NUMERO: 534 DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Marchisa

MATERIA: Analisi Matematica I + Esercizi
Prof. Nicola

Storia della Matematica.

300 - 200 aC → Archimede (aree - volumi - baricentri)

$S = \frac{4}{3} T$

1500 - 1600 dC → Fermat → teorico aritmetica (massimi e minimi di f. polinomiali

→ Cavalieri (metodo degli indivisibili)

↓

calcolo area regioni piane per confronto

$S_{ellisse} = \pi ab$

1600 - 1700 dC → Newton
→ Leibniz

} padri analisi matematica

1700 - 1800 dC → Taylor

→ Eulero (applicazione alla fisica)

→ Lagrange (introduce la nozione di derivata)

1800 - 1900 dC → Cauchy (definizione di limite - 1821)

→ Riemann

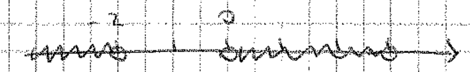
→ Weierstrass - 1870

1900 dC → Lebesgue - 1902

→ Schwartz (elettronica - 1950)

① **limitato superiormente** se tutti gli elementi dell'insieme sono minori di un numero reale $\mathbb{R}$ (se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x < M \ \forall x \in A$)

es. $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$



$M = 4$ va bene perché tutti i numeri dell'insieme sono a sinistra

② **limitato inferiormente** se tutti i numeri sono maggiori di un M fissato ($\exists M \in \mathbb{R} : x > M \ \forall x \in A$)

es. l'insieme dell'esempio precedente non è limitato inferiormente

③ **limitato** se è limitato sia inferiormente sia superiormente

es. $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\} \cup \{5\}$

limitato superiormente in 5

limitato inferiormente in -1

es. Verificare che l'insieme $A = \{1 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ è limitato

$\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5}$

è limitato inferiormente perché gli elementi sono maggiori di 0

è limitato superiormente in $x = 1 \rightarrow \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right) < \cancel{1}$

$-\frac{1}{n} < 0$

es. Verificare che l'insieme $A = \left\{\frac{n^2+3n-2}{n^2+n} , n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$ è limitato superiormente.

Bisogna quindi dimostrare che esiste $M \in \mathbb{R} : \frac{n^2+3n-2}{n^2+n} < M$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$

$\frac{n^2+3n-2}{n^2+n} < \frac{n^2+3n}{n^2}$ → aumentare ↘ diminuire $\quad \frac{3}{2} < \frac{4}{1}$

$< \frac{n^2+3n^2}{n^2}$ continuo ad aumentare

< 4

gli elementi sono minori di 4

④ **Intervallo** se è del tipo seguente:

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a ; b)$ con $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

⑥ $\forall \varepsilon > 0$ considero $1-\varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$

$\varepsilon > \frac{1}{n}$ dato ε se si prende un qualsiasi $n > \frac{1}{\varepsilon}$ allora

l'elemento $1-\frac{1}{n}$ sarà maggiore di $1-\varepsilon$

$$1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n} = y$$

Se l'insieme A non ha maggioranti cioè se non è limitato superiormente allora si dice che l'estremo superiore di A è $+\infty$

es. $A = \mathbb{N}$

Assioma di Completezza di numeri Reali:

Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.

Proprietà che non vale per i numeri razionali ($\mathbb{Q}$)

$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} \to$ non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$. Significa che $\mathbb{Q}$ "ha dei buchi".

Proprietà di Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x<y\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

Valore Assoluto

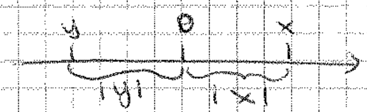
$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

es. $|3| = 3$

$\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Sulla retta orientata, rappresenta la **distanza di un numero dall'origine**.



se $x, y \in \mathbb{R}$ allora $|x-y|$ rappresenta la distanza (positiva) tra x e y.

se $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 1\}$

$|x-(-2)| < 1$

RADICI di NUMERI REALI

- Teorema di esistenza e di unicità: se a è un numero reale e positivo e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ allora esiste un unico numero x reale positivo tale che $x^n = a$. Tale x si dice **radice n-esima** aritmetica di a e si denota con $\sqrt[n]{a}$

$$\{x \in \mathbb{R} ; x > 0 ; x^n \leq a\}$$

(b) Potenze frazionarie

$m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ $\quad a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$$

(c) Potenze con esponente Reale

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $r \in \mathbb{R}$

allora si definisce $a^r = \sup\{a^x ; x \in \mathbb{Q} ; x \leq r\}$ se $a \geq 1$

$a^r = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$ se $0 < a < 1$

Proprietà delle Potenze

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ ed $r, s \in \mathbb{R}$, allora:

- se $r > 0$ e $a < b$ allora $a^r < b^r$
  $r < 0$ e $a < b$ allora $a^r > b^r$
- se $a > 1$ e $r < s$ allora $a^r < a^s$
  $a < 1$ e $r < s$ allora $a^r > a^s$
- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $a^r b^r = (ab)^r$
- $\left(\frac{a^r}{b^r}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

es. $A = \{\text{studenti poli}\}$

$B = \{\mathbb{N}\}$

$f = \{(x,y) \in A \times B : x \text{ ha numero di matricola } y\}$

↓

è una funzione

$\boxed{y = f(x)}$

y = l'immagine di x mediante f

x = una controimmagine di y mediante f

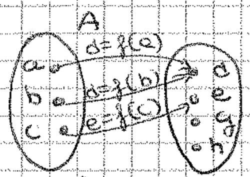
Se f è una funzione da A in B, A si dice **dominio** mentre B si dice **codominio** di f. Inoltre se I è un sottoinsieme di A si pone:

$f(I) = \{y \in B : \exists x \in I, f(x) = y\}$

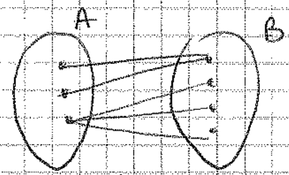
$= \{f(x) ; x \in I\}$

se $J \subseteq B$ si pone: $f^{-1}(J) = \{x \in A : f(x) \in J\}$

$f^{-1}(J) \subseteq A$



è funzione



Non è funzione

Se $I = \{a, c\}$ → $f(I) = \{d, e\}$

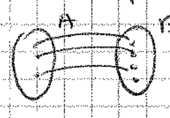
Se $I = \{a, b\}$ → $f(I) = \{d\}$

Se $J = \{d; g\}$ → $f^{-1}(J) = \{a; b\}$

$f: A \to B$ si dice:

- **INIETTIVA**: se punti diversi nel dominio hanno immagini diverse

  se $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

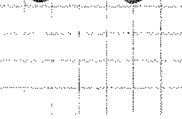


- **SURIETTIVA**: se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine in A

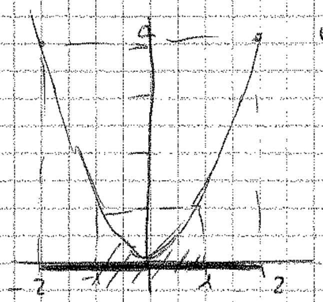
  se $\forall y \in B$ esiste almeno un elemento $x \in A : f(x) = y$

  se $f(A) = B$

- **BIIETTIVA**: se è sia iniettiva sia suriettiva



$f^{-1}([1;4]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [1;4]\} = [1,2] \cup [-2;-1]$

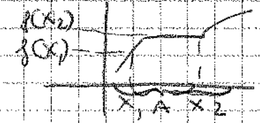


$y = x^2$

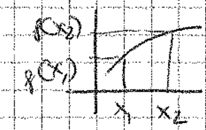
la funzione non è iniettiva

Una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:

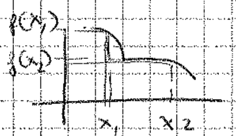
① **crescente** se per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) \leq f(x_2)$



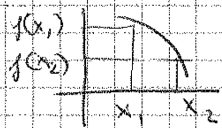
strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$



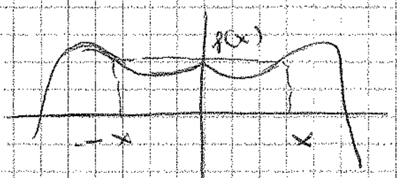
② **Decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$, $x_1 < x_2$



Strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$, $x_1 < x_2$



③ **Pari** se $\forall x \in A$ risulta $-x \in A$ e $f(x) = f(-x)$



simmetrica rispetto all'asse y

④ **Dispari** se $\forall x \in A$ risulta $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$

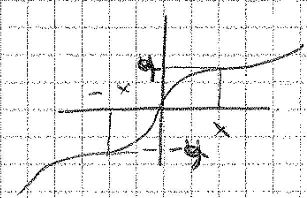
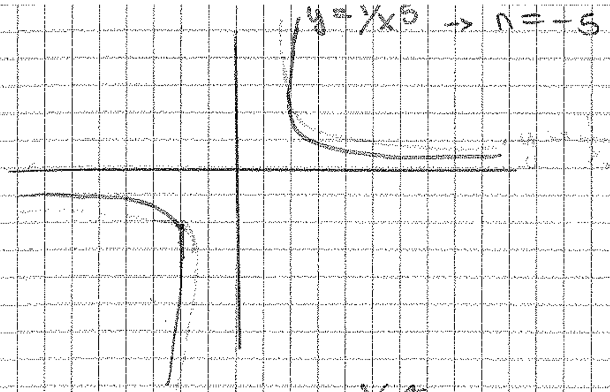
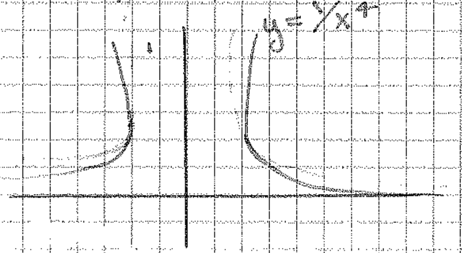


grafico simmetrico all'origine



con n negativa e dispari



con n negativo e pari

ⓑ con esponente frazionale

$y = x^{m/n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ con m e n primi tra loro

$y = \sqrt[n]{m}$

Dominio è: $[0; +\infty)$ se n è pari

$\mathbb{R}$ se n è dispari

ⓒ con esponente irrazionale

$y = x^r$, r irrazionale

Dominio: $(0; +\infty)$ se $r \leq 0$

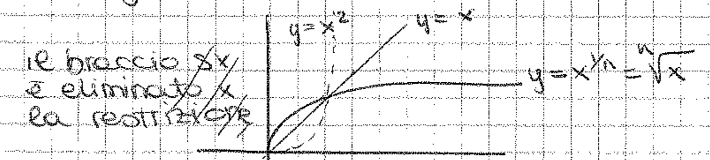
$[0; +\infty)$ se $r > 0 \rightarrow 0^r = 0$

② FUNZIONE INVERSA

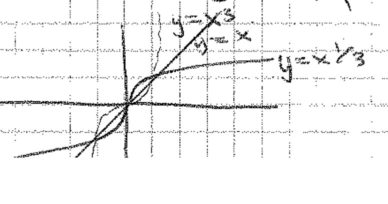
Si scambiano i ruoli di x e y

$\left(f|_{[0;+\infty)}\right)^{-1} : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

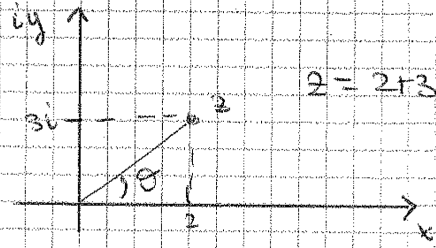
Il grafico è simmetrico a quello della restrizione rispetto alla retta $y = x$ se n è pari



Se n è dispari non serve la restrizione perché la funzione è già iniettiva.



