NUMERO: 531

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Lecce

MATERIA: Analisi Matematica I

Prof. Dambrosio

FUNZIONI
definite negli insiemi

- INSIEMI NUMERICI

- N numeri naturali $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6 \dots\}$
- Z numeri interi $Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2 \dots\}$
- Q numeri razionali $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

(rapporto di num interi in cui il denominatore non si annulla)

Da un punto di vista algebrico: (cioè delle 4 operazioni algebriche)

- in N sono definite solo SOMMA e PRODOTTO
- in Z sono definite SOMMA, PRODOTTO e SOTTRAZIONE
- in Q sono definite " " " e DIVISIONE

Ma Q non esaurisce tutti i numeri, come π; $\sqrt{2}$ restano fuori

- DIMOSTRIAMO CHE $\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE PER ASSURDO *

$2\pi r$ e $2r$ non sono commensurabili

π = rapporto tra la lunghezza della circonferenza ($2\pi r$) per il suo diametro ($2r$)

$\sqrt{2}$ = diagonale di un quadrato di lato 1

- R numeri reali

$N \subset Z \subset Q \subset R$ sono tutti contenuti in R

in R sono contenuti i numeri irrazionali
dal punto di vista algebrico Q e R non si distinguono

Rappresentazioni decimali:

$r \in Q$

$r = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in Z$, $n \neq 0$

$r = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$

Esempio $r = 25$ — non ci sono xk sono uguali a 0

$r = \frac{5}{4} = 1,25 \Rightarrow b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = b_4 = b_5 = 0$ — con un numero finito di cifre decimali $\neq 0$

$r = \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,\overline{3}$ — infinite cifre decimali $\neq 0$ ma che si ripetono secondo un periodo

$r = 1 = \frac{1}{1} = 0,\overline{9}$ — una rappresentazione decimale in cui il periodo è 9 è uguale all'intero immediatamente superiore

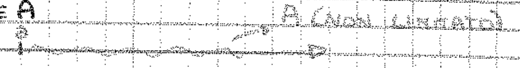
CAMBIAMENTO DI RAPPRESENTAZIONE $\rightarrow$ $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

- $x \in R \setminus Q$ (x irrazionale) — reale ma non razionale — la rappresentazione decimale di x ha infinite cifre decimali diverse da 0 che non si ripetono secondo un periodo

Esempio: $\pi \in R \setminus Q$ in forma decimale si può scrivere in modo approssimato

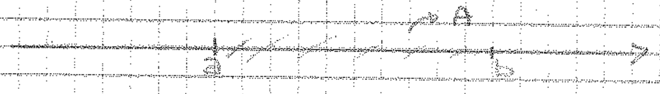
DEF 2: Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è detto INFERIORMENTE LIMITATO se esiste un numero reale a tale che

$$a \leq x \quad \text{per ogni } x \in A$$



in questo caso a è un MINORANTE di A

Caso particolare: L'insieme A è sia inferiormente limitato sia superiormente limitato e quindi LIMITATO:



In simboli: A superiorm. limitato se:

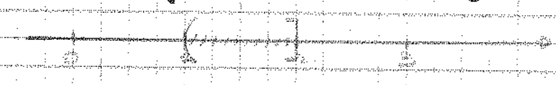
$$\exists b \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in A : \; x \leq b$$

quantificatori

OSSERVAZIONE:
· bisogna fare attenzione all'ordine dei quantificatori

Fare attenzione ai piccoli particolari

ESEMPIO: (1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} = (1;2]$

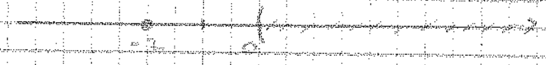


A è LIMITATO — MAGGIORANTE es 5 o 6; MINORANTE es -10, -2

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} = (1;2)$

A è LIMITATO

(3) $A = \{-2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$



A è inf limitato ma NON superiorm. lim quindi l'insieme non è limitato

DEF 3: Diciamo che un insieme ammette MASSIMO se esiste un numero appartenente ad A tale che

$$x \leq x_M \quad \text{per ogni } x \in A$$

· il max appartiene ad A
· il maggiorante ad R

x_M si dice MASSIMO dell'insieme e si scrive $x_M = \max A$

• x_M è un maggiorante di A, MA deve appartenere ad A

DEF 4: Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette MINIMO se esiste un x_m appartenente ad A tale che

$$x_m \leq x \quad \text{per ogni } x \in A$$

x_m si dice MINIMO dell'insieme e si scrive $x_m = \min A$

• x_m è un minorante di A, ma deve appartenere all'insieme

Esempio 1: 2 appartiene all'insieme A e quindi 2 è il MASSIMO mentre poiché 1 non appartiene all'insieme non è un minimo, quindi l'insieme ha massimo ma non minimo.

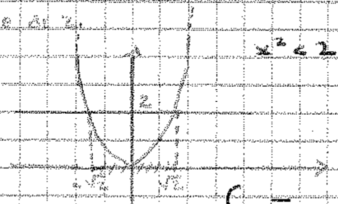
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 196

Perché questo vale in $\mathbb{R}$ ma non vale in $\mathbb{Q}$?

Esempio: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2 \right\}$ = numeri positivi tali che il loro quadrato sia minore di 2.

tale che

$\left\{ x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x < \sqrt{2} \right\} = (0; \sqrt{2})$



$x^2 < 2$

$\begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases}$

$0 < x < \sqrt{2}$

• A è superiormente limitato

$\xRightarrow{\text{ass. di completezza}}$ $\exists$ sup A

• Cerchiamo l'insieme dei maggioranti $= [\sqrt{2}; +\infty)$

$\min B = \sqrt{2}$ $\xRightarrow{\text{per definizione}}$ sup A ($\sqrt{2} \notin A$ quindi è solo il sup A (ma non il max A)

Esempio 2: $A' = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < \sqrt{2} \right\}$ = con $A' \subset \mathbb{Q}$

$\left\{ x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x < \sqrt{2} \right\} = (0; \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

• A' è superiormente limitato

• Insieme dei maggioranti $B' = [\sqrt{2}; +\infty)$ $\qquad \min B' = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

• Il candidato sup A' è $\sqrt{2}$ che non appartiene però a $\mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ A' è sup lim in $\mathbb{Q}$ ma non ammette sup A' in $\mathbb{Q}$

ESERCIZIO:

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad x \text{ è nella forma } x = 1 - \frac{1}{n} \text{ con } n \text{ dispari} \quad \text{con } n > 0 \right.$

$\left. \text{oppure } x = \frac{1}{2n} \text{ con } n \text{ pari} \right\} =$

$\left\{ \underset{n=1}{1 - \frac{1}{1}};\ \underset{n=2}{\frac{1}{2 \cdot 2}};\ \underset{n=3}{1 - \frac{1}{3}};\ \underset{n=4}{\frac{1}{2 \cdot 4}} \right\} = \left\{ 0;\ 0{,}25;\ 0{,}\bar{6};\ 0{,}125;\ 0{,}8;\ 0{,}083 \ldots \right\}$

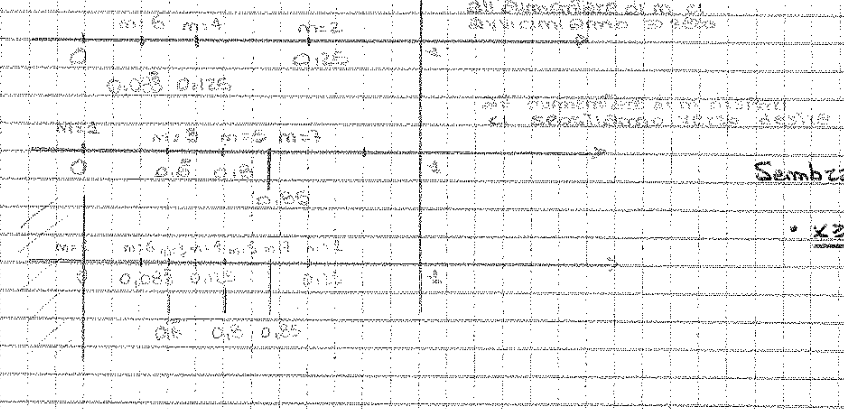
A limitato ?
A ammette sup A = ?
inf A ?
max A ?
min ?

