



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 539

DATA: 06/05/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Tecnica delle Costruzioni Aeronautiche

Prof. Frulla

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Politecnico di Torino

Appunti ed esercizi svolti di

**TECNICA DELLE
COSTRUZIONI
AERONAUTICHE**

Parte di Strutture

Corso tenuto dal Prof. Frulla,
3° anno Ing. Aerospaziale,
orientamento EASA Part 66
A.A. 2012-2013

Appunti di Cappelletto

PARTE 4 (parte di Tecnologie Aeronautiche)

FATICA

- Fatica e fasi di evoluzione, carichi ciclici
- Curve di Wohler
- Diagramma di Goodman
- Fattori ambientali e condizioni operative
- Legge di Miner
- Fenomeni di Fretting

MECCANICA DELLA FRATTURA

- Cricche e accrescimento delle fratture
- Concentrazioni di tensione e Stress Intensity Factor
- Tenacità a frattura
- Legge di Paris

ESERCITAZIONI e esercizi svolti

- Geometria delle aree
- Travi in diverse condizioni di carico
- Teorema di Castigliano: calcolo degli spostamenti
- Trave sandwich
- Involuppo di volo
- Semiguscio
- Giunzioni e attacchi
- Carico critico asta
- Carico critico pannelli
- Accrescimento delle fratture
- Previsione della vita a fatica

◦ DEFORMAZIONI

spostamenti $\vec{s} = \{u, v, w\}$

$$E_{xx} = u_{,x}$$

$$E_{yy} = v_{,y}$$

$$E_{zz} = w_{,z}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + u_{,z}$$

$$\gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z}$$

◆ EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ : eq. delle derivate 2^e.

◦ EQUAZIONE COSTITUTIVA

$$\{\sigma\} = [C]\{E\}$$

[C] isotropo

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

$$C_{12} = \lambda$$

$$C_{44} = \mu$$

Coeff. di LAME

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

↑ modulo o TAGLIO

MODULO ELASTICO E e coeff. Poisson ν determinati in modo sperimentale

IPOSTESI di DE SAINT VENANT

- SOLIDO LINEARE, OMOGENEO, ISOTROPO
- CILINDRO con asse z \perp alle basi
- FORZE ESTERNE APPLICATE SULLE BASI DEL SOLIDO
- NO FORZE DI VOLUME
- In ogni punto

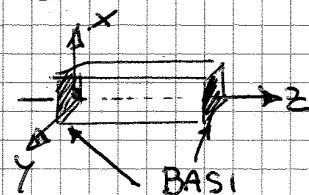
$$\sigma_{xx} = 0 \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

→ eq. EQUILIB.

$$(1) \tau_{xz,z} = 0$$

$$(2) \tau_{yz,z} = 0$$

$$(3) \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0$$



IL VETTORE TANGENZIALE DI TENSIONE È LO STESSO PER OGNI SEZIONE

Derivando (3) per z si ottiene $\sigma_{zz,z} = 0$

→ σ_{zz} HA UN ANDAMENTO LINEARE LUNGO L'ASSE z.

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \int_A (k_0 + k_1 x + k_2 y) dx dy$$

$$k_0 = \frac{N}{A}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_{zz} \cdot y dA = \int_A (k_0 + k_1 x + k_2 y) \cdot y dA = \\ &= \int_A k_0 y dx dy + \int_A k_1 x y dx dy + \int_A k_2 y^2 dx dy = \end{aligned}$$

$$\rightarrow M_x = k_1 I_{xy} + k_2 I_x$$

$$M_y =$$

$$k_1 = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$k_2 = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

Se il sistema di rif. è PRINCIPALE oltre che bari-centrico

$$\rightarrow I_{xy} = 0$$

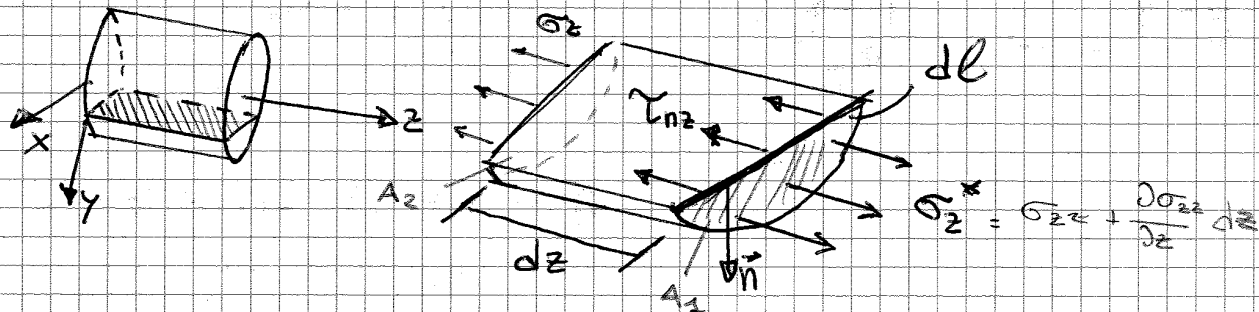
Si ottiene la RELAZIONE DI NAVIER [forma semplificata]

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

Noi useremo sempre la forma generale, non riferita ad un sistema PRINCIPALE → per noi i momenti d'inerzia centrifughi non saranno nulli

~~LINEA ELASTICA (PRESSIONE RETTA)~~
 ~~$E \epsilon_z = w_{,z} = \frac{M_x}{E I_x} \cdot \gamma$~~

TAGLIO Saint Venant



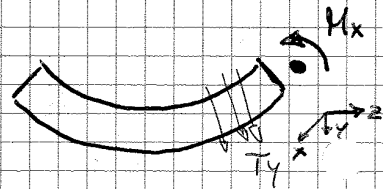
EQUILIBRIO LUNGO ASSE Z

$$\int_{A_{s1}} \sigma_z^* dA - \int_{A_{s2}} \tau_{nz} dz dl - \int_{A_{s1}} \sigma_z dA = 0$$

$$\int_{A_{s1}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA - \int_{A_{s2}} \tau_{nz} dz dl = 0$$

$$\int_{A_{s1}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA - \int_l \tau_{nz} dl = 0$$

sapendo che $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial M_y}{\partial z} \frac{x}{I_y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{y}{I_x}$

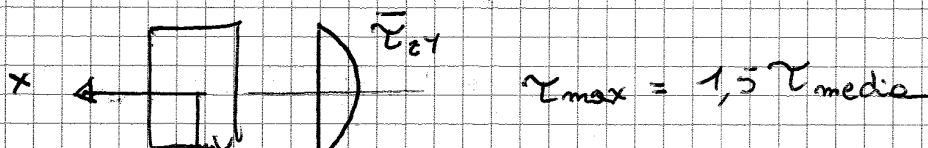


$$\frac{\bar{I}_x}{I_y} \int_{A_{s1}} x dA + \frac{\bar{I}_y}{I_x} \int_{A_{s1}} y dA - \int_l \tau_{nz} dl = 0$$

$$\frac{\bar{I}_x}{I_y} S_y + \frac{\bar{I}_y}{I_x} S_x - \int_l \tau_{nz} dl = 0$$

FLUSSO DI TAGLIO $q = \bar{\tau}_{nz} \cdot l = \int_l \tau_{nz} dl = \frac{\bar{I}_x}{I_y} S_y + \frac{\bar{I}_y}{I_x} S_x$
 \downarrow
 τ_{MEDIO}

• SEZIONE RETTANGOLARE CARICATA CON T_y



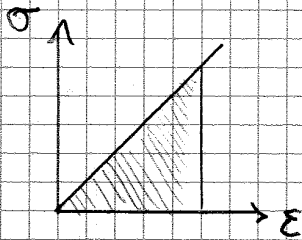
LAVORI E PRINCIPI ENERGETICI

LAVORO DI DEFORMAZIONE → ENERGIA DI DEF. ACCUMULATA DAL CORPO Φ

$$d\Phi = dL_{def} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \text{AREA SOTTESA DA CURVA } \sigma - \epsilon$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV$$

Energia rilasciata completamente se la def. è ELASTICA



$$dL = \left(\int_{\epsilon_{iniz}}^{\epsilon_{fin}} \sigma d\epsilon \right) dV =$$

• LA FORZA È L'INVERSO DEL GRADIENTE DELL'ENERGIA POTENZIALE

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \Rightarrow \text{FORZA È CONSERVATIVA}$$

↓
FORZA ELASTICA

••• I CARICHI AERODINAMICI NON SONO FORZE CONSERVATIVE •••

PLV

pag. 25

$$\delta L = \int_V (\vec{F} \cdot \delta \vec{u}) dV$$

CAMPO DI SPOSTAMENTI ARBITRARIO
→ SPOSTAMENTI VIRTUALI ←

■ SISTEMA FORZE IN EQUILIBRIO

$$\downarrow$$

$$\delta W = 0$$

LAVORO VIRTUALE. σ^* FISSATO, ϵ variabile

$$\delta W_{int} = \int_V (\sigma^* \delta \epsilon) dV = \delta U \rightarrow \text{VARIAZIONE ENERGIA ELASTICA}$$

■ CALCOLO SPOSTAMENTI CON PLV

Lavoro virtuale esterno = Lavoro virtuale interno

VARIAZIONE DELLA CONFIG. DI EQUILIBRIO

→ SPOSTAMENTI VIRTUALI: potrebbero aver luogo IPOTETICAMENTE con i carichi REALI agenti fissati al loro valore di equilibrio

IL lavoro fatto dalle forze applicate attraverso uno spostamento virtuale della configurazione reale è detto LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \int_V \vec{F} \cdot \delta \vec{u} \, dV$$

PLV - SPOSTAMENTI VIRTUALI

Particella / corpo in equilibrio sotto l'azione di un certo numero di forze. Applichiamo uno spostamento virtuale

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{u}$$

EQUILIBRIO → $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \delta L = 0$ per ogni $\delta \vec{u}$ ARBITRARIO

Corpo deformabile

→ IN EQUILIBRIO ⇔ LAVORO VIRTUALE DI TUTTE LE FORZE AGENTI SUL CORPO È ZERO × OGNI SPOSTAM. VIRT.

$$\delta L = \delta L_i + \delta L_e = 0$$

$$\delta L_e = - \int_V (f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) \, dV \rightarrow \text{"-"} \text{ perche' fatto sul corpo}$$

$$\delta L_i = \int_V \delta \left[\frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \dots) \right] \, dV = \int_V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \, dV$$

LAVORO VIRTUALE INTERNO = VARIAZIONE DELL'ENERGIA DI DEFORMAZIONE PER UN FISSATO STATO DI STRESS



$$\delta U = \delta L_i = \delta \left(\int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV \right) = \delta \left(\int_V \frac{1}{2} E \epsilon^2 \, dV \right) = \int_V E \epsilon \delta \epsilon \, dV$$

Introducendo la relazione costitutiva $\sigma = E \epsilon$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 \right) = \frac{1}{2} \delta \epsilon^2 = \frac{1}{2} 2 \epsilon \delta \epsilon = \epsilon \delta \epsilon$$

$$= \int_V \sigma \delta \epsilon \, dV$$

PLV - FORZE VIRTUALI

SPOSTAMENTI REALI finché le tensioni non soddisfano le condizioni di equilibrio

→ SI CONSIDERA ALLORA UN CAMPO DI TENSIONI E FORZE VIRTUALI CHE VERIFICANO LE EQ. DI EQUILIBRIO

$$\delta L_e = - \int_V u \delta F_x + v \delta F_y + w \delta F_z \, dV$$

$$\delta L_i = \int \delta \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \right] dV = \int \epsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \dots + \delta \tau_{xy} \delta T_{xy} + \dots \, dV$$

$$u \delta F = \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \, dV$$

- SISTEMA (a) di FORZE e TENSIONI EQUILIBRATE
- " (b) di SPOSTAMENTI e DEFORMAZIONI CONGRUENTI
- ▶ INDIPENDENTI TRA LORO

$$\delta L_e^{ab} = \delta L_i^{ab}$$

SECONDO TEOREMA DI CASTIGLIANO

- Corpo soggetto a carichi concentrati CONSERVATIVI
- Corpo in equilibrio → per principio stazionarietà potenziale tot:

$$\delta \pi = 0 = \delta \left(\int_V U^* \, dV \right) - \sum_{i=1}^n u_i \delta F_i = 0$$

$$U^* = U^*(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i$$

$$\delta \left(\int_V U^* \, dV \right) - \sum_{i=1}^n u_i \delta F_i = 0$$

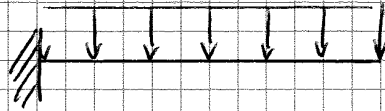
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i - \sum_{i=1}^n u_i \delta F_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial U^*}{\partial F_i} - u_i \right] \delta F_i = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i}$$

EQ. DI EQUILIBRIO

$$M_{,zz} + q = 0$$



$$M = -EI_x v_{0,zz}$$

$$\rightarrow -EI_x v_{0,zzzz} + q = 0$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE REGOLA LA FLESSIONE NELLA TRAVE con carico distribuito

$$(5) v_{0,zzzz} = \frac{q}{EI}$$

DEFLESSIONE LUNGO Y

INTEGRARE 4 volte

$$(4) v_{0,zzz} = \frac{q}{EI} z + C \Rightarrow T = -EI_x v_{0,zzz}$$

$$(3) v_{0,zz} = \frac{q}{2EI} z^2 + C \cdot z + D \Rightarrow M = -EI_x v_{0,zz}$$

$$(2) v_{0,z} = \frac{q}{6EI} z^3 + C \frac{z^2}{2} + Dz + \cancel{E}$$

$$(1) v_0 = \frac{q}{24EI} z^4 + C \frac{z^3}{6} + D \frac{z^2}{2} + \cancel{Hz} + \cancel{K}$$