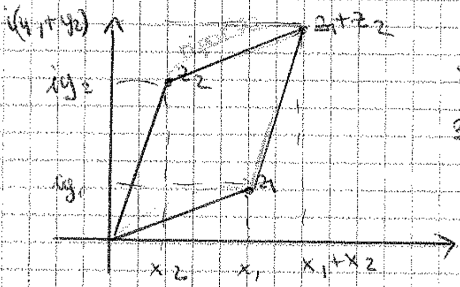
PIANO di GAUSS o di ARGAND



$z = 2+3i$

$\theta = \rho_0$

$\rho = $ teta



$z_1 = x_1 + iy_1$

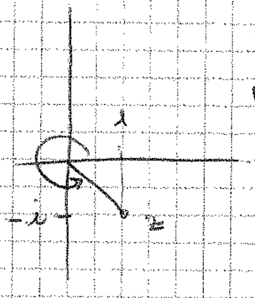
$z_2 = x_2 + iy_2$

distanza dall'origine = modulo di z ($|z|$) $\rightarrow$ $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

$\theta \rightarrow$ argomento o anomalia di un numero z

es. $z = 1 - i$

$x = x + iy$



$x = 1$

$y = -1$

$|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{7}{4}\pi \; ; \; = -\frac{\pi}{4}$

θ è definito a meno di multipli di 2π

se $-\pi < \theta \leq \pi \rightarrow \theta =$ argomento principale

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \,\text{sen}\,\theta$

$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

rappresentazione algebrica → rappresentazione trigonometrica

$z = 1 - i$ forma trigonometrica $\rightarrow$ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

$\rho = \sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$

Se $z = x + iy \neq 0$ (o la x o la y sono $\neq 0$), allora definisco l'inverso $\frac{1}{z}$

con $\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{x}{x^2+y^2}$ → parte reale; $\frac{y}{x^2+y^2}$ → parte immaginaria

(al denominatore deve venire un numero reale)

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

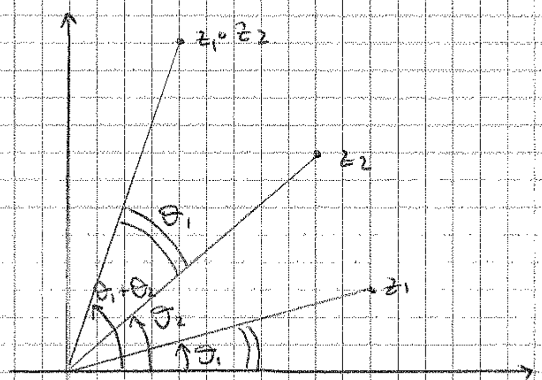
$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

$z_1 = \rho(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

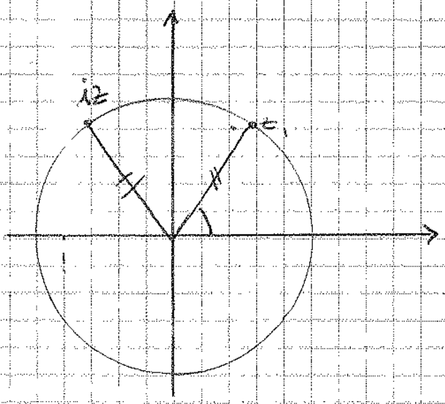
$z_2 = \rho(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)] =$

$= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$



es.



$iz \begin{cases} i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ z = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$\theta_{iz} = \theta_1 + \theta_2$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ → **FORMULA di DE MOIVRE**

RADICI N-ESIME:

Dato $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ → cioè con $\rho \neq 0$

cerchiamo $z \in \mathbb{C} : z^n = w$ con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = w$

$r^n = [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r^n = \rho$

$n\varphi = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 191

Teorema fondamentale dell'algebra

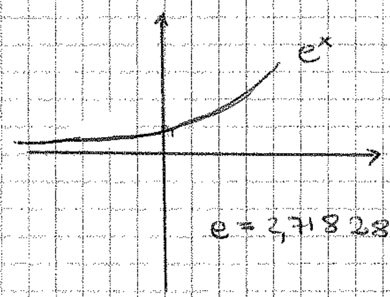
ogni equazione algebrica di grado ≥ 1 ha sempre almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.

Conseguenza: ogni polinomio (a coefficienti complessi) di grado $n \geq 1$ si fattorizza nella forma $P(z) = c_0(z-z_1)^{m_1} \cdot (z-z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_k)^{m_k}$ dove $c \in \mathbb{C}$; z_1; z_2, $z_k \in \mathbb{C}$ sono numeri distinti e $m_1 + \ldots m_k = n$.
(si dice che z_1 è una radice di molteplicità m_1, z_2 è una radice di moteplicità m_2, ecc...)

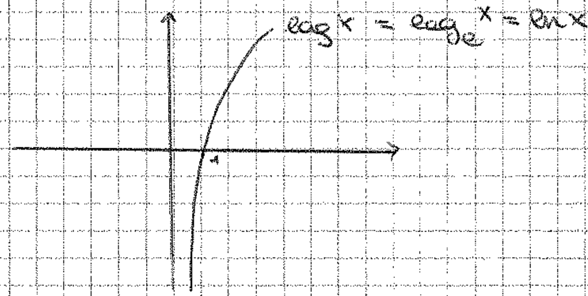
Funzioni Elementari ②

- invertibile = iniettiva

③ FUNZIONI ESPONENZIALI e LOGARITMICHE



$e = 2{,}7182818284 59\ldots$



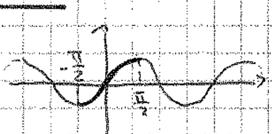
④ FUNZIONI MONOTÒNE

Si dice che una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotòna se è crescente oppure decrescente (strettamente monotona se strettamente crescente o strettamente decrescente).

⑤ FUNZIONE ARCOSENO

$f(x) = \sin x \quad T = 2\pi$

$\nexists$ f. inversa

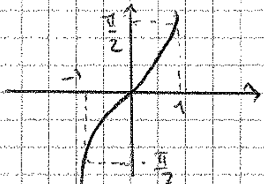


$f_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} \to$ strettamente crescente
$\downarrow$
iniettiva con immagine $[-1;1]$

$f^{-1}(f_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}) \Rightarrow y = \arcsin x$

D: $[-1;1]$

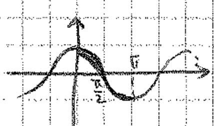
C: $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$



⑥ FUNZIONE ARCOCOSENO

$f(x) = \cos x \quad T = 2\pi$

$\nexists$ f. inversa

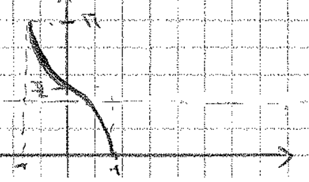


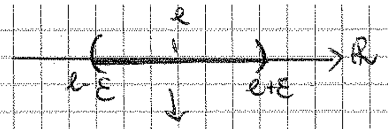
$f_{|[0;\pi]} \to$ strettamente decrescente
$\downarrow$
iniettiva: D: $[0;\pi]$; C: $[-1;1]$

$f^{-1}(f_{|[0;\pi]}) \Rightarrow y = \arccos x$

D: $[-1;1]$

C: $[0;\pi]$





intorno simmetrico di ℓ con centro in ℓ e raggio ε

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \iff \forall \varepsilon>0$ tutti i termini della successione, eccetto eventualmente un numero finito, cadono nell'intervallo $(\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon)$

es. Verifichiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Dato $\varepsilon>0$ scelgo $N \in \mathbb{N}$ con $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ allora se $n>N$ vale $\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$

es. Verificare che la successione $(a_n) = (-1)^n$ non ammette limite

$\ell = 1$ non è limite infatti se prendo $\varepsilon = 1$ allora tutti i termini di posto dispari cadono fuori dall'intervallo.

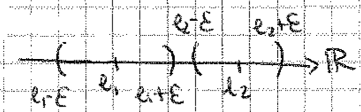
analogamente $\ell = -1$ non è limite

quando una successione ammette limite si dice **convergente**.

PROPRIETÀ:

① Una successione (a_n) **non** può avere due **limiti distinti**

DIMOSTRAZIONE: supponiamo che per assurdo siano ℓ_1, ℓ_2 con $\ell_1 \neq \ell_2$ due limiti



$\varepsilon < \frac{1}{2}\overline{\ell_1\ell_2}$

a_n, con $n>N_1$ cadono tutti nell'intorno di ℓ_1

a_n, con $n>N_2$ cadono tutti nell'intorno di ℓ_2

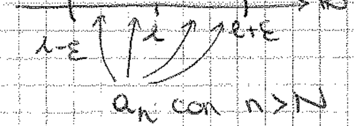
se $n >$ massimo $\{N_1, N_2\}$ allora $a_n \in (\ell_1-\varepsilon; \ell_1+\varepsilon) \cap (\ell_2-\varepsilon; \ell_2+\varepsilon) = \emptyset$

↓

contraddizione

② Se (a_n) è **convergente** allora è **limitata**

DIMOSTRAZIONE: minorante di $\{a_n\} = \min\{a_0, a_1, a_2 \ldots a_N\}$



Con linguaggio comune diciamo che **$a_n \to +\infty$** (a_n tende o diverge a $+\infty$ o positivamente) se, comunque fissato una soglia K, tutti i termini della successione superano la soglia.