Rappresentazioni:

m pari

m dispari

m



Sembra che:

• $x \geq 0$ per ogni $x \in A$ *

0 è un minorante di A
$0 \in A \rightarrow$ è un min A
$\longrightarrow$ è anche inf A

* Verifichiamo che $x \geq 0 \quad \forall x \in A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 196

Caratterizzazione dell'estremo superiore (definizione matematica)

$b = \sup A \iff$

(1) $x \leq b;\ \forall x \in A$ b è un maggiorante

(2) non ci sono maggioranti di A più piccoli di b
ogni numero più piccolo di b non è un maggiorante di A

- $\forall c < b$ c non è un maggiorante di A

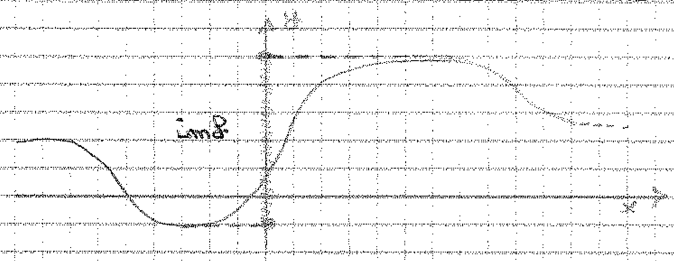
qualsiasi num c più piccolo di b — a destra di c devo vedere un punto di A

- $\forall c < b \quad \exists a \in A : c < a$

Per le funzioni (magg. min. max. sup e inf):

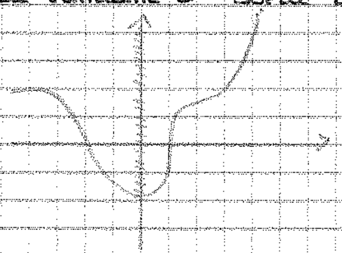
$f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A = \operatorname{im} f$ = IMMAGINE DI $f \Rightarrow \operatorname{im} f \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$



DEF. 1 f si dice SUP. LIM / INF. LIM / LIMITATA se $\operatorname{Im} f \in \mathbb{R}$ è SUP. LIM / INF. LIM / LIMITATO

Esempio: la funzione f sopra disegnata è LIMITATA



f è sup illimitata e inf limitata

DEF. 2 $\sup f = \sup \operatorname{Im} f$

$\inf f = \inf \operatorname{Im} f$

DEF. 3 $\max f = \max \operatorname{Im} f$

$\min f = \min \operatorname{Im} f$

LIMITE
↓
DERIVATA (Per risolvere il problema delle tangenti ad una curva) ⟹ TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE ⟹ INTEGRALE (Per il calcolo dell'area)

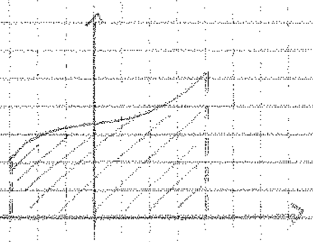
PROBLEMA DELL' AREA (1° PROBLEMA GEOMETRICO)

Definire un oggetto matematico chiamato INTEGRALE DEFINITO di $f : [a;b]$ e denotato con:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

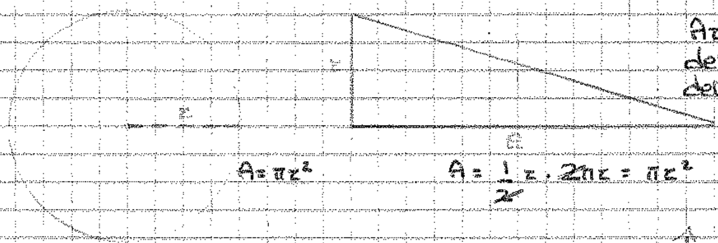
Che ha la seguente proprietà: se $f \geq 0$ (e solo in questo caso)

ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx$ area della regione tratteggiata



Archimede (200 a.C)

1

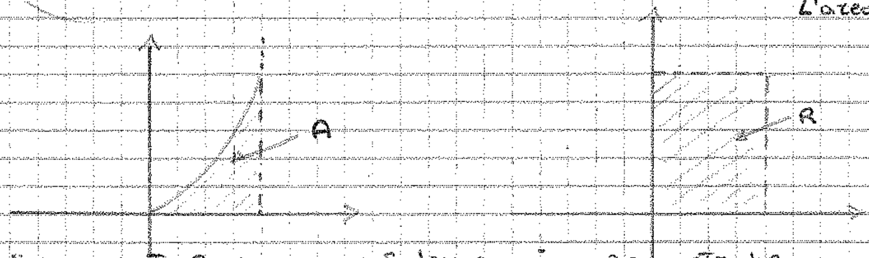


Archimede intuì che l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo

$A = \pi r^2$ $A = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$

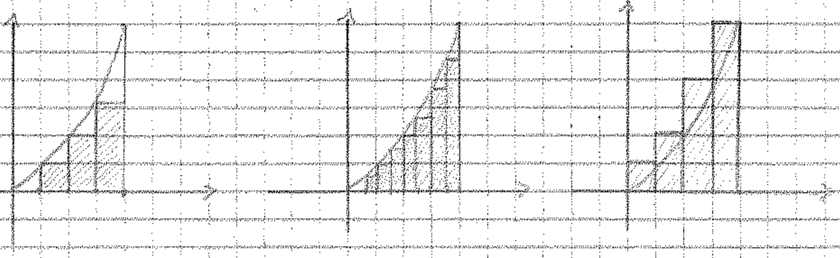
L'area $A = \frac{1}{3}$ area R

2



Queste sono intuizioni, considerazioni geometriche in realtà Archimede passa al metodo dimostrativo, osservazione ⟶ dimostrazione rigorosa del risultato

⟹ METODO DI ESAUSTIONE



(punto 5)

4) Moltiplichiamo tutti i termini della disuguaglianza per $\frac{1}{n^3} > 0$

$$\frac{1}{n^3}(1+2^2+\dots+(n-1)^2) < \frac{1}{3} < \frac{1}{n^3}(1+2^2+\dots+n^2) \qquad \forall n \geq 1$$

Da questo si deduce che il numero $\frac{1}{3}$ soddisfa la relazione che volevamo (la relazione numero 1)

5) Dimostriamo che $\frac{1}{3}$ è l'unico numero che vale per quella relazione

$$(*) \quad 1+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1+2^2+3^2+\dots+n^2$$

a) Aggiungiamo n^2 a tutti i membri:

$$n^2+1+2^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3}+n^2 < \dots$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{n^3}$

$$\underbrace{\frac{1}{n^3}(n^2+1+2^2+\dots+(n-1)^2)}_{S_n} < \frac{1}{3}+\frac{1}{n} < \dots$$

$$\Rightarrow S_n < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$

b) Sottraiamo n^2 a tutti i membri:

$$< \frac{n^3}{3}-n^2 < 1+2^2+\dots+(n-1)^2$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{n^3}$

$$< \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < \underbrace{\frac{1}{n^3}(1+2^2+\dots+(n-1)^2)}_{s_n}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < s_n & \forall n \geq 1 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{n} > S_n & \forall n \geq 1 \\ s_n < A < S_n & \forall n \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{n} < s_n < A < S_n < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$ Tolgo s_n e S_n perché vale la relazione:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{n} < A < \frac{1}{3}+\frac{1}{n}$$ Sottraggo $\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{n} < A-\frac{1}{3} < \frac{1}{n}$$

