



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 535

DATA: 22/04/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Marchisa

MATERIA: Analisi Matematica II + Esercizi

Prof. Mazzi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

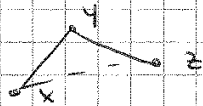
# TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^n$

## FUNZIONE DISTANZA:

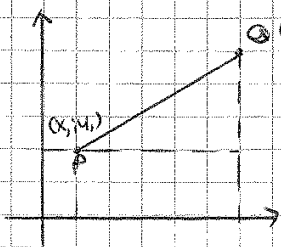
Dato un insieme  $A$ :  $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto d(x, y)$

tale che:

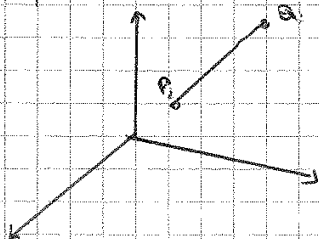
- ①  $\forall x, y \quad d(x, y) = d(y, x) \rightarrow$  simmetria
- ②  $\forall x, y \quad d(x, y) \geq 0$
- ③  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ④



$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  disuguaglianza triangolare  
 $\forall x, y, z \in A$



$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$   
 trovato con il teorema di Pitagora



distanza euclidea:

$P(x_1, y_1, z_1)$   
 $Q(x_2, y_2, z_2)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

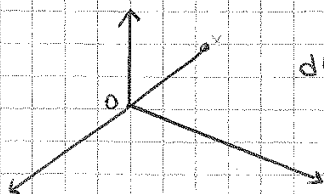
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \quad \text{distanza euclidea in } \mathbb{R}^n$$

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{norma di } x - y$$

$$= |x - y| \quad \text{modulo del vettore differenza}$$

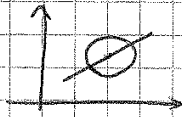


$$d(0; x) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + \dots + (x_n - 0)^2}$$

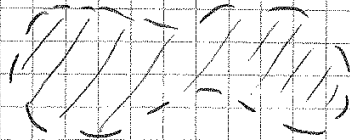
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= \|x - 0\| = \|x\|$$

Un segmento non è aperto in  $\mathbb{R}^2$



per avere un insieme aperto devo prendere qualcosa che abbia una spessore



In  $\mathbb{R}^3$



un piano non è aperto; lo è invece un parallelepipedo pieno tranne la superficie.

$\bar{x}$  si dice punto di frontiera di  $A \subset \mathbb{R}^n$  se ogni intorno di centro  $\bar{x}$  e raggio  $\rho$  ( $\forall B(\bar{x}, \rho)$ ) interseca sia l'insieme sia il complementare

$$B(\bar{x}, \rho) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(\bar{x}, \rho) \cap CA \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti di frontiera si chiama frontiera di  $A$  ( $\partial A = \text{fr}A$ ) se  $\{x: \text{punto di frontiera di } A\}$

Se  $\partial A \subset A$  si dice che  $A$  è chiuso.

Se  $A$  è aperto,  $A$  non è chiuso: solo l'insieme vuoto  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^n$  sono sia aperti che chiusi.

Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n \neq \emptyset, \mathbb{R}^n$  non possono essere contemporaneamente aperti e chiusi.

$A$  è chiuso se e solo se il complementare di  $A$  è aperto.

$A \cup \partial A = \bar{A}$  è la chiusura di  $A$ , cioè un insieme chiuso che contiene tutti i punti di  $A$ ,  $A \subset \bar{A}$ , è il più piccolo chiuso che contiene  $A$ .

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A} = A \cup \partial A$$

$$\underbrace{\bar{A} = A = \bar{A}}_{\substack{\text{se è} \\ \text{aperto}}} = \bar{A}$$

se è aperto chiuso

Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si dice limitato se  $\exists M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ ):  $\forall x \in A, \|x\| = d(x, 0) \leq M$

**Teorema del Gradiente:**

- $\bar{x}$  è punto interno al dominio  $f$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $f$  è differenziabile in  $\bar{x}$

allora:

1.  $f$  è continua in  $\bar{x}$

2.  $f$  derivate direzionali,  $\forall \vec{v}$

3.  $d_{\bar{x}} f = \left( \frac{df}{dx_1}(\bar{x}), \dots, \frac{df}{dx_n}(\bar{x}) \right) = \nabla f(\bar{x})$

4.  $\forall \vec{v}$  vettore  $v$   $\frac{df}{d\vec{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \vec{v}$

5.  $f$  piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$

Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $d_x f = \nabla f(\bar{x})$   
 differenziabile

$$\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{pmatrix} (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)$$

È una definizione difficile da applicare, per stabilire se una funzione è differenziabile si procede così:

$$f(x, y) = p(x)$$

$$f(x, y) = \text{sen } x \quad \{(x, y, \text{sen } x)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Una funzione  $f$  è di classe  $C^1$  se  $\nabla f(x)$  è continuo da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ .  $f$  è di classe  $C^k$ , dove  $k$  è un intero, se ha tutte le derivate fino all'ordine  $k$  continue.  $f$  è di classe  $C^\infty$  su un aperto contenuto in  $\mathbb{R}^n$  se le derivate di qualunque ordine esistono e sono continue.

Se  $f$  è di classe  $C^k$  su un aperto  $\Omega$  allora  $f$  è differenziabile in tutti i punti di  $\Omega$ .

Se una funzione  $f(x_1, \dots, x_n) = g(x)$  è in realtà una funzione di una sola di queste variabili, se  $g(x)$  è continua, oppure di classe  $C^k$  o  $C^\infty$  allora anche la funzione  $f$  ha le stesse caratteristiche come funzione a più variabili:

$$\begin{matrix} g \text{ cont} & \rightarrow & f \text{ cont} \\ C^k & \rightarrow & C^k \\ C^\infty & \rightarrow & C^\infty \end{matrix}$$

Se due funzioni di  $n$  variabili  $g$  e  $h$  sono continue, di classe  $C^k$  e  $C^\infty$  allora anche la somma, il prodotto e il rapporto saranno rispettivamente continue,  $C^k$  o  $C^\infty$ .

Teorema di derivazione di una funzione composta:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$$

$$\bar{x} \rightarrow F(\bar{x}) \rightarrow G(F(\bar{x})) = G \circ F(\bar{x})$$

Se  $F$  è differenziabile in  $\bar{x}$  e  $G$  è differenziabile in  $F(\bar{x})$  allora la funzione  $G \circ F$  è differenziabile in  $\bar{x}$  e la  $J_{\bar{x}}(G \circ F)$  è uguale alla  $J_{F(\bar{x})}G \cdot J_{\bar{x}}F$

$$k \times m \quad m \times n \quad \rightarrow k \times n$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

Se  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$  e  $g$  in  $f(\bar{x})$  allora  $g \circ f$  è derivabile in  $\bar{x}$   $(g \circ f)' = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$f(x(t))$$

$$J_{\bar{t}} f \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( \frac{df}{dx_1}, \dots, \frac{df}{dx_n} \right)$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(E) = df_{\gamma(E)}$$

$$= \left( \frac{df}{dx_1}(\gamma(E)), \dots, \frac{df}{dx_n}(\gamma(E)) \right) \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(E) = \nabla f(\gamma(E)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \frac{df}{dx_1}(\gamma(E)) x_1'(t) + \dots + \frac{df}{dx_n}(\gamma(E)) x_n'(t)$$

CHAIN RULE

Teorema della funzione inversa a una variabile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- derivabile in  $\bar{x}$  punto interno a  $\text{dom} f$
- $f'(\bar{x}) \neq 0$  allora esiste un intorno di  $\bar{x}$  e un intorno di  $f(\bar{x})$
- $\exists f^{-1}: B(f(\bar{x})) \rightarrow B(\bar{x})$   $f^{-1}$  è derivabile in  $f(\bar{x})$

$$\sup \left\{ \int_R g ; g \text{ a scala maggiorante } f(x,y) \leq g(x,y) \right\} = \int_R^+ f$$

$$\inf \left\{ \int_R h ; h \text{ a scala minorante } h(x,y) \leq f(x,y) \right\} = \int_R^- f$$

Integrali superiore e inferiore di  $f$  su  $R$

$$\text{se } h(x,y) \leq f(x,y) \Rightarrow \int_R h(x,y) \leq \int_R f(x,y)$$

$$\int_R^- f \leq \int_R f \leq \int_R^+ f$$

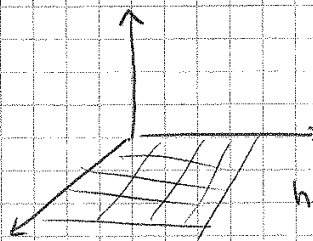


$$f \text{ è Riemann-integrabile se } \int_R^+ f = \int_R^- f$$

es. di funzione che non è Riemann-integrabile:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } (x,y) \text{ non sono razionali} \end{cases}$$

nel quadrato  $[0,1] \times [0,1]$



$g$  maggiorante a scala  
 $g \geq 1$

$g(x,y) \geq f(x,y)$  su  $R$

$h$  minorante a scala  
 $h(x,y) \leq f(x,y)$   
 $h(x,y) \leq 0$

$$\int_R g = \sum_{i,j} \underbrace{\ell_{ij}}_{\geq 1} (a_{i+1} - a_i) \times (c_{j+1} - c_j) \geq 1$$

$$\int_R^- f = \inf \left\{ \int_R g \right\} \geq 1$$

$$\int_R h = \sum_{i,j} \underbrace{\ell_{ij}}_{\leq 0} (a_{i+1} - a_i) \times (c_{j+1} - c_j) \leq 0$$

$$h(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \text{quadrato}$$

$$\int_R^+ f = \sup \left\{ \int_R h \right\} = 0$$

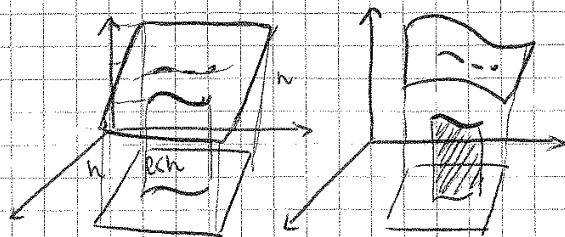
$$\int_R^+ f \neq \int_R^- f \Rightarrow \text{non è Riemann-integrabile}$$