Costanti \rightarrow si determinano con CONDIZIONI AL CONTORNO

$$z=0 \quad v_0=0 \quad \rightarrow \quad K=0$$

$$z=0 \quad v_{0,z}=0 \quad \rightarrow \quad H=0 \quad \text{All'incastro la rotazione } (\rightarrow \text{LA PENDENZA DELLA LINEA}) \text{ } \bar{z} \text{ zero!}$$

$$z=l \quad \begin{cases} T=0 \\ M_x=0 \rightarrow M = -EI_x v_{0,zz} = 0 \rightarrow v_{0,zz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \rightarrow 0 = \frac{q}{2EI} l^2 + C \cdot l + D \\ (4) \rightarrow 0 = \frac{q}{EI} l + C \end{cases}$$

$$C = -\frac{ql}{EI} \quad D = -cl - \frac{ql^2}{2EI} = -\frac{ql^2}{2EI}$$

Andiamo quindi a sostituire le costanti in (1)

$$v_0 = \frac{q}{24EI} z^4 - \frac{ql}{6EI} z^3 + \frac{ql^2}{24EI} z^2$$

LINEA ELASTICA

$$\Rightarrow \left[-M_x \delta v_{0,z} \right]_0^l + \left[M_{x,z} \delta v_0 \right]_0^l - \int_0^l (M_{x,zz} + q) \delta v_0 dz = 0$$

IMPONENDO CONDIZ. AL CONTOURNO

si annullano

$$- \int_0^l (M_{x,zz} + q) \delta v_0 dz = 0$$

ARBITRARIO

↓

= 0

$$\rightarrow M_{x,zz} + q = 0$$

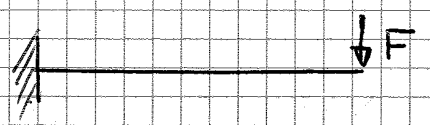
EQUAZIONE DI CAMPO
→ EQ. DI EQUILIBRIO

Con gli equilibri (diagramma) sull'elemento infinitesimo di trave o con il metodo VARIAZIONALE si giunge

ALLO STESSO RISULTATO

→ EQUIVALENZA DEI 2 SISTEMI DI CALCOLO ←

... e se sulla trave non c'è q ma una forza concentrata?



$$\delta L_i = \delta L_e \rightarrow \delta L_i - \delta L_e = 0$$

$$\underbrace{\int_0^l M_x (-\delta v_{0,zz}) dz + \int_0^l N_x \delta w_{0,z} dz}_{\delta L_i} - \underbrace{F \delta v_0(l)}_{\delta L_e} = 0$$

$$\left[M_{x,z} \delta v_0 \right]_0^l \rightarrow \left[M_{x,z}(l) \delta v_0(l) - M_{x,z}(0) \delta v_0(0) \right] - F \delta v_0(l)$$

$$\left[(M_{x,z} - F) \delta v_0(l) \right] - M_{x,z}(0) \delta v_0(0) = 0$$

$$M_{x,z} - F = 0 \rightarrow M_{x,z} = F$$

TAGLIO = F OK!

$$v_0 \left(z = \frac{e}{2} \right) = \underbrace{\frac{ql^2}{8GA}}_{\text{CONTRIBUTO DEL TAGLIO}} + \underbrace{\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}}_{\text{CONTRIBUTO DELLA FLESSIONE}}$$

Procedura per trasformare il sistema di equazioni differenziali in un sistema ALGEBRICO:

Metodo GALERKIN → soluzione approssimata

$\mathcal{L}(u) = 0$ $\bar{u} = \sum A_i \phi_i$ Soluzione approssimata come sommatoria di funzioni particolari
 $= A_1 \phi_1$ $\phi \rightarrow$ RISPETTANO LE CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO GEOMETRICHE

SOSTITUISCO LA SOLUZ. APPROX NELLA DIFFERENZIALE

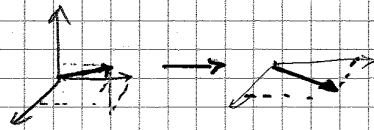
$\mathcal{L}(\bar{u}) = \epsilon_R$ RESIDUO

$A_i \rightarrow$ coefficienti

Prendo il residuo e lo moltiplico scolormente x la funzione approssimante

⊗ $\int_D \epsilon_R \cdot \phi = 0$ → significa mettere il residuo perpendicolare rispetto allo spazio delle soluzioni
 ↳ MINIMO ERRORE RISPETTO ALLA BASE

es. APPROSSIMARE UN VETTORE NELLO SPAZIO CON 2 NEL PIANO:
 se il termine \perp al piano è piccolo
 ⇒ l'approx sarà + precisa



ESEMPIO

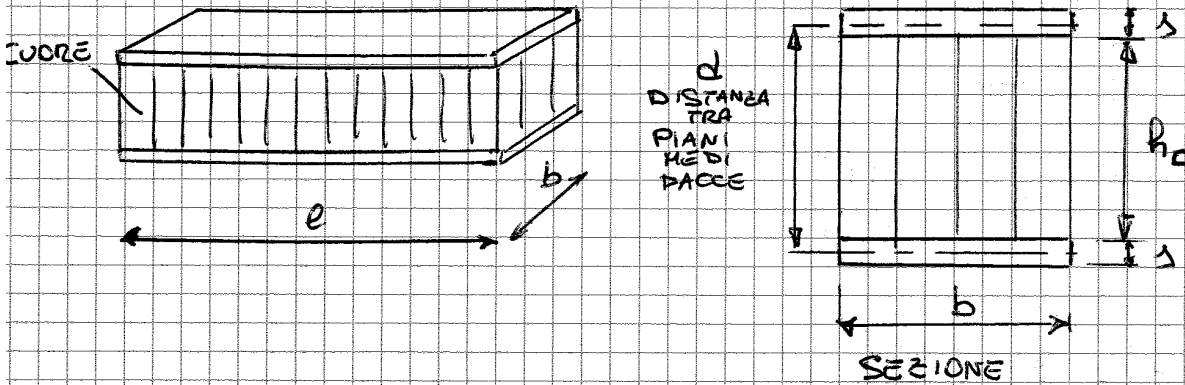
Prendiamo il sistema di eq. differenziali di prima, e abbiamo già 2 funzioni approssimanti (possiamo essere funzioni qualsiasi, basta che rispettino le condizioni)

$\bar{v}_0 = B \sin\left(\pi \frac{z}{e}\right) + \dots$ $\bar{w} = D \cos\left(\pi \frac{z}{e}\right) + \dots$ SOSTITUENDOLE NEL SISTEMA OTTIENIAMO

$$\begin{cases} GA \left(-B \frac{\pi^2}{e^2} \sin\left(\frac{\pi z}{e}\right) \right) + D \frac{\pi}{e} \sin\left(\frac{\pi z}{e}\right) + q = \epsilon_{R1} \\ + EI \left(D \frac{\pi^2}{e^2} \cos\left(\frac{\pi z}{e}\right) \right) + GA \frac{B\pi}{e} \cos\left(\frac{\pi z}{e}\right) - GA D \cos\left(\frac{\pi z}{e}\right) = \epsilon_{R2} \end{cases}$$

$$v_0 \cdot 1 = \int_0^l \frac{M^{(a)} M^{(b)}}{EI} dz + \int_0^l \frac{T^{(a)} T^{(b)}}{GA} dz$$

TRAVE SANDWICH



Le facce del sandwich per noi hanno lo stesso spessore s

PARAMETRI:

Geometrici

Meccanici

E_c, G_c

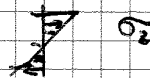
E_f

CUORE DI DENSITÀ MOLTO BASSA → USATO X ALLONTANARE
 LE SEZIONI RESISTENTI
 ALLA FLESSIONE DALL'ASSE
 NEUTRO

↓

TRAVI PIÙ
 LEGGERE

Le sezioni resistenti a flessione sono solo dove
 servono di più.



- STRUTTURA SANDWICH → corichi non troppo elevati
- STRUTTURE IRRIGIDITE → alti corichi

CONSIDERANDO TUTTA LA SEZIONE:

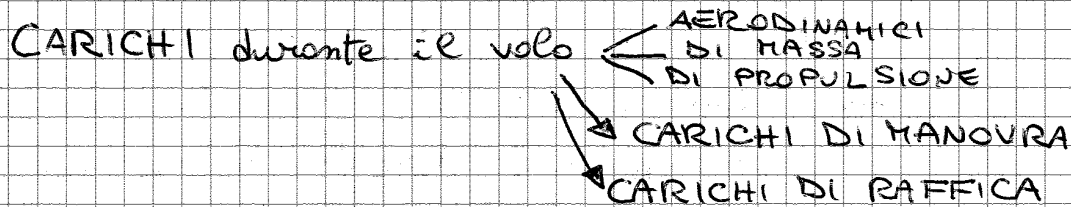
$$EI_x = E_f \cdot 2 \left(\frac{bs^3}{12} + b \cdot s \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) + E_c \cdot \frac{b h_c^3}{12}$$

RIGIDEZZA
 FLESSIONALE

CONTRIBUTO FACCE

CONTRIBUTO CUORE

STRUTTURE AERONAUTICHE



Elementi 2D: PANNELLI

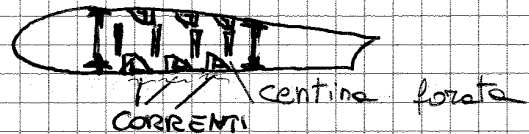
1D longitudinali: CORRENTI / LONGHERONI

1D trasversali: CENTINE

↓

⚠ LE CENTINE NON INTERRUPONO GLI ELEMENTI DI RINFORZO LONGITUDINALI

→ Le centine sono perforate x far passare i correnti.



22/10/2012

- ▶ STRUTTURE PRIMARIE → supportano i carichi agenti sul velivolo
 - DANNEGGIAMENTO STRUTTURA PRIMARIA → pregiudica la sopravvivenza del velivolo
- ▶ STRUTTURE SECONDARIE → la perdita / danneggiamento di queste non pregiudica la sopravvivenza del mezzo (es. CARENATURE)
Consentono un rientro SAFE anche se sono danneggiate

Determinazione dei carichi → ci si riferisce ai
DIAGRAMMI DI MANOVRA e DI RAFFICA

Ogni punto del diagramma rappresenta una condizione di volo con un ben definito fattore di carico n e velocità V .

Noi vedremo diagramma di manovra di aerei acrobatici, motoristiche CS-23 (ex JAR-23)

$$N_{EI} L_{MAX} = W$$

$C_{LMAX} \rightarrow V_{stallo} \rightarrow$ LIMITE DI VELOCITA'

↓
limite da sinistra e
diagramma

(conche poi a destra c'è una
 V di STALLO superiore)

$$K = 1,5$$

FATTORE DI
CARICO
ULTIMO
(o di ROBUSTEZZA)

$$N = K \cdot m$$

Il carico di contingenza non deve provocare deformazioni residue che rendono la struttura inadatta alla sua funzione

$$\sigma_{lim} \cdot K_1 \leq \sigma_{SNERV.}$$

↓
= 1

$$\sigma_{lim} \cdot K \leq \sigma_{ROBUSTEZZA}$$

per le leghe
di Alluminio

$$\left| \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = K \approx 1,5 \right|$$

DEFINITO K COSI'!

$$\sigma_{ROBUSTEZZA} = 1,5 \sigma_{SNERVAMENTO}$$

Io non dovrei MAI arrivare a portare le strutture alla σ di robustezza!!!

DEVO STARE MOLTO AL DI SOTTO!

APPROX: CONSIDERIAMO LE MANOVRE ISTANTANEE

→ NON VARIA V_{D0}

$$W = L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L' \alpha$$

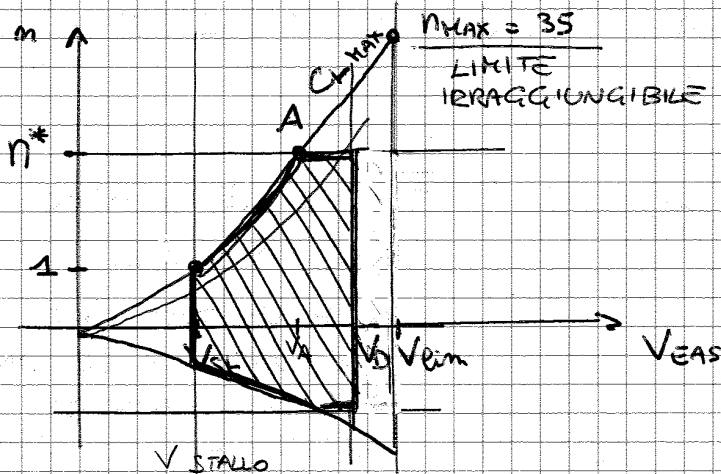
$$L_2 = L_1 + \Delta L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L' (\alpha + \Delta \alpha)$$

$$\rightarrow m = \frac{L_2}{W} = 1 + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{C_{L2}}{C_{L1}}$$

PICCHIATA VERTICALE

$$m_{MAX} = \frac{C_{L2}}{C_{L1}} = \frac{C_{LMAX}}{C_{L-VMAX}} = \frac{C_{LMAX}}{C_{Dmin}} = \frac{C_{LMAX}}{C_{D0}}$$

$$m_{MAX} = \frac{C_{LMAX}}{C_{D0}} = \frac{1,4}{0,04} \approx \textcircled{35} \rightarrow \text{CARICHI MOLTO ELEVATI (troppo forse)}$$



m^* = n MASSIMO DELLA NORMATIVA X UNA CERTA CATEGORIA DI VELIVOLI

- CIVILI / TRASPORTO : $n = 2-3$
- CACCIA : $n = 7$

A seconda dei limiti normativi l'area si riduce.
 → DA DIAGRAMMA ASSOLUTO (BLU) A DIAGRAMMA X CATEGORIA (NERO)

♦ V_D = Velocità di "DIVING" → picchiata non a potenza zero
 ↓
 MANOVRA REALIZZABILE



Ⓐ: Velocità di progetto per la manovra
 fino alla V_A si può stare sulla curva di C_{LMAX}
 Per $V > V_A$ si sta su una curva a $C_L < C_{LMAX}$

• La conoscenza dell'assetto di volo ci consente di collocare le tensioni sulle strutture. Queste saranno orientate in un certo modo rispetto ai carichi

MANOVRA BRUSCA → accelerazioni traslazionali

q = velocità di beccheggio

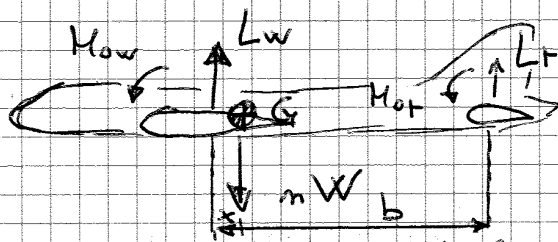
+ accelerazioni ROTAZIONALI (ANGOLARI)

$$m = 1 + \Delta m_1 + \Delta m_2$$

↓ ↓ ↓
 VOLO ACCELER. ACC. ROTAZIONALE
 ORIZZONTI VERTICALE q
 Q_2

Le sezioni di fusoliera risentono molto delle accelerazioni angolari.