Se A verifica la condizione di partenza ottengo $-\frac{1}{n} < A-\frac{1}{3} < \frac{1}{3} \quad \forall n \geq 1$

Da questo si deduce che $A-\frac{1}{3}=0$ così che $A=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Deduciamolo per assurdo: Supponiamo che $A-\frac{1}{3} \neq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 196

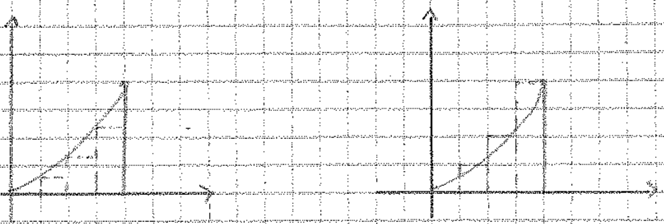
DEFINIZIONE MATEMATICA DI INTEGRALE

- Integrale definito secondo Riemann

$f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$
LIMITATA

Definiremo il concetto di integrale definito di f da $[a;b]$ denotato con:

$\int_a^b f(x)\,dx$ UN NUMERO REALE



① Definire l'integrale per funzioni più facili (dette a scala)

② Approssimare una funzione qualsiasi limitata con una più semplice a scala.

(È la stessa cosa di Archimede che l'ha fatto dal punto di vista geometrico ma cambio punto di vista e esamino il grafico)

- Definizione di una funzione a scala

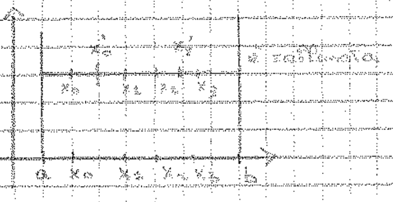
Prendiamo $[a;b]$

Si chiama suddivisione di $[a;b]$ un insieme finito di punti

$\{x_0; x_1; \dots; x_m\}$

Tale che : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_m = b$

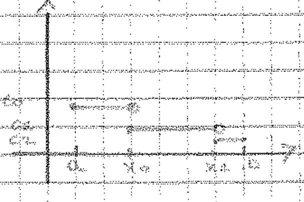
Se a questi ne aggiungo uno o più di uno ottengo un raffinamento.



Si chiama raffinamento di $\{x_0; x_1 \dots x_m\}$ una nuova suddivisione $\{x'_0; x'_1 \dots x'_k\}$ tale che : $x_i \in \{x'_0; x'_1, \dots, x'_k\}$ $\forall i = 1; 2; \dots m$

Una funzione $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice a SCALA se esiste

* una suddivisione $\{x_0; x_1, \dots x_m\}$ di $[a;b]$
e esistono m costanti $c_0; c_1 \dots c_{m-1}$
Tali che: $f(x) = c_i$ se $x \in (x_i; x_{i+1})$ $\forall i = 0, 1 \dots m-1;$



deve esistere una suddivisione in modo che $f(x)$ deve essere costante nella sudd.

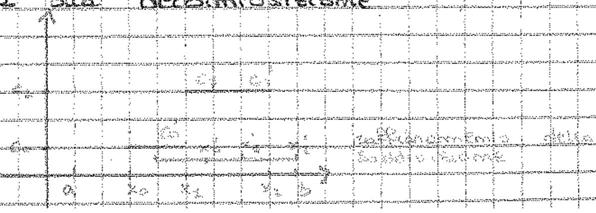
i valori agli estremi dell'intervallo non importano

è costante in ogni intervallo $(x_{i-1}; x_i)$

Si dice che la suddivisione $\{x_0, x_1 \dots x_m\}$ è ADATTATA a f

@OSS. Nella definizione non si specificano i valori di f nei punti $x_0; x_1 \dots x_m$

@OSS. La decomposizione di f come funzione a scala non è unica se si passa da una suddivisione ad un suo raffinamento cambia la sua decomposizione



ESEMPIO f COSTANTE su $[a;b]$

$f \in S([a;b])$

Sia c il suo valore allora:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

In particolare se $c>0$ allora:

$$\int_a^b c\,dx = \text{area del rettangolo}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

X grandezza (fisica, geometrica ...) misurata in un'unità di misura m_x

$Y = f(x)$ grandezza misurata in un'u.d.m m_y

$\int_a^b f(x)\,dx$ che unità di misura avrà?

$m_x \cdot m_y$ è il prodotto delle unità di misura

APPLICAZIONI ED INTERPRETAZIONI DELL'INTEGRALE

① Punto di vista geometrico:

se $f \geq 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è l'area di una regione

integrali di f. a scala positive $\longrightarrow$ area

② Punto di vista fisico:

Supponiamo che X tempo

moto rettilineo

$s(x)$ = posizione al tempo x

$v(x)$ = velocità al tempo x

$[a;b]$ intervallo di tempo, supponiamo che la velocità sia costante a tratti

$\Rightarrow v \in S([a;b])$

Che significato si può dare all'integrale della velocità?

$$\int_a^b v(x)\,dx = \underbrace{c_0(x_1-x_0)}_{\substack{\text{spazio percorso nel}\\ 1^\circ \text{ intervallo}\\ \text{di tempo}}} + c_1(x_2-x_1) + \dots + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) =$$

si semplifica tutto con quello che viene dopo tranne

$$\overbrace{s(x_1)-s(x_0)}^{\Delta x} + \overbrace{s(x_2)-s(x_1)}^{\Delta x_1} + \dots + s(x_n) - s(x_{n-1}) =$$

$$s(x_n) - s(x_0) = s(b) - s(a) = \Delta s$$

Controlliamo dal punto di vista dimensionale:

X tempo $[T]$ m_x

$v(x)$ velocità $\frac{[S]}{[T]}$ m_y

$\int_a^b v(x)\,dx$ ha le dimensioni di $m_x \cdot m_y$

$$m_x \cdot m_y = \cancel{[T]} \cdot \frac{[S]}{\cancel{[T]}} = [S]$$

* se $\int_a^b f(x)\,dx \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{s(b)-s(a)}{b-a} = \frac{\Delta s}{\Delta x} =$ velocità media

Dimostrazione della prop. 4
(Si usano le proprietà 3 e 2)

IPOTESI: $f \leq g$ su $[a;b]$

TESI: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Sia $h = g - f \Longrightarrow \underset{\text{(per ipotesi)}}{f \leq g} \longrightarrow 0 \leq g - f$ cioè $h \geq 0$

$\underset{\text{prop. 3}}{\Longrightarrow} \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$

ma $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

$\underset{\text{prop. 2}}{\Longrightarrow} \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$\longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

C.V.D

$\Rightarrow$ $s_f(b-a)$ è un maggiorante di A

$\Rightarrow$ A è sup limitato $A \subset \mathbb{R}$ $\xrightarrow[\text{di } \mathbb{R}]{\text{per la completezza}}$ ESISTE supA

è il sup $\left\{ \int_a^b g(x)\,dx : g \in S_f^- \right\}$

$\sup A = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

si chiama INTEGRALE INFERIORE di f. su $[a;b]$

② B è inferiormente limitato (Esercizio)

$B \subset \mathbb{R}$ $\xrightarrow[\text{di } \mathbb{R}]{\text{per la completezza}}$ ESISTE infB