Se a_n è grande quanto si vuole, a patto di prendere n sufficientemente

Date due successioni a_n, b_n posso considerare la successione somma (a_n+b_n): $a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2 \dots$ e la successione prodotto $a_0b_0, a_1b_1, a_2b_2 \dots$ e se $b_n \neq 0 \; \forall n$ posso considerare $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ $\frac{1}{b_0}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2} \dots$

Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni: $a, b \in \mathbb{R}$ con $a_n \to a$, $b_n \to b$

allora $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n = a+b$

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ se $b \neq 0$

DIMOSTRAZIONE ②

$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$

Bisogna verificare che, dato $\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N$ risulta $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

$|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

$|a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \Rightarrow |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$

$|a_n(b_n-b) + b(a_n-a)| \leq |a_n(b_n-b)| + |b(a_n-a)|$

$|a_n||b_n-b| + |a_n-a||b|$

$< \varepsilon$ se $n > N_1$; $< \varepsilon$ se $n > N_2$

è convergente quindi limitata, quindi $\exists M > 0 \; |a_n| < M \; \forall n$

quindi l'espressione è $< (M + |b|)\varepsilon$

vale se $n >$ massimo $\{N_1, N_2\}$

② se $a_n \to a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

$b_n \to +\infty$ allora $a_n + b_n \to +\infty$

$a_n \cdot b_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{b_n} \to 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} +\infty + \infty = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \\ +\infty(+\infty) = +\infty \\ +\infty(-\infty) = -\infty \end{array}}$$

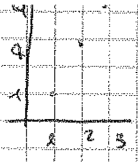
FORME INDETERMINATE:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $+\infty - \infty$; $1^{\pm\infty} \to a_n^{b_n}$

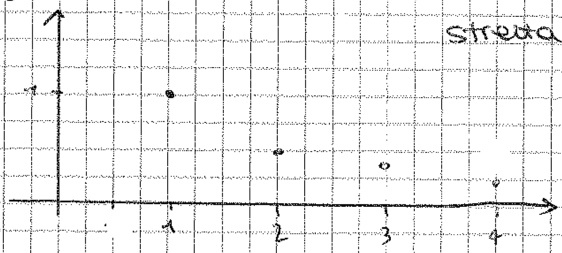
$a_n \to 0$, $b_n \to 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ dipende dalle successioni a_n, b_n e non c'è una regola generale che dia questo valore senza conoscere le successioni.

es. $a_n = n^2 \Rightarrow$ strettamente crescente

$$a_{n+1} = \underbrace{(n+1)^2}_{} = \underbrace{n^2}_{a_n} + \underbrace{2n+1}_{>0} > a_n$$



es. $a_n = \frac{1}{n}$



strettamente decrescente

$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq 1$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftarrow$ sempre vero!

TEOREMA: Se (a_n) è una successione crescente (o decrescente) allora esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (o $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$)

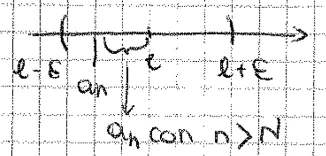
COROLLARIO: Ogni successione monotòna è **regolare**, cioè ha limite finito, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo (a_n) crescente. Sia $\ell = \sup\{a_n\}$ (a_n sono a sinistra di ℓ)

1° CASO $\ell \in \mathbb{R}$

dobbiamo verificare $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$

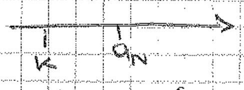
Dato $\varepsilon > 0$ vado a considerare $\ell - \varepsilon$, per definizione di sup $\exists N \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < a_N \leq \ell$



siccome a_n è crescente, se $n > N$ risulta che $\ell - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \ell$. quindi dato $\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ $\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell$ perciò $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

2° CASO $\ell = +\infty \Rightarrow$ non c'è il sup.

Per definizione di sup. dato $k \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : a_N > k$



Ma la successione (a_n) è crescente quindi se $n > N$ allora $a_n \geq a_N > k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

OSSERVAZIONE: il teorema continua a valere se a_n è **definitivamente** (crescente solo da un certo punto in poi $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq N$)

o non strettamente crescente

$i = e^{0 + i\pi/2} = e^{i\pi/2}$

es. scrivi in forma esponenziale $z = \sqrt{3} + i$

$|z| = 2$

$\arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^{\log 2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^{\log 2 + i\frac{\pi}{6}}$

es. $e^{i\pi} = ?$

$e^{i\pi} = e^{0}(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ **formula di Eulero**

se z ha modulo ρ e argomento θ

$z = \rho\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{e^{i\theta}}$ f. trigonometrica

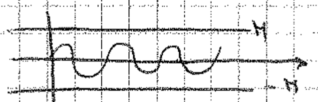
$z = \rho \cdot e^{i\theta} = e^{\log\rho + i\theta}$ f. esponenziale

Limiti ①

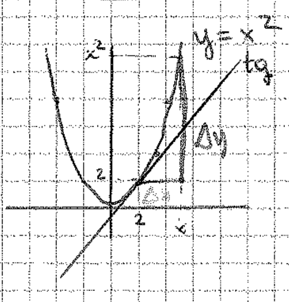
una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice **limitata** superiormente (inferiormente) se la sua immagine $f(A)$ è limitata superiormente (inferiormente). si dice limitata se è limitata sia superiormente sia inferiormente

(f limitata $\Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(x)| < M \quad \forall x \in A$)

$-M < f(x) < M$



LIMITI di FUNZIONI:



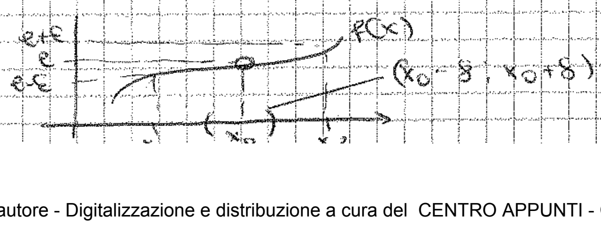
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 = 2 + 2 = 4$

il coefficiente angolare della retta tg nel punto 2 è 4

↓

ma non è sempre questo il calcolo da fare!

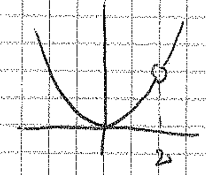
Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, privato eventualmente di x_0. Sia $l \in \mathbb{R}$ allora diciamo che $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ e scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$



punto x_0

es. $f(x) = x^2$ per $x \neq 2$

$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$



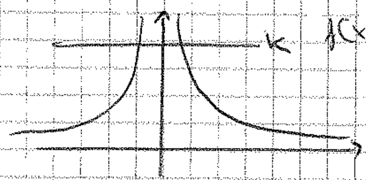
$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

es. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

LIMITE $\pm\infty$ per x che tende a un valore finito

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di x_0 privato di x_0 stesso. Allora diciamo che $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ (rispettivamente $-\infty$) e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (rispett. $-\infty$) se $\forall k > 0 \ \exists \delta > 0$: se $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) > k$ (rispettivamente $\forall k > 0 \ \exists \delta > 0$: se $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) < -k$).

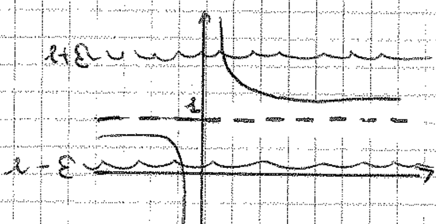
$f(x) > k$



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

LIMITE per $x \to \pm\infty$

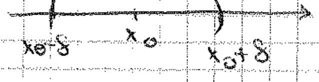
Sia $f: A \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo del tipo $(a, +\infty)$ [o $(a, -\infty)$] allora diciamo che $f(x)$ tende a un numero $l \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$) se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$: se $x \in A$, $x > k$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$



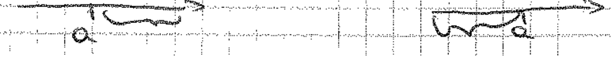
$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

(rispettivamente $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$: se $x \in A$ e $x < k$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$)

Se $x_0 \in \mathbb{R}$; intorno di x_0: $(x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

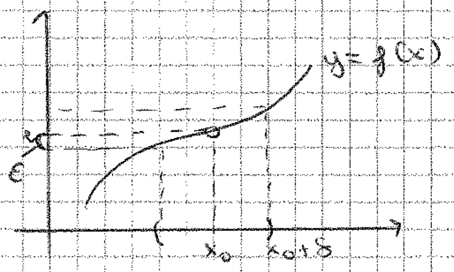


Si dice intorno di $\pm\infty$ un intervallo del tipo limitato superiormente/inferiormente $(a, +\infty)$/$(a; -\infty)$



TEOREMA di PERMANENZA del SEGNO

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \ell > 0$. Sia f una funzione tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0 \ \forall x \in U \neq x_0$

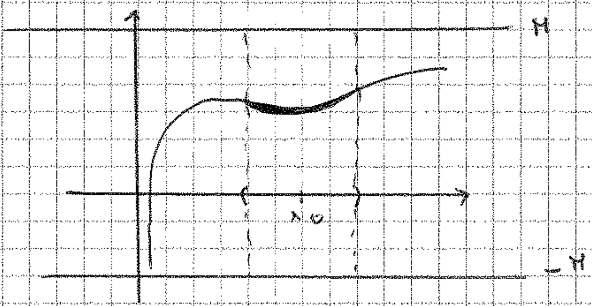


DIMOSTRAZIONE: caso in cui $\ell \in \mathbb{R}, \ell > 0$

Prendo $\varepsilon = \ell/2$ nella definizione di limite $\exists \delta > 0$: se $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ risulta $\ell/2 = \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

TEOREMA di LIMITATEZZA LOCALE

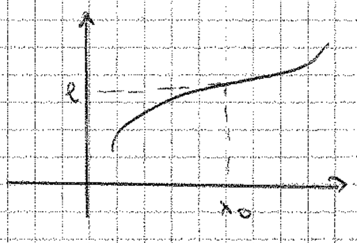
Se f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ allora esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata su U, ossia $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \ \forall x \in U$



TEOREMA di RELAZIONE

Sia $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, sia f una funzione definita in un intorno di x_0 privato eventualmente di x_0, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall$ successione (a_n) che tende a x_0, con $a_n \neq x_0 \ \forall n$, risulta $f(a_n) \to \ell$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è continua la conclusione vale anche senza l'ipotesi "$a_n \neq x_0$"

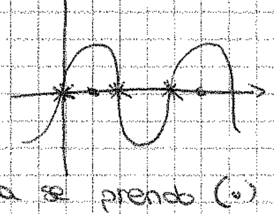


$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$a_n \to x_0, \ a_n \neq x_0$

$f(a_n) \to \ell$

es. Verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste



Per assurdo se fosse $\lim_{x \to +\infty} \sin x = \ell$ allora $\forall$ successione $a_n \to +\infty$ dovrebbe essere $\sin(a_n) \to \ell$.

Ma se prendo $(\cdot)$ $a_n = \pi/2 + 2\pi n$ $\sin(a_n) = 1 \to 1$

se prendo $(*)$ $a_n = \pi n$ $\sin(a_n) = 0 \to 0$

$\Big\}$ 2 limiti diversi assurdo!