TECNICA delle COSTRUZIONI - STRUTTURE 29/10/2012



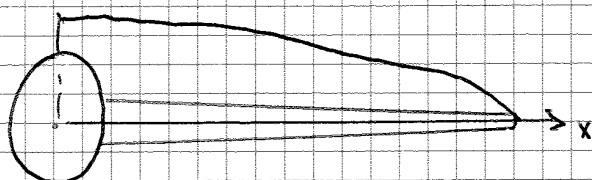
$$L_w + L_t = mW$$

b = distanza tra i fuochi

L_w = portanza sull'ala (WING)

$$\begin{cases} L_w + L_t = mW \\ \text{G)} L_w x - M_{ow} - M_{ot} - L_t(b-x) = 0 \end{cases}$$

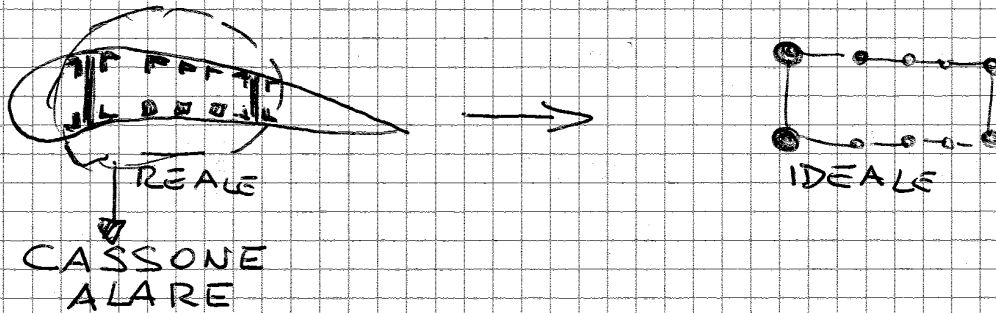
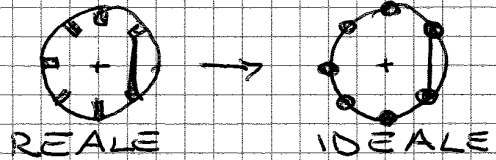
Una volta conosciuta L_w bisogna determinare la distribuzione di carico sull'ala.



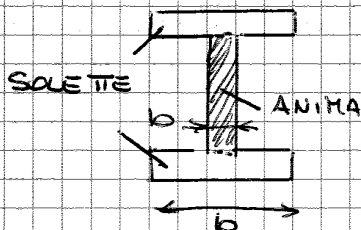
O CONOSCO LA DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI SULL'ALA OPPURE SI FA IN UN MODO SEMPLIFICATO

SEMI GUSCIO IDEALE

→ GUSCIO RINFORZATO
Reinforced Shell

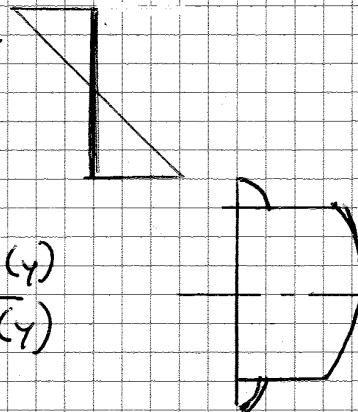


LONGHERONE → Trave a doppio "T"



$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x(y)}{I_x b(y)}$$



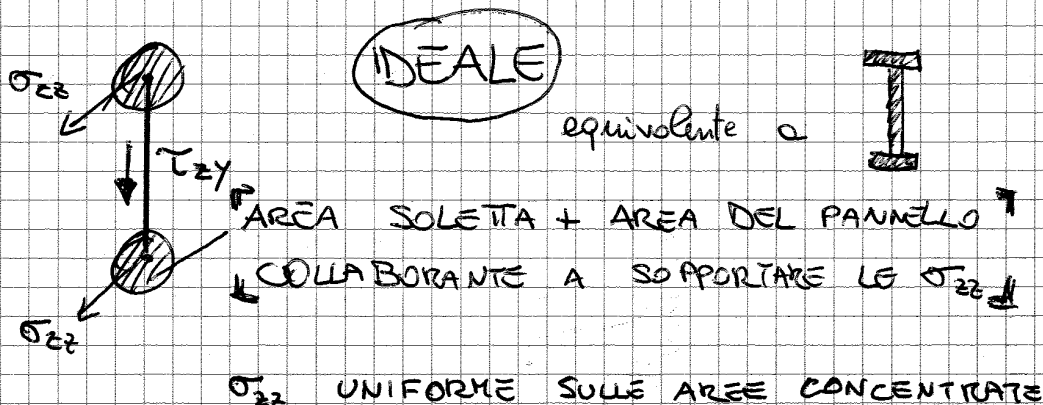
• Gran parte del taglio viene assorbito dall'anima

→ IDEALIZZAZIONE ←

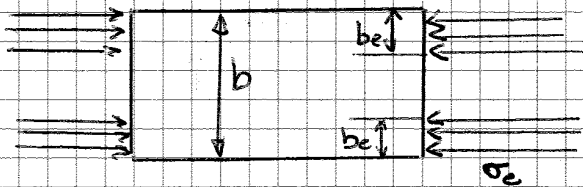
IL PANNELLO SOPPORTA SOLO TENSIONE TAGLIANTE [ANIMA]

Le stesse idealizzazione per le τ non può però essere fatta così brutalmente, ^{anche per le σ_z} poiché comunque l'anima collabora abbastanza a "smaltire" le σ_{zz}

→ concetto nuovo: AREA COLLABORANTE



AREE COLLABORANTI



$$b_e \cdot t = \text{Area collaborante}$$

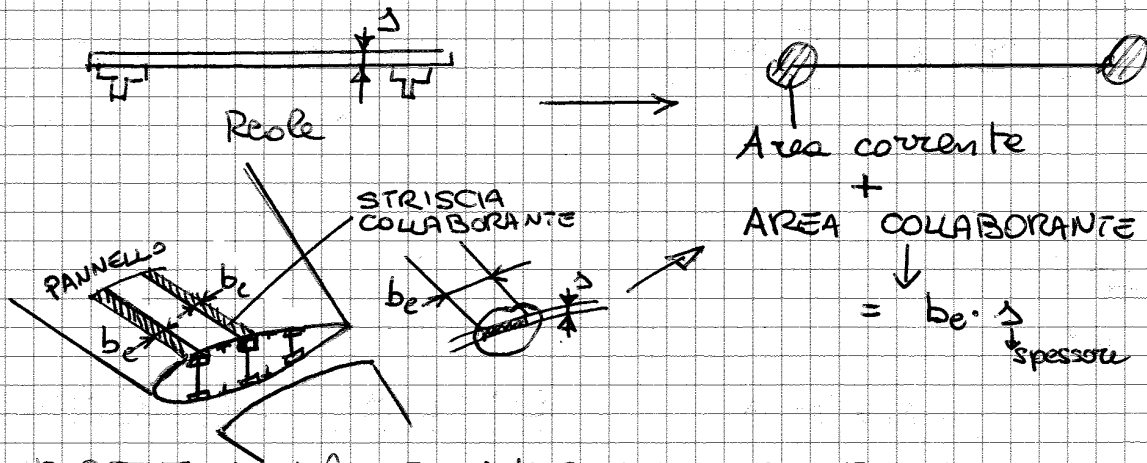
$$P = t \int \sigma_e dy = 2 b_e \sigma_e t$$

$b_e =$ lunghezza collaboranti

Se determina b_e

$$\sigma_{cr} = K E \left(\frac{b}{F} \right)^2$$

[vedremo l'instabilità dei pannelli nella 3^a parte del corso]



IPOTESI del SEMIGUSCIO IDEALE

- ELEMENTI LONGITUDINALI SOPPORTANO SOLO TENSIONI LONGITUDINALI (CORRENTI)
- PANNELLI SOPPORTANO SOLO TENSIONI DI TAGLIO uniformi sullo spessore dell'elemento (FLUSSO COSTANTE)
- ELEMENTI TRASVERSALI INFINITAMENTE RIGIDI NEL LORO PIANO PER MANTENERE LA FORMA DELLA SEZIONE MA CEDOVOLI TRASVERSALMENTE PER NON IMPEDIRE INGORBAMENTI DELLA SEZIONE, (CENTINE)

Conteggio $\sigma_{zz} \rightarrow$ solo σ_{zz} concentrate

$$R_x = qL \cos \alpha$$

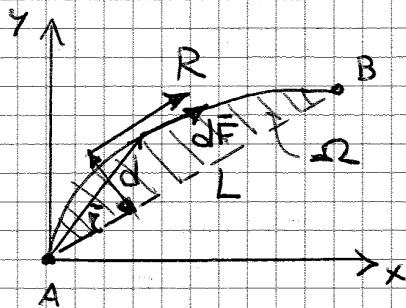
$$R_y = qL \sin \alpha$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = qL$$

RISULTANTE TENSIONI TANGENZIALI
FLUSSO TAGLIO - CORDA
SOTTESA AL PANNELLO

La risultante è // al segmento AB

$$\frac{R_y}{R_x} = \tan \alpha$$

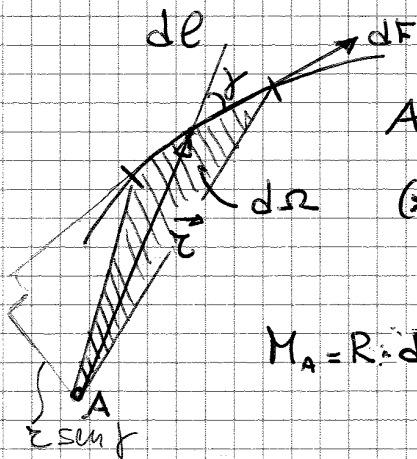
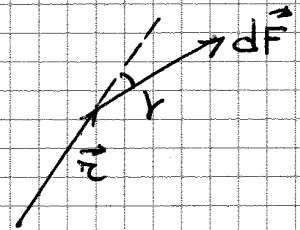


Dove sta però la risultante?

→ EQ. DI MOMENTO ATTORNO AD (A)

$$\vec{A} \quad R d = \int_A^B \vec{r} \wedge d\vec{F} =$$

$$= \int r q dl \sin \gamma = q \int r dl \sin \gamma = (*)$$

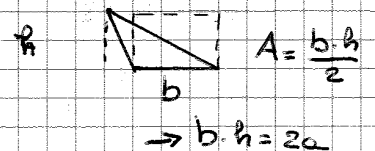


AREA INFINITESIMA SPAZZATA DA \vec{r}

$$(*) dl r \sin \gamma = 2 d\Omega$$

$$M_A = R \cdot d = q \int_A^B 2 d\Omega$$

MOMENTO
ATTORNO
AL POLO
A generico



$$R \cdot d = q 2\Omega$$

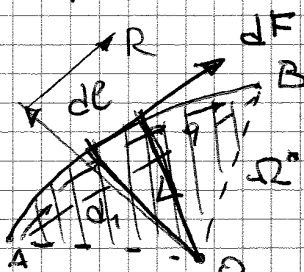
↓
distanze incognite

$$qL d = q 2\Omega$$

$$d = \frac{2\Omega}{L}$$

DISTANZA DELLA
RISULTANTE DALLA
CORDA

d è positiva dalla parte della "gobba" del pannello



$$R = qL$$

$$R d_1 = q 2\Omega^*$$

$$d_1 = \frac{2\Omega^*}{L}$$

$$\sigma_{z_i} = K_1 X_i + K_2 Y_i$$

$$K_1 = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

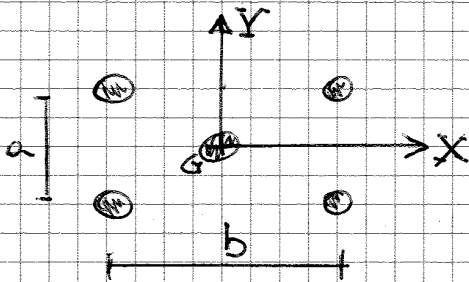
$$K_2 = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$\sigma_{z_1} = K_1 (-x_G) + K_2 (b - y_G)$$

$$N_1 = \sigma_{z_1} \cdot A_1$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$$

$$x_G = \frac{a}{2} \quad y_G = \frac{b}{2}$$



$$I_x = 4 A \cdot \frac{b^2}{4} = Ab^2$$

$$I_y = 4 A \cdot \frac{a^2}{4} = Aa^2$$

$$I_{xy} = 0$$

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = \frac{M_x}{I_x}$$

$$\sigma_{z_i} = \frac{M_x}{I_x} Y_i \rightarrow \sigma_{z_1} = \frac{M_x}{Ab^2} \cdot \frac{b}{2} \rightarrow N_1 =$$

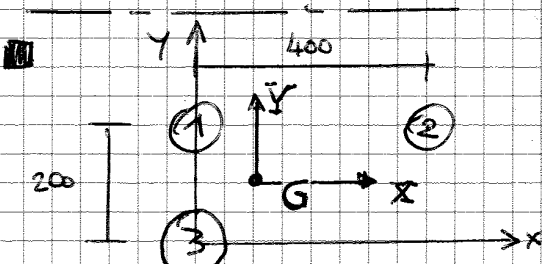
$$\sigma_{z_2} = \frac{M_x}{Ab^2} \cdot \frac{b}{2} \rightarrow N_2$$

$$\sigma_{z_3} = \frac{M_x}{Ab^2} \cdot -\frac{b}{2} \rightarrow N_3$$

$$\sigma_{z_4} = \frac{M_x}{Ab^2} \cdot -\frac{b}{2} \rightarrow N_4$$

$$N_1 = N_2 = \frac{M_x}{2b}$$

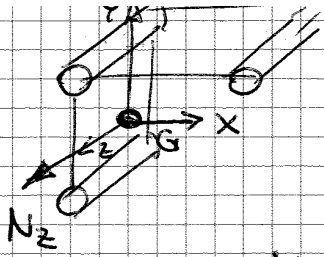
$$N_3 = N_4 = -\frac{M_x}{2b}$$



$$x_G = \frac{100 \cdot 400}{400} = 100$$

$$y_G = \frac{200 \cdot 100 + 200 \cdot 100}{400} = 100$$

	A_i	x_i	y_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	I_{x_i}	I_{y_i}	I_{xy}
1	100	0	200	-100	100	$100 \cdot 100^2$	$100 \cdot 100^2$	
2	100	400	200	300	100	$100 \cdot 100^2$	$100 \cdot 300^2$	
3	200	0	0	-100	-100	$200 \cdot 100^2$	$200 \cdot 100^2$	



$$\sigma_z = \frac{N}{A_{tot}}$$

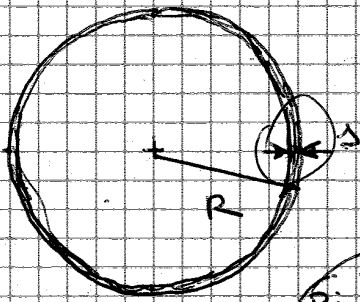
$$\sigma_z = \frac{N_z}{400 \text{ mm}^2}$$

$$N_1 = \sigma_{z1} A_1 = \frac{N_z}{400} \cdot 100$$

$$N_2 = \sigma_{z2} A_2 = \frac{N_z}{400} \cdot 100$$

$$N_3 = \sigma_{z3} A_3 = \frac{N_z}{400} \cdot 200$$

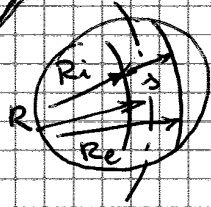
SEZIONE CIRCOLARE SOTTILE



Le variazioni di τ sono trascurabili dentro allo spessore δ .