$\inf B = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

si chiama INTEGRALE SUPERIORE di f su $[a;b]$

- Ci aspettiamo che le approssimazioni dal basso e dall'alto conducano allo stesso risultato

In generale non è sempre vero

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

È sempre vero che: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$

DIMOSTRIAMO

Dobbiamo provare che il supA è $\le$ infB (TESI)

supA è il più piccolo dei maggioranti di A

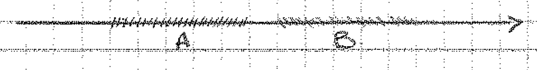
infB è il più grande dei ~~maggioranti di A~~ minoranti di B

dimostrare nella dimostrazione

Per dimostrare la tesi, iniziamo a dimostrare che:

$a \le b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

Tutti i punti di A son più piccoli di tutti i punti di B



$a = \int_a^b g(x)dx$ con $g \in S_f^-$

$b = \int_a^b h(x)\,dx$ con $h \in S_f^+$

ma deve essere che: $\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b h(x)dx$ $\quad \forall g \in S_f^- \quad \forall h \in S_f^+$

$g \le f \le h$

$g \le h$

È vera perché $g \le h$ per la prop. di monotonia delle f. a scala

ESEMPIO 2 (le due approssimazioni conducono allo stesso risultato)

Sia $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a scala

DAL BASSO

$g \in S_f^- \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$

$A = \left\{ \int_a^b g(x)\,dx : g \in S_f^- \right\}$

$\sup A = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\underset{\text{monotonia}}{\Longrightarrow} \int_a^b g(x)\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I}$

poiché f è una funzione a scala ho potuto scrivere $\int_a^b f(x)dx$ perché è un numero e conosco l'integrale di una f a scala

$\begin{cases} I \text{ è un maggiorante di } A \\ I \in A \quad (\text{perché come funzione } g \text{ posso scegliere } f \text{ infatti } f \in S,\ f \le f) \end{cases}$

$\Longrightarrow I$ è il massimo di $A = \sup A = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

DALL'ALTO

$h \in S_f^+ \longrightarrow \begin{matrix} h \in S \\ h \ge f \end{matrix}$

$B = \left\{ \int_a^b h(x)\,dx : h \in S_f^+ \right\}$

$\left.\begin{matrix} h \text{ e } f \text{ funzioni a scala} \\ h \ge f \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \int_a^b h(x)\,dx \ge \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I}$

$\begin{cases} I \text{ è un minorante di } B \\ I \in B \quad (\text{perché tra tutte le funzioni di } S_f^+ \text{ si può prendere proprio } f) \end{cases}$

$I = \min B = \inf B = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

CONCLUSIONE

se f è a scala allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

DEFINIZIONE:

Sia $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e siano

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ definiti come prima

Se $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

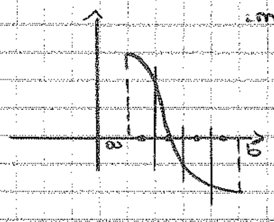
Allora f si dice integrabile secondo Riemann su $[a;b]$ e si scrive

il valore comune $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ si chiama integrale

definito su $[a;b]$ e si denota con $\int_a^b f(x)\,dx$

FORMULA DEL PUNTO MEDIO:
(Per un calcolo approssimato dell'integrale definito)

$[a;b]$ $\quad n$ = n° di suddivisioni in parti uguali



$[x_0; x_1] \longrightarrow$ punto medio z_0

$[x_1; x_2] \qquad z_1$

$[x_{n-1}; x_n] \qquad z_n$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left(f(z_0)+f(z_1)\ldots+f(z_n)\right)$$

PROPRIETÀ

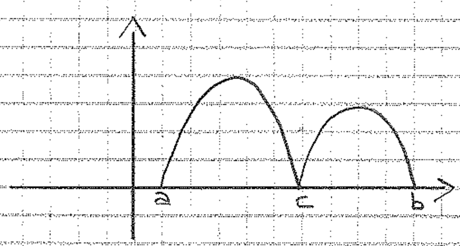
f e g funzioni integrabili $\quad f,g \in R([a;b])$

e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad c \in [a;b]$

① Additività rispetto al dominio

$f \in R([a;b])$ e $f \in R([a;b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



② Linearità dell'integrale

$\alpha f + \beta g \in R([a;b])$ e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

③ Positività:

se $f \geq 0$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

④ Monotonia:

se $f \leq g$ allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

⑤ Maggiorazione dell'integrale:

$|f| \in R([a;b])$ e

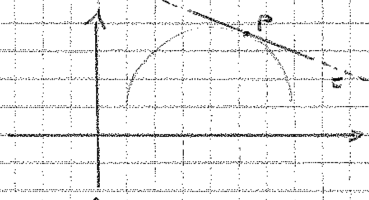
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

TANGENTE AD UNA CURVA (2° PROBLEMA GEOMETRICO)

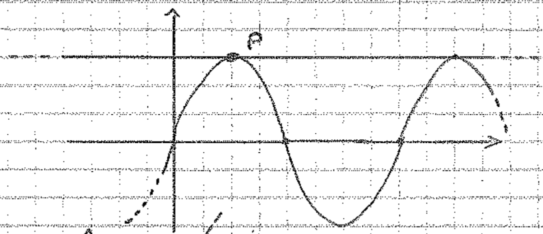
COS'È LA TANGENTE? COME SI CALCOLA?

PROBLEMA: Dato il grafico di una funzione, cos'è la tangente in suo punto?

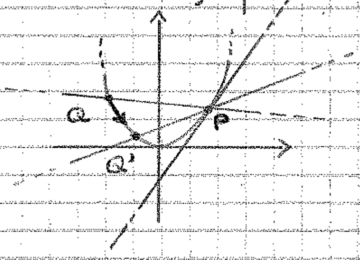
- Escludiamo per il momento i casi in cui la tangente è verticale. (che non è il grafico di nessuna funzione)



La retta tangente è l'unica retta passante per P che interseca in un solo punto la circonferenza. (Questa definizione non va bene per una curva che non sia una conica)



La retta ha infinite intersezioni con la curva



Tranne la retta tangente tutte le altre rette hanno due intersezioni con la parabola

2 intersezioni → retta secante

1 intersezione → retta tangente

Se sposto Q verso il punto P, mi avvicino man mano alla posizione limite della retta tangente (introduciamo una dinamica)

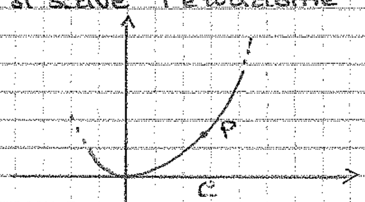
Idea dinamica della retta tangente

P un punto fissato della curva
Q il punto diverso della curva

Si disegna la secante passante per P e Q
sposto Q verso P ⟶ questo induce un movimento della retta secante se Q si avvicina a P le secanti tendono a disporsi lungo una retta fissa che sarà la retta tangente

(QUESTO PROCEDIMENTO SI ESPRIME DICENDO CHE LA TANGENTE È LA POSIZIONE LIMITE DELLE RETTE SECANTI PQ QUANDO Q SI AVVICINA A P)

Come si scrive l'equazione della retta tangente?



$P(c, f(c))$

$f: \underbrace{I(c)}_{\text{intorno di } c} \longrightarrow \mathbb{R}$

La retta tangente in P passa per P

retta tangente: $y - f(c) = m(x-c)$

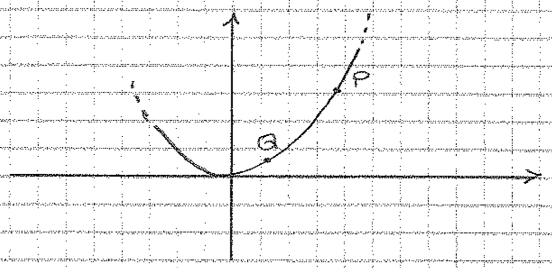
$y = m(x-c) + f(c)$

come si trova m = ?