Se  $f \geq 0$  su  $R$ ,  $f$  è integrabile  $\Rightarrow \int_R f \geq 0$

Se  $f$  è continua su  $R$ ,  $f \geq 0$  su  $R$

$$\int_R f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ su } R$$

Se  $f(x, y) = g(x, y)$  fuori da un rettangolo  $\int_R f = \int_R g$



$f \geq 0$  su  $R \Rightarrow \int f =$  il volume della parte di spazio che sta tra il piano  $(x, y)$  e il grafico di  $f$

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

es -  $f(x, y) = x \cos xy$   $R = [1, 2] \times [0, \pi]$   $f$  è continua

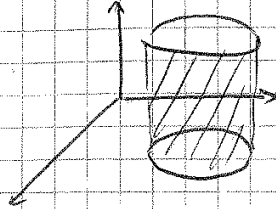
$$\begin{aligned} \int_R f &= \int_0^\pi \int_1^2 x \cos xy \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 \int_0^\pi \cos xy \, dy \, dx \\ &= \int_1^2 x [\sin xy]_0^\pi \, dx \\ &= \int_1^2 \sin(x\pi) - \sin(0) \, dx \\ &= \left[ -\frac{1}{\pi} \cos(x\pi) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \cos \pi - \frac{1}{\pi} \cos(2\pi) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot 1 - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_R f = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy$$



$\Omega$  è misurabile  $\Leftrightarrow \chi_{\Omega}$  è integrabile su  $\mathbb{R}$

$|\Omega| = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega} = \mu(\Omega)$  è la misura di Peano-Jordan di  $\Omega$



volume di un cilindro di altezza 1

Tutte le figure piane classiche sono misurabili.

Per es. un esempio non misurabile secondo Peano-Jordan!

$\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] ; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$

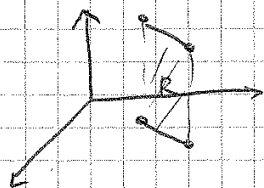
$$\chi_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x, y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow \chi_{\Omega}$  non è integrabile e  $\Omega$  non è misurabile

La misura di  $\Omega$  non dipende dal rettangolo  $R$  considerato

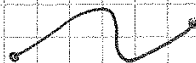
Un insieme  $\Omega$  si dice trascurabile se è misurabile e la sua misura è nulla

Un segmento è trascurabile



$|S| = \text{volume di } R = 0$

Il bordo di un triangolo è trascurabile perché è l'insieme di tre segmenti



Un arco di curva regolare è trascurabile.

- unione di un numero finito di punti, di segmenti, di archi di curva regolare

-  $\{(x, y) : y = g(x) \wedge x \in [a, b]\}$



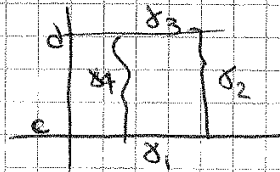
-  $\{(x, y) : x = h(y) \wedge y \in [c, d]\}$

sono tutti insiemi che hanno area e misura nulla

tutti gli insiemi orizzontalmente o verticalmente convessi sono misurabili.

$\partial \Omega = 2$  segmenti  $\cup$  due grafici di funzione definiti su un intervallo e ognuno degli insiemi ha misura nulla

$|\delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \cup \delta_4| = |\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4| = 0 \rightarrow$  non ci sono le misure delle intersezioni perché queste sono punti.



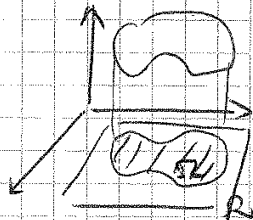
### Integrale di Riemann

$f$  limitata su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  misurabile secondo Peano-Jordan, considero un rettangolo  $R$  tale che  $\Omega \subseteq R$  e la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

$f$  è Riemann-integrabile su  $\Omega$  se e solo se  $F(x)$  è Riemann-integrabile su  $R$  e

$$\int_{\Omega} f = \int_R F$$



la definizione è ben data cioè l'integrale non dipende dal rettangolo  $R$ .

Questa proprietà è vera quasi ovunque su  $\Omega$ , è vera su tutti i punti di  $\Omega$  tranne al più un insieme di misura nulla (fuori da un insieme di misura nulla).

$f$  è continua quasi ovunque su  $\Omega$  se è continua fuori da un insieme di misura nulla.

$f \geq 0$  quasi ovunque su  $\Omega$  se è  $\geq 0$  fuori dai punti di un insieme trascurabile.

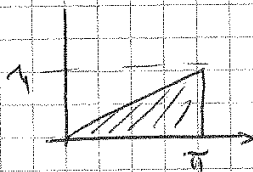
Se  $f$  è limitato su  $\Omega$  e continua quasi ovunque su  $\Omega$  allora  $f$  è Riemann-integrabile su  $\Omega$ .

Se  $f$  e  $g$  sono Riemann-integrabili su  $\Omega$ , misurabili e se

$f$  è continua quasi ovunque in  $\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} f = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) dx dy$

es.  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$  è continua in  $\mathbb{R}^2$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \quad \forall y \leq x \leq \pi\}$



$x = \pi y$   
 $y = \frac{1}{\pi} x$

$\int_{\Omega} f = \int_0^1 \int_{\pi x}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx dy$

$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{1}{\pi} x\}$

$\int_{\Omega} f = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{1}{\pi} x} \frac{\cos x}{x} dy dx$

$\int_0^{\frac{1}{\pi} x} \frac{\cos x}{x} dy = \frac{\cos x}{x} \int_0^{\frac{1}{\pi} x} dy = \frac{\cos x}{x} \left(\frac{1}{\pi} x\right)$

$\int_{\Omega} f = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} =$

$= \frac{1}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}$

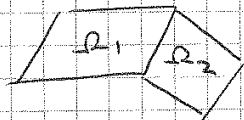
12.10.2012

Additività rispetto al dominio:

$\Omega_1, \Omega_2$  misurabili  $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

$f$  integrabile in  $\Omega_1$  e in  $\Omega_2$  allora  $f$  è integrabile in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  e

$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$



o  $|\Omega_1 \cap \Omega_2|$  non è necessariamente nulla!

$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$

$$= \left[ \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\int_{D_2} f = \int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^x x + 2y \, dy \, dx$$

$$= \int_1^2 (x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4) \, dx = \left[ \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_1^2 =$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot 2^{5/2} - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} + \frac{32}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$$

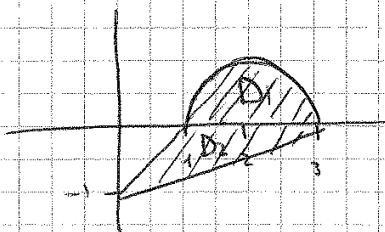
$$= -\frac{2}{5} 4\sqrt{2} + 2 + \frac{2^5}{5} + 4 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

8.  $f(x, y) = xy$

$D_1 \cup D_2$

$$D_1: \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-2)^2} \right\}$$

$$D_2: \left\{ (x, y) : -1 \leq y \leq 0 \quad y+1 \leq x \leq 3y+3 \right\}$$



$$y = \sqrt{1-(x-2)^2}$$

$$y^2 = 1-(x-2)^2$$

$$y \geq 0$$

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

$$\int_{D_1} xy = \int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy \, dy \, dx = \int_1^3 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx =$$

$$= \int_1^3 x \frac{1-(x-2)^2}{2} dx = \int_1^3 \frac{x - x^3 - 4x + 4x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{3^4}{4} + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2 \right] - \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{3^4}{4} - \frac{3^2}{2} + 4 - 3^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right]$$

2 VARIABILI: in  $\mathbb{R}^n$

Due insiemi  $R$  e  $R' \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti, non vuoti, connessi

$\phi: R' \rightarrow R$  è un cambiamento di variabili se:

- ①  $\phi$  è biunivoco (iniettiva e suriettiva)
- ②  $\phi$  di classe  $C^1$  su  $R'$
- ③  $\forall p \in R'$  invertibile  $\forall p \in R'$

$C^1$  su un chiuso  $K$  significa che  $\exists$  un prolungamento di  $\phi$  su un aperto  $A \supseteq K$  di classe  $C^1$

Se  $A \subseteq R$  è aperto  $\Rightarrow \phi(A)$  è aperto  
 $\phi(\partial R') \subseteq \partial R$

$\forall p \in R'$  invertibile  $\Leftrightarrow \det J_p(\phi) \neq 0 \forall p \in R'$

$\phi$  è di classe  $C^1 \Rightarrow \det J_p \phi$  è continua

$\exists p \det J_p(\phi) > 0 \Rightarrow \forall p \in R', \det J_p \phi > 0$   
 $< \qquad \qquad \qquad <$

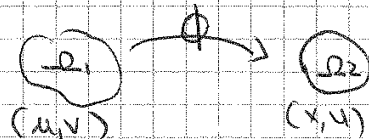
$\Leftrightarrow$  segno di  $J_p(\phi)$  è costante su  $R'$

$\Omega \subseteq R'$  misurabile  $\Rightarrow \phi(\Omega)$  è misurabile con  $\phi \subseteq R$