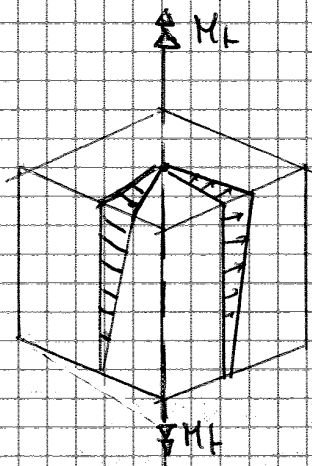
→ PICCOLE VARIAZIONI DI τ NELLO SPESSORE

⇒ può essere considerato per il suo valore MAX



$$M_H = \int_0^{2\pi} \int_{R_{min}}^{R_{MAX}} \tau \underbrace{R^2}_{R \cdot R} d\theta \cdot \underbrace{\delta}_{AREA} = 2\pi \frac{\tau_{MAX}}{R} R^2 \cdot R \cdot \delta$$

ELEMENTO PRISMATICO

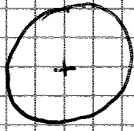


→ ZONE DI SPIGOLO NON CONTRIBUISCONO ALLA RESISTENZA A TORSIONE

→ SI TENDE A RACCORDARE GLI SPIGOLI

■ MAX SCORRIMENTO ANGOLARE → A META' DEL LATO LUNGO DELLA SEZIONE RETTANGOLARE

SEZ. CIRCOLARE CHIUSA

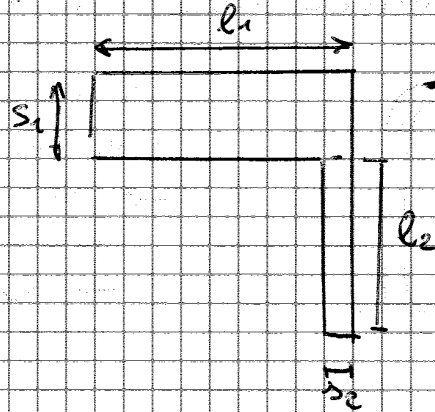
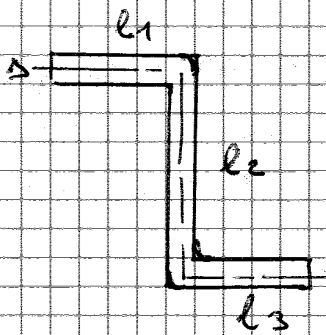
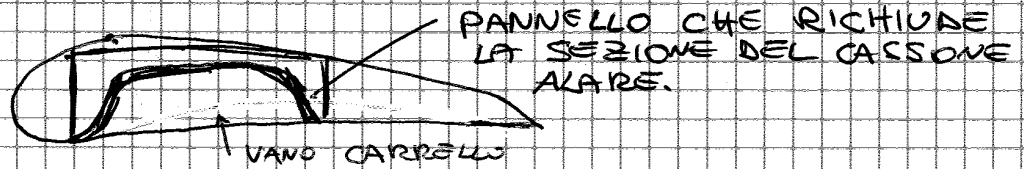


$$GJ_{T*} = G \cdot 2\pi R^3 \cdot \Delta$$

$$\frac{GJ_{T*}}{GJ_T} = \frac{G \cdot 2\pi R^3 \cdot \Delta}{G \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi R \cdot \Delta^2} = 3 \frac{R^2}{\Delta^2}$$

→ SEZIONE CHIUSA SOPPORTA MOLTO MEGLIO LA TORSIONE DELLA SEZIONE APERTA

Esempio: VANI NELL'ALA

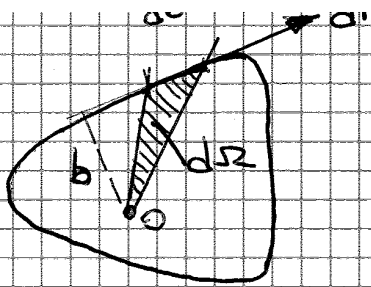


$$J_T = \frac{1}{3} (l_1 + l_2 + l_3) \delta^3$$

$$\beta = 3$$

$$J_T = \frac{1}{3} l_1 \delta_1^3 + \frac{1}{3} l_2 \delta_2^3$$

UTILIZZIAMO SEMPRE LA DIVISIONE IN RETTANGOLI



$dF = q \cdot dl$
 Calcoliamo M_t rispetto a O

$$M_t = \oint dF \cdot b = \oint q dl b = q \oint b dl$$

costante sulla cella

$b =$ braccio di dF $= q \oint 2 d\Omega = q \cdot 2 \cdot \Omega$

$\Omega =$ area racchiusa dalla linea media

$$M_t = q \cdot 2 \cdot \Omega$$

1° FORMULA DI BREDT

Nel caso di sez. circolare

$$M_t = q \cdot 2\pi R = \frac{q \cdot 2\pi R^2}{2}$$

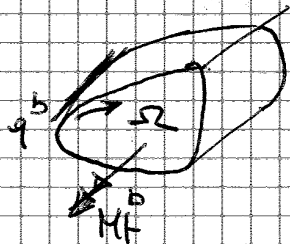
q è COSTANTE $q = \tau \cdot \Delta$

La 2° FORMULA DI BREDT SERVE X IL CALCOLO DELLA RIGIDEZZA TORSIONALE

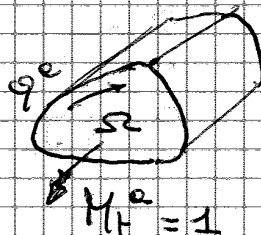
"b"

"e"

LAVORO VIRTUALE DELLA TORSIONE



$$q^b = \frac{M_t^b}{2\Omega}$$



$$q^e = \frac{1}{2\Omega}$$

$$\tau^e = \frac{q^e}{\Delta}$$

$$* \gamma^b = \frac{\tau^b}{G} = \frac{q^b}{\Delta G} = \frac{M_t^b}{2\Omega \Delta G}$$

$$1. \delta \theta^b = \int_V \tau^e \gamma^b \frac{\Delta dl dz}{\Delta} = \int \frac{1}{2\Omega \Delta} \cdot \frac{M_t^b}{2\Omega \Delta G} \cdot \Delta dl dz$$

$$\theta^b = \frac{\delta \theta^b}{\delta z} = \oint \frac{1}{2\Omega \Delta} \cdot \frac{q^b}{G} dl = \oint \frac{M_t^b}{4\Omega^2 \Delta G} dl = \frac{M_t}{4\Omega^2} \oint \frac{dl}{\Delta}$$

1 CELLA

$$= \frac{M_t}{4\Omega^2 G} \oint \frac{dl}{\Delta}$$

$$q = \frac{M_T}{2\Omega} = \frac{100 \text{ N}\cdot\text{mm}}{2 \cdot 50000 \text{ mm}^2} = 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{1}^{\text{a}} \text{ f. BREDT}$$

$$\tau_1 = \frac{q}{\Delta_1} = \frac{10^{-3} \text{ N/mm}}{1 \text{ mm}} = 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

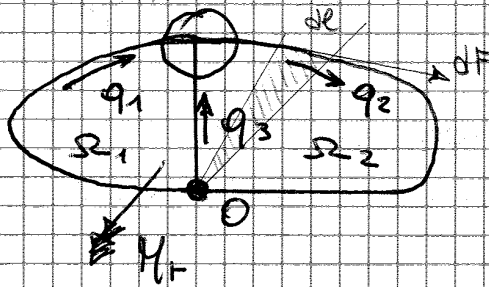
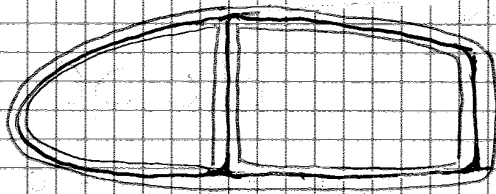
$$\tau_2 = \frac{q}{\Delta_2} = \frac{10^{-3} \text{ N/mm}}{4 \text{ mm}} = \frac{1}{250} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{M_T}{4\Omega^2} \oint \frac{d\ell}{\Delta G} = \frac{M_T}{4\Omega^2} \left[\frac{\ell_1}{\Delta_1 G_1} + \frac{\ell_2}{\Delta_2 G_2} \right] \quad \text{II BREDT}$$

NON È COSTANTE LUNGO TUTTA LA SEZIONE

$$GJ_T = \frac{M_T}{\dot{\theta}} = \frac{4\Omega^2 M_T}{M_T \oint \frac{d\ell}{\Delta G}} = \frac{4\Omega^2}{\left[\frac{\ell_1}{\Delta_1 G_1} + \frac{\ell_2}{\Delta_2 G_2} \right]}$$

CASO GENERALE : 2 CELLE



Se conosco M_T posso calcolare
la risultante dei flussi
 q_1, q_2, q_3

$$M_T = 2q_2\Omega_2 + 2\Omega_1 q_1 \quad \text{I BREDT con 2 CELLE}$$

$$M_T = \sum_i^n 2\Omega_i q_i \quad \text{I BREDT con n CELLE}$$

$$q^a = \frac{1}{2R_1}$$

$$1. d\theta^b = \int \frac{1}{2R_{1,2}} \cdot \frac{q_i}{\Delta G} dl dz$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{2R_i} \left(\frac{q_i}{\Delta_i G_i} \right) dl$$

GRANDEZZE APPARTENENTI
ALLA SOLA CELLA CHE
STO CONSIDERANDO

Per la cella 1:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2R_1} \left[\frac{q_1^1 l_1}{\Delta_1^1 G_1^1} - \frac{q_3^1 l_3}{\Delta_3^1 G_3^1} \right]$$

Per la cella 2

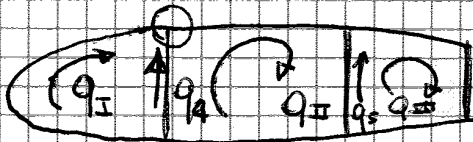
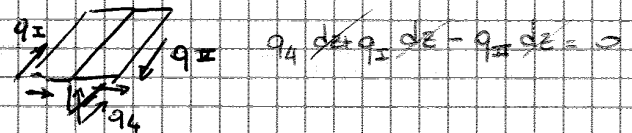
$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2R_2} \left[\frac{q_2^2 l_2}{\Delta_2^2 G_2^2} + \frac{q_3^2 l_3}{\Delta_3^2 G_3^2} \right]$$

ULTIMA CONDIZIONE:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$$

se ma la sezione sottoposta a torsione si apre oppure compenetra

SEZIONE A PIU' CELLE



$$q_4 = q_{II} - q_I$$

$$q_5 = q_{III} - q_{II}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_t &= 2R_I q_I + 2R_{II} q_{II} + 2R_{III} q_{III} \\ \dot{\theta}_I &= \dot{\theta}_{II} \\ \dot{\theta}_{II} &= \dot{\theta}_{III} \end{aligned} \right.$$

EQ. BASATE SULLA DEFORMABILITÀ DEL SISTEMA

SOSTITUENDO LA RELAZIONE $q_3 = q_II + q_I$

$$\frac{1}{2R_I G \Delta} [q_I(2a+h) - q_{II}h + q_I h] = \frac{1}{2R_{II} G \Delta} [q_{II}(2a+h) + q_{II}h + q_I h]$$

$R_I = R_{II}$

$$q_I(2a+2h) - q_{II}h = q_{II}(2a+2h) - q_{II}h$$

$$q_I(2a+3h) = q_{II}(2a+3h)$$

$$q_I = q_{II} \Rightarrow q_3 = 0$$

$$M_T = 2ah(q_I + q_{II}) = 4ah q_I$$

$$q_I = q_{II} = \frac{M_T}{4ah}$$

In questo caso il pannello centrale è inutile.