Definizione Intuitiva

$c \in \mathbb{R}$

$f : (c-r; c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$



intuitivamente la retta tangente in P, se esiste, è la retta a cui si avvicinano le rette secanti PQ quando Q si avvicina a P.

il coefficiente angolare della retta tangente a P è il valore, se esiste, a cui si avvicinano i coefficienti angolari delle secanti PQ quando Q si avvicina a P.

- Sia x = ascissa di Q
  $m(x)$ = coefficiente angolare della retta PQ

Esempio $y = \frac{1}{100} x^2$

x si avvicina a 1 $\Longrightarrow$ $m(x)$ si avvicina a 0.02

Come formalizzare matematicamente questo concetto di avvicinamento?

$d(m(x), 0.02) = |m(x) - 0.02|$ la funz. distanza = val. assol

① Quanto diventa più piccola la distanza tra $m(x)$ e 0.02?

Ad esempio: $d(m(x); 0.02)$ è minore di 10^{-3}? guardiamolo dalla tabella

- In generale no, ma è vero se x è abbastanza vicino a 1, questo lo si vede dalla tabella e lo si può verificare con un conto diretto

$d(m(x); 0.02) = |m(x) - 0.02| = 0.01|x-1|$ perché?

- $m(x) = \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{100} x^2\right) \Big/ 1-x$ rapporto tra $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

risposta

$$= \left|\frac{0.01x^2 - 0.01}{x-1} - 0.02\right| = \left|\frac{0.01x^2 - 0.01 - 0.02(x-1)}{x-1}\right| =$$

$$\left|\frac{0.01x^2 - 0.02x + 0.01}{x-1}\right| = 0.01\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right| = 0.01\left|\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}\right| =$$

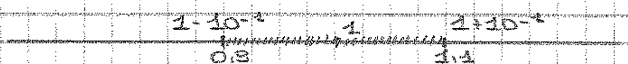
$$0.01|x-1|$$

Vogliamo che sia: $d(m(x); 0.02) < 10^{-3}$

$0.01|x-1| < 10^{-3}$

$|x-1| < \frac{10^{-3}}{0.01} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 10^{-1}$

$|x-1| < 10^{-1} \Longrightarrow d(x; 1) < 10^{-1}$



DEFINIZIONE 2: Siano $c \in \mathbb{R}$ e

$f(c-r; c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$

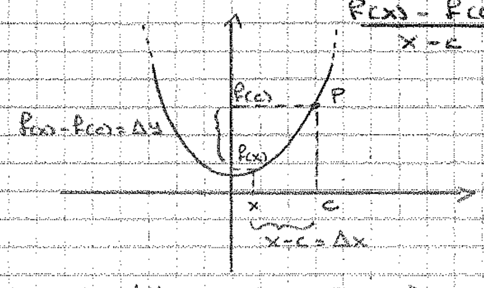
Si dice che f è derivabile in $x=c$, se esiste, un numero reale ℓ (FINITO) tale che:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \ell$$

ℓ si chiama derivata di f in $x=c$ e si denota con $f'(c)$; $\frac{df}{dx}(c)$; $Df(c)$

OSSERVAZIONE Cosa rappresenta l'espressione

$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = rapporto incrementale = coefficiente angolare della retta PQ



$f'(c)$ = coeff. angolare della tangente

Equazione della retta tangente

$y = f(c) + f'(c)(x-c)$

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{100}x^2$ $c=1$

$m = 0{,}02$ = derivata di f in $c=1$; $f'(1) = 0{,}02$

Eq. Tangente : $y = f(1) + f'(1)(x-1)$
$y = 0{,}01 + 0{,}02(x-1)$

Geometricamente: f derivabile in $x=c$

$\Updownarrow$

esiste la retta tangente non verticale al grafico di f in $(c; f(c))$

DEFINIZIONE 3: Sia $f: (a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$
e supponiamo che sia f derivabile in ogni punto $c \in (a;b)$

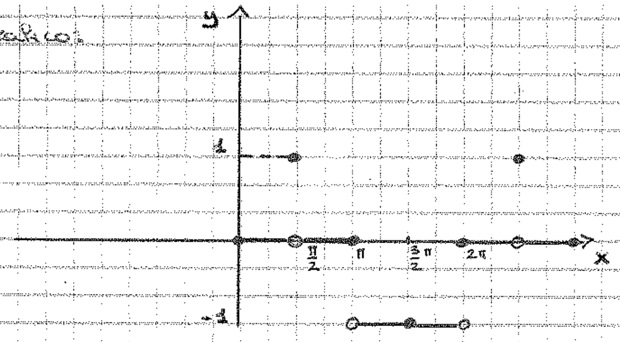
Allora si definisce una nuova funzione

definita in $(a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ a valori in
associa ad $x \longrightarrow$ una $f'(x)$

Questa nuova funzione si chiama f. derivata di f o derivata prima di f.

DERIVATA
- significato geometrico: tangente
- teorico: funzione
- computazionale: come si calcola

Grafico:



$f(x) = [\sin x]$

- La funzione composta resta periodica con la stessa periodicità del $\sin x$

① $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} [\sin x] = -1$

- $\forall x \neq \frac{3}{2}\pi$ in un intorno di $\frac{3}{2}\pi \implies f(x) = -1$

- Bisogna studiare i valori di $f(x)$ quando x si avvicina a $\frac{3}{2}\pi$ mantenendosi però diverso da $\frac{3}{2}\pi$

② $\lim_{x \to \pi} [\sin x]$;

x	f(x)
appross. per eccesso	-1
appross. per difetto	0

- Prendiamo x in un intorno di π, $x \neq \pi$ e studiamo a cosa si avvicinano i valori $f(x)$ se x si avvicina a π

- il limite questa volta non esiste, in questo caso si dice che esistono il limite destro: $\lim_{x \to \pi^+} [\sin x] = -1$ e il limite sinistro: $\lim_{x \to \pi^-} [\sin x] = 0$

③ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0$

→ questo sottointende $x \neq \frac{\pi}{2}$, quindi $f(x) = 1$ non m'interessa

OSSERVAZIONI:

(1) Un limite potrebbe non esistere, ma potrebbero esistere il limite destro o sinistro

DEFINIZIONE: (limite destro)

Siano $c, \ell \in \mathbb{R}$
$f : (c ; c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$

Si dice che:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - c| < \delta \quad x > c \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Conseguenza:

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ esiste $\iff$ esistono $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$

(2) Abbiamo calcolato $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} f(x) = -1$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

sono uguali

La funzione f è definita sia in $\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}$ quindi esistono anche

$f(\pi/2) = [\sin \pi/2] = [1] = 1$

sono diversi

$f(3/2\,\pi) = [\sin 3/2\,\pi] = [-1] = 1$

PROPRIETÀ

- Tutte le funzioni elementari e le loro inverse sono continue nel loro dominio

- $f, g : (c-r; c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $x = c$

  Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  Allora:

  ① $\alpha f + \beta g$ è continua in $x = c$

  ② $f \cdot g$ è continua in $x = c$

  ③ se g

LUCIDI 24/10

- Siano $c \in \mathbb{R}$ e $f : (c-r; c+r) \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio:

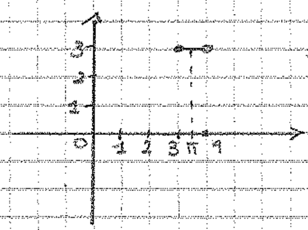
$f(x) = x \cos x + [x]$ è continua in $x = \pi$?