LIMITE di FUNZIONE COMPOSTA o CAMBIO di VARIABILE:

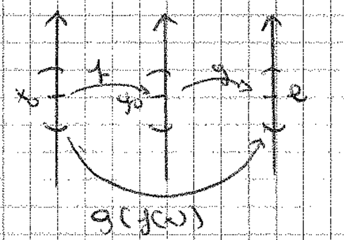
Sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ privato eventualmente di x_0 e esista il $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Sia $g: X \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno di y_0 privato eventualmente di y_0. Supponiamo che valga una delle seguenti condizioni:

① $f(x) \neq y_0 \ \forall x \in X$ e esiste $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

② $y_0 \in \mathbb{R}$ e g è continua in y_0

Allora esiste il limite $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$ e vale $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$



CONSEGUENZA: la composizione di funzione continua è una funzione continua

LIMITI NOTEVOLI:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ perché $\sin$ è continuo in 0

  Se $0 < x < \pi/2$

  $\sin x \leq x \leq \tan x$

  $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \to 1$

  allora $\frac{x}{\sin x} \to 1$

  $\frac{\sin x}{x} = 1 / \frac{x}{\sin x} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

  $1 - \cos x = 2 [\sin(x/2)]^2$

  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2[\sin(x/2)]^2}{x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2 =$

  $= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin y}{y}\right]^2 \to 1$ con $\frac{x}{2} = y$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad a \in \mathbb{R}$

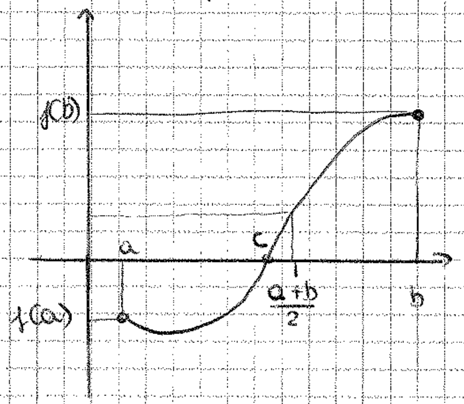
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad a > 0, a \neq 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

TEOREMA di ESISTENZA degli ZERI (di Bolzano)

Sia f una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, $(a<b)$; supponiamo che assume valori di segno discorde in a e in b ($f(a)<0$; $f(b)>0$ oppure $f(a)>0$; $f(b)<0$). Allora esiste $c \in (a,b)$: $f(c)=0$



DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $f(a)<0$ e $f(b)>0$.

Consideriamo il punto $\frac{a+b}{2}$

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ poniamo $c=\frac{a+b}{2}$

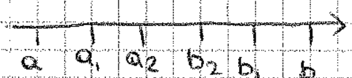
Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ definisco $a_1=a$

$b_1=\frac{a+b}{2}$

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ definisco $a_1=\frac{a+b}{2}$

$b_1=b$

Ripeto lo stesso procedimento con l'intervallo $[a_1;b_1]$ al posto di $[a,b]$ e costruisco $[a_2;b_2]$, ecc...



La successione (a_n) è una successione crescente ed è limitata superiormente da b, quindi $a_n \to l_1 \in [a,b]$.

(b_n) è una successione decrescente e limitata inf. da a e quindi $b_n \to l_2 \in [a;b]$

$$\underset{\searrow l_2}{b_n} - \underset{\searrow l_1}{a_n} = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{\lim x \to +\infty} 0 \qquad l_2-l_1=0 \qquad l_2=l_1$$

Posto $c=l_1=l_2$ verifichiamo che $f(c)=0$

$f(a_n)<0 \quad \forall n \Rightarrow \boxed{f(c)\leq 0}$ $\quad (a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c))$

$f(b_n)>0 \quad \forall n \Rightarrow \boxed{f(c)\geq 0}$

Allora $f(c)=0$

es- $x-e^{-x}=0$

$f(0)=-1$

$f(1)=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}>0$

OSSERVAZIONE: Ponendo $h = x - x_0 = \Delta x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si a f derivabile in x_0, allora si dice retta tangente a f in x_0 (oppure retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$) la retta di equazione $y = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$

es_ scrivere il rapporto incrementale, la derivata e la tg a $f(x) = x^2$ in $x = 3$

$x_0 = 3 \quad f(x_0) = 9$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$ definito su $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

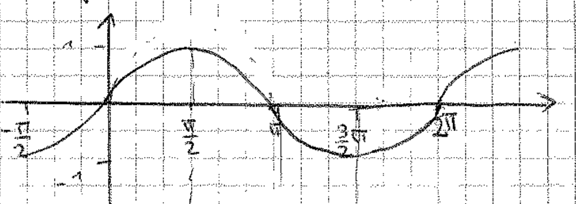
$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$

tg $\Rightarrow y = 9 + 6(x - 3)$

$= 9 + 6x - 18$

$= 6x - 9$

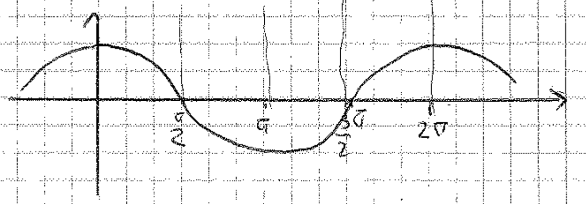
es_ $f(x) = \sin x$



Derivata in $x_0 = 0$

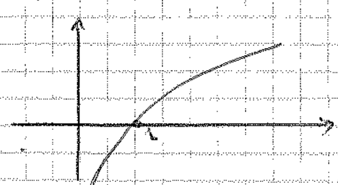
$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$f'(x) = \cos x$

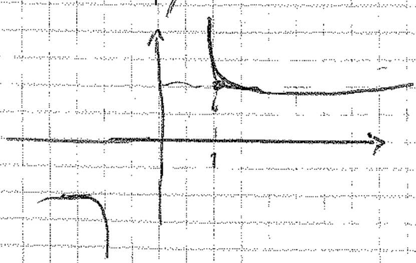


es_ $f(x) = \log x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = 1$



$f(x) = \frac{1}{x}$



REGOLE di DERIVAZIONE

- Se f e g sono funzioni derivabili in un punto x_0, allora la funzione somma $f(x)+g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x) - [f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} =$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{= f'(x_0)} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)+g(x_0)}{x-x_0}}_{= g'(x_0)} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

- Se f e g sono funzioni derivabili in un punto x_0, allora la funzione prodotto $f(x)\cdot g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)}$$

- Se f e g sono derivabili in x_0 e $g(x_0)\neq 0$ allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile e

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}}$$

- Sia f derivabile in x_0 e g derivabile in $y_0 = f(x_0)$ allora $g\circ f\, [g(f(x))]$ è derivabile in x_0 e $\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$

es. $h(x) = \sin^2(x) = (\sin x)^2 = g(f(x))$ dove $g(y) = y^2$
$f(x) = \sin x$

$D \sin x = \cos x$

$D\, y^2 = 2y$

$D (\sin x)^2 = g'(\sin x)\cdot D \sin x = 2\sin x \cdot \cos x$

- Se f è strettamente crescente e derivabile in un intervallo aperto I, sia $x_0 \in I$ e $f'(x_0)\neq 0$ allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e vale $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$

PRIMA FORMULA dell'INCREMENTO FINITO

Sia f derivabile in x_0 quindi $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

cioè: $\omega(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$\downarrow$
infinitesimo per $x \to x_0$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0)}$$

Quindi se f è crescente e derivabile allora $f'(x_0) \geq 0$

MASSIMI e MINIMI

Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto del dominio ($x_0 \in A$). Diciamo che f ha in x_0 un punto di massimo relativo o locale se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 : $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathcal{U} \cap A$

- se $\leq$ minimo relativo
- se $>$ allora x_0 si dice punto di massimo relativo forte o stretto, per $x \neq x_0$

TEOREMA di FERMAT

Sia f definita in un intorno di un punto x_0 e derivabile in x_0, allora se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo, $f'(x_0) = 0$

I punti x_0 in cui f è derivabile e $f'(x_0) = 0$ si dicono **PUNTI STAZIONARI**

DIMOSTRAZIONE:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

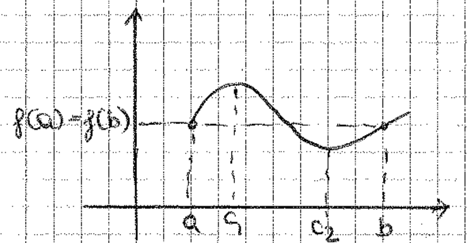
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Per ipotesi $\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$

Non è vero che un punto stazionario è necessariamente un punto di massimo o minimo relativo.

es. $y = x^3$ $\quad x = 0$ punto stazionario ma non di massimo o minimo.

TEOREMA di ROLLE



Sia f una funzione definita e continua su un intervallo chiuso $[a;b]$ e derivabile su un intervallo aperto $(a;b)$. Se $f(a) = f(b)$ esiste almeno un punto $c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema di Weierstrass esiste un punto di massimo (assoluto) e un punto di minimo (assoluto). Almeno uno di questi due deve cadere nell'intervallo aperto $(a;b)$; infatti se cadessero negli estremi, siccome $f(a) = f(b)$, la funzione avrebbe valore minimo = valore massimo, quindi sarebbe una funzione costante e

$= g(b) f(a) - f(b) g(a)$

$\varphi(b) = [g(b) - g(a)] f(b) - [f(b) - f(a)] g(b) =$

$= f(a) (g(b) - g(a) f(b)$

$\varphi(a) = \varphi(b)$

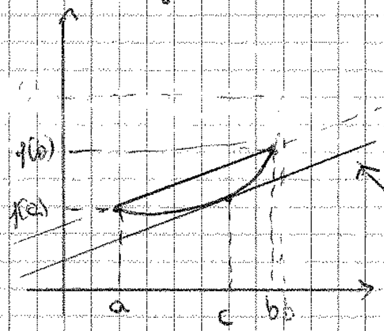
Per il teorema di Rolle $\exists c \in (a;b) : \varphi'(c) = 0$

TEOREMA di LAGRANGE

Se f è una funzione continua su $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$, $\exists c \in (a;b)$:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

se nel teorema di Cauchy si prende $g(x) = x$ otteniamo questa soluzione.