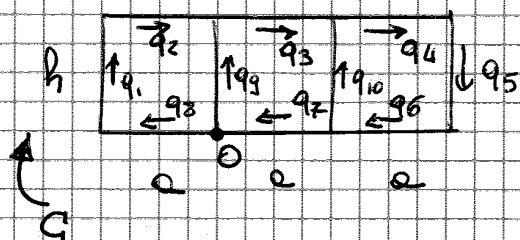
► $\dot{\theta}_I = \dot{\theta}_{II} = \frac{1}{2R_I G \Delta} [q_I(2a+h)] =$ prendiamo una delle due relazioni $\dot{\theta}_I$ o $\dot{\theta}_{II}$

► $GJ_T = \frac{M_T}{\dot{\theta}}$

$$\dot{\theta}_I = \frac{1}{2ahG\Delta} \frac{M_T}{4ah} (2a+h) = \frac{M_T}{8ahG\Delta} (2a+h)$$

$$\frac{M_T}{\dot{\theta}} = \frac{8ahG\Delta}{2a+h} = GJ_T \rightarrow \text{RIGIDEZZA TORSIONALE}$$

ESTENDIAMO QUESTO CALCOLO A SEZIONI MULTI-CELLE



$\Delta =$ costante
 $G =$ costante

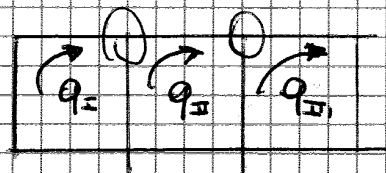
$$q_1 = q_2 = q_8 = q_I$$

$$q_4 = q_5 = q_6 = q_{II}$$

$$q_3 = q_7 = q_{III}$$

$$q_9 = q_{II} - q_I$$

$$q_{10} = q_{II} - q_I$$



3 unknowns → 3 equations

$$\begin{cases} C = q_I 2ch + q_{II} 2ch + q_{III} 2a \cdot h \\ \dot{\theta}_I = \dot{\theta}_{II} \\ \dot{\theta}_{II} = \dot{\theta}_{III} \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_I = \frac{1}{2\Omega_I G \Delta} [q_I (2a+h) - q_{II} h] = \frac{1}{2\Omega_I G \Delta} [q_I (2a+h) - q_{II} h + q_I h]$$

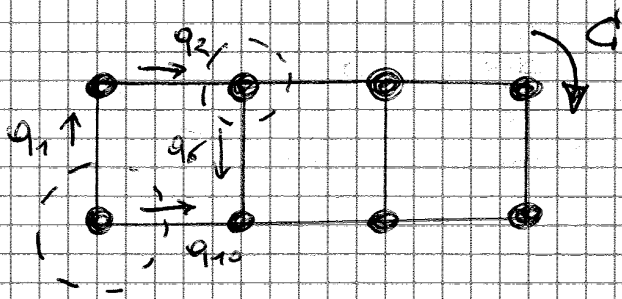
$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{II} &= \frac{1}{2\Omega_{II} G \Delta} [q_{II} 2a - q_{II} h + q_{III} 2a + q_{III} h] = \frac{1}{2\Omega_{II} G \Delta} [q_{II} (2a-h) + q_{III} (2a+h)] \\ &= \frac{1}{2\Omega_{II} G \Delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{III} &= \frac{1}{2\Omega_{III} G \Delta} [q_{III} (2a+h) + q_{II} h] = \\ &= \frac{1}{2\Omega_{III} G \Delta} [q_{III} (2a+h) + q_{III} h - q_{II} h] \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottengono q_I, q_{II}, q_{III}

$$\tau = \frac{q_i}{\Delta_i}$$

SEZIONE A 3 CELLE CON CORRENTI



Saint Venant

→ IP. TORSIONE $\sigma_{zz} = 0$

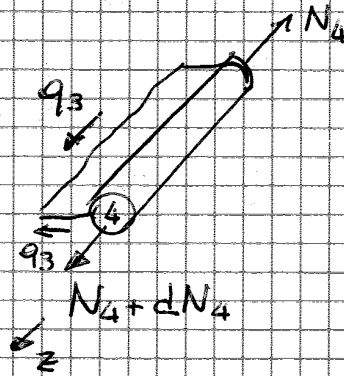
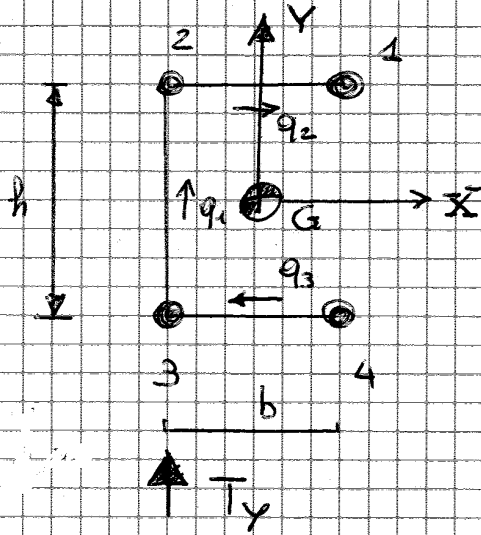
Le σ_z si applicano solo ai correnti

→ se $\sigma_{zz} = 0$

1 CORRENTI NON SERVONO

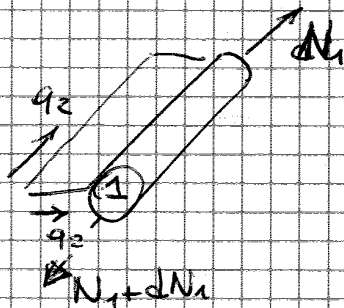
4 SOPPORTARE TORSIONE!

TAGLIO SULLA SEZIONE



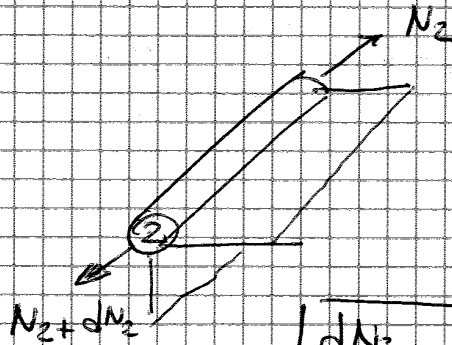
$$N_4 + dN_4 - N_4 + q_3 dz = 0$$

$$\boxed{\frac{dN_4}{dz} = -q_3}$$



$$N_1 + dN_1 - q_2 dz - N_1 = 0$$

$$\boxed{\frac{dN_1}{dz} = q_2}$$



$$\boxed{\frac{dN_2}{dz} = q_1 - q_2}$$

N CORRENTI → N-1 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Equazione delle tensioni longitudinali

$$\sigma_{zz} = k_1 X + k_2 Y$$

X, Y → ASSI PRINCIPALI

$$\sigma_{zz} = \frac{M_y}{I_y} X + \frac{M_x}{I_x} Y$$

$$N_1 = \sigma_{z1} \cdot A_1 = \left(\frac{M_y}{I_y} X_1 + \frac{M_x}{I_x} Y_1 \right) A_1$$

$$\frac{dN_1}{dz} = \left(\frac{dM_y}{dz} \frac{X_1}{I_y} + \frac{dM_x}{dz} \frac{Y_1}{I_x} \right) A_1$$

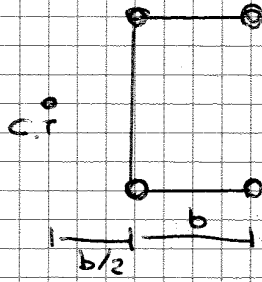
$I_x = 0$ I_y

A NOI INTERESSANO I FLUSSI DI TAGLIO q.

$$\frac{dN}{dz} = \frac{I_y}{I_x} \cdot \gamma \cdot A$$

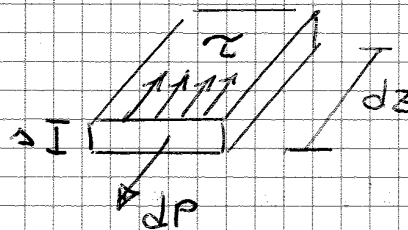
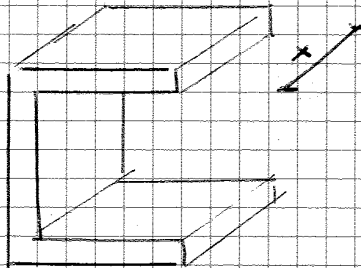
$$I_x = 4A \cdot \frac{h^2}{4} = Ah^2$$

Applicando il taglio nel centro di taglio
la sezione non subisce torsione



TECNICA delle COSTRUZIONI

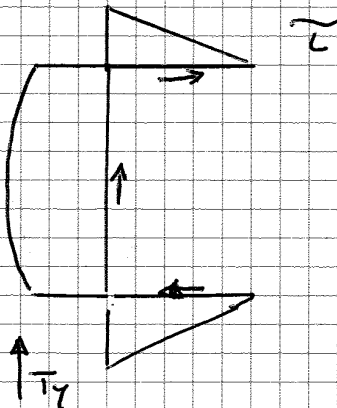
19/11/2012



$$dP \cdot \bar{z} \cdot \Delta dz = 0$$

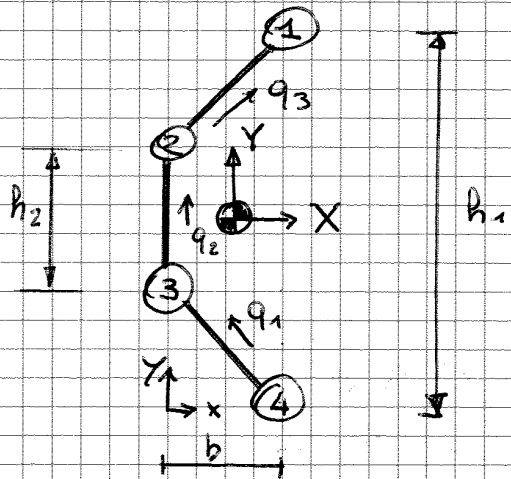
$$\bar{z} = \frac{dP}{dz} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{d\sigma_z}{dz} \cdot X \Delta$$



$$e_t = \frac{b^3 h^3 \Delta}{4 I_x}$$

ESERCIZIO X CASA



? q_1, q_2, q_3 ? dov'è il taglio?
 ? C.T.

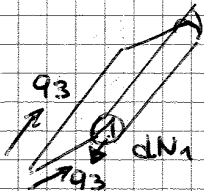
FORMA TRAPEZIO ISOSCELE

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$

$X_G = \frac{b}{2} \quad Y_G = \frac{h_1}{2}$

	X_i	Y_i	$A x_i^2$	$A y_i^2$	$A x_i y_i$	dN_i / dz
1	$b/2$	$h_1/2$	$A b^2/4$	$A h_1^2/4$	$A \frac{b h_1}{4}$	$\frac{I_y}{I_x}$
2	$-b/2$	$h_2/2$	$A b^2/4$	$A h_2^2/4$	$A (-\frac{b h_2}{4})$	
3	$-b/2$	$-h_2/2$	$A b^2/4$	$A h_2^2/4$	$A \frac{b h_2}{4}$	
4	$b/2$	$-h_1/2$	$A b^2/4$	$A h_1^2/4$	$A (-\frac{b h_1}{4})$	
			I_y	I_x	I_{xy}	
			$A b^2$	$A (h_1^2 + h_2^2)$	0	

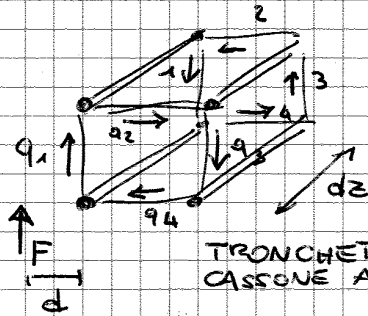
$dN_i = \frac{I_y}{I_x} y_i A_i dz$



$dN_1 = q_3 dz$

③ $F \cdot d = + q_3 \cdot \frac{2 a h}{2} + q_2 \cdot \frac{2 a h}{2}$

RISULTANTE DEI FLUSSI SULLA FACCIA ANTERIORE DEVE ESSERE UGUALE AL CARICO ESTERNO



FACCIA POSTERIORE : EQUILIBRIO

$$F \cdot d = -q_3 \cdot a h - q_2 \cdot a h$$

Il taglio genera i flussi di taglio → STESSO SEGNO

FACCIA ANTERIORE : RESULTANTE

$$F \cdot d = q_2 \cdot a h + q_3 \cdot a h$$

$$F \cdot d = q_2 \cdot a h + q_2 \cdot a h - \frac{dP_1}{dz} a h$$

$$= 2q_2 \cdot a h - \frac{F}{2t} a h$$

Esprimiamo tutto in funzione del flusso incognito q_2

$$\rightarrow F \cdot d + F \cdot \frac{a}{2} = 2 \cdot q_2 \cdot a h$$

$$q_2 = \frac{F \cdot d + F \cdot \frac{a}{2}}{2 a h}$$

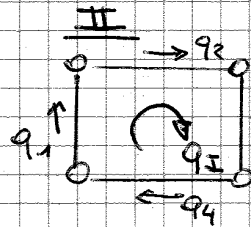
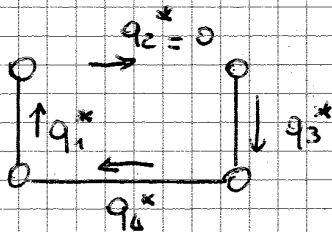
$$q_3 = q_2 - \frac{dP_1}{dz}$$

$$q_1 = q_2 + \frac{dP_2}{dz}$$

$$q_4 = \frac{dP_3}{dz} + q_1 = q_2 + \frac{dP_2}{dz} + \frac{dP_3}{dz}$$

②

I passo : TRASFORMO IN UNA SEZIONE APERTA



FLUSSO CORRETTIVO

PROCEDURA:

$$q_2 = q_2^* + q_I$$

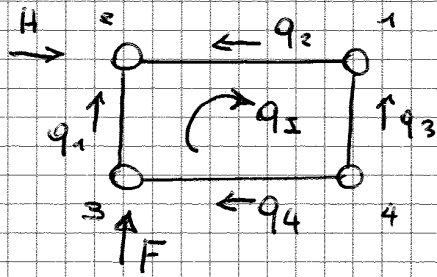
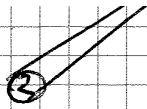
Ⓘ APRI CELLA

$$q_1 = q_1^* + q_I$$

Ⓡ RICHIUDI CON FLUSSO "CORRETTIVO"

$$q_3 = q_3^* + q_I$$

$$q_4 = q_4^* + q_I$$



$$q_1 = q_1^* + q_I$$

$$q_2 = q_2^* - q_I$$

$$q_3 = q_3^* - q_I$$

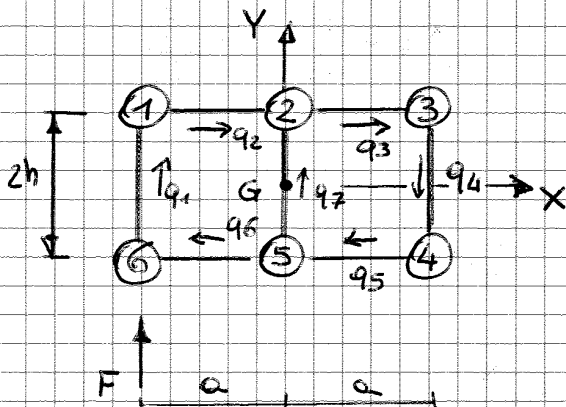
$$q_4 = q_4^* + q_I$$

$$\sum \vec{M} \quad H \cdot b = -q_2 \cdot e \cdot b - q_3 \cdot e \cdot b = q_I \cdot a \cdot h - q_3^* \cdot a \cdot h + q_I \cdot e \cdot h$$

$$q_I = \frac{H \cdot b + \left(\frac{F}{2b} + \frac{H}{2e} \right) a \cdot h}{2 \cdot e \cdot h}$$