$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} dx dy = |\Omega|$  area di altezza 1

$\phi: \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un cambiamento di variabili di classe  $C^1$  e sia  $f$  continua e limitata su  $\Omega$  allora

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \cdot |\det J_{\phi}(u,v)| du dv$$



15/10/2012

$\Omega, \Omega'$  con  $\Omega$  misurabile in  $\mathbb{R}^2$


$\phi: \Omega' \rightarrow \Omega, \phi$  biunivoco su  $\Omega'$  di classe  $C^1$  e  $\det J_p(\phi) \neq 0 \forall p \in \Omega'$

$\phi$  è biunivoca su  $(0, R) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(0,0,0)\}$

$$J(\phi)(p, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{x}{dp} & \frac{y}{d\theta} \\ \cos \theta & -p \sin \theta \\ \sin \theta & p \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$$

$$= p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta = p^2 \neq 0$$

$$\iint_{\Omega} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dx dy \quad \Omega = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\Omega' = \begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq p \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$


$$\iint_{\Omega} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\Omega'} \frac{p \cos \theta (p \sin \theta)^2}{p^2} |p| dp d\theta$$

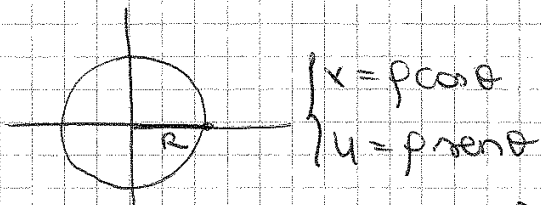
$$x^2 + y^2 = p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta = p^2$$

$$= \iint_{\Omega'} p^2 \sin^2 \theta \cos^3 \theta dp d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 p^2 \sin^2 \theta \cos^3 \theta dp d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_1^2 p^2 dp =$$

$$= \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{p^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{9}$$

es.  $\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$   $\Omega$  in coordinate polari è dato da  $p < R$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$\iint_{\Omega'} e^{-p^2} p dp d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-p^2} p dp d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R e^{-p^2} p dp$$

$$-p^2 = u$$

$$-2p dp = du$$

es)  $\iint_{\Omega} \log \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \quad \Omega = \{ \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1 \}$   
 $0 < \varepsilon < 1$  perché c'è il logaritmo devo togliere l'origine

$\left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \log \varepsilon \right) \pi \right]$

es)  $\iint_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy \quad \rho \leq \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi$

in coord. polari:  
 $\rho \cos \theta$   $\rho \sin \theta$   
 $\rho$

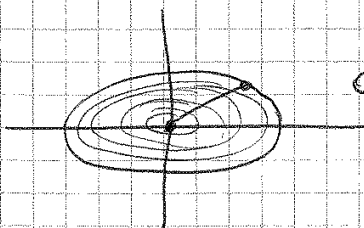
$\left[ \frac{3}{8} \pi \right]$

COORDINATE POLARI ELLITTICHE

ellisse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

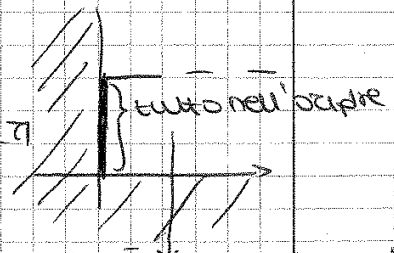
$\begin{cases} x = a \rho \cos \theta \\ y = b \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$

l'equazione dell'ellisse è verificata  $\forall \theta$



$0 \leq \rho \leq 1 \quad \rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

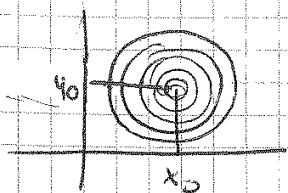


$\det J(\phi) = \det \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a \rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b \rho \cos \theta \end{vmatrix} =$

$= ab \rho \cos^2 \theta + ab \rho \sin^2 \theta =$

$= ab \rho$  è invertibile  $\Leftrightarrow \rho \neq 0$

non è un cambiamento  
 biunivoco



$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \theta \\ y - y_0 = \rho \sin \theta \end{cases}$

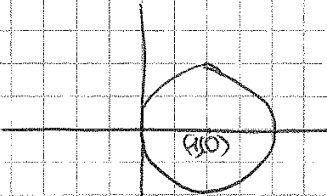


18/10/2012

10 a)  $\iint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy$

b)  $\iint_{\Omega} (x^2+y^2)^{1/4} dx dy$

$\Omega$  interno alla circonferenza di centro  $(1,0)$  e raggio 1



Coordinate polari centrate in  $(1,0)$ :

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ \det J\phi = \rho \end{matrix}$$

a)  $x^2+y^2 = (\rho \cos \theta + 1)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta$   
 $= \rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1$

$\iint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy = \iint (\rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1) \rho d\rho d\theta \rightarrow$  è un rettangolo

b)  $\iint_{\Omega} (x^2+y^2)^{1/4} dx dy = \iint \sqrt[4]{\rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1} \cdot \rho d\rho d\theta$

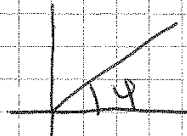
non riesco a calcolarlo: la parametrizzazione non funziona

Se uso coordinate polari centrate nell'origine:

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$\sqrt{x^2+y^2} = r$



devo vedere se riesco a parametrizzare la mia circonferenza in modo tale da poter sfruttare questi risultati.

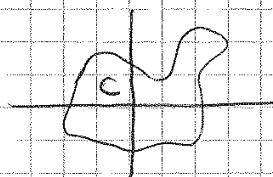


$$\begin{aligned} \iint_{C_2} (x^2+y^2)^{1/2} dx dy &= \iint_{C_2} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \rho^2 d\rho d\theta = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^3\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta) \underbrace{\cos\theta}_{d(\sin\theta)} d\theta = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \\ &= \frac{1}{3} \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/2} dx dy = \iint_{C_1} + \iint_{C_2} = \frac{16}{3}\pi - \frac{4}{9}$$

$\rho(x,y) \geq 0$  densità del materiale

Massa di una lamina piana di densità  $\rho(x,y)$



$$M(C) = \iint_C \rho(x,y) dx dy$$

Coordinate del baricentro G di C:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_C x \rho(x,y) dx dy$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_C y \rho(x,y) dx dy$$

Integrali da una variabile:

$[-a; a]$



$$|C_1| = |C_2|$$

se  $f$  è pari  $f(x) = f(-x) \forall x \in [-a; a]$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$(x, y, z) \in (a_i, a_{i+1}) \times (c_j, c_{j+1}) \times (e_k, e_{k+1})$$

$f(x, y, z)$  è a scale  $\alpha$  e costante  $\alpha_{ijk}$

$$f(x, y, z) = \alpha_{ijk}$$

$$\int_R f = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, s}} \alpha_{ijk} (a_{i+1} - a_i) (c_{j+1} - c_j) (e_{k+1} - e_k)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  limitato,  $\Omega \neq \emptyset$ , connesso

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

$\Omega$  è misurabile secondo Peano-Jordan in  $\mathbb{R}^3$  se è integrabile secondo Riemann la funzione caratteristica, cioè se preso un parallelepipedo  $R \supseteq \Omega$ ,  $\chi_\Omega$  è Riemann-integrabile su  $R$ .

$$|\Omega| = \int_R \chi_\Omega = \text{volume euclideo nei casi più semplici}$$

$\Omega$  è misurabile in  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow |\partial\Omega| = 0$  hanno misura nulla.

Gli insiemi che hanno misura nulla nel piano, hanno misura nulla in  $\mathbb{R}^3$ :  $\rightarrow$  unione di un numero finito di punti, di segmenti, di archi di curva.

$$\sigma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$K$  compatto (chiuso e limitato)  $K \neq \emptyset$  di classe  $C^1$ , iniettivo

$\sigma(K) \subseteq \mathbb{R}^3$  ha misura nulla

$\{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in K\}$   $K$  misurabile

hanno misura nulla

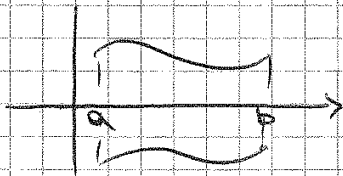
$$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_1 \cap \Omega_2|$$

$f$  è Riemann-integrabile su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile se, preso un parallelepipedo  $R \supseteq \Omega$  è definita:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

se  $\tilde{f}$  è integrabile su  $R$

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$$

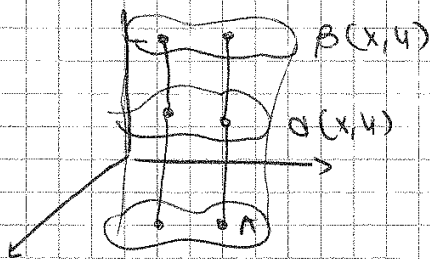


$$a \leq x \leq b$$

$$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$$

$$\alpha, \beta \text{ continue}$$

2 VARIABILI:



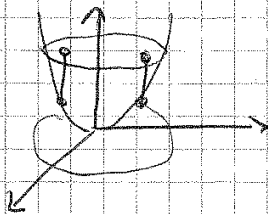
$$\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$$

$$\alpha, \beta \text{ continue}$$

3 VARIABILI

e)  $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\} = A$$



$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$= \iiint_A^{z=x^2+y^2} x^2 + y^2 dz dx dy = \iint_A x^2 + y^2 (2 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \iint_A 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 dx dy =$$

$$x = \rho \cos \theta \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

$$y = \rho \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= \iint_A \rho^2 (2 - \rho^2) \rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 - \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