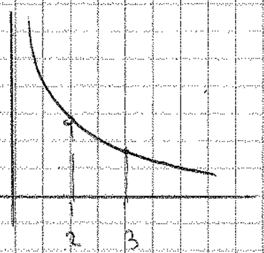
← ha come coefficiente angolare $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

tg in $x = c$ // alla secante degli estremi

CONSEGUENZA: $\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$ ← SECONDA FORMULA dell'INCREMENTO FINITO

Se $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a;b)$ allora $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

es- $f(x) = \frac{1}{x}$ su $[2;3]$



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] : 1 = f'(c)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'(c) = -\frac{1}{c^2}$

$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{6}$

$c^2 = 6$

$c = \sqrt{6}$

★ Sia I un intervallo (non necessariamente aperto) e sia f una funzione continua su I e derivabile nei punti interni di I. Allora:

1. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x$ interno ad I allora f è strettamente crescente su I
2. Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$ interno ad I allora f è crescente su I
3. se $f'(x) = 0 \quad \forall x$ interno ad I allora f è costante in I

DIMOSTRAZIONE: Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$

Applichiamo il Teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_1; x_2]$

quindi $\exists c \in (x_1; x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$

Se ① $f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

TEOREMA di DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

se f, g sono derivabili in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \omega_1(x)(x-x_0)}{\underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \omega_2(x)(x-x_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{se } g'(x_0) \neq 0$$

Sia x_0 un numero reale e f, g due funzioni definite e derivabili in un intorno destro di x_0 con $g'(x) \neq 0$ in tale intorno.
Supponiamo che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \pm\infty$. Se il limite del rapporto delle derivate $\left(\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right)$ (*) esiste (finito o $\pm\infty$), allora esiste anche $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell}$

DIMOSTRAZIONE: caso $\frac{0}{0}$ con $\ell \in \mathbb{R}$

Definiamo f e g anche in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$
se $x > x_0$ sufficientemente prossimo a x_0, applichiamo il teorema di Cauchy sull'intervallo $[x_0, x]$: $\exists c \in (x_0, x)$:

$$\frac{f(x) - \cancel{f(x_0)}^{0}}{g(x) - \cancel{g(x_0)}_{0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (**)$$

Per ipotesi (*) $\exists \delta > 0$: se $x_0 < x < x_0 + \delta$, allora $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$. Ma quindi siccome $x_0 < c < x < x_0 + \delta$

abbiamo che $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| < \varepsilon$ ossia per (**) $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$

se $x_0 < x < x_0 + \delta$

OSSERVAZIONI: ① Vale un teorema analogo se $x \to x_0^-$ e quindi $x \to x_0$

② Vale un teorema analogo per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x} = 1$

Non si può applicare de l'Hôpital perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ non esiste

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x} = \frac{0}{0}$

es. per $x \to +\infty$ $\quad x = o(x^2) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

$x^2 = o(e^x) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

$\log x = o(x) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

$\log x = o(\sqrt{x}) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$

per $x \to 0$ $\quad x^2 = o(x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

$1-\cos x = o(x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{x}{x} = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x^m = o(x^n) \text{ se } m<n \text{ per } x\to+\infty \\ x^m = o(x^n) \text{ se } m>n \text{ per } x\to 0 \end{array}}$

es. per $x \to 0$ $\quad \sin x \sim x \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \lim_{x\to 0} 1-\cos x \cdot \frac{2}{x^2} = 1$

$e^x - 1 \sim x \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\log(1+x) \sim x$

$(1+x)^a - 1 \sim a x$

$\tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

per $x \to +\infty$ $\quad x + 100 \sim x$

$x^2 + \log x \sim x^2$

LEGAME TRA O e $\sim$

$f \sim g \iff f = g + o(g)$

$o(g)$: trascurabile rispetto a g

$f - g = o(g)$

$\frac{f-g}{g} = \frac{o(g)}{g} \to 0$

$\frac{f}{g} = 1$

$\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x\to 0$

$e^x - 1 = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

la parte principale di $1-\cos x$ rispetto a φ per $x \to 0$ è data da $\frac{1}{2}x^2$

Siano f e g due infiniti per $x \to x_0$ allora:

① Se f è $o(g)$ per $x \to x_0$ diciamo che f è un <u>infinito di ordine inferiore</u> a g e che g è un <u>infinito di ordine superiore</u> ad f

② se esiste finito e non nullo il limite del rapporto $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ diciamo che f e g hanno lo <u>stesso ordine di infinito</u>.

③ f e g si dicono <u>non confrontabili</u> se non accade che: $f = o(g)$, $g = o(f)$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è finito e non nullo

[lo stesso vale per gli infinitesimi con il termine "inferiore" scambiato con il termine "superiore" e vice versa]

es - $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \to 0$

$\frac{1}{x^2}$ è un infinito di ordine inferiore a $\frac{1}{x^3}$ per $x \to 0$

$\frac{1}{x^3}$ è un infinito di ordine superiore per $x \to 0$

es - $x^2 = o(x^3)$ per $x \to +\infty$

x^2 è un infinito di ordine inferiore a x^3 per $x \to +\infty$

es - $(e^x - 1)^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$[e^x - 1 = x + o(x)$

$(e^x-1)^2 \quad (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2) = o(x)]$

$(e^x-1)^2$ è un infinito di ordine superiore a x per $x \to 0$

$(e^x-1)^2$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $1-\cos x$ per $x \to x$

perchè $\frac{(e^x-1)^2}{1-\cos x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$ per $x \to 0$ l'espressione tende a $2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

Derivate ②

<u>PROPOSIZIONE</u>: Sia f continua in un punto x_0 e derivabile in un intorno di x_0 privato di x_0; allora se esiste finito e $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$ allora f è anche derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$

es - $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{per } x \leq 0 \\ ax & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$

Determinare a in modo che f sia derivabile in $x=0$

Calcolo $D^k P_n(x_0)$:

$$D^k P_n(x) = D^k a_0 + D^k a_1 (x-x_0) + \dots + D^k a_{k-1}(x-x_0)^{k-1} + D^k a_k (x-x_0)^k + D^k a_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \dots + D^k a_n (x-x_0)^n$$

Per $x = x_0$ rimane solo $a_k D^k (x-x_0)^k$

$D^{(k)} P_n(x_0) = a_k \cdot k!$

es- $p(x) = 2 + 3(x-5)^2 + 4(x-5)^3$

$D^3 p(5) = 4 \cdot 3!$

quindi da (**) trovo $f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Il polinomio $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ si dice POLINOMIO di TAYLOR di f di ordine n centrato in x_0

es- $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = e^x$ $\quad f^k(0) = 1 \ \forall k$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

$P_1(x) = 1 \cdot 1x$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!}$

$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

es- $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \sum_{k=1}^{4} 2^k$

★ TEOREMA di TAYLOR (sviluppo di Taylor con il RESTO di PEANO)

Raffinamento della prima formula dell'incremento finito

Sia n un numero intero ≥ 1 e f una funzione definita e derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di un punto x_0 e esista la derivata n-esima nel punto. Sia $P_n(x)$, il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x.

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2) \quad P_1 \text{ e } P_2$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) P_3$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad P_5$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$

Se f è dispari allora f' è pari
Se f è pari allora f' è dispari

es. $f(x) = \cos x \quad x_0 = 0$

$P_1(x) = 1 \qquad \cos x = 1 + o(x)$

$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{0}{3!} x^3 = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1})$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$

es. $f(x) = \log(1+x) \quad x_0 = 0$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$

$(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

es. $f(x) = (1+x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad x_0 = 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$

dove $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad k \geq 1$

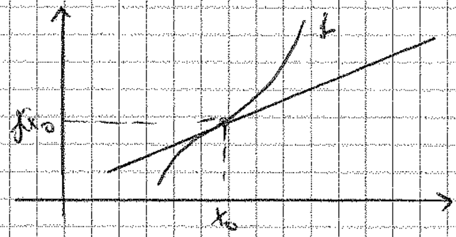
$\binom{\alpha}{0} = 1$

$\binom{\alpha}{1} = \alpha \qquad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \qquad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 191

③ x_0 è un punto di flesso ascendente se $\exists\, \mathcal{U}$ di x_0 tale che:

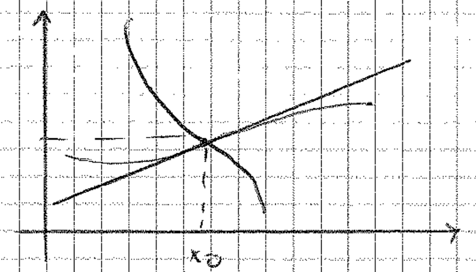
$$\begin{cases} f(x) \leq t(x) & \text{per } x \in \mathcal{U} \quad x < x_0 \\ f(x) \geq t(x) & \text{per } x \in \mathcal{U} \quad x > x_0 \end{cases}$$



(prima sta sotto e poi sopra)

④ x_0 è un punto di flesso discendente se $\exists\, \mathcal{U}$ di x_0 tale che:

$$\begin{cases} f(x) \geq t(x) & \text{per } x \in \mathcal{U} \quad x < x_0 \\ f(x) \leq t(x) & \text{per } x \in \mathcal{U} \quad x > x_0 \end{cases}$$



Sia f derivabile $(n-1)$ volte in un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 e esista la derivata n-esima in x_0; $n \geq 2$. Supponiamo che $f''(x_0) = 0$;
$f'''(x_0) = 0 \;\ldots\ldots\; f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

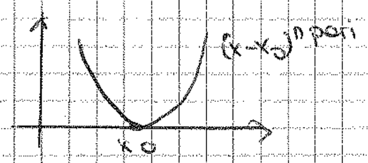
Allora: Se n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora f strettamente convessa in x_0
n pari $f^{(n)}(x_0) < 0$ f strettamente concava
Se n dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 punto di flesso discendente
n dispari $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 punto di flesso ascendente

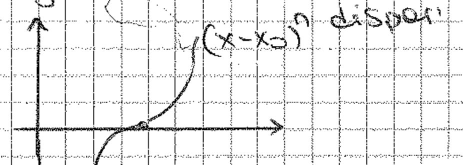
DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{t(x)} + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - t(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left[(x - x_0)^n\right]$$

$$= (x - x_0)^n \cdot \Big[\underbrace{\frac{f^{n}(x_0)}{n!}}_{\text{costante da cui dipende il segno}} + o(1)\Big]$$





quindi vale il teorema

es. $f(x) = (1-\cos x)\sin^2 x$

$f'(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x + (1-\cos x)[2\sin x \cos x] =$

$= \operatorname{sen} x\,[\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2\cos^2 x] =$

$= \operatorname{sen} x\,[2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 1].$

$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin x = x + o(x)$

$\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$

$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x^2 + o(x^2)\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{4}(0) = \frac{1}{2}\cdot 4! > 0$

Si ha un punto di minimo

CASO PARTICOLARE $n=2$

Sia f una funzione derivabile 2 volte in x_0

1. se la $f''(x_0) > 0$, f è strettamente convessa in x_0
2. se la $f''(x_0) < 0$, f è strettamente concava in x_0
3. se f è convessa in x_0, allora $f''(x_0) \geq 0$
4. se f è concava in x_0, allora $f''(x_0) \leq 0$
5. se f ha un flesso in x_0, allora $f''(x_0) = 0$

Se I è un intervallo aperto e f è derivabile in I, diciamo che f è convessa (strettamente convessa, concava, strettamente concava) in I essa è convessa (") in ogni punto di I.

