2}\right) = d\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}d$$

ESERCIZIO 2.22



$m_2 = 0{,}6\,kg$

$\rho_2 = 28\,m$

$m_3 = 0{,}82\,kg$

ω_1 = COSTANTE = 3000 rpm = 314 rad/s

OB = 42,5 mm, AB = 107,5 mm

AG = 75 mm $\theta = 90°$

F?

$$\frac{OB}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\theta} \rightarrow \alpha = 23{,}29°$$

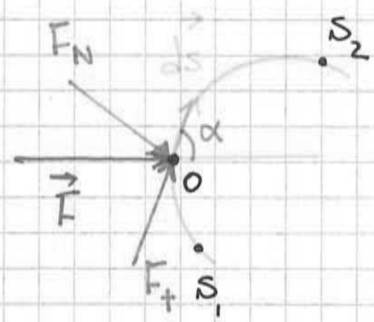
	$\vec{V}_A$	$=$	$\vec{V}_B$	$+$	$\vec{V}_{A/B}$
M	?		$\omega_1 OB$		$\omega_2 AB$
DN	|		↓		/α

VIDEOLEZIONE N° XVIII

- LAVORO, ENERGIA, POTENZA NEI SISTEMI MECCANICI

LAVORO - ENERGIA

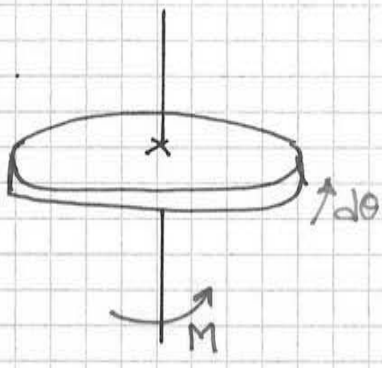
UNA FORZA (INTESA COME SEMPRE UNA GRANDEZZA VETTORIALE) PUÒ COMPIERE UN LAVORO.
COSA È UN LAVORO?
SAPPIAMO CHE LA FORZA È UN VETTORE APPLICATO, IL FATTO CHE L'APPLICAZIONE DI UNA FORZA DETERMINI ESECUZIONE DI UN LAVORO E QUINDI LO SVILUPPO DI QUALCHE ENERGIA NON È AUTOMATICO MA DIPENDE DAL FATTO CHE SE IL PUNTO DI APPLICAZIONE SI POSSA SPOSTARE O NO. QUINDI SE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA È UN PUNTO FISSO E VINCOLATO QUESTA FORZA NON COMPIE IL LAVORO.



$$dL = F \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

$$F \cdot \cos\alpha = F_t$$

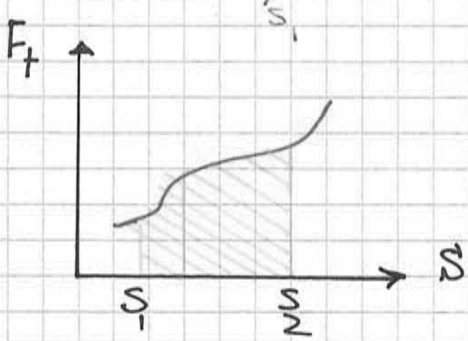
$$dL = F_t \cdot ds$$



$$dL = M \cdot d\theta = \pm M \cdot d\theta$$

POSSO ANCHE VALUTARE QUELLO CHE SUCCEDE IN UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO PER ESEMPIO TRA IL PUNTO S_1 E S_2

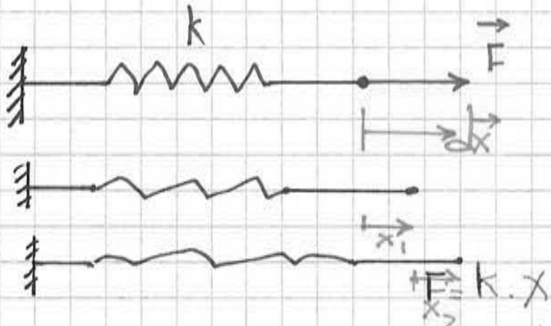
$$L_{1-2} = \int_{S_1}^{S_2} F_t \cdot ds$$



L'AREA GIALLA È IL LAVORO TRA IL PUNTO S_1 E S_2

CORPI ELASTICI

SONO DEI CORPI CHE SI POSSONO DEFORMARE ELASTICAMENTE, CIOÈ SUBISCONO UNA VARIAZIONE DI FORMA E DIMENSIONI PER EFFETTO DI APPLICAZIONE DI UNA FORZA, MA ESSENDO CORPI ELASTICI NEL MOMENTO IN CUI QUESTO SISTEMA DI FORZA VIENE ELIMINATO RIPRENDONO ESATTAMENTE LE CONDIZIONI INIZIALI, SIA DI FORMA SIA DI DIMENSIONI.



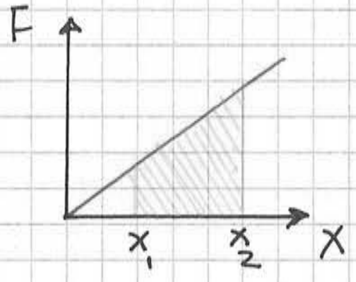
L'UNICA GRANDEZZA CHE CONTA È LA SUA LUNGEZZA.

IL SISTEMA È LINEARE CIOÈ LA DEFORMAZIONE È DIRETTAMENTE PROPORZIONATA ALLA FORZA ESERCITATA.

$$F = k \cdot x$$

$$dL = F ds = F dx$$

$$dL = kx\,dx$$



LA FORZA HA QUESTO ANDAMENTO LINEARE CIOÈ È PROPORZIONALE ALLA DEFORMAZIONE E QUINDI QUESTA FORZA È TANGENZIALE PERCHÈ LA DIREZIONE CONCORDE SEMPRE CON LA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO.