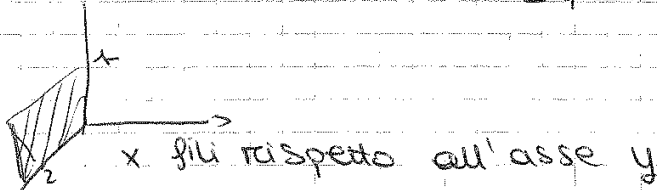
$$= \left[ \frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} 2\pi = \left(2 - \frac{4}{3}\right) 2\pi$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi(x-z)^2 dz = \pi \int_0^1 z - 2z^2 + z^3 dz =$$

$$= \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

es)

$$\int_2 \frac{1}{(y+1)^3} \quad \Omega = \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x+z \end{array} \right\} \quad y = x+z$$



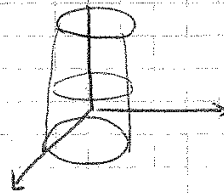
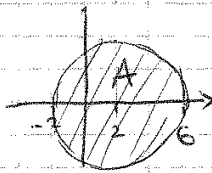
$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{x+z} \frac{1}{(y+1)^3} dy dx dz = \int_0^1 \int_0^2 \left. \frac{(y+1)^{-2}}{-2} \right|_0^{x+z} dx dz$$

22-10-2013

es)

Volume di D

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x \leq 12 \\ x \geq 0 \\ 2 \leq z \leq 5 \end{array} \right\}$$

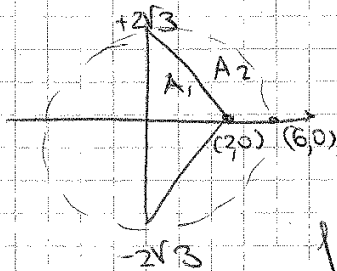


$$(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 12 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 16$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 \leq 12$$

Volume di un cilindro

$$(\text{Area base}) \times \text{altezza} = 3 (\text{area base})$$



$$\iint_A dx dy \quad \text{Area settore circolare di angolo } \alpha: \frac{\alpha}{2} r^2$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-2)^2 + y^2 = 16 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

Posso parametrizzare il solido:

$$(x, y) \in E \text{ cioè } \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

$$1 \leq z \leq 12 - xy$$

parametrizzazione del dominio per fili

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S dx dy dz \\ &= \iint_E \int_1^{12-xy} dz dx dy \\ &= \iint_E (12 - xy - 1) dx dy \end{aligned}$$

coordinate polari ellittiche  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

$$\begin{cases} x = 2p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iint_{E'} (11 - 2p^2 \cos \theta \sin \theta) 2p dp d\theta = \\ &= \iint_{E'} (22p - 4p^3 \cos \theta \sin \theta) dp d\theta = \\ &= 22 \int_0^1 p dp \int_0^{2\pi} d\theta - 4 \int_0^1 p^3 dp \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= 11 \cdot 2\pi - 4 \cdot 0 = 22\pi \end{aligned}$$

Integrali talpi con cambiamenti di variabili

$$\phi : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow A' \subseteq \mathbb{R}^3$$

①  $\phi$  biiunivoce

$A, A'$  aperti

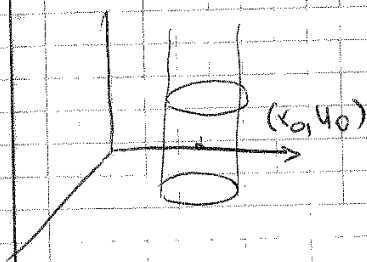
②  $\phi$  di classe  $C^1$  su  $A'$

③  $\det J\phi(p) \neq 0 \quad \forall p \in A'$

$\phi$  è un cambiamento di variabili.

$\Rightarrow$  ①  $\Omega' \subseteq A'$  aperto  $\Rightarrow \phi(\Omega')$  è un aperto di  $A$

$\Omega \subseteq A$  aperto  $\Rightarrow \phi^{-1}(\Omega)$  è un aperto di  $A'$



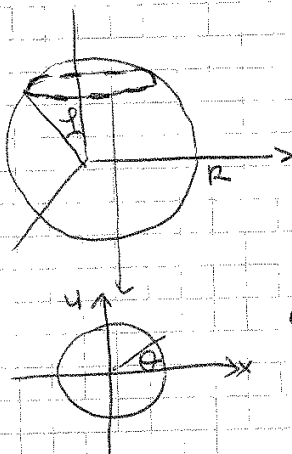
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases}$$

COORDINATE CILINDRICHE ELLITTICHE

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \theta \\ y = b \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \left. \begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

$$\det J\phi = ab\rho$$

COORDINATE SFERICHE



$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \\ y = 0 \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

circonferenza descritta da  $\rho$   
Coordinate Polari!

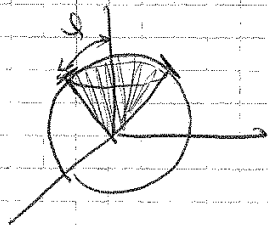
Raggio =  $\rho \sin \varphi$

$\varphi$  = angolo fra  $R$  raggio e  $z$   
nemicima delle  $x \geq 0$

$$\begin{cases} x = (R \sin \varphi) \cos \theta \\ y = (R \sin \varphi) \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \left. \begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ R \geq 0 \end{cases} \right\}$$

es

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z > \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right\} = \Omega \quad \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

$(x, y)$  E cerchio di raggio ...

$$\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega'} \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} z \, dz \, dx \, dy$$

rotazione della zetta  $z = r \cos \varphi$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \cos \theta \\ z = R \cos \varphi \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \leq R \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \end{array} \right\} = \Omega'$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\Omega'} R \cos \varphi \, R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dR = \\ &= \int_0^1 R^3 \, dR \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot 2\pi \end{aligned}$$

05/10/2022

es

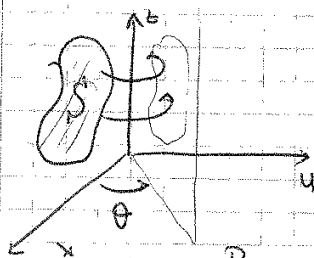
$$\int_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

intersezioni fra i coni pieni la cui superficie di frontiera ha equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - a)^2 = x^2 + z^2 \\ y^2 = x^2 + z^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_p^{4-p} p^3 dt dp d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 p^3 (4-p-p) dp d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{4p^4}{4} - \frac{2p^5}{5} \right|_0^2 d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( 2^4 - \frac{2^6}{5} \right) d\theta = \\
 &= 2\pi \left( 2^4 - \frac{2^6}{5} \right) = \pi \left( 2^5 - \frac{2^7}{5} \right)
 \end{aligned}$$

### Solidi di Rotazione



$S'$  è piano  $(y, z)$ ,  $S' \neq \emptyset$ ,  $S'$  misurabile con  $x \geq 0$

$$S' = \{ x=0, z=t, y=0 \}$$

Parametrazione del solido di rotazione:  
ogni punto di  $S$  descrive una circonferenza nella rotazione di raggio  $s$  e centro in  $z=t$

$$V_S = \begin{cases} x = s \cos \theta \\ y = s \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \begin{aligned} &(s, t) \in S \\ &0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Volume di  $V_S$  solido di rotazione di  $S$

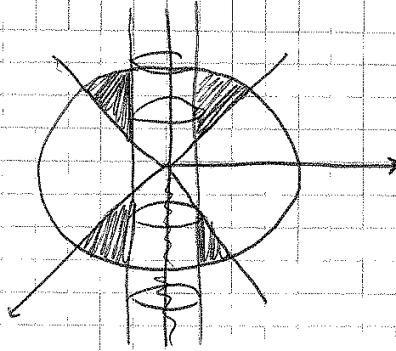
$$\begin{aligned}
 \iiint_{V_S} dx dy dz &= \iiint_{V_S} s ds dt d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \iint_S s ds dt d\theta = 2\pi \iint_S s ds dt \quad \begin{aligned} &s=x \\ &t=z \end{aligned} \\
 &= 2\pi \iint_S x dx dz
 \end{aligned}$$



es

vol solido

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$



Posso calcolare il volume per  $z \geq 0$

$V_S = 2$  volume della parte con  $z \geq 0$

$V_S$  solido di rotazione

$$S = \begin{cases} x \leq z \\ x \geq 1 \\ x^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$V_S = 2\pi \iint_S x dx dz$$

$$1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ x = z \end{cases} & 1 \leq x \leq z \\ & \begin{cases} x^2 + x^2 = 4 \\ 2x^2 = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iint_S x dx dz = \int_1^{\sqrt{2}} x \int_x^{\sqrt{4-x^2}} dz dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2} - x) x dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2}) x dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dx$$

$$t = 4 - x^2 \quad x=1 \rightarrow t=3 \quad x=\sqrt{2} \rightarrow t=2$$

$$dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt$$

$$= \int_3^2 \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt - \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

26/10/2012

Curve e integrali curvilinei

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

intervallo

$$t \rightarrow (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Curva è una funzione continua

Sostegno di  $\gamma$  è l'immagine  $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

-  $\gamma(t) = (0, 0, \dots, 0)$

- curva di Peano  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$$

Per evitare questi problemi:

-  $\gamma$  sia iniettiva

$$t_1 \neq t_2, \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

$\gamma$  regolare se  $\gamma$  è di classe  $C^1$  su un intervallo aperto che contiene  $I$ :

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightarrow (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \gamma_1, \dots, \gamma_n \text{ è di classe } C^1$$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in I$$

Arco di curva: una curva definita su un intervallo chiuso e limitato

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Curva Chiusa: se un arco di curva che ogni estremi coincide nello stesso punto