$f(x)$ è la somma di due funzioni, $g(x) + h(x)$ se dimostro che $g(x)$ e $h(x)$ sono continue

Consideriamo $h(x)$

$h(x) = [x]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim_{x \to \pi} h(x) = 3 \\ \bullet\ h(\pi) = 3 \end{array}\right\}$ $h(x)$ è continua in $x = \pi$



$h(\pi) = 3$

$\lim_{x \to \pi} [x] = 3$

Considero $g(x)$

$g(x) = x \cos x$

$\left.\begin{array}{l} x \text{ è continua in } x = \pi \\ \cos x \text{ è continua in } x = \pi \end{array}\right\}$

$\xrightarrow[\text{Prop. del prodotto di f continue}]{}$ $x \cos x$ è continua in $x = \pi$

Allora $\xrightarrow[\text{Prop. somma di f. continue}]{}$ $f(x)$ è continua in $x = \pi$

$* \quad \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \pi \cos \pi + [\pi] = 3 - \pi$

TORNIAMO ALL'INTEGRALE DEFINITO:

$f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

f è integrabile su $[a;b]$ se

$$\sup\left\{\int_a^b s(x)\,dx : s \le f,\ s \text{ a scala}\right\} =$$

$$\inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx : h \ge f,\ h \text{ a scala}\right\}$$

Sappiamo già che non tutte le funzioni limitate sono integrabili

TEOREMA: (integrabilità) se $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a;b]$,

$\Longrightarrow$ allora f è integrabile su $[a;b]$

la continuità di f su $[a;b]$ è sufficiente per la sua integrabilità su $[a;b]$

ma questa condizione non è necessaria!
ES. le funzioni a scale sono integrabili ma non continue

Esempio: $f(x) = \cos x$ su $[0;\pi/2]$

- È integrabile su $[0;\pi/2]$?

Si perché $f(x)$ è elementare e quindi è continua su $[0;\pi/2]$

$\Longrightarrow$ esiste $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

- Come calcolo l'integrale senza usare la definizione?

Nel calcolo interviene il concetto di derivata. Perché?

ES.
x = tempo   moto rettilineo
$s(x)$ = posizione al tempo x
$v(x)$ = velocità al tempo x

$$\int_a^b v(x)\,dx = \underbrace{s(b) - s(a)}_{s'(x)} = \Delta s$$

So fare l'integrale di $v(x)$ quando so trovare una funzione $s(x)$ che abbia come derivata $v(x)$

Sappiamo anche che la $s'(x)$ è la $v(x)$ $\forall x \in [a;b]$

$\rightarrow$ Per calcolare l'integrale di v basta conoscere s, cioè una funzione che ha come derivata v

$$\begin{array}{ccc} & D & s(x) \\ \text{derivazione} & \downarrow & \uparrow \\ v(x) & & \end{array}$$

Per calcolare l'integrale devo partire da $v(x)$ e risalire ad una funzione $s(x)$ che abbia $v(x)$ come derivata

⟹ TEOREMA: (primitive) Prese g e h primitive di f su $[a;b]$

Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$h(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in [a;b]$$

(Sarà una conseguenza del Teorema di Lagrange)

Interpretazione geometrica:

Tutte le primitive sono una traslata rispetto all'altra verticalmente

RICORDIAMO CHE:

Stiamo cercando un metodo esatto per il calcolo di:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$

$g: [a;b] \to \mathbb{R}$ è una PRIMITIVA di f su $[a;b]$ se $g'(x) = f(x)$

f è continua su $[a;b]$ ⟹ f ammette primitive

se g è una primitiva di f su $[a;b]$, allora tutte e sole le primitive di f su $[a;b]$ sono le funzioni $g(x) + c$ $c = \text{cost}$

= ogni altra primitiva soddisfa

$$h(x) = g(x) + c$$

cioè $h(x) - g(x) = c$ due qualsiasi primitive di f su $[a;b]$ differiscono per una costante

- INTEGRALE ORIENTATO

$\int_a^b f(x)\,dx \qquad a<b$

- Vogliamo dare un significato al simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $a=b$; $a>b$

$a=b \quad \int_a^a f(x)\,dx \overset{DEF}{=} 0$

$a>b \quad \int_a^b f(x)\,dx \overset{DEF}{=} -\int_b^a f(x)\,dx$

Esempio $\int_3^2 f(x)\,dx = -\int_2^3 f(x)\,dx$

Proprietà degli integrali

① $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Vale indipendentemente dall'ordinamento di a, b e c purché f sia integrabile negli intervalli scritti.

② $\int_a^b \alpha(f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

Vale sia per $a=b$ $a<b$ $a>b$ purché $f(x)$ e $g(x)$ siano integrabili

③ se $\underline{a<b}$ $\quad f\geq 0$ in $[a;b]$ $\quad f \in R[a;b]$

allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

se $a>b$ $\quad f\geq 0$ in $[a;b]$ $\quad f\in R([a;b])$

allora $\int_a^b f(x)\,dx = -\overbrace{\int_b^a f(x)\,dx}^{\geq 0} \leq 0$

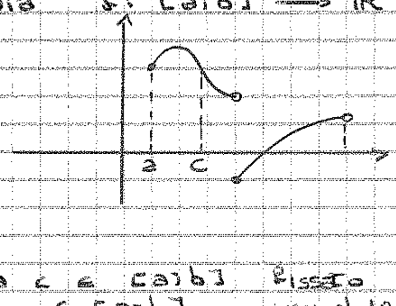
quindi $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ se gli estremi sono scambiati quando la $f\geq 0$ l'integrale è ≤ 0

Analogamente per le proprietà ④ e ⑤

- D'ora in avanti $\int_a^b f(x)\,dx$ non vuol dire necessariamente che $a<b$

- FUNZIONI INTEGRALI

Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f\in R([a;b])$



Sia $c \in [a;b]$ fisso
e $x \in [a;b]$ variabile

$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

t variabile di integrazione

A seconda di dove mi fermo (quindi che x prendo) varia, il risultato sarà una funzione di x che non dipende da t

TEOREMA FONDAMENTALE

ENUNCIATO:

IPOTESI:
- Sia $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia $c \in [a;b]$
- Sia $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a;b]$
- Se f è continua su $[a;b]$

TESI:
- $F_c(x)$ è derivabile su $[a;b]$ e vale $F_c'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b]$
- opp. $F_c(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su $[a;b]$

OSSERVAZIONE:

① f è continua su $[a;b] \Rightarrow f$ integrabile su $[a;b] \Rightarrow$ si può definire F_c

② Scrivendo F_c derivabile su $[a;b]$ si intende F_c derivabile su ogni punto di $[a;b]$ e che esistono derivata destra in $x=a$ e la derivata sinistra in $x=b$

③ PIÙ IMPORTANTE È: Questo teorema esprime il legame tra le due operazioni apparentemente diverse tra loro di integrazione definita e derivazione

f continua su $[a;b]$ — $f(x)$

↓ tramite questa integrazione definisco la funzione — ↑ se derivo torno a $f(x)$

$\int_c^x f(t)\,dt = F_c(x)$ — $F_c(x)$

④ Il teorema fondamentale NON fornisce l'espressione di F_c ma l'espressione di $F_c'(x) = f(x)$ se f è continua

ESEMPIO: $F_0(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^8+1}\,dt \quad \forall x \in [0;2]$

Non devo pensare come si calcola l'integrale ma quanto fa questa derivata?

① Controllo che $f(x) = \frac{\sin x}{x^8+1}$ è continua in $[0;2]$?