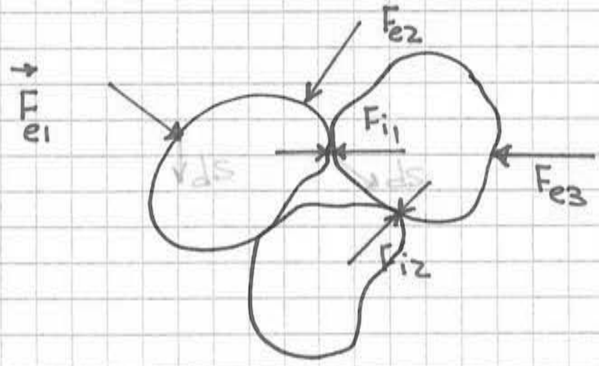
LA SEZIONE GIALLA RAPPRESENTA IL LAVORO COMPIUTO DELLA FORZA TRA L'ISTANTE UNO E L'ISTANTE DUE.

$$L_{1-2} = k \int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$L_{1-2} = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

QUESTA QUANTITÀ RAPPRESENTA ENERGIA POTENZIALE ELASTICA PERCHÈ È UNA ENERGIA CHE VIENE IMMAGAZZINATA NEL CORPO ELASTICAMENTE E PUÒ ESSERE RESTITUITA NEL MOMENTO IN CUI LA FORZA CHE HA DETERMINATA QUESTA DEFORMAZIONE VIENE A CESSARE.

$$\frac{1}{2} k x^2 = E_E$$



$$L_i + L_e = \Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_E + \Delta E_G$$

QUESTA EQUAZIONE VIENE CHIAMATA EQUAZIONE DELL'ENERGIA (MECCANICA)
QUESTA EQUAZIONE PUÒ ESSERE UTILIZZATA IN ALTERNATIVO DI EQUAZIONI CARDINALI.

$$L_i + L_e = \Delta E_C + \Delta E_E + \Delta E_G$$

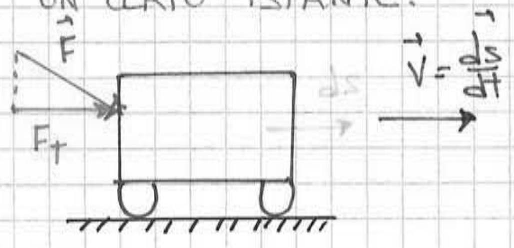
$$\frac{1}{2} I_G (\omega_f^2 - \omega_i^2) + \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \qquad \frac{1}{2} k (x_f - x_i) \qquad mg(h_f - h_i)$$

DEVO FARE ATTENZIONE CHE X È INTESA ALLA DEFORMAZIONE DEL CORPO E NON NECESSARIAMENTE ALLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA.

POTENZA

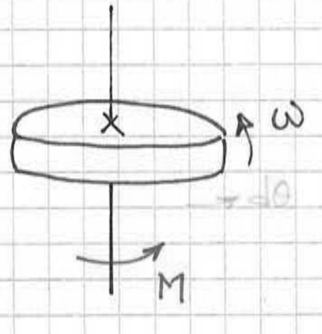
$$\frac{dL}{dt} = P \quad \text{"POTENZA ISTANTANEA"}$$

LA POTENZA CARATTERIZZA IL FUNZIONAMENTO DI UN SISTEMA IN UN CERTO ISTANTE.



$$dL = F_t \cdot ds$$

$$\frac{dL}{dt} = F_t \cdot \frac{ds}{dt} = F_t \cdot V = P$$



$$dL = M d\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega = P$$

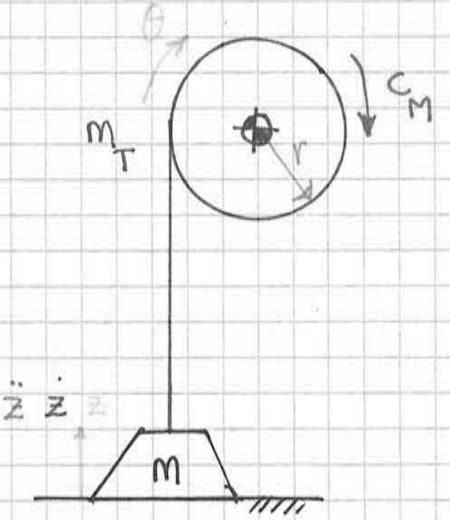
$$P \gtrless 0$$

QUESTO SEGNO DIPENDE DALL'ANGOLO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA.

VIDEOLEZIONE N° XIX

- APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA
- TEOREMA DELLE QUANTITÀ DI MOTO E DEL MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO

ESERCIZIO 2.4



m_T (MASSA DEL TAMBURO) = 100 kg

$r = 0{,}15$ m

$m = 200$ kg

$h = 2$ m

$v = 1$ m/s

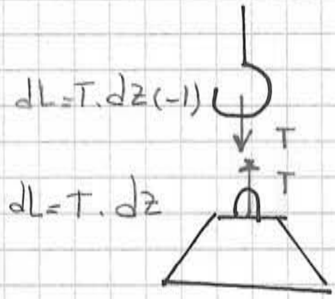
C_M ?

SAPPIAMO CHE ESISTE UNA RELAZIONE DIRETTA TRA LA COORDINATE VERTICALE DEL CARICO E COORDINATA ANGOLARE DEL TAMBURO. PERCHÉ LA FUNE SI AVVOLGE SUL TAMBURO E LA QUANTITÀ DI FUNE AVVOLTA CORRISPONDE AL DISLIVELLO COMPIUTO DELLA MASSA.

$$r\theta = z$$

t	z	$\dot{z}$
0	0	0
t^*	h	v

SICCOMÈ LA COPPIA RIMANE COSTANTE (COPPIA DEL MOTORE) ALLORA ANCHE GLI ACCELERAZIONI RIMANGONO COSTANTI.