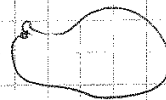
$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

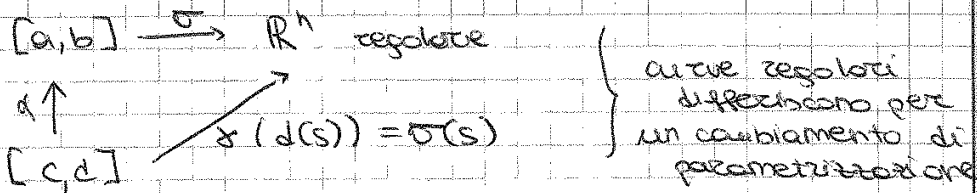
Curva Semplice: una curva iniettiva priva di autointersezioni

Curva chiusa e semplice: una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b] \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$





$\sigma(s)$	$\gamma(t)$
$\sigma([c, d])$	$\gamma([a, b])$
$\sigma$ è di classe $C^1$	$\gamma$ è di classe $C^1$

hanno lo stesso sostegno

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \sigma(s) &= \frac{d}{ds} (\sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s)) = \\
 &= \frac{d}{ds} (\gamma_1(\alpha(s)), \dots, \gamma_n(\alpha(s))) = \\
 &= \gamma'_1(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s), \dots, \gamma'_n(\alpha(s)) \alpha'(s) = \\
 &= \alpha'(s) \left( \gamma'_1(\alpha(s)), \dots, \gamma'_n(\alpha(s)) \right) = \\
 &= \alpha'(s) \gamma'(\alpha(s)) = \sigma'(s)
 \end{aligned}$$

$$\alpha'(s) \neq 0 \iff \gamma'(\alpha(s)) \neq \vec{0} \iff \sigma'(s) \neq \vec{0}$$

se  $\gamma$  è regolare  $\iff \alpha$  è regolare

se  $\alpha'(s) > 0 \implies \sigma$  e  $\gamma$  hanno lo stesso orientamento

se  $\alpha'(s) < 0 \implies \gamma$  e  $\sigma$  hanno orientamenti opposti

se  $\gamma$  è semplice  $\iff \sigma$  è semplice

se  $\gamma$  è chiuso  $\iff \sigma$  è chiuso

$$\begin{aligned}
 \sigma(s) &= \gamma(\alpha(s)) \quad s_1 \neq s_2 \implies \gamma(\alpha(s_1)) \neq \gamma(\alpha(s_2)) \\
 &\implies \gamma(\alpha(s_1)) \neq \gamma(\alpha(s_2)) \\
 &\quad \parallel \quad \parallel \\
 &\quad \sigma(s_1) \quad \sigma(s_2)
 \end{aligned}$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} x \rho \, ds$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} y \rho \, ds$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{\Sigma} z \rho \, ds$$

Coordinate del baricentro  
di un corpo di densità  $\rho$

$f, g$  continue su  $\Sigma$ ,  $\alpha$  regolare,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \int_{\Sigma} f \, ds + \beta \int_{\Sigma} g \, ds$$

Arco di curva  $\alpha$  regolare a tratti ne esistono un numero finito di punti  $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$  su cui  $\alpha$  non è di classe  $C^1$  oppure  $\alpha'(t) = \vec{0}$

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\Sigma_1} f + \int_{\Sigma_2} f + \int_{\Sigma_3} f = \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3} f$$

e) lunghezza di un arco di elica cilindrica

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = k \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

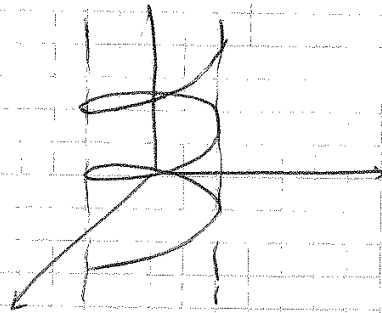
$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\theta)\| \, d\theta$$

$$\alpha'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, k)$$

$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + k^2} = \sqrt{1+k^2}$$

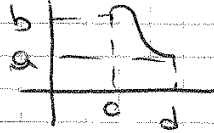
$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+k^2} \, d\theta = 2\pi \sqrt{1+k^2}$$



②  $\varphi'(s) < 0 \Rightarrow \varphi$  è strettamente decrescente

$$\varphi^{-1}(b) = c$$

$$\varphi^{-1}(a) = d$$



$$\|\sigma'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| = -\|\gamma'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds$$

$$\int_{\sigma} f = - \int_d^c (f(\varphi(s)) \|\gamma'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)|) ds$$

$$= \int_c^d f(\varphi(s)) \|\sigma'(s)\| ds$$

es)

$\gamma(t)$

parametrizzazione di un arco, con  $\rho(x)$  densità del materiale

$$M(\gamma) = \int_{\gamma} \rho$$

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x \rho$$

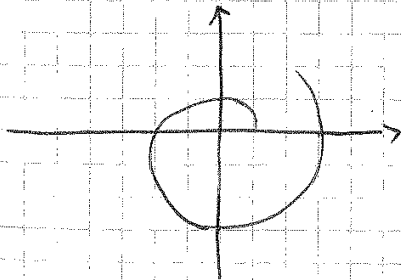
arco piano di densità costante in coordinate polari

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = b \theta$$

$$\gamma: \begin{cases} x = A\theta \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 4\pi \\ y = A\theta \sin \theta & \rho = A\theta \end{cases}$$

es)

Spiziale di Archimede



$$\gamma'(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= r^2 [1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t] = \\ &= r^2 [2 - 2\cos t] = 2r^2(1 - \cos t) \end{aligned}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos t}$$

$$\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \cos t$$

$$1 - \sin^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2} = \cos t$$

$$\Rightarrow 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right|$$

$$M(x) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2r \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

$$\frac{t}{2} = u \quad t = 2u \quad dt = 2u du$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0 \quad t = 2\pi \Rightarrow u = \pi$$

$$M(x) = \int_0^{\pi} 2r \left| \sin u \right| \cdot 2 du = 4r \int_0^{\pi} \sin u du$$

perché tra 0 e  $\pi$   
il seno è sempre  $> 0$

$$= 4r (-\cos \pi) \Big|_0^{\pi} = 4r(1+1) = 8r$$

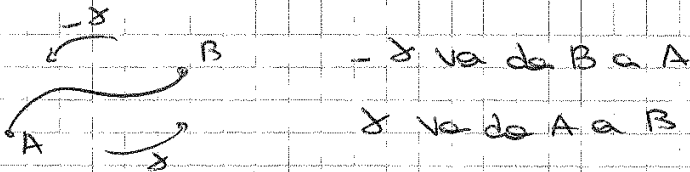
Integrale di linea di seconda specie



si integra il campo vettoriale

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{matrix} \cup \\ P \end{matrix} \rightarrow (X, F(P))$$



$-\gamma$  va da B a A

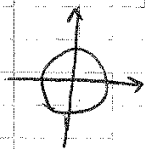
$\gamma$  va da A a B

$$\int_{-\gamma} F dp = - \int_{\gamma} F dp$$

$$\boxed{\int_{-\gamma} F dp = - \int_{\gamma} F dp}$$

l'integrale è lineare

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} F dp = \int_{\gamma_1} F dp + \int_{\gamma_2} F dp$$



$F(x, y)$

$x^2 + y^2 = 1$ , orientato in senso orario

$$\sigma = \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

$$\int_{\sigma} F dp = \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (\sin \theta, -\cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0$$

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \int_{\sigma} F dp = - \int_{\gamma} F dp \quad \text{senso antiorario}$$

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, -1 \right)$$

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

$$\int_0^{3\pi} F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

2/10/2012

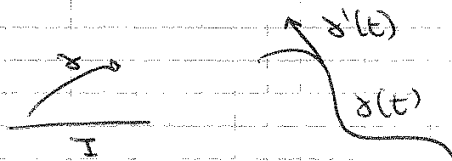
Superfici in forma parametrica

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$$

$\gamma$  continua

$\gamma$  di classe  $C^1$ ,  $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$

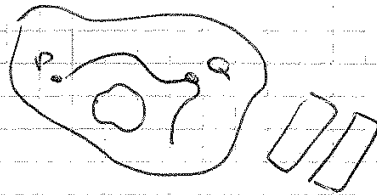
$\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$  sostegno della curva



$A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto

$A$  connesso

$\forall P, Q \in A \exists$  arco di curva che unisce  $P$  a  $Q$  in sostegno  $\subseteq A$



$$\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\sigma$  continua

$\sigma$  regolare  $\sigma \in C^1(A)$

$$(u, v) \rightarrow (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\sigma_1}{du} & \frac{d\sigma_1}{dv} \\ \frac{d\sigma_2}{du} & \frac{d\sigma_2}{dv} \\ \frac{d\sigma_3}{du} & \frac{d\sigma_3}{dv} \end{pmatrix} = J_\sigma$$

$J_\sigma(u, v)$  è di rango massimo (2)

$\forall u, v \in A$

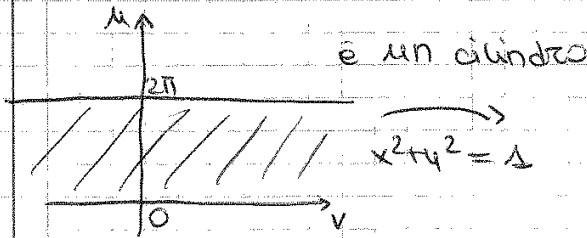
$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^3$  sostegno di  $A$



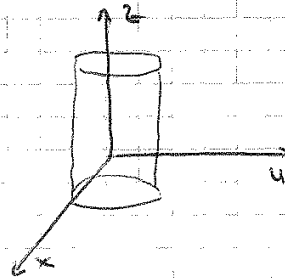
es)

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

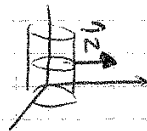


è un cilindro



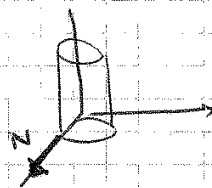
$$J\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rango max } \forall (u, v)$$

$$\vec{N} = \frac{d\sigma}{du} \wedge \frac{d\sigma}{dv} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos u \vec{i} + \operatorname{sen} u \vec{j}$$



$$u=0 \quad v=0 \quad \vec{N}(0,0) = (1, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x = \cos u = 1 \\ y = \operatorname{sen} u = 0 \\ z = v = 0 \end{cases}$$



È orientato con  $\vec{N}$  in ogni punto

anche se la direzione è sempre la stessa devo comunque controllarne sempre il verso.