$f(x)$ è continua

② La derivata allora sarà:

$F_0'(x) = f(x) = \frac{\sin x}{x^8+1} \quad \forall x \in [0;2]$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt}{x - x_0} \right| =$$

$$\left| \frac{\int_{x_0}^{x} [f(t)\,dt - f(x_0)\,dt]\,dt}{x - x_0} \right| = \frac{\left|\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right|}{|x - x_0|} =$$

Fin qui va tutto bene, anche se fosse $x < x_0$

Quindi $x > x_0 \Longrightarrow |x - x_0| = x - x_0$

Per la propr. 5 se $x > x_0$ $\left|\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt$

$$\Longrightarrow \frac{\left|\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right|}{x - x_0} \leq \frac{\int_{x_0}^{x} |[f(t) - f(x_0)|\,dt}{x - x_0}$$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta^* > 0 : |x - x_0| < \delta^* \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ipotesi

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta^* > 0 :$ se $|t - x_0| < \delta^* \Longrightarrow$ allora $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ ▲ cambio il nome della variabile

- Sappiamo che $|x - x_0| < \delta^*$ e che $x > x_0$

$t \in [x_0 ; x]$

$$\overbrace{x_0 \quad t \quad x}$$

$x_0 - \delta^*$, x_0 , t , x , $x_0 + \delta^*$

dato che

$\Longrightarrow |t - x_0| < \delta^*$ la distanza tra t e x_0 è sicuramente minore di δ^*

allora

$\longrightarrow$ Per la continuità $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ ▲

$\xrightarrow[\text{P. di monotonia}]{} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt = \varepsilon(x - x_0)$

$$\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)\,dt < \frac{\varepsilon\,\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}}$$

Conclusioni: dato $\varepsilon > 0$ e preso $\delta = \delta^*$ proveniente dall'ipotesi di continuità abbiamo trovato che:

$$|x - x_0| < \delta^*, \quad x > x_0 \Longrightarrow$$
$$|g(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

cioè $\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{g(x)}_{\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0}} = f(x_0)$

C.V.D.

CONSEGUENZE DEL T. FONDAMENTALE

① Ogni funzione continua su un intervallo, ammette primitive (affermazione di tipo puramente teorico)

Questo è un risultato teorico ma non è detto che di queste primitive si sappia trovare un espressione esplicita in termini di funzioni elementari

Esempio: $f(x) = e^{-x^2/2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ funzione gaussiana

f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (composizione di due f. continue)

$\xrightarrow{\text{T. Fondam.}}$ ammette primitive su $\mathbb{R}$

$F_0(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

se avessi preso un altro punto base avrei trovato un' altra primitiva che differisce x costante

è una primitiva di f in $\mathbb{R}$ cioè $F_0'(x) = e^{-x^2/2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Si può dimostrare che di $F_0(x)$ non è possibile scrivere un'espressione che non usi il simbolo di integrale ma che usi solo funzioni elementari

$\Longrightarrow$ Come calcolare $F_0(1)$?

$F_0(1) = \int_0^1 e^{-t^2/2}\,dt$

- non si può calcolare in modo esatto xk non si conosce l'espressione delle primitive
- Posso solo applicare un calcolo approssimato (formula del punto medio)

Altri esempi:

$\operatorname{sen} x^2$; $\cos x^2$; $\sin e^x$; $\frac{e^x}{x}$; $\frac{\sin x}{x}$; ...

② TEOREMA DI TORRICELLI

Sia $f: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Sia g una sua primitiva su $[a;b]$

allora $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

DIMOSTRAZIONE:

Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua e sia g una sua primitiva fissata

Poiché f è continua posso applicare il T. Fondamentale:

Scriviamo la funzione integrale di f avente punto base a

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $\forall x \in [a;b]$

è una primitiva di f su $[a;b]$

Abbiamo due primitive di f su $[a;b]$ g e F_a

$\Longrightarrow$ sappiamo che due diverse primitive differiscono per una costante:

$\exists K \in \mathbb{R}$ costante : $F_a(x) = g(x) + K$ $\forall x \in [a;b]$

$$\int_1^{16} \left| \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_1^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + \int_{\pi^2}^{16} \left(- \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\int_1^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - \int_{\pi^2}^{16} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

(1) Troviamo le primitive di $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin y}{\cancel{y}} 2\cancel{y} dy =$$

$$2 \int \sin y \, dy = -2 \cos y + c =$$

$$2(-\cos\sqrt{x} + c)$$

• sostituzione $\sqrt{x} = y$

$x = y^2$

derivo

moltiplico x differenziale $1 \quad 2y$

$dx = 2y\,dy$

(2) L'integrale $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2(-\cos\sqrt{x} + c) \quad c \in \mathbb{R}$

(3) Verifica

$$D(2(-\cos\sqrt{x} + c)) = \cancel{2} \cdot \sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} + 0 = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$ ok!

(4) Calcolo l'integrale definito

T. Torricelli $\rightarrow$ $g(x) = -2\cos\sqrt{x} = [g(\pi^2) - g(1)] - [g(16) - g(\pi^2)] =$

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda(t-t_0)}$$ LA FORMULA

Significato di λ

Calcoliamo il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ è tale che

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0$$

Periodo di dimezzam. Δt

$t = t_{1/2}$:
$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda(\underbrace{t_{1/2} - t_0}_{\Delta t})}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\log \frac{1}{2} = -\lambda \Delta t$$

$$-\log 2 = -\lambda \Delta t$$

$$\log 2 = \lambda \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\log 2}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{\log 2}{\Delta t}$$ non dipende né da t_0 né da N_0

Come si può usare tutto questo per la datazione col carbonio radioattivo?

C presenta tre isotopi

- ^{12}C — ^{13}C stabili
- ^{14}C radiattivo $\longrightarrow$ scambiato con l'atmosf.

Alla morte dell'organismo questo scambio cessa e l'isotopo diventa radioattivo

Il tempo di dimezzamento 5730 anni

t_0 = anno di morte dell'organismo
t = anno recupero reperto

legge:
$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda(t-t_0)}$$ → tempo trascorso dalla morte

$$t - t_0 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N(t)}{N_0}$$ età del campione

N_0 → n° nuclei presenti nell'istante della morte: [incognito]

Per trovare il dato mancante si calcola il numero di nuclei di ^{12}C stabile nel tempo

$m(t)$ = stabile nel tempo
$= M(t_0)$

età del campione: $$-\frac{1}{\lambda} \log \frac{N(t)}{N_0} \cdot \frac{M(t)}{M(t)}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \log \frac{N(t)}{M(t)} \cdot \frac{M(t_0)}{N_0}$$ → rapporto tra $\frac{^{12}C}{^{14}C}$ all'istante t_0 costante

DEF 4: Si chiama INTEGRALE GENERALE di un'eq. diff l'insieme di tutte le sue soluzioni

Una qualsiasi funzione si chiama invece INTEGRALE PARTICOLARE

Esempio: $N' = -\lambda N$

Le sue soluzioni: $N(t) = c e^{-\lambda t}$ $c \in \mathbb{R}$ INT. GENERALE

$c = 3$ $3e^{-\lambda t}$ è una soluzione INT. PARTICOLARE

Caso particolare: La ricerca delle primitive è un caso particolare di risoluzione di eq. differenziale

ES. Supponiamo di voler trovare le primitive di $\cos x$ su $\mathbb{R}$

= Trovare le funzioni y aventi come derivata $\cos x$ =

Trovare $y = y(x)$ tale che $y' = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$

$f(x) = f(x, y)$ non dipende da y

Per questo è un'eq. differenziale molto semplice

$y' = \cos x$ è nota tutta la derivata

$y' = y + \cos x$ compare la derivata non completamente perché dipende da y sconosciuta

Sol. $\operatorname{sen} x + c$ $c \in \mathbb{R}$

linguaggio degli integ. / linguaggio delle eq. diff.

l'insieme delle primitive o int. indefinito — integrale generale

fissando un valore di c: $c = 4$

linguaggio integrale / linguaggio eq. differenz.