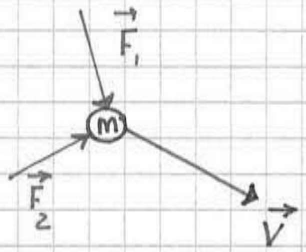


$$L_i + L_e = \Delta E_E + \Delta E_C + \Delta E_G$$

QUESTE FORZE DI TRAZIONE VENGONO APPLICATE NEI PUNTI CHE SI MUOVONO. MA, LA SOMMA DI QUESTI LAVORI INTERNI SARÀ NULLA.
CIOÈ COMPLESSIVAMENTE LE FORZE INTERNE NON COMPIONO LAVORO IN QUESTO SISTEMA.

QUANTITÀ DI MOTO

PERMETTE ANCHE LA DINAMICA DI UN CORPO NELLO SPAZIO.

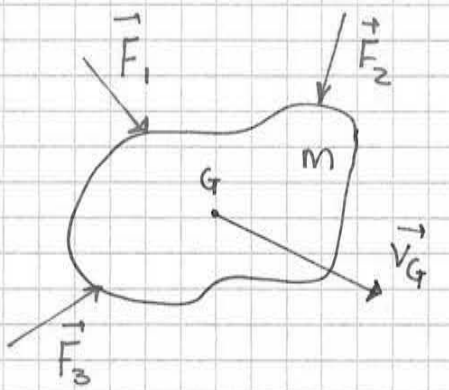


$$\sum F_e = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

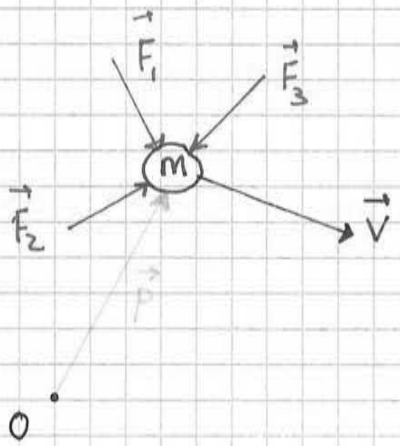
$mV = Q$ "QUANTITÀ DI MOTO"

$$\sum F_e = \frac{dQ}{dt}$$

QUESTA L'ULTIMA EQUAZIONE VIENE DEFINITA TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO.



$$Q = mV_G$$



IL CORPO SI STA MUOVENDO RISPETTO AD UN PUNTO DI OSSERVAZIONE O.

$$Q = mV$$

ORA POSSO CALCOLARE ANCHE IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO AL PUNTO DI OSSERVAZIONE:

$K_o = p \wedge mV$ "MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO"

ALLO STESSO TEMPO, ANCHE LE FORZE APPLICATE PRODUCONO MOMENTO RISPETTO AD O.

$$p \wedge F_1 + p \wedge F_2 + p \wedge F_3 = M_{eo}$$

$M_{eo} = \frac{dK_o}{dt}$ "TEOREMA DI MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO"

$$\sum M_e + M_i = 0$$

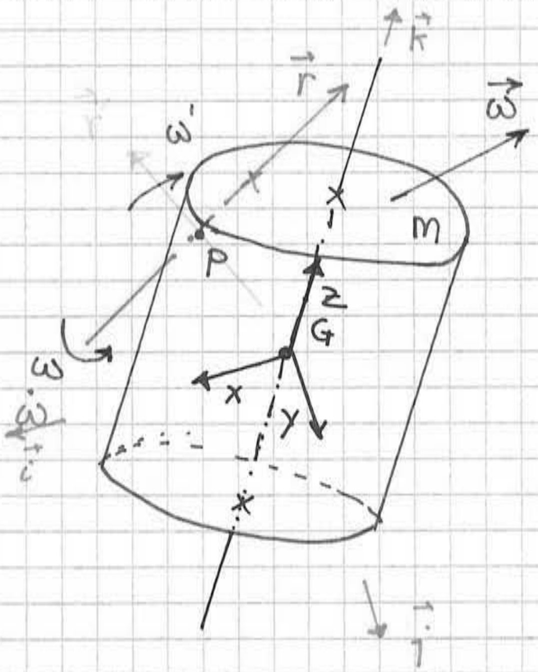
$$M_i = -\sum M_e = -\frac{dk_G}{dt}$$

$$k_G = I_G \omega$$

NEL MOTO PIANO CI SARÀ SOLTANTO UN'ASSE DI ROTAZIONE E QUINDI UN SOLO VALORE DI MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO E CI SARÀ SOLO UN VALORE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE.

$$\frac{dk_G}{dt} = I_G \dot{\omega} = -M_{iG}$$

INVECE LA SITUAZIONE SI COMPLICA PER UN CORPO CHE SI MUOVE NELLO SPAZIO CON SEI GRADI DI LIBERTÀ.



$$I_r = m\rho_r^2$$

ρ_r VIENE DEFINITO RAGGIO D'INERZIA. OGNI CORPO A SECONDA DELL'ASSE DI ROTAZIONE CHE SCELGO AVRÀ UN RAGGIO D'INERZIA DIVERSO.

SE INVECE DECIDO DI FAR RUOTARE IL CORPO ATTORNO AD UN'ALTRA ASSE PER ESEMPIO r' TROVO UNA SITUAZIONE COMPLETAMENTE DIVERSA.