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

Il nostro è una superficie sferica di centro l'origine e raggio 1

$$\varphi \in [0, \pi] \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$\vec{N}$  nei poli  $(0,0,1)$  e  $(0,0,-1)$

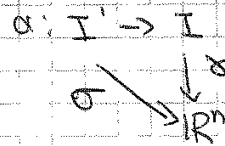
### Cambiamento di variabili

$\alpha: I' \rightarrow I$  intervalli

$\alpha \in C^1(I')$

$\alpha'(s) \neq 0 \forall s$

$\alpha$  biunivoca



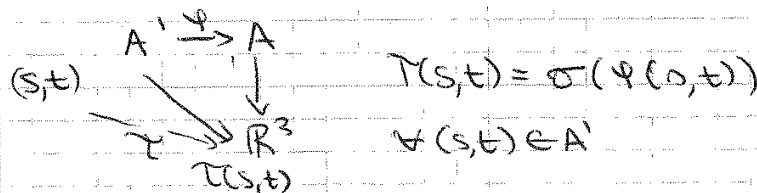
$$\sigma(s) = \alpha(\alpha(s)) \forall s \in I'$$

$$\Psi: A' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$$

$\Psi \in C^1(A')$   $\Psi$  biunivoca

$\det J\Psi \neq 0$  ( $J\Psi$  invertibile)  $\forall (s,t) \in A'$

$T$  e  $\sigma$  differiscono per un cambiamento di variabili  
 e  $\exists$  un cambiamento di variabili  $\Psi$  tale che:



- $T$  e  $\sigma$  hanno lo stesso sostegno
- $T$  è regolare  $\Leftrightarrow \sigma$  è regolare
- $T$  è semplice  $\Leftrightarrow \sigma$  è semplice
- il vettore normale a  $T$  e il vettore normale a  $\sigma$  in  $P$  sono paralleli

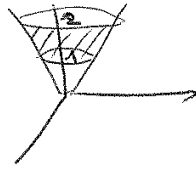
$$\frac{dT}{ds} \wedge \frac{dT}{dt}(s,t) = \det J\Psi(s,t) \left( \frac{d\sigma}{du} \wedge \frac{d\sigma}{dv}(u,v) \right)$$

$\parallel (u,v) = \Psi(s,t)$   
 $\vec{N}_T(s,t)$

### Calotta superficiale regolare

$\sigma: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare su un aperto  $A$  connesso,  $A \neq \emptyset$   
 $K$  compatto (chiuso e limitato), connesso  $K \neq \emptyset$

es    si:  $\left. \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases} \right\}$



$$\int_S (3x^2 + 5y^2)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 1 \leq z \leq 2$$

$(x, y) \in$  Corona circolare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho \end{cases}$$

$$z^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2$$

$$1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sigma: [1, 2] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \theta) \rightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ \rho \end{pmatrix} = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j} + \rho \vec{k}$$

$$\theta = 0 \\ \rho = 1 \quad \text{area}(S) = \int_R \|N(\rho, \theta)\| \, d\rho \, d\theta$$

$$\|N(\rho, \theta)\| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2} = \rho \sqrt{2}$$

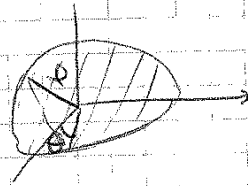
$$x_G = \frac{1}{M} \iint_K x f(\sigma) \|N\| du dv = \frac{1}{M} \int_{\sigma} x f$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{\sigma} y f = \frac{1}{M} \iint_K y f(\sigma) \|N\| du dv$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iint_K z f(\sigma) \|N\| du dv$$

$\int_{\sigma} f$  è indipendente dalla parametrizzazione

es)  $\int_{\Sigma} (x^2+z^2)$   $\Sigma$  emisfero  $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq 0 \end{array} \right.$



$$x = \sin \varphi \cos \theta$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$y = \sin \varphi \sin \theta$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$z = \cos \varphi$$

$$\sigma: [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \rightarrow \theta(\theta, \varphi)$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} \wedge \frac{d\theta}{d\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \end{vmatrix} =$$

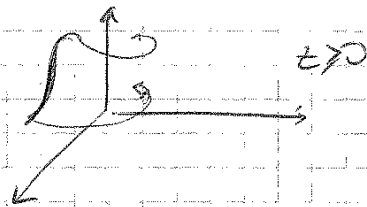
$$= -\sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - \sin \varphi \cos \theta \vec{k}$$

$$\int_{\Sigma} x^2+z^2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} [(\sin \varphi \cos \theta)^2 + \cos^2 \varphi] \|N(\varphi, \theta)\| d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned} \|N(\varphi, \theta)\|^2 &= \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\ &= \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\ &= \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{2} \rho \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

Area di una superficie di rotazione



$$\begin{cases} x = \delta_1(t) & t \in [a, b] \\ y = 0 & \delta_1 \text{ è regolare} \\ z = \delta_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \delta_1(t) \cos \theta \\ y = \delta_2(t) \sin \theta \\ z = \delta_2(t) \end{cases}$$

$$a(\Sigma) = \int \|N(\theta, t)\| \, d\theta \, dt$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \delta_1'(t) \cos \theta & \delta_1'(t) \sin \theta & \delta_2'(t) \\ -\delta_1'(t) \sin \theta & \delta_1'(t) \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\delta_1'(t) \delta_2'(t) \cos \theta) \vec{i} - (\delta_1'(t) \delta_2'(t) \sin \theta) \vec{j} + (\delta_1'^2(t) \delta_2^2(t) \cos^2 \theta + \delta_1'(t) \delta_1'(t) \sin^2 \theta) \vec{k} =$$

$$= (-\delta_1'(t) \delta_2'(t) \cos \theta) \vec{i} - (\delta_1'(t) \delta_2'(t) \sin \theta) \vec{j} + (\delta_1'^2(t) \delta_2^2(t)) \vec{k}$$

$$\|N(t, \theta)\| = \sqrt{\dots}$$

$$= \sqrt{\delta_1^2(t) (\delta_2'(t))^2 + (\delta_1'(t))^2 \delta_2^2(t)} =$$

$$\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{\sigma}}{du} \wedge \frac{d\vec{\sigma}}{dv} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

$$\int_{\sigma} F \cdot \vec{n} = \iint_K \left( F \cdot \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \right) \|\vec{N}\| du dv$$

$$= \iint_K F \cdot \vec{N} du dv$$

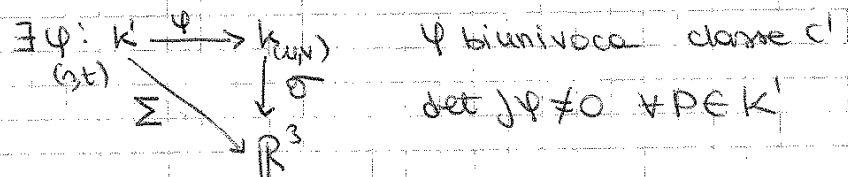
$\vec{j}$  densità di carica elettrica

$\Rightarrow \phi$  flusso di corrente attraverso  $S$

$\vec{j}$  densità di flusso di calore

$\Rightarrow \phi$  flusso di calore

$\sigma$  e  $\gamma$  sono superfici che differiscono per un cambiamento di parametrizzazione, cioè



$$\sigma(\varphi(s, t)) = \gamma(s, t) \begin{cases} \det J\varphi > 0 \text{ sempre} \\ 0 \\ \det J\varphi < 0 \text{ sempre} \end{cases}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} \wedge \frac{d\gamma}{dt} = (\det J\varphi) \left( \frac{d\sigma}{du}(\varphi(s, t)) \wedge \frac{d\sigma}{dv}(\varphi(s, t)) \right)$$

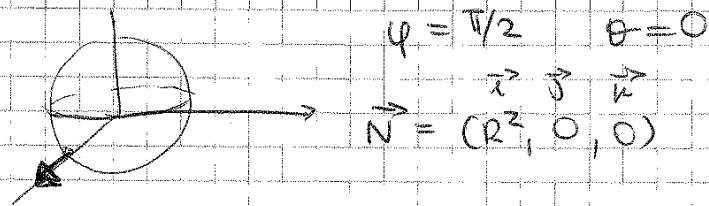
•  $\vec{N}_{\gamma} = (\det J\varphi) \cdot \vec{N}_{\sigma}$  hanno lo stesso verso se  $\det J\varphi > 0$

• se  $\det J\varphi < 0$   $\vec{N}_{\gamma}$  e  $\vec{N}_{\sigma}$  hanno verso opposto

-  $\varphi$  e  $\gamma$  differiscono per cambiamento di parametrizzazione  
 $\swarrow$   
 calotte superficiali