Se f è derivabile 2 volte su $I \iff f''(x_0) \geq 0 \ \forall x \in I$

f concava su $I \iff f''(x_0) \leq 0 \ \forall x \in I$

f crescente $\iff f'(x) \geq 0$

f descrescente $\iff f'(x) \leq 0$

Integrali

INTEGRAZIONE INDEFINITA = ricerca di primitive

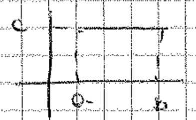
INTEGRAZIONE DEFINITA = calcolo di aree

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 191

Se $f(x) \geq 0$ e integrabile, per definizione l'area della regione sottesa dalla curva è il valore dell'integrale

$$\text{area} = s = S = \int_a^b f(x)\,dx$$

es. $f(x) = c$



$$s(P) = c(b-a)$$
$$S(P) = c(b-a)$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

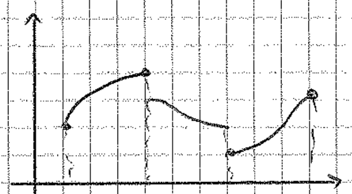
es. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$ => FUNZIONE di DIRICHLET

su $[0;1]$
$s(P) = 0 \ \forall P$
$S(P) = 1 \ \forall P$ → non è integrabile

Sono integrabili su un intervallo $[a;b]$:

① le funzioni continue su $[a;b]$

② le funzioni continue a tratti su $[a;b]$ (funzioni con un numero finito di discontinuità eliminabili o di 1ª specie)



③ le funzioni monotone su $[a;b]$

PROPRIETÀ di:

Se f e g sono funzioni integrabili su $[a;b]$ allora:

① LINEARITÀ → $f(x)+g(x)$ è integrabile su $[a;b]$ e

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

→ Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x)$ è integrabile e $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

② MONOTONIA (ISOTONIA) → se $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a;b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

In particolare se $f(x) \geq 0$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

③ $|f(x)|$ è integrabile su $[a;b]$ e $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

ADDITIVITÀ dell'INTEGRALE RISPETTO all'INTERVALLO di INTEGRAZIONE (proprietà)

Se f è integrabile su $[a;b]$ e $c \in (a;b)$ allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx} \quad ⊛$$

Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora se $a, b \in I$ e $a < b$ si pone

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Se $a = b$ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Con queste definizioni la formula ⊛ vale con $a, b, c \in I$ in ordine qualsiasi.

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE

Sia f una funzione continua su un intervallo I, $a \in I$ e $F(x)$ la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; allora F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Quindi $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su I.

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

DIMOSTRAZIONE: Verifichiamo che $F'(x_0) = f(x_0)$ quando x_0 è un punto interno ad I (non esterno)

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \to \text{media integrale di } f \text{ sull'intervallo con estremi } x_0; x$$

Siccome f è continua in x_0, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: se $|x - x_0| < \delta$ $f(x)$ assume valori compresi tra $f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_0) + \varepsilon$

quindi $$f(x_0) - \varepsilon \le \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta$$

ossia $$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x) = F'(x_0)$$

CONSEGUENZA: se f è continua su un intervallo $[a;b]$ e G è una primitiva allora $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$ ♡ e dal teorema F. del calcolo I.:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 191

es - $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

sostituzione $y = x^2+1$ $\quad dy = 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\log|y| + C = \frac{1}{2}\log|\underbrace{(x^2+1)}_{\text{sempre} \geq 0}| + C = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

es - $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^2 x$ $\qquad y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$\int_{0 \to \text{sen}\,0}^{1 \to \text{sen}\,\pi/2} y^2\,dy = \frac{1}{3}$

INTEGRAZIONE di FUNZIONI RAZIONALI

$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi

es - $\int \frac{x^3+x+3}{x^2+2x+1}$

- se grado (A) $\geq$ grado (B)

$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

dove $Q(x)$ è un polinomio e $R(x)$ è un polinomio di grado $<$ rispetto al grado di $B(x)$

es - $\frac{2x^2+5x+1}{x^2-1} = 2 + \frac{5x+3}{x^2-1}$

- se $B(x)$ è un polinomio di secondo grado

① $\Delta > 0$ $\qquad B(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

dove x_1 e x_2 sono le radici di $B(x)$

se grado $A < 1$ $\quad \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C_1}{x-x_1} + \frac{C_2}{x-x_2}$ con $C_1 e C_2 \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

es - $\int \frac{8x+1}{x^2+x-2}\,dx$

$\frac{8x+1}{x^2+x-2} = \frac{C_1}{(x-1)} + \frac{C_2}{(x+2)}$

2 METODI:

ⓐ moltiplico tutto per $(x-1)$

$\frac{8x+1}{(x+2)} = C_1 + C_2\frac{(x-1)}{(x+2)}$

faccio il $\lim_{x\to 1}$

$\frac{8+1}{1+2} = C_1 \qquad C_1 = \frac{9}{3} = 3$

③ $\Delta<0$ ci si riconduce al caso dell'integrale $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$

es. $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+6}\,dx = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx + \int \frac{-9}{x^2+4x+6}\,dx$ $\quad -9 \to (-5-4)$

$= 2\log|x^2+4x+6| - 9\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx$

$\downarrow$

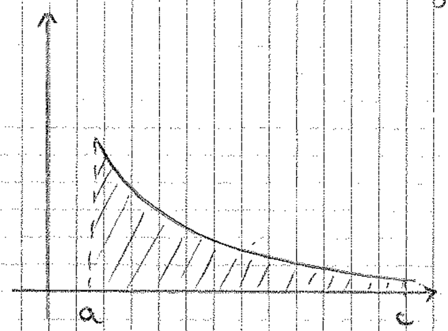
$\int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,dx$

$= 2\log|x^2+4x+6| - \frac{9}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + C$

INTEGRALI IMPROPRI (calcolo aree illimitate)

$\downarrow$

uno degli estremi è ∞



Si considera una funzione $f:[a;+\infty)$ continua.

Si può quindi considerare $F(c) = \int_a^c f(t)\,dx \quad c > a$

Se il $\lim_{c\to+\infty} F(c)$ esiste (ℓ; $+\infty$; $-\infty$) allora poniamo il valore

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} F(c)$ e diciamo che l'integrale improprio al primo membro è convergente, positivamente divergente, negativamente divergente, o indeterminato a seconda che il limite a secondo membro sia finito, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non esiste.

es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{c\to+\infty} \left[\log x\right]_1^c$

$= \lim_{c\to+\infty} \log c - \cancel{\log 1}$

$= +\infty$ diverge positivamente

es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} -\frac{1}{c} + 1 = +1$

$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge allora per il confronto

converge anche $\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| \, dx$ (*)

$f(x) = f(x) + |f(x)| - |f(x)|$

quindi $\int_a^c f(x)\, dx = \underbrace{\int_a^c f(x) + |f(x)|\, dx}_{\text{ha limite finito per } c \to +\infty \text{ per (*)}} - \underbrace{\int_a^c |f(x)|\, dx}_{\text{ha limite finito per } c \to +\infty \text{ per ipotesi}}$

quindi il limite per $c \to +\infty$ dell'espressione è finito.

quando $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, diciamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ **converge assolutamente**

quindi il criterio precedente ci dice che se un integrale improprio converge assolutamente, allora converge

es. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx$

Verifichiamo che converge assolutamente e quindi per il criterio di convergenza assoluta è convergente.

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \right| dx$

$\left| \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \right| = \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$

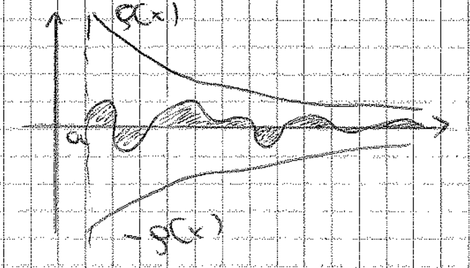
Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ converge

per il criterio del confronto anche $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} \right| dx$ converge

__CRITERIO di CONVERGENZA ASSOLUTA__ (prima versione)

Siano $f, g : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e con $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a; +\infty)$

allora se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge



$-g(x) \leq f(x) \leq +g(x)$

$\sin(x^2-4) = 0 + 4(x-2) + o(x-2)$

$D' = \cos(x^2-4) \cdot 2x$ per $x \to 2$ $= 4$

$\sin(x^2-4) = 4(x-2)$

$\frac{1}{\sin(x^2-4)} \sim \frac{1}{-4(2-x)}$ ordine di infinito 1 rispetto a $\frac{1}{2-x}$

quindi per il criterio, l'integrale diverge per $x \to 2^-$

Equazioni Differenziali

Un' EQUAZIONE DIFFERENZIALE è una relazione che fa intervenire una funzione incognita insieme alle sue derivate.

$$y' = y$$

$y(x)$: funzione incognita

Cerca $y(x)$: $y'(x) = y(x)$ $\forall x \in$ Intervallo

Diciamo che l'equazione ha ordine n se intervengono le derivate di y fino all' ordine n.

una soluzione è una funzione $y(x)$, definita su un intervallo I e derivabile n volte su I, che soddisfa l' equazione $\forall x \in I$

$y'' + 2y' = x^2$ $y(x)$ f incognita

↳ equazione del secondo ordine

es - $y' = y$

$y(x) = C \cdot e^x$ con $C =$ Costante

sono soluzioni su $\mathbb{R}$

Non vi sono altre soluzioni oltre a quelle del tipo $y(x) = C \cdot e^x$. Infatti se $y(x)$ è soluzione: $e^{-x} y(x) =$ Costante, cioè la derivata deve essere 0

$D'(e^{-x} y(x)) = -e^{-x}(y(x)) + e^{-x} \underbrace{y'(x)}_{= y(x)} = 0$

quindi $y(x) = C \cdot e^x$

es - $y' = f(x)$ $y'(x) =$ incognita

$y'(x) = f(x)$ $f(x) =$ continua su un intervallo I

$y(x) = \int f(x)\,dx + C$

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{x^2/2} + C \right]$$
$$= 1 + C \cdot e^{-x^2/2}$$
$$= C \cdot e^{-x^2/2}$$

ex. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ per $x > 0$ perché poi devo trovare $y(1) = 2$

$B(x) = \int x e^{\log|x|} dx = \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3}$

$y = e^{-\log x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$

$= x^{-1} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$

$= \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

$y(1) = \frac{1}{3} + C = 2$

$C = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$

$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}$ definita su $(0; +\infty)$

soluzione massimale $\rightarrow$ non posso ampliare ulteriormente il suo dominio

EQUAZIONI a VARIABILI SEPARABILI

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

dove g è una funzione continua su un intervallo I e h è una funzione continua su un intervallo J.

Una funzione costante è una funzione $y(x) = C$ dove $x \in I$

Sostituendo nell'equazione:

$$0 = g(x)\, h(C) \quad \forall x \in I$$

si deduce che $h(C) = 0$

Una funzione costante è una soluzione solo quando il valore della costante è uno zero della funzione. Le soluzioni costanti sono date quindi da: $g(x) = C$, $x \in I$ dove $f(c) = 0$

es- $\begin{cases} y' = (1+y^2)x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $h(y) \neq 0 \ \forall y$

$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)x \qquad \frac{dy}{(1+y^2)} = x\,dx$

$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int x\,dx \qquad \operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$

$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

$y(0) = \operatorname{tg}(c) = 1 \qquad c = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

es- $y' = x \cdot y$ (lineare omogenea)

$y' + a(x)y = 0$

$a(x) = -x$

$A(x) = -\frac{x^2}{2}$

$y(x) = c \cdot e^{x^2/2}$

oppure:

$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$

$\frac{dy}{y} = x\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \qquad \log|y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad |y| = e^{(x^2/2 + c)}$

$y = \pm e^{x^2/2 + c} = \pm e^{c} \cdot e^{x^2/2}$

$\pm e^{c} \rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y(x) = k \cdot e^{x^2/2}$

In aggiunta c'è la soluzione della costante $y(x) = 0$

Quindi alla fine l'integrale generale è uguale a quello calcolato con l'altro metodo.