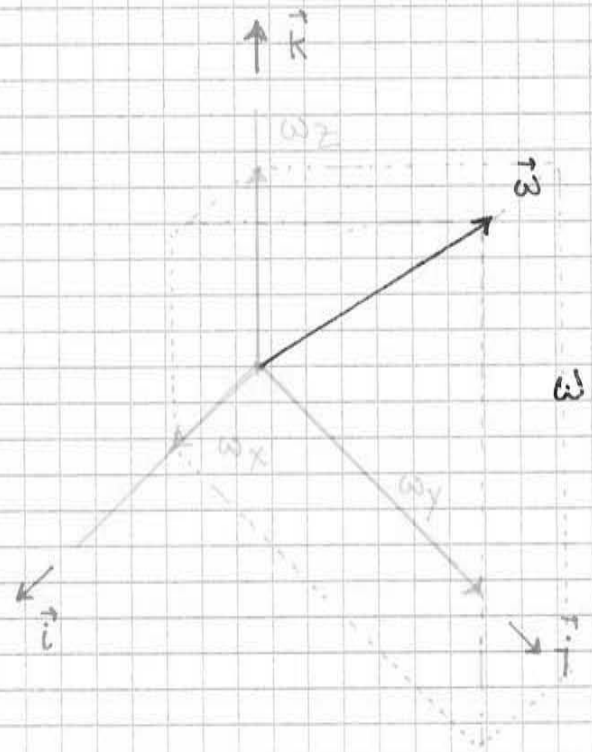
$$I_{r'} = m\rho_{r}'^2$$

QUINDI PER OGNI PUNTO DEL CORPO, CI SARANNO INFINITO MOMENTI D'INERZIA A SECONDA DELL'ASSE DI ROTAZIONE CHE IO SCELGO E TUTTI CON VALORI DIVERSI.

IMMAGINANDO DI CALCOLARE TUTTI I MOMENTI D'INERZIA POSSIBILI IN TUTTE LE DIREZIONI, IN UN CERTO PUNTO NE TROVIAMO UNO CON VALORE PIÙ GRANDE RISPETTO A TUTTI.

$$I_{P(MAX)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 283



$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

LA TERNA i, j, k HA VELOCITÀ ω_T CHE PUÒ ESSERE DIVERSA DAL ω.

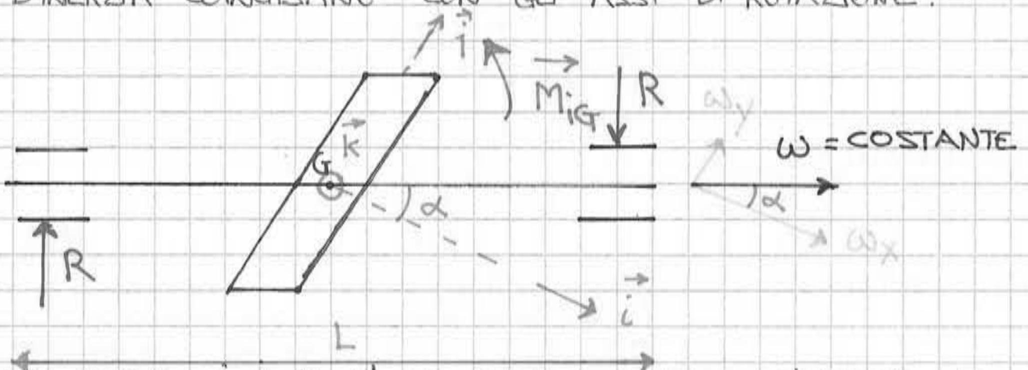
SUPPONIAMO CHE QUESTO ROTORE SIA STATO MONTATO IN MODO SCORETTO. QUINDI IL BARICENTRO SI TROVO NON SULL'ASSE DI ROTAZIONE MA AD UNA CERTA DISTANZA r.

QUINDI NASCE UNA FORZA CHE DIPENDE DALL'ACCELERAZIONE DI QUESTO CORPO. SE ANCHE IL CORPO HA UNA VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE MA ESISTE L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA QUINDI NASCE UNA FORZA D'INERZIA. QUESTA FORZA VIENE DETTA CENTRIFUGA E SICCOME SI MUOVE INSIEMA AL CORPO, RICHIEDE, PER ESSERE EQUILIBRATA UNA COPPIA DI AZIONI SUI SUPPORTI R', R'' CHE RUOTANO INSIEME AL'ALBERO.

QUINDI IN UNA DETERMINATA DIREZIONI, CI SARÀ UNA FORZA CHE AVRÀ UNA COMPONENTE CHE VARIA SINUSOIDALMENTE QUINDI PERIODICAMENTE, QUINDI VUOL DIRE CHE GENERERÀ VIBRAZIONI LUNGO UNA CERTA DIREZIONE.

QUESTO TIPO DI SQUILIBRIO VIENE DETTO STATICO. PERCHÈ SI INDIVIDUA IN CONDIZIONI STATICHE. LASCIANDO FERMO IL SISTEMA, SI PORTA IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO OVVERO DOVE IL BARICENTRO VA A POSIZIONARSI AL DI SOTTO DELL'ASSE DI ROTAZIONE.

ORA IMMAGINIAMO DI MONTARE QUESTO ROTORE IN MODO CHE IL BARICENTRO SI TROVI EFFETTIVAMENTE SULL'ASSE DI ROTAZIONE, MA VIENE MONTATA NON ALLINEATO IN MODO CHE I SUOI ASSI CENTRALI D'INERZIA COINCIDANO CON GLI ASSI DI ROTAZIONE.



LA TERNA i, j, k È LA TERNA CENTRALE D'INERZIA DEL DISCO CHE STA RUOTANDO. IN QUESTO CASO LA TERNA CENTRALE D'INERZIA RUOTA INSIEME AL CORPO PERCHÈ SE STESSE FERMA, IN DETERMINATE POSIZIONI ANGOLARI DEL DISCO, GLI ASSI DI SIMMETRIA NON COINCIDEREBBERO PIÙ CON GLI ASSI DI RIFERIMENTO DELLA TERNA.