-  $F$  continua

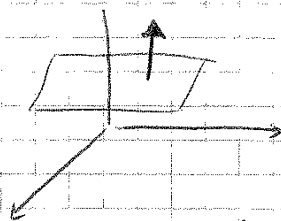
$$\Rightarrow \textcircled{1} \int_{\sigma} F \cdot \vec{n} = \int_{\gamma} F \cdot \vec{n} \text{ se } \sigma \text{ e } \gamma \text{ hanno lo stesso orientamento}$$



vettoze normale orientato in senso uscente in ogni punto in cui è definito (cioè tranne nei poli)

es  $F = (x^2 - z^2, y^2 - x^2, z^2 - y^2)$

$\Sigma : \{z = 2x + 4y, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$



orientata nella direzione delle z crescenti

$\vec{N} = (-2, -4, 1) = \left(-\frac{dF}{dx}, -\frac{dF}{dy}, 1\right)$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F \cdot \vec{N} \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - y^2 + 2x + 4y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 \, dx \int_{-1}^1 dy + \int_{-1}^1 y^2 \, dy \int_{-1}^1 dx + 2 \int_{-1}^1 x \, dx \int_{-1}^1 dy + 4 \int_{-1}^1 y \, dy \int_{-1}^1 dx =$$

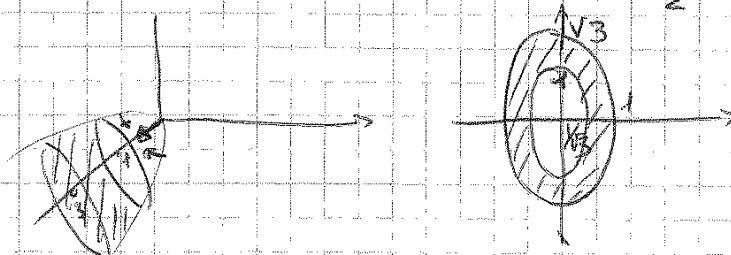
$$= 2 \cdot 2 \int_0^1 x^2 \, dx + 9 \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{49}{3} + \frac{9}{3} = \frac{58}{3} = 16$$

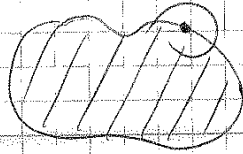
es  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y^2 + z^2, 1 \leq x \leq 3\}$

orientato in modo che la normale formi un angolo acuto con le semiasse delle x positive

$F = (y, z, y^3) \quad y \in \mathbb{R}$

Determinare  $\alpha$  in modo che  $\int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} = \alpha$





orientamento positivo di  $\partial A$

Teorema di Green

A aperto con bordo

$\partial A$  orientato positivamente

$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1(\Omega)$  def su  $\Omega$  aperto

$$\Rightarrow \iint_A \left( \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dx dy = \int_{\partial A} F \cdot dA$$

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

9/11/2012

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dx_0 f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(x_0) + \overbrace{L(x-x_0)}^h + \sigma(x-x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

dove  $L = f'(x_0)$

$$h \rightarrow dx_0 f(h) = f'(x_0) \cdot h$$

$$g(x) = x$$

$$dg = dx$$

$$dx_0 g: h \rightarrow L \cdot h$$

$$dg = f'(x) \cdot dx$$

$$f(x) = f(x_0) + (dx_0 f)(x-x_0) + \sigma(\|x-x_0\|)$$

$$dx_0 f(x-x_0) = \nabla f(x_0)(x-x_0)$$

$$dx_0 f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, \dots, h_n) \rightarrow \nabla f(x_0) \cdot h$$

$$dg(h) = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(x_0) h_i$$



### Teorema di Green

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $A \neq \emptyset$ , connesso
- $\partial A$   $\cup$  di numero finito di curve chiuse, semplici, regolari a tratti, orientate positivamente



-  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in C^1(\Omega)$ ,  $\bar{A} \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} F \, dP = \iint_A \left( \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dx \, dy$$

### Formule di Gauss-Green

$A$  è un aperto con bordo

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $\bar{A} \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} f \, dy = \iint_A \frac{df}{dx} \, dx \, dy$$

$$\int_{\partial A} f \, dx = - \iint_A \frac{df}{dy} \, dx \, dy$$

$F(x, y)$

$$\int_{\partial A} F \, dP = \int_{\partial A} (x, y) \cdot (dx, dy) =$$

$$= \iint_A \frac{dF}{dx} \, dx \, dy \Rightarrow \text{1a formula di Gauss-Green}$$

es  $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$

$(t(t-2)(t-1), t(1-t)(1+t))$

$\gamma(0) = (0, 0) = \gamma(1)$

$\gamma_1(t) > 0, \gamma_2(t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1)$

$J_p \sigma$  di rango max  $\forall p \in \mathbb{R}$

$\partial \sigma = \emptyset$  si dice che la superficie è chiusa

se  $\partial \sigma \neq \emptyset$  è una colotta superficiale con bordo

### Teorema di Stokes

$F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\Omega$  aperto,  $\Omega \neq \emptyset$

$\sigma: K \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$  colotta superficiale regolare con bordo

$K$  compatto, connesso

$K^0 \neq \emptyset$

$\partial K =$  unione di curve chiuse regolari a tratti

$\sigma$  regolare di classe  $C^1$

$\partial \sigma$  di rango massimo orientato positivamente (l'osservatore che cammina sul bordo nel verso del vettore normale vede  $\sigma(K)$  alla sua sinistra)

$$\Rightarrow \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_{\partial \sigma} F \cdot d\vec{p}$$

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial \sigma} \omega$$

$$\int_{\partial K} F \cdot d\vec{p} = \iint_K \left( \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dx dy$$

$$(F_1(x,y), F_2(x,y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(F_1(x,y), F_2(x,y), 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \rightarrow (x,y,0)$$

$$\text{rot } F = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ F_1 & F_2 & 0 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) - \vec{y}(0) + \vec{k}(0 \times F_2 - dy F_1) = (0, 0, \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}) = \text{rot } F$$

$$F = (x^2 z - 2, x^2 - y^2, xy - 2z^2)$$

$$\gamma'(\theta) = (0, -\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^\pi (-, -\cos^2\theta, -2\sin^2\theta) \cdot \gamma'(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{2\sin^3\theta}{3} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{3}(\cos^3\pi - \cos^3 0) = \frac{2}{3}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = 1 - y^2 & -1 \leq y \leq 1 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \gamma_2'(y) = (-2y, 1, 0)$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{-1}^1 (-2, (1-y^2)^2 - y^2, -) \cdot (-2y, 1, 0) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 4y + 1 - 3y^2 + y^4 dy = 2 \int_0^1 1 - 3y^2 + y^4 dy =$$

$$= 2 \left[ y - y^3 + \frac{y^5}{5} \right] = \frac{2}{5}$$

$$\int_{\sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

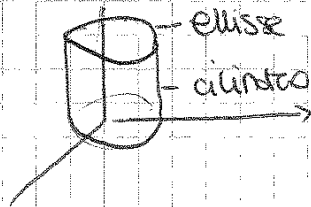
es) cilindro verticale zetto

$$x^2 + y^2 = 1$$

intersecato con  $z=0$  e  $x + \frac{y}{2} + z = 3$

orientato in senso uscente

$$\int_{\partial S} z^2 dx + xy z dy + 2xz dz = \int_{\partial S} (z^2, xy z, 2xz) dS$$



$\partial S$  orientato positivamente

### Teorema della divergenza

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ , su un aperto

$$\operatorname{div} F = \frac{dF_1}{dx_1} + \dots + \frac{dF_n}{dx_n} = \sum_{i=1}^n F_i = \nabla \cdot F = \left( \frac{d}{dx_1}, \dots, \frac{d}{dx_n} \right) \cdot (F_1, \dots, F_n)$$

$$C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

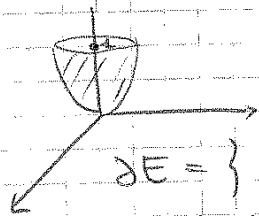
$$F \rightarrow \operatorname{div} F$$

### Teorema di Gauss

- $A$  aperto con bordo di  $\mathbb{R}^3$
- $A \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto
- $F: a \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  su  $a$

$$\Rightarrow \int_{\partial A} F \cdot \vec{n} = \iiint \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

es) Calcolare il flusso uscente da  $E = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$  del campo  $F = (xy^2, z^2y, x^2z)$



$$\partial E = \{z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$U = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

$$\int_{\partial E} F \cdot \vec{n} = \int_{\sigma_1} F \cdot \vec{n} + \int_{\sigma_2} F \cdot \vec{n}$$

$$\operatorname{div} F = (y^2 + z^2 + x^2)$$

$\downarrow$   $\frac{d}{dx}(xy^2)$        $\downarrow$   $\frac{d}{dy}(z^2y)$        $\downarrow$   $\frac{d}{dz}(x^2z)$

$$\int_{\partial E} F \cdot \vec{n} = \iiint_{\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = E$$

$$\Rightarrow \int_{x^2+y^2}^1 (x^2+y^2+z^2) \, dz = (x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3} \Big|_{x^2+y^2}^1 =$$

$$= x^2 + y^2 + \frac{1}{3} - (x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^3$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \rho^2 + \sqrt{1 - \frac{1}{9} \rho^2} \right) \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{4} \rho^2 - \frac{1}{8 \cdot 4} \rho^4 \right]_0^2 + \int_0^2 \rho \sqrt{1 - \frac{1}{9} \rho^2} \, d\rho =$$

$$u = 1 - \frac{1}{9} \rho^2 \quad du = -\frac{1}{9} \cdot 2\rho \, d\rho = -\frac{1}{2} \rho \, d\rho$$

$$\int_{\frac{4}{9}}^1 u^{1/2} (-2 \, du) = 2 \int_0^1 u^{1/2} \, du = \frac{2 u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{4}{3} \right] = \frac{11\pi}{3}$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \vec{n} = \int_A \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz - \int_C \mathbf{F} \cdot \vec{n}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) = \mathbf{k} \rho$$