Le soluzioni hanno grafici che non si intersecano mai (solo una soluzione passa per un determinato punto

es- $y' = (y-1)(y-2)$

$= \underbrace{y^2 - 3y + 2}_{h(y)=0 \text{ per } y=1 \text{ e } y=2}$

Se λ_1 e λ_2 sono due radici distinte allora tutte le funzioni $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono soluzioni e si dimostra che non vi sono altre soluzioni possibili.

Integrale generale:

① Se l'equazione caratteristica ha 2 radici distinte λ_1 e λ_2 l'integrale generale è: $\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

② Se l'equazione caratteristica ha 1 radice doppia λ, l'integrale generale è $\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

③ Se l'equazione caratteristica ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ l'integrale generale è $\boxed{y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$

ESEMPI: ① $y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

② $y'' - 6y' + 9y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}$

③ $y'' + 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \begin{cases} -1-2i \\ -1+2i \end{cases}$

$y(x) = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x)$

→ EQUAZIONI NON OMOGENEE

$y'' + ay' + by = g(x)$

$a, b \in \mathbb{R}$

$g(x)$ continua su un intervallo.

L'integrale generale dell'equazione completa è dato dall'integrale generale di quella omogenea associata più l'integrale particolare di quella completa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 191

es - $y'' + y' - 6y = x e^{-3x}$

$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

$y_p(x) = \underbrace{(ax+b)}_{\text{polinomio di 1° grado}} e^{-3x} \cdot x$

$y_p(x) = (ax^2+bx)e^{-3x}$

$y_p'(x) = (2ax+b)e^{-3x} - 3(ax^2+bx)e^{-3x}$

$y_p''(x) = 2ae^{-3x} - 3(2ax+b)e^{-3x} - 3(2ax+b)e^{-3x} + 9(ax^2+bx)e^{-3x}$

sostituisco

$2a - 6ax - 3b - 6ax - 3b + \cancel{9ax^2} + \cancel{9bx} + 2ax + b - \cancel{3ax^2} - \cancel{3bx} - \cancel{6ax^2} - \cancel{6bx} = x$

$\begin{cases} 2a - 3b - 3b + b = 0 \\ -12ax + 2ax = x \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\frac{5}{2} b \\ -a = -\frac{1}{10} \end{cases}$ $b = -\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{25}$

$y_p(x) = \left(-\frac{1}{10}x - \frac{1}{25}\right) x \, e^{-3x}$

$y_c(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{1}{25}\right) x \, e^{-3x}$

es - $y'' + y = \sin x \quad (e^{0x})$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i1 = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{i}_{\beta}$

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_p(x) = x \cdot a \cdot (e^{0x}) \cos x + x b \sin x$

$y_p'(x) = a\cos x - ax\operatorname{sen} x + b\sin x + bx\cos x$

$y_p''(x) = -a\sin x - a\operatorname{sen} x - ax\cos x + b\cos x + b\cos x - bx\operatorname{sen} x$

$-2a\operatorname{sen} x - \cancel{ax\cos x} + 2b\cos x - \cancel{bx\operatorname{sen} x} + \cancel{ax\cos x} + \cancel{bx\sin x} = \sin x$

$-2a\operatorname{sen} x + 2b\cos x = \sin x$

$2b = 0 \qquad b = 0$

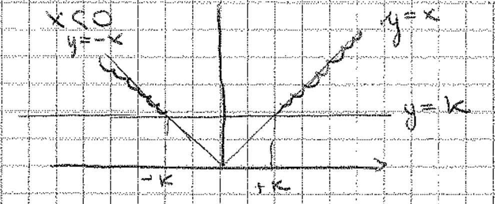
$-2a = 1 \qquad a = -\frac{1}{2}$

$y_c(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

Valore Assoluto

$$y=|x| \iff \begin{cases} y=x & x\geq 0 \\ y=-x & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=|x| \\ y=k & k\geq 0 \end{cases}$$



$$|x|=k \iff \begin{cases} x=k & x\geq 0 \\ -x=k & x<0 \end{cases}$$

$|x|>k$

$\downarrow$

$x<-k \lor x>+k$

$|x|=k \iff x=\pm k$

$|x|<k \iff -k<x<+k$

$|x|>k \iff x<-k \cup x>k$

Esercizio

$$A=\left\{ x\in\mathbb{R} : \frac{-|x+3|+1}{x^2-1}\geq 0 \right\}$$

$$\begin{cases} ① & \cancel{-}\dfrac{|x+3|+1}{\cancel{(x^2-1)}}\geq 0 \\ ② & x^2-1>0 \end{cases}$$

① $-|x+3|\geq -1$

$|x+3|\leq 1$

$-1\leq x+3\leq 1$

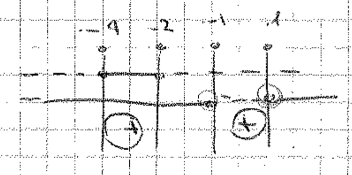
$-1-3\leq x+\cancel{3}-\cancel{3}\leq 1-3$

$-4\leq x\leq -2$

② $x^2>1$

$x<-1 \lor x>1$

$$\begin{cases} -4\leq x\leq -2 \\ x\leq -1 \lor x>1 \end{cases}$$

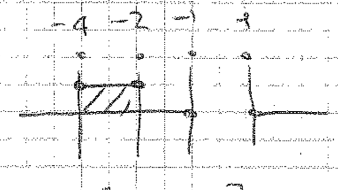


$[-4;-2] \cup (-1;1)$

Esercizio

$$B=\left\{ x\in\mathbb{R} : -|x+3|+1\geq 0,\ x^2-1>0 \right\}$$

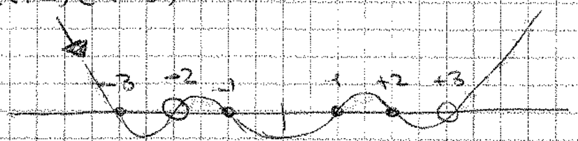
$$\begin{cases} -|x+3|+1\geq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\leq x\leq -2 \\ x\leq -1 \cup x>1 \end{cases}$$



$[-4;-2]$

$$D = \frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$ sol: $x=1$; $x=-1$; $x=-3$; $x=2$; $x=-2$; $x=3$



$D > 0$

$D = (-\infty; +3] \cup (-2; -1] \cup [1; 2] \cup (+3; +\infty)$

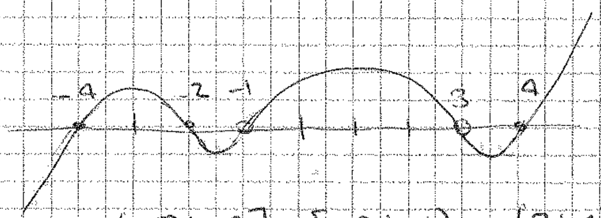
Si parte dall'alto con la curva quando la disequazione è di grado pari (x^6), invece si parte dal basso quando è di grado dispari (x^5). Se $-x^6$ e $-x^5$ i casi si invertono.

Pallino pieno per il numeratore e pallino vuoto per il den.

Esercizio

$$\frac{(x^2-16)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{(x-4)(x+4)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$



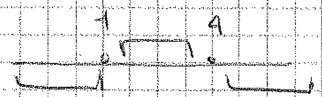
$(-\infty; -4] \cup [-2; -1) \cup (3; 4]$

Esercizio

$$\frac{|x-1|}{x+4} \geq \frac{|x-4|}{x-2}$$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$

$|x-4| = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -(x-4) & x < 4 \end{cases}$



① $x < 1$

$$\frac{1-x}{x+4} \geq \frac{4-x}{x-2}$$

$$\frac{(x-1)(x-2) - (x-4)(x+4)}{(x+4)(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{\cancel{x^2} - 2x - x + 2 - \cancel{x^2} + 16}{(x+4)(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{-3x+18}{(x+4)(x-2)} \leq 0$$ sol $\rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

e.c. il caso $x<1 \rightarrow$ sol $= \boxed{-4 < x < 1}$

Esercizio

$\sqrt{\frac{4x+1}{x}} < 1$ D: $\frac{4x+1}{x} \geq 0$

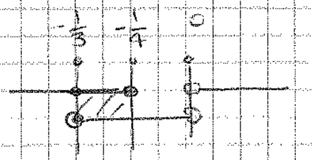
$\begin{cases} \frac{4x+1}{x} \geq 0 \to x = -\frac{1}{4} \\ \qquad\qquad\quad \to x = 0 \\ \frac{4x+1}{x} < 1 \end{cases}$

$x \leq -\frac{1}{4} \lor x > 0$

$\frac{4x+1-x}{x} < 0$

$\frac{3x+1}{x} < 0 \to x = -1/3$
$\to x = 0$

$-\frac{1}{3} < x < 0$



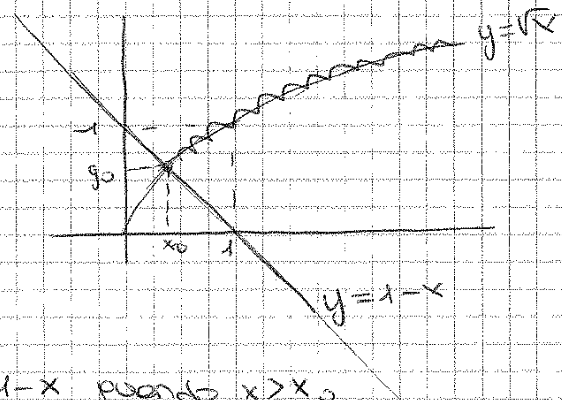
$-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}$

RADICI

$\sqrt{n}$ > numero positivo o negativo
$\sqrt{n}$ < numero positivo

Esercizio

$\sqrt{x} > 1-x$



$\sqrt{x} > 1-x$ quando $x > x_0$

$\sqrt{x} = 1-x$

$x = (1-x)^2$

$x = 1-2x+x^2$

$x^2-3x+1=0 \quad \Delta = 9-4 = 5 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

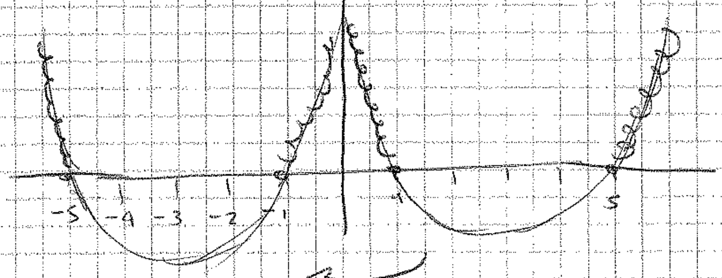
$\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 1?$ $\quad 3+\sqrt{5} < 2 \quad \sqrt{5} < 1?$ NO!