QUINDI LA VELOCITÀ ANGOLARE ω È SIA LA VELOCITÀ DEL CORPO, SIA LA VELOCITÀ DELLA TERNA CENTRALE D'INERZIA.

$$M_{iG} = -\frac{dK_G}{dt}$$

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$\omega_x = \omega \cdot \cos\alpha$$

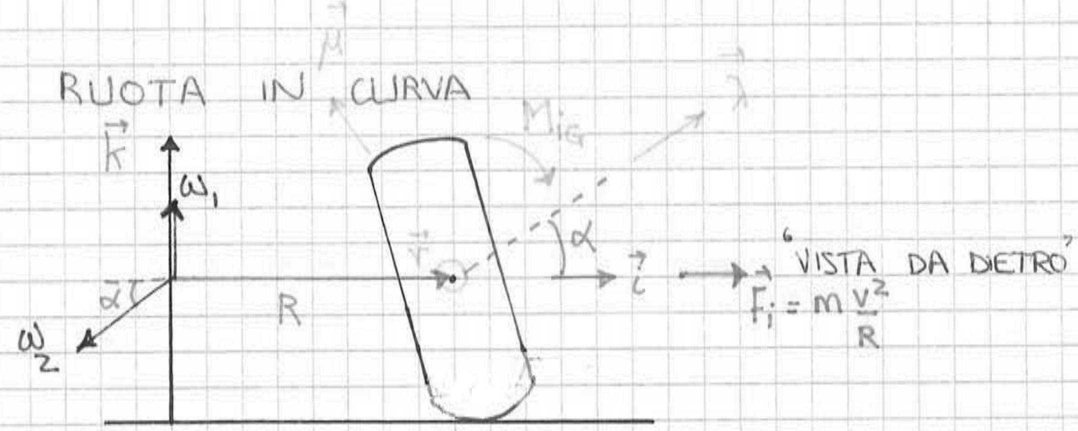
$$\omega_y = \omega \cdot \sin\alpha$$

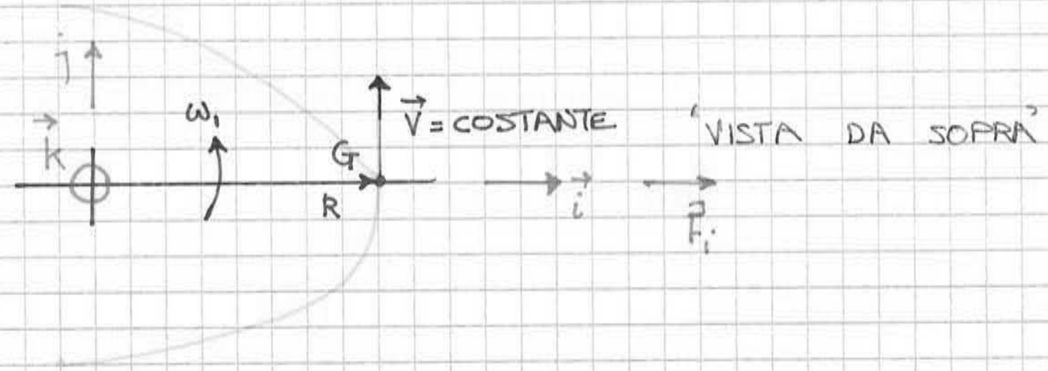
$$\omega_z = 0$$

VIDEOLEZIONE N° XXI

- STUDIO DINAMICO DI UNA RUOTA DI UNA MOTOCICLETTA IN CURVA;
- CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

RUOTA IN CURVA





ABBIAMO UNA MOTOCICLETTA COL BARICENTRO G CHE STA PERCORRENDO UNA CURVA (GIALLA) CON UNA VELOCITÀ V.

LA CURVA HA IL RAGGIO DI CURVATURA R. UNA VOLTA DEFINITA IL RAGGIO DI CURVATURA SI DETERMINA IL CENTRO DI CURVATURA E QUINDI SI RICAVA LA VELOCITÀ ANGOLARE ω DEL VEICOLO.

A QUESTO PUNTO INDIVIDUO UNA TERNA DI VERSORI $\vec{k}$ PERPENDICOLARE AL PIANO NEL CENTRO DI CURVATURA, $\vec{i}$ E $\vec{j}$. QUINDI RAPPRESENTANO UNA TERNA DI RIFERIMENTO FISSA E GLOBALE E SOLIDALE COL TERRENO (CIOÈ L'ASSE k SEMPRE VERTICALE, i RADIALE E j PERPENDICOLARE AD ESSE.

SICCOMÈ LA RUOTA È IN CURVA, ALLORA PER MANTENERE L'EQUILIBRIO DEVE ESSERE INCLINATA E DI CONSEGUENZA HA UN'ASSE DI SIMMETRIA UN PÒ INCLINATA DI UN CERTO ANGOLO α RISPETTO ALL'ASSE RADIALE i.

QUINDI QUESTO ANGOLO α RAPPRESENTA L'ANGOLO CHE SI DEVE INCLINARE VERSO INTERNO IN SOSTANZA PER MANTENERE L'EQUILIBRIO.

LA RUOTA HA UNA CERTA GEOMETRIA E IO LO CONSIDERO UN SOLIDO GIROSCOPICO (SOSTANZIALMENTE È UN SOLIDO CHE HA UN'ASSE DI SIMMETRIA POLARE) IN QUESTO CASO L'ASSE TRATTEGGIATO CHE HO INDICATO È UN'ASSE DI SIMMETRIA CHE RAPPRESENTA ANCHE UN'ASSE CENTRALE D'INERZIA IN QUANTO PASSA PER IL BARICENTRO.

QUINDI LA VELOCITÀ ANGOLARE COMPLESSIVA DELLA RUOTA È:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$ 'VELOCITÀ ANGOLARE ASSOLUTA DELLA RUOTA'

PER QUANTO INVECE RIGUARDA LA TERNA CENTRALE D'INERZIA, PASSA PER IL BARICENTRO E SE LA CONSIDERASSI SOLIDALE ALLA RUOTA ALLORA LA SUA VELOCITÀ COINCIDEREBBE CON LA VELOCITÀ ANGOLARE DELLA RUOTA. PERÒ PER POTER APPLICARE IL TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO NON È NECESSARIO CHE LA TERNA D'INERZIA SIA APPLICATA SOLIDALE AL CORPO CHE STO STUDIANDO MA È IMPORTANTE CHE RIMANGA SEMPRE UNA TERNA CENTRALE D'INERZIA.