TECNICA delle COSTRUZIONI 20/11/2012

TAGLIO SU SEZIONE CHIUSA 2 CELLE



Calcolare i flussi

- SEZIONE RESISTENTE A FLESSIONE → 6 CORRENTI

	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i^2$	dP_i
1	A	-a	h		
2	A	0	h		
3	A	a	h		
4	A	a	-h		
5	A	0	-h		
6	A	-a	-h		

$$I_x = 6Ah^2 \quad I_y = 4Ah^2 \quad I_{xy} = 0$$

$$q_1 = q_1^* + q_{II}$$

$$q_2 = q_2^* + q_{II}$$

$$q_3 = q_3^* + q_{II}$$

$$q_4 = q_4^* + q_{II}$$

$$q_5 = q_5^* + q_{II}$$

$$q_6 = q_6^* + q_{II}$$

$$q_7 = q_7^* + q_{II} - q_I$$

Bisogna ora calcolare q_I e q_{II} . \rightarrow 2 incognite

► RISULTANTE DI MOMENTO A UN POLO

$$\curvearrowright 0 = q_2 \cdot 2\Omega_2 + q_3 \cdot 2\Omega_3 + q_4 \cdot 2\Omega_4 - q_7 \cdot 2\Omega_7$$

$$\begin{cases} 0 = q_2 \cdot a \cdot 2h + q_3 \cdot a \cdot 2h + q_4 \cdot 2a \cdot 2h - q_7 \cdot a \cdot 2h \\ \dot{\theta}_I = \dot{\theta}_{II} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\frac{2G\Omega_I}{L}} \left[\frac{q_1 \cdot 2h + q_2 \cdot a - q_7 \cdot 2h + q_6 \cdot a}{2G\Omega_{II}} \right] = \frac{1}{\frac{2G\Omega_{II}}{L}} \left[\dots \right]$$

AREE CELLE UGUALI

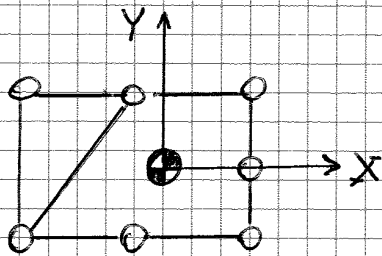
$$\begin{cases} 0 = q_I \cdot 2ah + q_{II} \cdot 2ah + (q_4^* + q_{II})4ah - (q_7^* + q_{II} - q_I) \cdot a \cdot 2h \\ \left[(q_1^* + q_I)2h + q_I \cdot a - (q_7^* + q_{II} - q_I) \cdot 2h + q_I \cdot a \right] \\ = \left[q_{II} \cdot a + (q_4^* + q_{II})2h + q_{II} \cdot a + (q_7^* + q_{II} - q_I)2h \right] \end{cases}$$

$$q_I \left(\frac{2a+6h}{2h+a+a+2h+2h} \right) = q_{II} \left(\frac{2a+6h}{a+2h+a+2h+2h} \right)$$

$$q_I = q_{II}$$

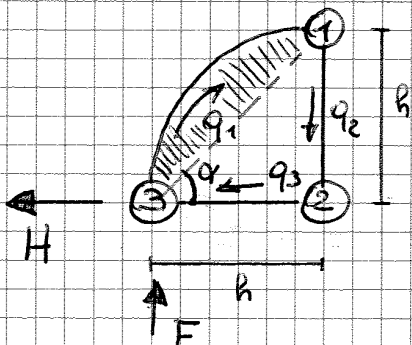
$$\rightarrow 0 = q_I \cdot 2ah + q_{II} \cdot 2ah - \frac{F}{6h} \cdot 4ah + q_I \cdot 4ah - \frac{F}{6h} \cdot a \cdot 2h$$

\rightarrow 61



SEZIONE CON PANNELLO CURVO

Pannello ad arco di cerchio



Si può usare sempre la procedura "standard", ma qui possiamo trattarle in modo + semplice.

3 INCOGNITE → BASTANO LE 3 EQ. DI RISULTANZA

$$1) F = -q_2 h + q_1 L \frac{\sin \alpha}{h}$$

$$\rightarrow H = q_3 h - q_1 L \frac{\cos \alpha}{h}$$

$$3) q_2 h^2 + 2q_1 \left(\frac{\pi h^2}{4} - \frac{h^2}{2} \right) = 0$$

AREA DEL SETTORE CIRCOLARE - AREA TRIANGOLO

$$\Rightarrow q_2 = - \frac{q_1 \left(\frac{\pi h^2}{2} - h^2 \right)}{h^2} = -q_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow F = + q_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) h + q_1 h$$

$$= q_1 \frac{\pi}{2} h - q_1 h + q_1 h$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{2F}{\pi h}}$$

$$q_2 = \frac{2F}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2F}{\pi}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{F}{h} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)}$$

$$q_3 = H + q_1 h$$

$$= \frac{H}{h} + \frac{2F}{\pi} \frac{h}{h}$$

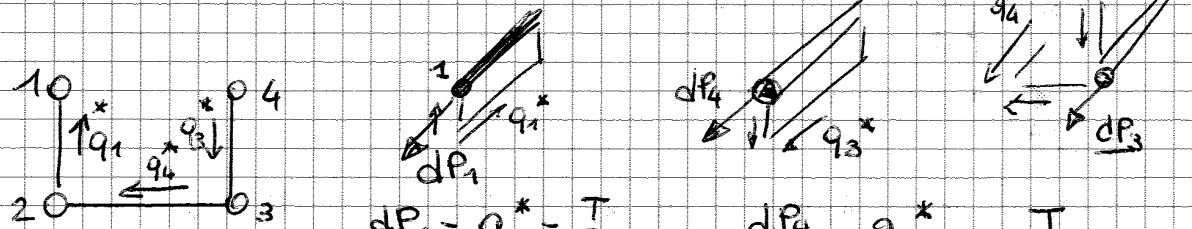
$$\boxed{q_3 = \frac{H}{h} + \frac{2F}{h}}$$

... con solo un solo quilibrio di passaggio ...

$$dP_1 = dP_2 = \frac{T dz}{\frac{4A h^2}{4}} \cdot \frac{h}{2} \cdot A = \frac{T dz}{2h}$$

$$dP_3 = dP_4 = - \frac{T dz}{2h}$$

PROCEDURA SOLITA:



$$\frac{dP_1}{dz} = q_1^* = \frac{T}{2h}$$

$$- \frac{dP_4}{dz} = q_3^* = - \frac{T}{2h}$$

$$- \frac{dP_3}{dz} = -q_3^* + q_4^* \rightarrow q_4^* = \frac{T}{2h} - \frac{T}{2h} = 0$$

$$\begin{cases} T \cdot e_T = q_2 \cdot a h + q_3 \cdot a h \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$q_3 = q_3^* + q_4^*$$

$$\begin{cases} T \cdot e_T = q_5 \cdot e h + q_6 \cdot e h - \frac{T}{2h} \cdot a h \\ \frac{1}{2G \rho_{Iz}} [q_1 h + q_2 a + q_3 h + q_4 a] = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2G \rho_{Iz}} [q_1^* h + q_6 h + q_5 a + q_3^* h + q_6 h + q_4^* a + q_5 a] = 0$$

$$q_5 = \frac{1}{2(a+h)} [-(q_1^* + q_3^* + q_4^*)] = \frac{-1}{2(a+h)} \left[-\frac{T}{2h} - \frac{T}{2h} \right] = 0$$

$$\begin{cases} q_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \cdot e_T = - \frac{T}{2h} a h \end{cases}$$

$$e_T = - \frac{a}{2}$$

→ rispetto al polo che ho scelto x forse il momento

→ il centro di taglio è in mezzo alla sezione

RISULTANTE MOMENTI IN POCO (4)

④

$$0 = q_4 \cdot z \cdot \frac{\pi 4h^2}{z} + q_1 \cdot z \cdot \frac{a \cdot 2h}{z} + q_2 \cdot z \cdot \frac{a \cdot 2h}{z}$$

$$0 = q_4 \pi 4h^2 + q_1 a 2h + q_2 a 2h$$

$$0 = q_4^* \pi 4h^2 + q_1^* \pi 4h^2 + q_1^* a 2h + q_2^* a 2h + q_2^* a 2h$$

$$\rightarrow q_1 = - \frac{q_4^* \pi 4h^2 + q_1^* a 2h}{(\pi 4h^2 + 4a 2h)} = - \frac{\frac{F}{2h} \pi 4h^2 + \frac{F}{2} a + \frac{H}{2a} a 2h}{\pi 4h^2 + 8ah}$$

$$= - \frac{2\pi Fh + \frac{F}{2}a + Hh}{\pi 4h^2 + 8ah}$$

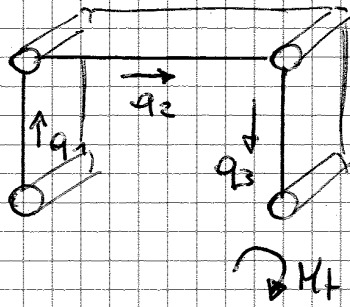
$$q_1 = \frac{F}{4h} + \frac{H}{2a} - \frac{2\pi Fh + \frac{F}{2}a + Hh}{\pi 4h^2 + 8ah} =$$

considerando che $F = \frac{\sqrt{2}T}{2}$ e $H = \frac{\sqrt{2}T}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}T}{8h} + \frac{\sqrt{2}T}{4a} - \frac{2\pi \frac{\sqrt{2}T}{2}h + \frac{\sqrt{2}T}{4}a + \frac{\sqrt{2}T}{2}h}{\pi 4h^2 + 8ah} =$$

...
TROPPA
LUNGO
TROPPE LETTERE

TORSIONE SEZIONI APERTE



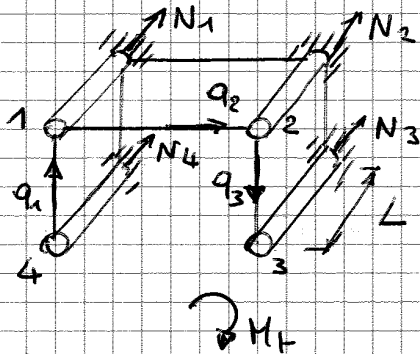
TORSIONE PURA

NO INCREMENTI
DI SFORZI NORMALI $\frac{dP_i}{dz} = 0$

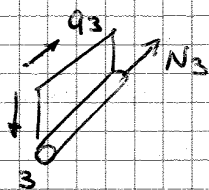
→ FLUSSI q_i NULLI!

NON SOPPORTA TORSIONE !!!

VINCOLIAMO UN ESTREMO → INCASTRO



TORSIONE GENERA
SFORZI NORMALI
SUI CORRENTI
(valida ipotesi di de Saint Venant)

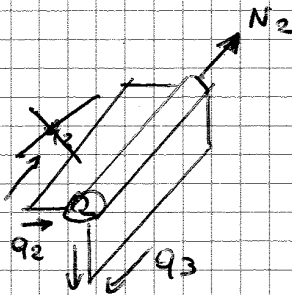


$$N_3 + q_3 L = 0 \quad q_3 = q_1$$

$$\rightarrow q_3 = -\frac{N_3}{L}$$

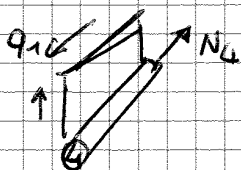
$$M_t = q_1 h \cdot b \quad \rightarrow \quad q_1 = q_3 = \frac{M_t}{hb}$$

$$N_3 = -\frac{M_t}{hb} \cdot L$$



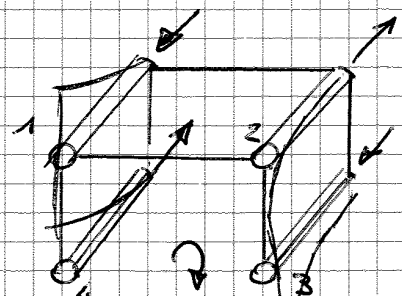
$$N_2 - q_3 L = 0$$

$$N_2 = q_3 L = \frac{M_t}{hb} \cdot L$$

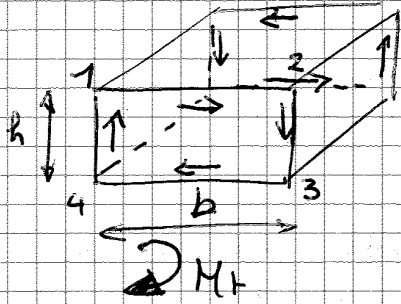


$$N_4 = \frac{M_t}{hb} \cdot L$$

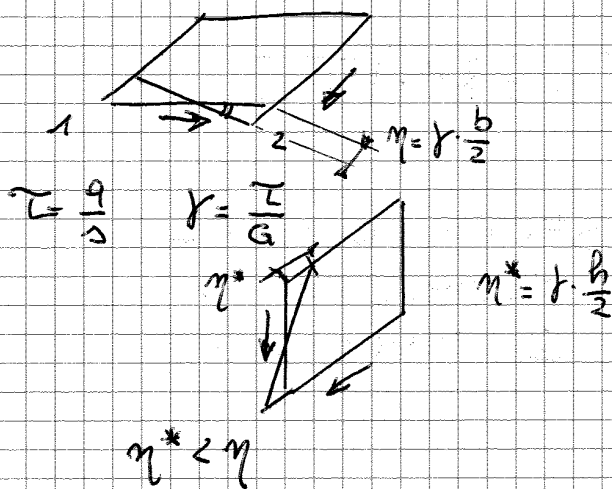
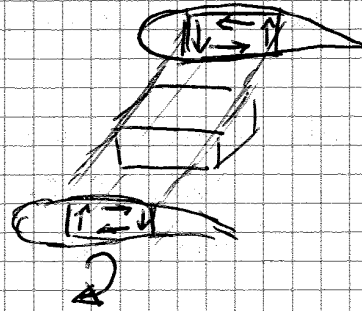
$$N_1 = -N_4 = -\frac{M_t}{hb} \cdot L$$