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 1?$ $\quad 3-\sqrt{5} < 2 \quad 1 < \sqrt{5}?$ sì! $\quad x_0 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$

$x > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} x<-2 \cup x>2 \\ x\le -1/2 \cup x \geq 1/2 \\ x^2-6|x|+5\geq 0 \end{cases}$$

$y = x^2-6x+5 = (x-5)(x-1)$



simmetria per il valore assoluto

$x<-5 \cup -1<x<1 \cup x>5$

$x\geq 0 \quad x^2-6x+5>0$

$x<0 \quad x^2+6x+5>0$

$|x|>5 \qquad x<-5 \cup x>5$

es. 1.1

$A = \{y\in\mathbb{Q} : -1\le x<1\}$ maggioranti e minoranti?

$A\subseteq\mathbb{R}$

1 è un maggiorante ma non appartiene ad A

l'insieme dei minoranti: $\{x\in\mathbb{R}: x\le -1\}$

-1 è un minorante e appartiene ad A

es. 1.2

$A = \{x\in\mathbb{Q}: x^2-2\le 0\}$

$\pm\sqrt{2}$ non appartiene a $\mathbb{Q}$ -> non ci sono estremi

$A = \{x\in\mathbb{Q}: x^2-2<0\}$

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ l'insieme dei maggioranti di A in $\mathbb{R}$: $\{x\in\mathbb{R}: x\geq\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ maggiorante, $\sqrt{2}\notin A$

l'insieme dei minoranti di A: $\{x\in\mathbb{R}: x\le -\sqrt{2}\}$

$-\sqrt{2}$ è un minorante $-\sqrt{2}\notin A$

es. 3.4

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$

limitato

es. 4.1

$A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$

$\inf A = -1 = \min A$

$\sup A = 1$

es. 4.2

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$

$\inf A = -\sqrt{2}$

$\sup A = \sqrt{2}$

es. 4.3

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$

$\inf A = -\sqrt{2} = \min A$

$\sup A = \sqrt{2} = \max A$

es 4.4

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$

no $\inf A$

no $\sup A$

TEOREMA di CARATTERIZZAZIONE OPERATIVA di SUP/INF

Sia $A \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$

① Allora $\mu = \sup A$ se e solo se

ⓐ $a \leq \mu \quad \forall a \in A$

ⓑ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \mu - \varepsilon$

② Allora $\mu = \inf A$ se e solo se

ⓐ $a \geq \mu \quad \forall a \in A$

ⓑ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a < \mu + \varepsilon$

Esercizio

$A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\} = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\}$

$1 \in A$

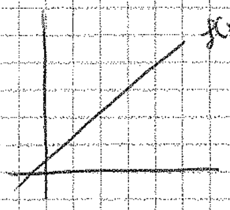
$1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$\max A = 1$

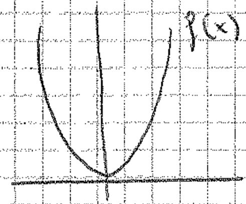
$A \subset \mathbb{R}^+$

$\inf A$ non può essere negativo

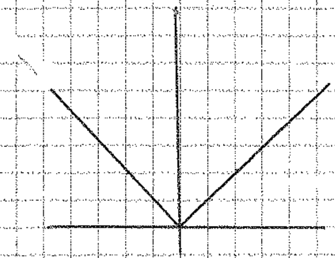
FUNZIONI ELEMENTARI



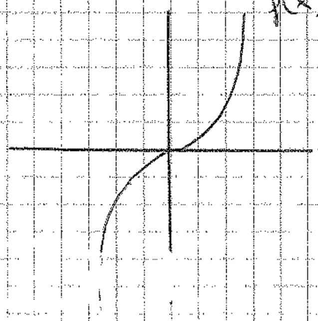
$f(x) = ax + b$



$f(x) = x^2$

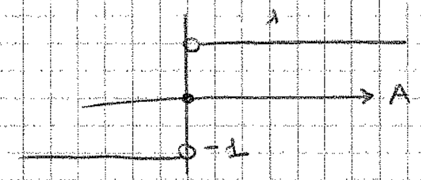


$f(x) = |x|$



$f(x) = x^3$

FUNZIONE SEGNO



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

FUNZIONE PARTE INTERA

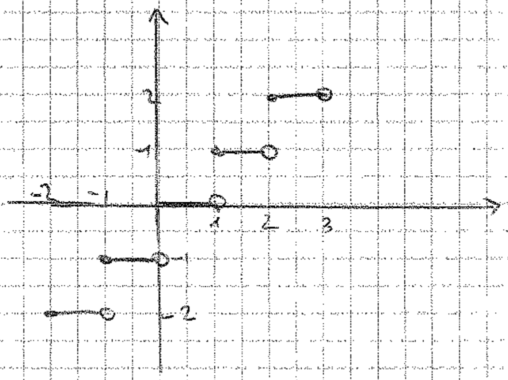
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = [x] =$ massimo intero relativo n tale che $n \leq k$

$\forall x \in \mathbb{R}: [x] \leq x \leq [x] + 1$

es. $[\sqrt{3}] = 1 \quad [\pi] = 3$

$[-2/3] = -1 \quad [-5/2] = 3$



$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D: x \geq 0$

$f(x) = e^x$

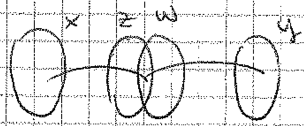
$g(x) = \log x$ $\quad D: x > 0$

FUNZIONE COMPOSTA

$g: X \to Z$

$h: W \to Y$

$Img \cap W \neq \emptyset$



Si dice funzione composta di g e h e si indica con $f = h \circ g$, la funzione $f: V \to Y$ definita $f(x) = h(g(x))$, $x \in V$; $V = \{x \in X : g(x) \in W\}$

$X = \text{dom}\, g$

$W = \text{dom}\, h$

$V = \text{dom}\, f$

es. $g(x) = x^2 + x$

$X = \text{dom}\, g = \mathbb{R}$

$h(y) = 4^y$

$W = \text{dom}\, h = \mathbb{R}$

$V = \{x \in \text{dom}\, g : g(x) \in \text{dom}\, h\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$f = h(g(x)) = 4^{g(x)} = 4^{x^2+x}$

es. $g(x) = x^2 + x$ $\quad \text{dom}\, g = \mathbb{R}$

$h(y) = \log_4 x$ $\quad \text{dom}\, h = (0; +\infty)$

$V = \text{dom}\, f = \{x \in \text{dom}\, g : g(x) \in \text{dom}\, h\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \in (0; +\infty)\} = x^2 + x > 0$

$x(x+1) > 0$

$-1 \quad 0$ $\quad (-\infty; +1) \cup (0; +\infty)$

$f = h(g(x)) = \log_4 g(x) = \log_4 (x^2 + x)$

es. $g(x) = -x^2$

$h(y) = \log_4 y$

$V = \text{dom}\, f = \{x \in \text{dom}\, g : g(x) \in \text{dom}\, h\} = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 \in (0; +\infty)\}$

insieme vuoto perché $-x^2$ sempre < 0

Esercizio

$f(x) = x - \sqrt{x}$ $\quad D: [0; +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad D: [2; +\infty)$

$(f \circ g) \Rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}\, g : g(x) \in \text{dom}\, f\}$

$= \{x \in [0; +\infty) ; \sqrt{x-2} \in [0; +\infty)\}$

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE SUI GRAFICI DI FUNZIONI

$f(x)$

$g(x) = x+\alpha$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+\alpha)$

si ha una traslazione lungo l'asse delle ascisse.

se $\alpha > 0$ la traslazione va a sinistra della funzione;

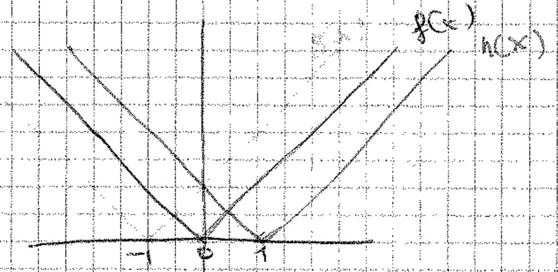
se $\alpha < 0$ la traslazione va a destra della funzione

es - $f(x) = |x|$

$g(x) = |x+1|$ $\quad h(x) = |x-1|$

dentro la parentesi agisco sull'asse x

se fuori su quello y

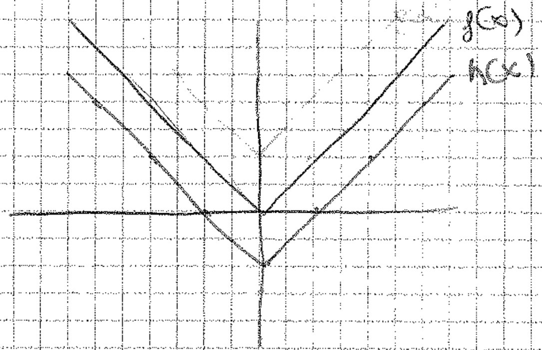


$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + \alpha$

si ha una traslazione lungo l'asse delle ordinate

se $\alpha > 0$ la traslazione va verso l'alto

se $\alpha < 0$ la traslazione va verso il basso



$f(x) = |x|$

$g(x) = |x|+1$

$h(x) = |x|-1$

$f(x)$

$g(x) = -x+\alpha$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+\alpha)$

si ha sempre una traslazione lungo l'asse delle ascisse ma se x è negativo, allora si va a destra per $\alpha > 0$ e a sinistra per $\alpha < 0$

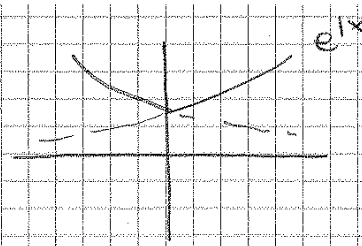
$f(x)$

$g(x) = \beta \cdot x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\beta \cdot x)$

se $0 < \beta < 1$ abbiamo una dilatazione lungo l'asse x

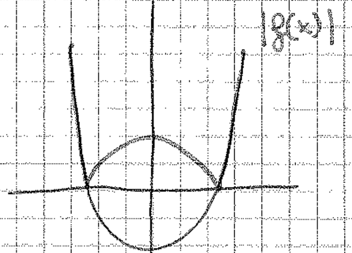
se $\beta > 1$ abbiamo una contrazione lungo l'asse x



$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$

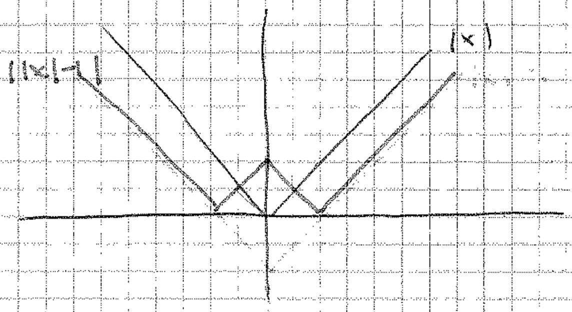
$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$

Quando $f(x) < 0$ si ha un ribaltamento rispetto all'asse x



Esercizio

$f(x) = ||x| - 1|$



Esercizio

$f(x) = |\sqrt{3-x} - 4|$