IL CENTRO DELLA RUOTA È COLLEGATO AL TELAIO E QUINDI SE LA TERNA ANZICHÈ FARLA GIRARE CON LA VELOCITÀ ω_2 INSIEME ALLA RUOTA, LA TENGO FISSA COL TELAIO CONTINUA RIMANERE LA TERNA CENTRALE D'INERZIA. PERCHÈ LA RUOTA GIRA ATTORNO AL BARICENTRO, I VERSORI MANTENGONO IL LORO VERSO E QUINDI CONTINUANO AD ESSERE ASSI CENTRALI D'INERZIA.
QUINDI IN QUESTO MODO POSSO ASSUMERE PER LA TERNA CENTRALE D'INERZIA UNA VELOCITÀ ANGOLARE DEL VEICOLO CIOÈ ω_1 E NON LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL VEICOLO E LA RUOTA. PUR CONTINUANDO AD ESSERE LA TERNA CENTRALE D'INERZIA. QUESTA È L'UNICA CONDIZIONE NECESSARIA PER APPLICARE IL TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO CIOÈ LA TERNA CHE IO SCELGO COME RIFERIMENTO SIA LA TERNA CENTRALE D'INERZIA.

IL VEICOLO RUOTA ATTORNO AL CENTRO DI CURVATURA CON LA VELOCITÀ ANGOLARE ω_1 ANTIORARIA (USCENTE _ k È USCENTE), INVECE LA RUOTA, RUOTA CON LA VELOCITÀ ANGOLARE ω_2 ORARIA (ENTRANTE _ λ È USCENTE) QUINDI LA VELOCITÀ ANGOLARE ASSOLUTA SARÀ:

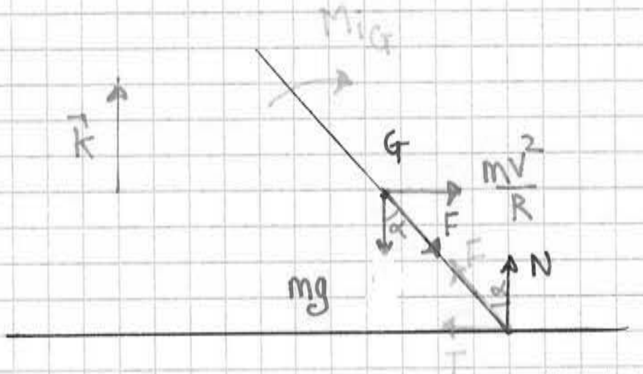
$$\omega = \omega_1 k - \omega_2 \lambda$$ 'VELOCITÀ ANGOLARE ASSOLUTA'

$$\omega_T = \omega_1 k$$

LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ SONO RAPPRESENTATE DALLE PROIEZIONI LUNGO λ, μ, ν.

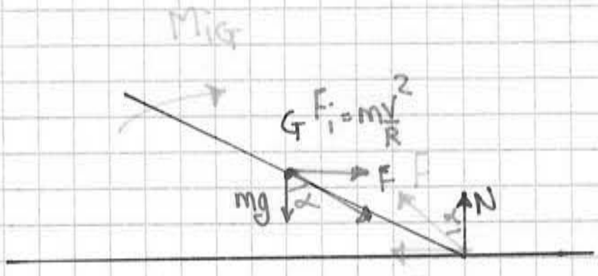
$$\begin{cases} \omega_\lambda = \omega_1 \sin\alpha - \omega_2 \\ \omega_\mu = \omega_1 \cos\alpha \\ \omega_\nu = 0 \end{cases}$$

84



$$tg\alpha = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg}$$

VEDO CHE IL SISTEMA DAL PUNTO DI VISTA DEI MOMENTI NON È EQUILIBRATA, QUINDI AUMENTO L'ANGOLO DI INCLINAZIONE.



ORA LE DUE FORZE F NON SONO ALLINEATE E VANNO A COSTRUIRE UNA COPPIA CHE SERVE PER EQUILIBRARE IL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$L_e + L_i = \Delta E_M = \Delta E_E + \Delta E_G + \Delta E_C$$

SE $L_e + L_i = 0$ $\quad E_M = E_C + E_E + E_C = \text{COSTANTE}$

$$\sum F_e = \frac{dQ}{dt} \quad \text{SE } \sum F_e = 0 \quad Q = \text{COSTANTE}$$

$$\sum M_{eG} = \frac{dk_G}{dt} \quad \text{SE } \sum M_{eG} = 0 \quad k_G = \text{COSTANTE}$$

QUESTI PRINCIPI DI CONSERVAZIONE CONSENTONO DI RISOLVERE DETERMINATI PROBLEMI DELLA DINAMICA, PER ESEMPIO I PROBLEMI D'URTO.

$$\Delta E_C = -\frac{1}{2} m (\rho_G^2 + h^2) \omega^2$$

$$\Delta E_G = mg\,\Delta h = mgh(1 - \cos\theta_{MAX})$$

$$mgh(1 - \cos\theta_{MAX}) = \frac{1}{2} m (\rho_G^2 + h^2) \omega^2 = \frac{1}{2} m (\rho_G^2 + h^2) \frac{v^2 h^2}{(\rho_G^2 + h^2)^2}$$

$$\cos\theta_{MAX} = 1 - \frac{v^2}{2g} \frac{h}{\rho_G^2 + h^2}$$

ORA CALCOLO L'ENERGIA PERSA:

DURANTE L'URTO L'ENERGIA VIENE PERSA, QUINDI:

$$E_p = E_{C(IN)} - E_{C(FIN)} = \frac{1}{2} m v^2 \underbrace{- \frac{1}{2} m v_G^2 - \frac{1}{2} I_G \omega^2}_{-\frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m (\rho_G^2 + h^2) \frac{v^2 h^2}{(\rho_G^2 + h^2)^2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 - \frac{h^2}{\rho_G^2 + h^2}\right)$$

PER CUI INIZIALMENTE IL CORPO RIMANE FERMO O PER COSÌ DIRE IN ADERENZA. POI PERÒ ARRIVO AD UN VALORE LIMITE, APPENA SUPERATO QUALE IL CORPO INIZIA A STRISCIARE.