TECNICA delle COSTRUZIONI - STRUTTURE 27/11/2012

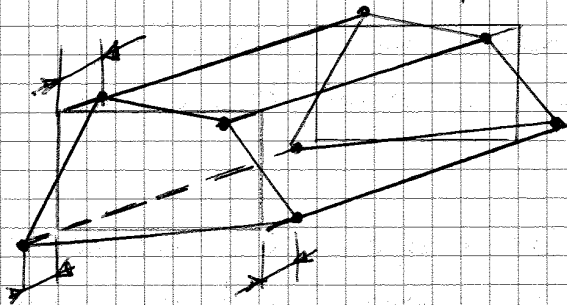


TRONCONE DI CASSONE ALARE
TRA 2 CENTINE



OGNI PANNELLO SUBISCE
LO STESSO SCORRIMENTO
 γ costante, ma spostamenti \neq !
↓
DEFORMAZIONE AD ELICA
DEL SISTEMA

Sezione non vincolata :-



LA SEZIONE NON SI
MANTIENE PIÙ PIANA
DOPO LA DEF. A
TORSIONE

SVERGOLAMENTO DELLA SEZIONE

↳ WARPING libero

Sezione VINCOLATA (incastrato) :-

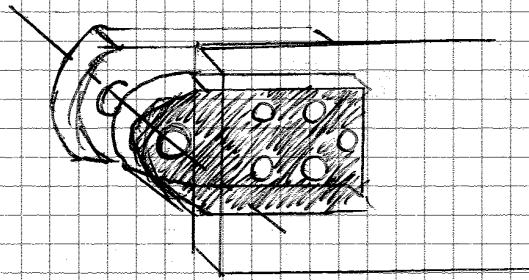
- IMPEDISCE SPOSTAMENTI SU SEZIONE POSTERIORE
- SFORZI LONGITUDINALI ⇒ SI MODIFICANO I FLUSSI

↳ NON È PIÙ TORSIONE PURA

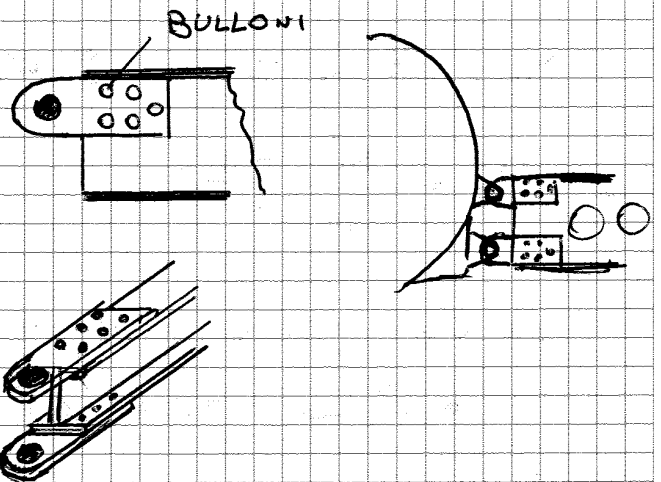
WARPING IMPEDITO

↓
 $\dot{\theta} \neq \dot{\theta}_B \text{ RED}$
31

GIUNZIONI e ATTACCHI

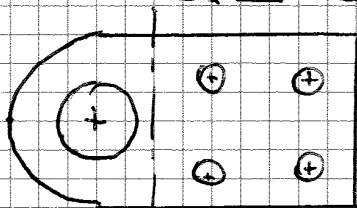


Schema a FORCELLA



I POTESI:

I) RIGIDEZZA INFINITA DELLE FLANGE DI SUPPORTO VITI



→ Tutti i punti della sezione subiscono lo stesso spostamento

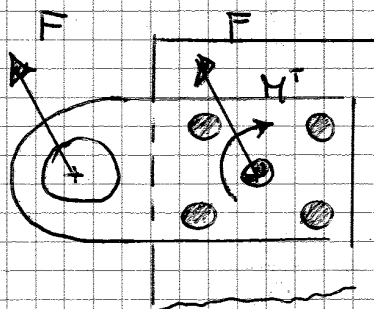
II) I BULLONI DELLA CONNESSIONE LA VORANO SOLO A TAGLIO



→ stesso γ → stesso τ_m x tutti i bulloni

$$P_i = \tau_m \cdot A_i \rightarrow \text{CARICO SUL SINGOLO BULLONE}$$

$$F = \sum P_i = \sum \tau_m A_i$$

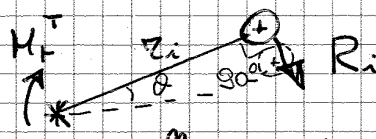
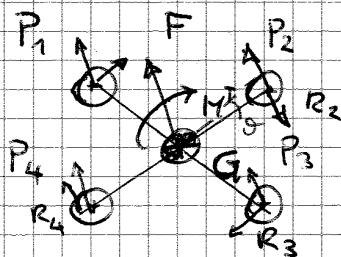


VINCOLO → AREA BULLONI

⊕ BARICENTRO AREE RESISTENTI
(Aree dei bulloni)

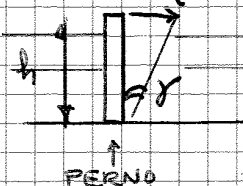
M^T = momento di trasporto

↳ RISULTANTE DI FORZA SUL BULLONE



LA FORZA R TENDE A SPOSTARE IL BULLONE
→ SPOSTAMENTO TESTA ⇒ η
→ SOTTOPOSTO A UN TAGLIO

$$\eta = \theta z_i$$



$$\gamma = \frac{\eta}{h} = \theta \frac{z_i}{h} \rightarrow \theta \Rightarrow \text{NON SI SA } \gamma$$

$$\tau_m = G \cdot \gamma$$

$Q_i = \text{CARICO TOTALE SU OGNI PERNO}$

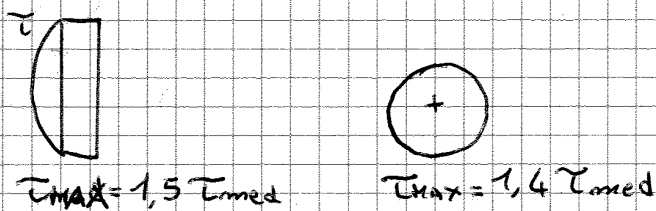
$$\tau_{med i} = \frac{Q_i}{A_i} \quad \tau_{MAX} = \tau_{med i} \cdot 1,4 \quad \tau_{MAX} = 1,4 \cdot 1,5 \cdot \tau_{med i} \leq \tau_{ROTTURA}$$

ROBUSTEZZA

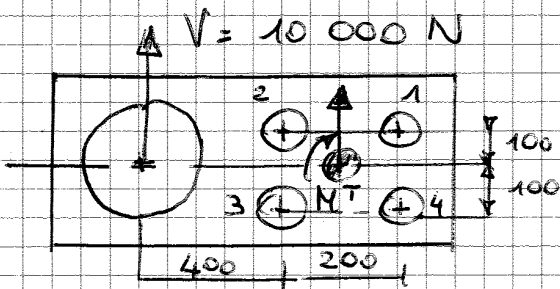
1,15

FITTING FACTOR

→ COEFFICIENTE DI SICUREZZA AGGIUNTIVO X LE GIUNZIONI, DATO DALLA NORMATIVA



ESEMPIO



Le 4 aree sono uguali
? diametro forzi

$M_T = 10000\ N \cdot 500\ mm$

• BARICENTRO AREE DI VINCOLO

$X_G = 100 \quad Y_G = 100$

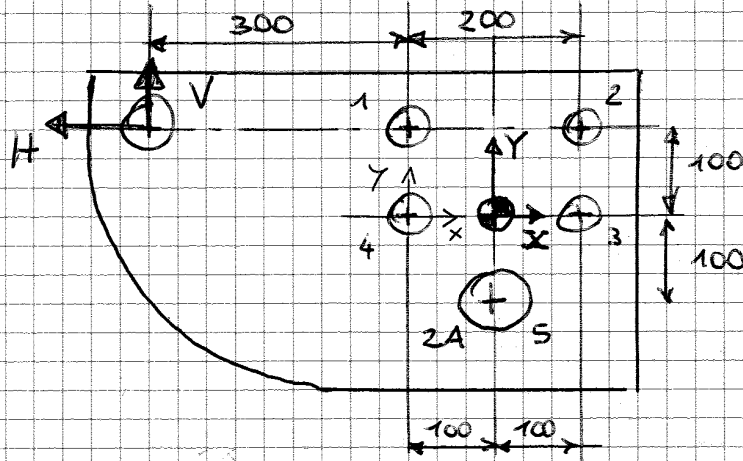
• APPLICHIAMO LE FORZE NEL BARICENTRO DELLE AREE DI VINCOLO E AGGIUNGIAMO UN MOMENTO DI TRASPORTO

M^T

	A_i	x_i	y_i	z_i	P_i		R_i		V_i		H_i	Q_i
					P_{ix}	P_{iy}	R_{ix}	R_{iy}	$P_{ix} + R_{ix}$	$P_{iy} + R_{iy}$	$\sqrt{V_i^2 + H_i^2}$	
1		100	100	$100\sqrt{2}$	0	2500	6250	-6250	-3750	6250		
2		-100	100	$100\sqrt{2}$	0	2500	6250	6250	8750	6250		10750
3		-100	-100	$100\sqrt{2}$	0	2500	-6250	6250	8750	-6250		
4		100	-100	$100\sqrt{2}$	0	2500	-6250	-6250	-3750	-6250		

$P_i = \frac{V}{\sum A_i} \cdot A_i = \frac{V}{4A} \cdot A = \frac{V}{4}$

ESERCIZIO X CASA



$V = 1000 \text{ N}$

$H = 10000 \text{ N}$

$\tau_{\text{ROTTURA}} = 200 \text{ MPa}$

? A

BARICENTRO BULLONI: $X_G = 100 \text{ mm}$ $Y_G = 0$

CARICO TOT SUL SINGOLO PERNO

	A_i	x_i	y_i	τ_i	P_{ix}	P_{iy}	R_{ix}	R_{iy}	V_i	H_i	Q_i
1	A	-100	100	$100\sqrt{2}$	$-\frac{H}{6}$	$V/6$	5179	+5179	5345,6	3512,3	6396,2
2	A	100	100	$100\sqrt{2}$	$-H/6$	$V/6$	5179	-5179	-5012,3	3512,3	6120,4
3	A	100	0	100	$-H/6$	$V/6$	0	-5179	-5012,3	-1666,7	5282,1
4	A	-100	0	100	$-H/6$	$V/6$	0	+5179	5345,6	-1666,7	5593,4
5	2A	0	-100	100	$-H/3$	$V/3$	-10358	0	333,3	-13691	13695

$P_{ix} = \frac{-H}{\sum A_i} \cdot A_i = -\frac{H}{6A} \cdot A_i$

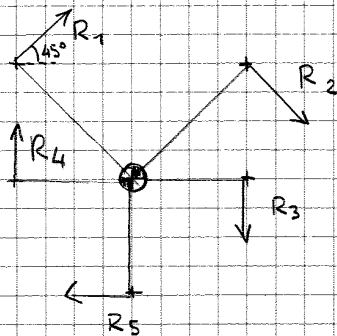
$P_{iy} = \frac{V}{\sum A_i} \cdot A_i = \frac{V}{6A} \cdot A_i$

$M_T = \sqrt{H^2 + V^2} \cdot \sqrt{400^2 + 100^2} = 4143670 \text{ N}\cdot\text{mm}$

$R_i = \tau_0 \tau_i A_i$

$= \frac{5179}{A} \cdot \tau_i \cdot A_i$

$\tau_0 = \frac{M_T}{\sum A_i \tau_i^2} = \frac{4143670}{2 \cdot A \cdot 100^2 + 2 \cdot A \cdot 100^2 + 2A \cdot 100^2} = \frac{5179}{A}$



⑤ $\tau_{ms} = \frac{Q_5}{2A} = \frac{13695}{2A}$

$\tau_{MAX} = \tau_{ms} \cdot 1,4 = \frac{19173}{2A}$

$\tau_{MAX} \text{ ROBUSTEZZA} = 1,4 \cdot 1,5 \cdot 1,15 \cdot \tau_{ms} = \frac{33073}{2A} = \frac{16536,7}{A}$

TECNICA delle COSTRUZIONI - STRUTTURE 3/12/2012

STABILITÀ dell' EQUILIBRIO

Superamento limite di stabilità: DEFORMAZIONI PLASTICHE, PIEGATURE, ...