← cambio segno

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \vec{n} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\cancel{\rho^2 \cos^2 \theta}, \cancel{\rho \sin \theta}, -2) \cdot (0, 0, -\rho) \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2 \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \rho^2 \Big|_0^2 = 8\pi$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \vec{n} = \frac{11\pi}{3} - 8\pi = -\frac{13\pi}{3}$$

es)  $\mathbf{F} = (x, (x^2 - 2y)y, (y^2 + 2x)z)$

$$A = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq xy\}$$

$$Q = \int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot \vec{n} =$$



① Per strati:  $C_z: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$

$$\int_0^4 \iint_{C_z} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

$$C_z = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < \theta < 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \end{matrix}$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} (6\rho^2 + \frac{1}{2}e^{z/2}) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

$$= \int_0^4 2\pi \left[ \frac{6\rho^4}{4} + \frac{1}{2}e^{z/2} \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{z}} dz =$$

$$= \int_0^4 2\pi \left[ \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{4}e^{z/2} \cdot z \right] dz =$$

$$= \int_0^4 3\pi z^2 + \frac{\pi}{2} z e^{z/2} dz = \frac{3\pi z^3}{3} + \frac{\pi}{2} (2z e^{z/2} - 4e^{z/2}) \Big|_0^4 =$$

$$= \pi(4^3 + 2e^2)$$

②  $\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ 2x^3 - 10 & 2y^3 & e^{2z} \end{vmatrix} = \vec{0}$

③  $\int_{\partial \Omega} F \, dP = \int_{C_z} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = 0$

16/11/2012

Si dice che un campo  $f$  continuo su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , connesso e conservativo ne esiste  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^1(\Omega)$  tale che

$$\nabla g(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\left( \frac{dg}{dx_1}, \dots, \frac{dg}{dx_n} \right) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

-  $g$  si dice potenziale di  $f$  su  $\Omega$

-  $\omega = dg$  si dice  $\omega$  è una forma esatta

Se  $F$  è una curva chiusa  $\gamma$  tale che  $\oint_{\gamma} F \cdot dp \neq 0$

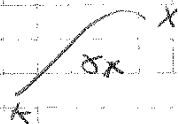
allora  $F$  è un conservativo su un aperto che contiene le sostegni di  $\gamma$

Se  $F$  è conservativo su  $\Omega$  connesso e  $g_1$  e  $g_2$  sono potenziali di  $F$  su  $\Omega$  (cioè  $\nabla g_1(x) = \nabla g_2(x) = F(x) \forall x \in \Omega$ ), allora esiste  $k \in \mathbb{R}$   $g_1(x) = g_2(x) + k \forall x \in \Omega$

Dimostrazione:

Fisso un punto  $A$  in  $\Omega$  e prendo una curva con le sostegni  $\gamma$  in  $\Omega$ , che unisce  $A$  ad  $x \in \Omega$

$$\int_{\gamma} F \cdot dp = g_1(x) - g_1(A) = g_2(x) - g_2(A)$$



$$\Rightarrow g_1(x) = g_2(x) + \underbrace{g_1(A) - g_2(A)}_k$$

Se  $F$  è un campo continuo su  $\Omega$  connesso e  $g$  è un suo potenziale su  $\Omega \Rightarrow \{g(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$  è l'insieme dei

potenziali di  $F$

Sia  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo continuo su  $\Omega$  connesso, aperto  $\neq \emptyset$ . Sono equivalenti:

- 1-  $F$  è conservativo su  $\Omega$
- 2- Prendo due curve qualunque  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con le sostegni contenuti in  $\Omega$ , che uniscano  $A$  a  $B$ , allora

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dp = \int_{\gamma_2} F \cdot dp$$

- 3-  $\forall \gamma$  curva chiusa con le sostegni  $\subseteq \Omega$ ,  $\oint_{\gamma} F \cdot dp = 0$

Dimostrazioni:

③  $\Rightarrow$  ②

$$\oint_{\gamma} F \cdot dp = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dp = \int_{\gamma_2} F \cdot dp$$

$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$  curva chiusa

$$\oint_{\gamma} F \cdot dp = 0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dp \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dp - \int_{\gamma_2} F \cdot dp = 0$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dp = \int_{\gamma_2} F \cdot dp$$

②  $\Rightarrow$  ①

Fisso  $A \in \Omega$

$\gamma_x$  curva che unisce  $x$  ad  $A$

es

$$F = \left( \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

$$g(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{-1/2k \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dz}$  uguali a  $F_x$  e  $F_z$

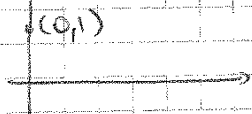
quindi è un campo conservativo

es  $F(x, y) = (2x \log y, x^2/y + y)$

$x > 0, y \neq 0$  dominio

$$\Omega = \{(x, y) : y > 0\}$$

$(0, 1)$   $(x, y)$



$$\gamma_1: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq x$$

$$\gamma_1'(t) = (1, 0)$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x=x \\ y=s \end{cases} \quad 1 \leq s \leq y$$

$$\gamma_2'(s) = (0, 1)$$

$$g(x) = \int_{\Omega} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP =$$

$$= \int_0^x (2t \log 1, \frac{t^2}{1} + 1) \cdot (1, 0) dt + \int_1^y (2x \log s, \frac{x^2}{s} + s) \cdot (0, 1) ds$$

$$= \int_1^y \frac{x^2}{s} + s ds = x^2 \log s + \frac{s^2}{2} \Big|_1^y =$$

$$= x^2 \log y - x^2 \log 1 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}$$

$$g(x, y) = x^2 \log y + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\nabla g(x, y) = (2x \log y, x^2/y + y) \quad \text{è giusto!}$$

$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega$  aperto, connesso,  $\Omega \neq \emptyset$

$F \in C(\Omega)$  è conservativo se:  $\exists g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^1(\Omega)$

talmente  $\nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$



$$\Rightarrow: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin \theta}{1}, \frac{\cos \theta}{1} \right) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta d\theta = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$  ho trovato un campo che ha rotore nullo ma non è conservativo

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è irrotazionale per  $n \geq 2$  se  $\frac{dF_i}{dx_j}(x) = \frac{dF_j}{dx_i}(x)$  su  $\Omega$ ,  $\forall i, j$

$\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$ ,  $F_i \in C^1(\Omega)$  si dice che è una formula esatta se  $\frac{dF_i}{dx_j} = \frac{dF_j}{dx_i}$  su  $\Omega$ ,  $\forall i, j$

$F = (F_1, \dots, F_n)$  è di classe  $C^1$  su  $\Omega$ :

- $F$  conservativo su  $\Omega \Rightarrow F$  è irrotazionale su  $\Omega$
- se  $\omega = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$  è chiuso su  $\Omega \Rightarrow \omega$  è esatto su  $\Omega$

Si dice che un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso se preso un  $\forall$  curva chiusa con le sostegni contenuto in  $A$ , ne potete sciogliere il nodo ricucendo senza uscire dal dominio.

Nel piano sono semplicemente connessi gli insiemi neutri buchi.

Nel piano ogni curva chiusa divide il piano in due parti, una limitata (interna) e una illimitata.

$A$  è semplicemente connesso nel piano se  $\forall$  curva chiusa con le sostegni  $\subset A$  la sua parte interna è  $\subset A$

$A$  è semplicemente connesso in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) se  $\forall$  curva chiusa con le sostegni  $\subset A$  è il bordo di una varietà superficiale con le sostegni  $\subset A$



Se  $f \in C^1(\Omega)$  non è irrotazionale allora  $F$  non è conservativo.

es  $F(x, y, z) = (2xy + yz - 2xz, x^2 + xz + z, xy - x^2 + y + z)$   
 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T \in C^\infty$  su  $\mathbb{R}^3$  che è semplicemente connesso

allora se  $\text{rot} F = 0$  su  $\mathbb{R}^3$  posso concludere che  $F$  è conservativo

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dy} &\stackrel{?}{=} \frac{dF_2}{dx} \Rightarrow \frac{dF_1}{dy} = 2x + z \\ \frac{dF_2}{dx} &= 2x + z \end{aligned} \right\} \text{OK}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} &\stackrel{?}{=} \frac{dF_3}{dx} \Rightarrow \frac{dF_1}{dz} = y - 2x \\ \frac{dF_3}{dx} &= y - 2x \end{aligned} \right\} \text{OK}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_2}{dz} &\stackrel{?}{=} \frac{dF_3}{dy} \Rightarrow \frac{dF_2}{dz} = x + 1 \\ \frac{dF_3}{dy} &= x + 1 \end{aligned} \right\} \text{OK}$$

$\Rightarrow F$  è conservativo su  $\mathbb{R}^3$

$g$  è un potenziale di  $F$  su  $\mathbb{R}^3$  se:

$$\frac{dg}{dx} = F_1(x, y, z); \quad \frac{dg}{dy} = F_2(x, y, z); \quad \frac{dg}{dz} = F_3(x, y, z)$$

$$g(x, y, z) = h(x) \quad \frac{dh}{dx} = F_1(x, y, z)$$

$$\int F_1(x, y, z) dx = \int (2xy + yz - 2xz) dx = x^2y + xyz - x^2z + k(y, z)$$

costante rispetto a  $x$

$$\frac{dg}{dy} = F_2 = x^2 + xz + z$$

$$\frac{dg}{dy} = x^2 + xz + \frac{dk}{dy}(y, z) = x^2 + xz + z$$