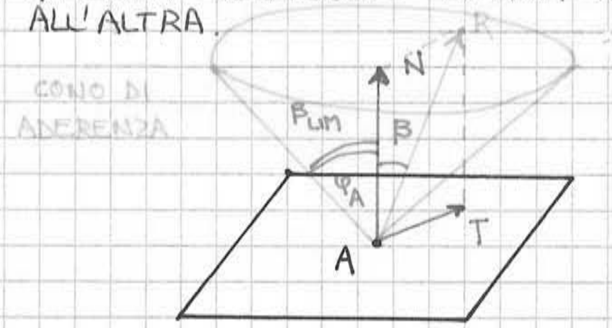
$$F_{LIM} = T_{LIM} = N \, tg \, \beta_{LIM}$$

$\beta_{LIM} = \varphi_A$ 'ANGOLO DI ADERENZA O ATTRITO STATICO'

$tg \, \varphi_A = f_A$ 'COEFFICIENTE DI ADERENZA O ATTRITO STATICO'

$$F_{LIM} = T_{LIM} = N \cdot f_A$$

QUESTA RELAZIONE SEGNA IL PASSAGGIO TRA UNA CONDIZIONE ALL'ALTRA.



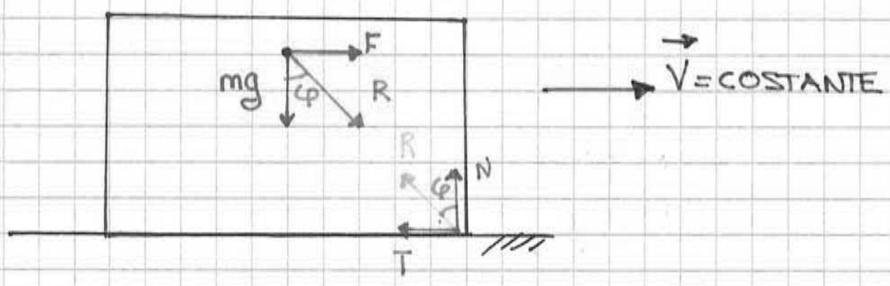
LA FORZA TANGENZIALE PUÒ AVERE UNA DIREZIONE QUALUNQUE SUL PIANO.

IL SUO VALORE DIPENDE DAL VALORE DELLA FORZA APPLICATA.

IO POSSO RAPPRESENTARE QUESTA SITUAZIONE CON UN CONO. SE β È INFERIORE A β_{LIM} VUOL DIRE CHE LA RISULTANTE COMUNQUE VARI RIMANE ALL'INTERNO DI QUESTO CONO (CONO DI ADERENZA). QUANDO INVECE LA FORZA CRESCE OLTRE IL SUO VALORE LIMITE E QUINDI ANCHE L'ANGOLO β CRESCE OLTRE IL SUO VALORE LIMITE, LA RISULTANTE ESCE DAL CONO DI ADERENZA E IL CORPO COMINCIA A STRISCIARE.

ORA VEDIAMO COSA SUCCEDE QUANDO UN CORPO COMINCIA A STRISCIARE.

ATTRITO COULOMBIANO

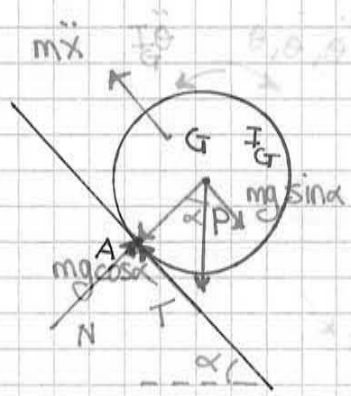


T 'PRATICAMENTE' NON DIPENDE DALLA VELOCITÀ RELATIVA, NON DIPENDE DALLA TEMPERATURA, RUGOSITÀ DELLE SUPERFICI, AREA DELLE SUPERFICI MA DIPENDE SOLO PREVALENTEMENTE DAL MATERIALE DEI DUE CORPI A CONTATTO.

PER RISOLVERE I PROBLEMI CON ATTRITO, SI FA RIFERIMENTO AL MODELLO COULOMBIANO, PUÒ ESSERE RIASSUNTO COME SEGUE:

	V_R	T/N
ADERENZA	$=0$	$< f_A$
ADER. LIMITE	$=0$	$= f_A$
STRISCIAMENTO	$\neq 0$	$= f$

ESEMPIO



NON SO COSA STA SUCCEDENDO NEL PUNTO DI CONTATTO. IL RULLO STA ROTOLANDO SENZA STRISCIARE CIOÈ IN A C'È CONDIZIONE DI ADERENZA OVVERO ROTOLAMENTO PURO. OPPURE IL RULLO POTREBBE ANCHE SCIVOLARE. PERÒ IO A PRIORI NON LO SO.

LA COMPONENTE TANGENZIALE HA UN VERSO DEFINITO, CHE SI OPPONE AL ROTOLAMENTO DEL RULLO.

(1) x: $\quad mg\sin\alpha - T - m\ddot{x} = 0$

(2) y: $\quad N - mg\cos\alpha = 0$

(3) $\circlearrowleft A$: $\quad I_G\ddot{\theta} + mr\ddot{x} - mgr\sin\alpha = 0$

VEDO CHE HO 4 INCOGNITE $(T, \ddot{x}, N, \ddot{\theta})$ E HO 3 EQUAZIONI, QUINDI SCRIVO UN'ALTRA EQUAZIONE A SECONDA DELLA CONDIZIONE CHE HO NEL PUNTO A.