STABILITÀ → consideriamo un sistema in equilibrio

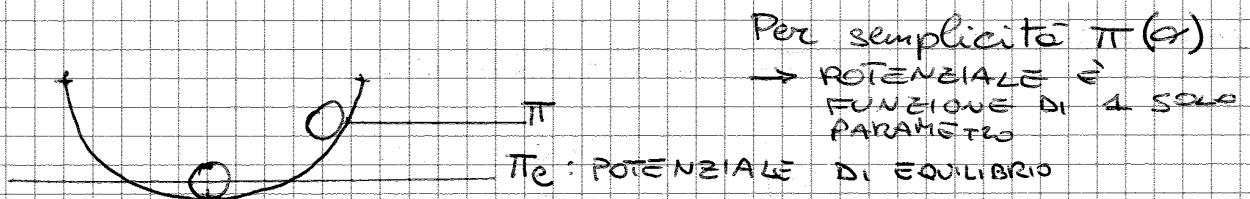
"Un sistema è definito STABILE se perturbato dalla sua condizione d'equilibrio esso ritorna nella condizione di equilibrio"

Noi considereremo la stabilità STATICA

→ strutture sottoposte solo a carichi statici

[ASTA COMPRESSA, PANNELLO COMPRESSO]

SFERA nella SCODELLA



Se la configurazione variata è VICINO a quella di equilibrio posso fare un'espansione in serie

$$\pi = \pi_e + \overset{0, \text{ punto stazionarietà}}{\delta \pi_e} + \frac{1}{2} \delta^2 \pi_e + \dots$$

DERIVATA 2^a
→ CONCAVITÀ ←

$$\pi - \pi_e = \frac{1}{2} \delta^2 \pi_e$$

SE $\frac{1}{2} \delta^2 \pi_e < 0 \rightarrow$ INSTABILE \wedge

SE $\frac{1}{2} \delta^2 \pi_e > 0 \rightarrow$ STABILE \cup

$\frac{1}{2} \delta^2 \pi_e = 0 \rightarrow$ CRITICHE

CONDIZIONI

SCHEMATIZZAZIONE RIGIDITÀ



MOZZA DI TORSIONE

Per il carico critico $P = \frac{4K}{2l}$

$\delta^2 \pi|_e = 0 \rightarrow$ come si valuta la stabilità del punto critico?

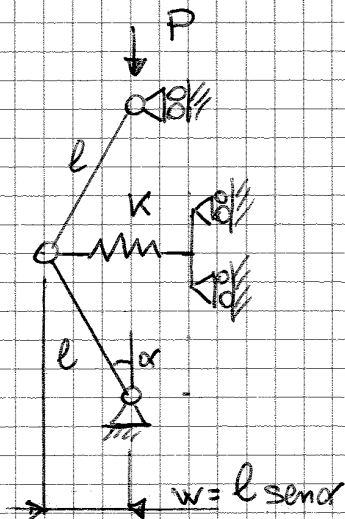
Bisogna trovare una variazione di π di ordine superiore $\neq 0$!

$$\delta^3 \pi|_e = 0$$

$$\delta^4 \pi|_e = Pz l \cos \alpha|_{e, \alpha=0} \rightarrow \boxed{Pz l > 0}$$

PUNTO CRITICO STABILE

VEDIAMO UN ALTRO CASO



$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} K (l \sin \alpha)^2 - P(2l - 2l \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{2} K l^2 \sin^2 \alpha - Pz l (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

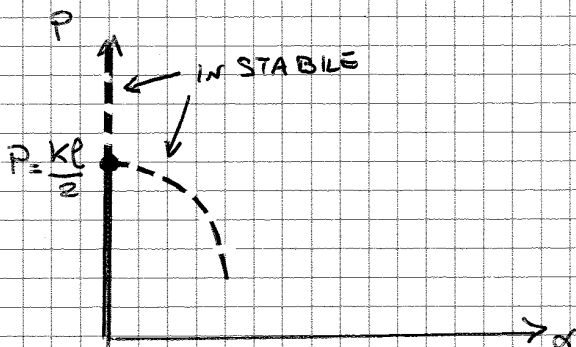
I. TROVARE PUNTO DI EQUILIBRIO ($\delta \pi = 0$)

$$\delta \pi = K l^2 \sin \alpha \cos \alpha - Pz l \sin \alpha = 0$$

(*) $K l^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2P l \sin \alpha = 0$

$\alpha = \alpha_c = 0$

$P = \frac{K l}{2} \cos \alpha$



$$\rightarrow (kl^2 \sin \alpha_e \cos \alpha_e - kl^2 \sin \alpha_e \bar{\alpha} + kl^2 \cos \alpha_e \bar{\alpha} \cos \alpha_e + kl^2 \cos \alpha_e \bar{\alpha} \sin \alpha_e - 2Pl \sin \alpha_e - 2Pl \cos \alpha_e \bar{\alpha}) - 2Pl \sin \alpha_e - 2Pl \cos \alpha_e \bar{\alpha} = 0$$

$\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} (-kl^2 \sin^2 \alpha_e + kl^2 \cos^2 \alpha_e - 2Pl \cos \alpha_e) - kl^2 \bar{\alpha}^2 \cos \alpha_e = 0$$

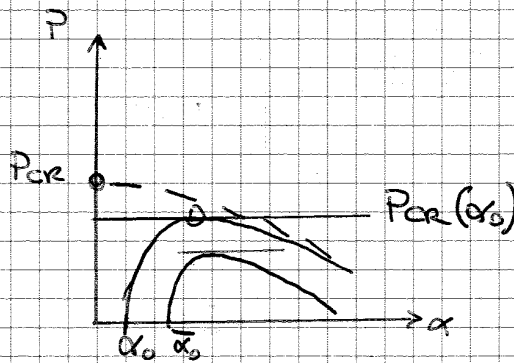
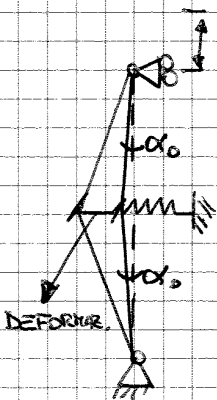
$\bar{\alpha}^2 \rightarrow$ INFINITESIMO
ORDINE SUP.

per $\alpha_e = 0$ EQUILIBRIO INIZIALE

$$\rightarrow kl^2 - 2Pl = 0 \Rightarrow P_{\text{CRITICO}} = \frac{kl}{2}$$

Osservando la curva della pagina prima ha una tangente orizzontale \rightarrow può esserci (per piccoli $\bar{\alpha}$) un altro α di equilibrio con il carico critico applicato

TECNICA delle COSTRUZIONI - STRUTTURE 4/12/2012



DIFETTO INIZIALE STRUTTURA α_0

IMPERFEZIONE INIZIALE, causata dalla lavorazione

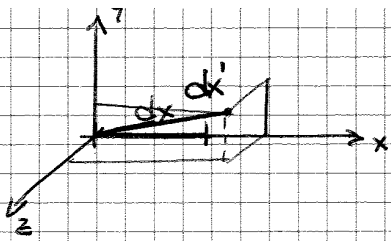
Struttura / sensibili alle imperfezioni iniziali

ABBASSAMENTO DEL CARICO CRITICO (anche 2x)!!
MOLTO MALE!

Per fare 2 calcoli

$$\pi = \frac{1}{2} k \left(l \sin \alpha - \frac{l \sin \alpha_0}{2} \right)^2 - P_2 l \dots$$

IL SISTEMA
PARTE GIÀ DEFORMATO



- Elemento dx iniziale
- Dopo la deformazione l'elemento si è anche spostato

$$dx' = dx(x, y, z)$$

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + w_{,z}^2)$$

→ Tornando all'asta:

$$\epsilon_{zz} = w_{,z} + \frac{1}{2} (v_{,z})^2 - z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\delta \epsilon_{zz} = \underbrace{\delta w_{,z}}_{\text{ORDINE 1}} + \underbrace{v_{,z} \delta v_{,z}}_{\text{ordine 2}} - z \delta v_{,zz} \quad \left. \vphantom{\delta \epsilon_{zz}} \right\} \text{generale}$$

$$\bar{\epsilon}_{zz} = \bar{w}_{,z} + \frac{1}{2} (\bar{v}_{,z} + \bar{v}_{,z})^2 - z \bar{v}_{,zz} - z \bar{v}_{,zz}$$

$$\delta \bar{\epsilon}_{zz} = \delta \bar{w}_{,z} + (\bar{v}_{,z} + \bar{v}_{,z}) \delta \bar{v}_{,z} - z \delta \bar{v}_{,zz}$$

$$\delta \bar{\epsilon}'_{zz} = \delta \bar{w}_{,z} + \cancel{\bar{v}_{,z} \delta \bar{v}_{,z}} - z \delta \bar{v}_{,zz}$$

perché $\bar{v}_e = 0$

$$\delta \bar{\epsilon}''_{zz} = \bar{v}_{,z} \delta \bar{v}_{,z}$$

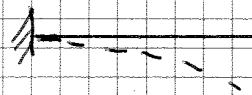
$$\int_V \sigma_z (\bar{v}_{,z} \delta \bar{v}_{,z}) dA dz + \int_V \bar{\sigma}' (\delta \bar{w}_{,z} - z \delta \bar{v}_{,zz}) dA dz = 0$$

$$\int \sigma_z dA = -\bar{P}_e \quad \int \bar{\sigma}' \cdot z dA = \bar{M}_x$$

$$\int -P_e \bar{v}_{,z} \delta \bar{v}_{,z} dz + \int \bar{P} \cdot \delta \bar{w}_{,z} - \int \bar{M}_x \delta \bar{v}_{,zz} dz = 0$$

$$-\int \frac{\partial}{\partial z} (\quad) + P$$

$$l = 2L$$



⚠ RIDUCENDO LA LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE AUMENTA IL CARICO CRITICO (meglio!)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A}$$

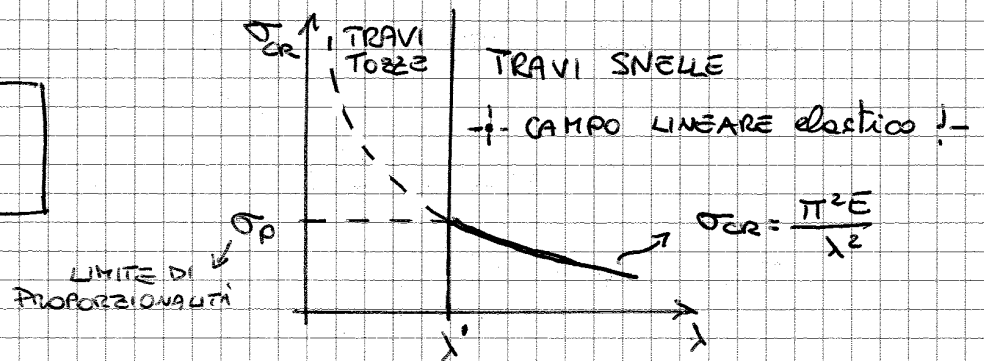
RAGGIO D'INERZIA $p^2 = \frac{I}{A}$

$$I = A \cdot p^2$$

sarebbe $L!!!$ $\frac{l}{p} =$ SNELLEZZA DELLA TRAVE $= \lambda$

$$\rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{p}\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



Se sono in una zona

$\lambda > \lambda'_{crit}$ $\rightarrow \sigma_{cr} \rightarrow$ FORMULA DI EULERO

$\lambda < \lambda'_{crit}$ $\rightarrow \sigma_{cr} = ?$ NON SONO PIÙ IN CAMPO LINEARE

λ' CARATTERISTICA

$$\sigma_{cr} = \sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda'^2}$$

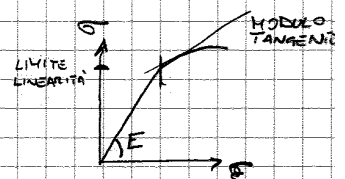
$$\lambda' = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \text{SNELLEZZA LIMITE}$$

Come si risolve il problema nelle TRAVI TOZZE?

$\lambda < \lambda' \rightarrow$ NON SI PUÒ USARE LA FORMULA DI EULERO

2 possibili strade:

a) APPROX DEL MODULO TANGENTE



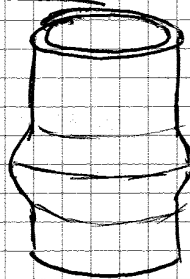
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_T}{\lambda^2} \dots \text{ma } E_T \text{ DIPENDE DA } \sigma_{cr}!$$

TECNICA delle COSTRUZIONI - STRUTTURE 10/12/2012

Carico CRITICO EULERIANO $\left\{ \begin{array}{l} \lambda > \lambda_{lim} \\ P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \end{array} \right.$

INSTABILITÀ LOCALE

- TUBI SOTTILI IN COMPRESSIONE



$\lambda < \lambda_{lim}$
JOHNSON
MODULO TANGENTE
 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E t}{\lambda^2}$

STRUTTURE A PARETE SOTTILE IN COMPRESSIONE

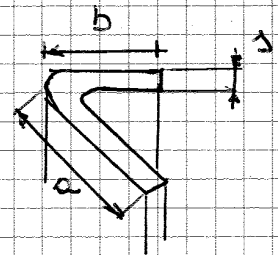
→ INSTABILITÀ LOCALE ←

EQUAZIONI SEMI-EMPIRICHE

INTERESSA SOLO UNA PORZIONE LIMITATA DELLA STRUTTURA

$$\sigma_{cr, LOCALI} = \frac{\sigma_y}{1 + K \beta \frac{\sigma_y}{E}}$$

K = FORMA $\left\{ \begin{array}{l} 8,5 \text{ SEZ. APERTE} \\ 3 \text{ SEZ. CHIUSE} \end{array} \right.$

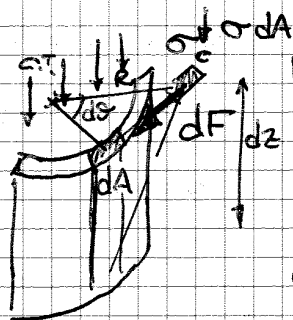


$\beta = \text{RAPPORTO DIMENSIONI} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} \\ \frac{a}{b} \end{array} \right.$

$\beta = \frac{R}{s}$ SEZ. TUBOLARE

→ INSTABILITÀ TORSIONALE ←

LEGATA ALLA COMPRESSIONE



Rotazione → dA si muove su un arco $R d\theta$

Per mantenere l'equilibrio nasce una forza dF tangenziale

$$\sigma_c dA R d\theta = dF dz$$

$$dF = \sigma_c dA R \theta$$

$$M_t = \int_A dF \cdot R dz$$