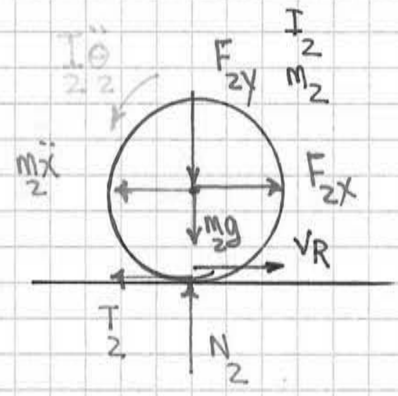
IPOTESI ADERENZA IN A $\rightarrow$ ROTOLAMENTO PURO:

(4) $\ddot{x} = \ddot{\theta} r$

ORA DEVO VERIFICARE L'IPOTESI CHE HO FATTO:

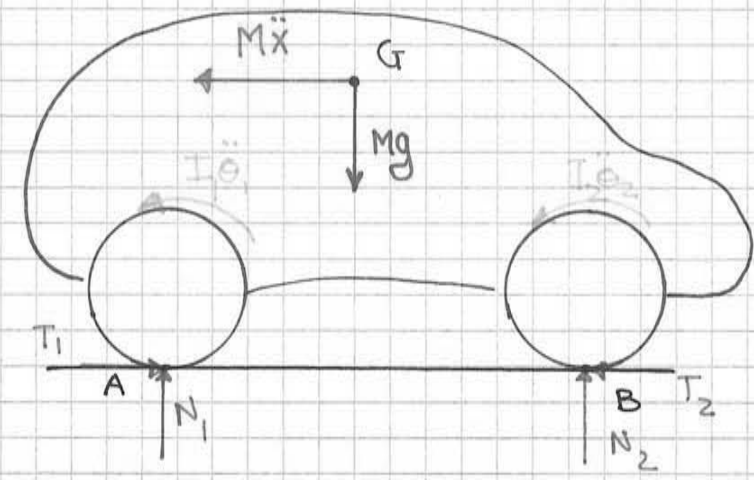
$(T/N) < f_A$ $\xrightarrow{NO}$ (4) $T = fN \rightarrow \ddot{x}', N', \ddot{\theta}', T'$

SI $\downarrow$ OK!



LA FORZA VERTICALE SARÀ LA FORZA PESO DEL TELAIO SULLA RUOTA E LA FORZA ORIZZONTALE SARÀ LA FORZA DI SPINTA.

ORA FACCIO IL DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO DEL SISTEMA:



NEL DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO COMPLESSIVO LE FORZE INTERNE NON VENGONO RIPORTATE, COME LE FORZE SCAMBIATE TRA IL TELAIO E LE RUOTE. ESATTAMENTE ANCHE LA COPPIA.

ORA SCRIVO L'EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA:

(1) $\uparrow \; N_1 + N_2 - Mg = 0$

(2) $\rightarrow \; T_1 - T_2 - M\ddot{x} = 0$

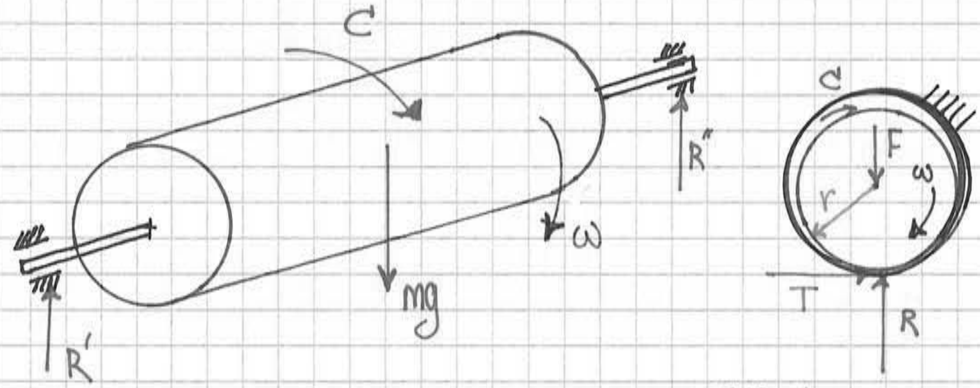
(3) $\circlearrowleft B) \; I_1\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 + Mb\ddot{x} + Mga - N_1 c = 0$

HO 7 INCOGNITE ($N_1, N_2, T_1, T_2, \ddot{x}, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$) QUINDI LE TRE EQUAZIONI NON MI BASTANO.

POSSO SCRIVERE ANCHE L'EQUAZIONI DELLE RUOTE:

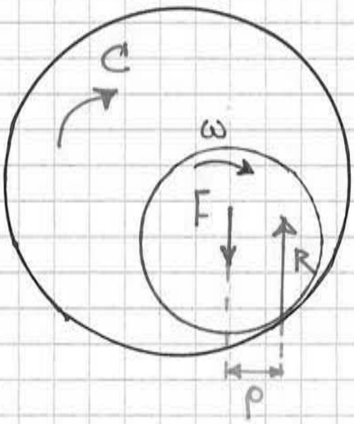
(4) $O_1 \circlearrowright) \; C_M - I_1\ddot{\theta}_1 - T_1 r = 0$

ROTORE



$T . r = C$

IN QUESTO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, L'EQUILIBRO ORIZZONTALE NON È EQUILIBRATO. QUINDI PER RAPPRESENTARE L'ATTRITO CHE C'È NEL PERNO DEVO SCEGUERE UN MODELLO DIVERSO.



IL PERNO TENDE A ROTOLARSI VERSO DESTRA PER L'EFFETTO DI MOTO CHE C'È. QUINDI TENDE AD ARRAMPICARSI SULLA PARETE DEL FORO.

$F = R$

$R . \rho = C$

QUESTO MODELLO SPIEGA L'ATTRITO CHE C'È NEL PERNO.