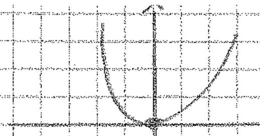
$\operatorname{sen} x + 4$ una primitiva — $\operatorname{sen} x + 4$ int. particolare

OSS. ① In generale non esistono dei metodi per il calcolo esplicito (in termini di funzioni elementari) delle soluzioni di un'eq. diff.

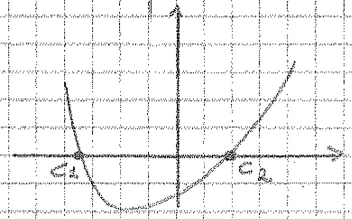
(Infatti già non esistevano metodi generali nel caso della ricerca delle primitive.)

② Esistono dei metodi numerici per la risoluzione approssimata delle eq. differenziali [es. metodo di Eulero]

Esempio:



$h(x)$ ha solo uno zero $c=0$
a cui corrisponde la soluzione costante
$y(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



2 soluzioni costanti

② Soluzioni non costanti

$$y' = g(x)\, h(y)$$

$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Oss. $y=y(x)$ è soluzione su I' se $y'(x) = g(x)\, h(y(x)) \quad \forall x \in I'$

x deve appartenere anche ad I quindi $I' \subset I$

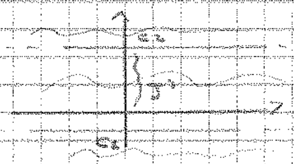
$\Rightarrow$ $h(y(x))$

$x \mapsto \underbrace{y(x)}_{} \longmapsto h(y(x))$

deve appartenere al dominio di $h(x)$ per poter comparire

$\Rightarrow g(x) = J = \operatorname{dom} h \iff \operatorname{im} y \subset J$

Cerchiamo soluzioni il cui grafico non interseca le soluzioni costanti:



Per far questo bisogna selezionare un intervallo $J' \subset J$ tale che $h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J'$
e si cercheranno soluzioni la cui immagine sia contenuta in J'

TEOREMA Sia $g \in C(I)$ (continua) e sia G una primitiva di g in I

sia $h \in C(I)$ e sia $J' \in J$ in

$h(y) \neq 0 \quad \forall y \in J'$

Sia H una primitiva di $\frac{1}{h}$ su J'

Allora $y: I' \subset I \to J'$
è soluzione di
$y' = g(x)h(x)$
su I' se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$H(y(x)) = G(x) + c \qquad \forall x \in I'$$

Oss. ① G esiste per il Teorema fondamentale

② $\frac{1}{h}$ è continua su J' perché h è continua e non si annulla $\Rightarrow$ esiste H per il Teorema fondament. del calcolo integrale

③ La tesi esprime una relazione soddisfatta dalle soluzioni e più semplice rispetto all'eq. differenziale di partenza (perché non compare y')

non sempre si riesce a trovare H^{-1}

$H(y(x)) = G(x) + c \qquad \forall x \in I'$

$y(x) = H^{-1}(G(x)+c) \qquad \forall x \in I'$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx = \int x^2\,dx \quad \frac{1}{3}x^3 + c'$$

Si usa sempre la sostituzione $s = y(x)$, $ds = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{3}x^3 + c'$$

$$-\frac{1}{s} + c'' = \frac{1}{3}x^3 + c' \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} + c'' = \frac{1}{3}x^3 + c'$$

- Osserviamo che siamo arrivati proprio all'espressione $H(y(x)) = G(x) + c$ $\forall x \in I'$ data dal teorema

Infatti
- $G(x)$ è una primitiva di g quindi di x^2 ad esempio $\frac{1}{3}x^3$
- $H(y(x))$ è una primitiva di $\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y^2} = y^{-2} = -\frac{1}{y}$ ad. es

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \text{la stessa relazione di prima}$$

Calcoliamo H^{-1} (in questo caso si può fare)

$$\frac{1}{y(x)} = -\frac{1}{3}x^3 + c$$

$$y(x) = -\frac{3}{x^3} + c''' $$

Esempio:

(a) $y' = 3x^2 e^{-y}$

è evidente che questa funzione sia a variabili separabili $y' = e^{x+y}$ sembra non esserlo ma $y' = e^x \cdot e^y$ quindi è anche esso a variabili separabili

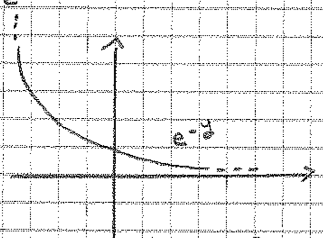
$g(x) = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} = I$
$h(y) = e^{-y} \quad \forall y \in \mathbb{R} = J$

① Soluzioni costanti

$y(x) = c$ costante è soluzione $\Longleftrightarrow h(c) = 0$

c è uno zero della funzione

$h = e^{-y}$



Non ci sono soluzioni costanti

② Soluzioni non costanti

$y(x)$ è soluzione su $I' \subset I$ se

$y'(x) = g(x)\,h(y(x)) \quad \forall x \in I'$
$y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$

$$\frac{y'(x)}{e^{-y(x)}} = 3x^2 \quad \forall x \in I'$$

$$\int \frac{y'(x)}{e^{-y(x)}}\,dx = \int 3x^2\,dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 196

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$y' = p(x)y + q(x)$ — Polinomio di primo grado in y con coefficienti che possono dipendere da x

TEOREMA

Siano $p, q \in C(I)$ e siano P (P grande) una primitiva di p (p piccola) su I

R una primitiva di $e^{-P} \cdot q$ su I

Allora $y: I \to \mathbb{R}$ è soluzione di $y' = p(x)y + q(x)$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$y(x) = e^{P(x)}(R(x) + c) \quad , \quad \forall x \in I$$

OSSERVAZIONI:

① P esiste perché $p \in C(I)$ (per il Teorema fondamentale)

② R esiste perché $e^{-P} \cdot q \in C(I)$ "

③ Tutte le soluzioni sono globalmente definite
il loro dominio è I (dominio delle f. da cui sono partito)

Esempio: $y' = \frac{1}{x} y + x^3$ $\qquad x > 0$

$p(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad I = (0; +\infty)$

$\Rightarrow$ continue su I

$q(x) = x^3$

① P primitiva di $p = \frac{1}{x}$ su $(0, +\infty)$:

ad esempio $\log x$ $\quad \forall x > 0$

② Scritta la funzione $e^{-\log x} \cdot x^3$ trovo una primitiva:

$$R = \int e^{-\log x}\, x^3\, dx = \int \cancel{e^{\log}} x^{-1} \cdot x^3\, dx =$$

$$\int x^{-1} \cdot x^3\, dx = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$R(x) = \frac{1}{3}x^3$$

③ Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = \cancel{e^{\log}} x \left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\underline{y(x) = x\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 196

FUNZIONE

$f: X \to Y$

- dom f (il campo di esistenza della funzione, un sottoinsieme di X) $\quad \text{dom} f \subseteq X$

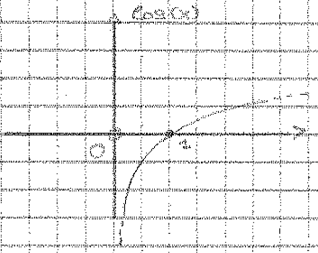
Prende dei numeri e li redistribuisce

Esempio
cos'è x?

log (x)

$\log|_{(0;1]}$

una restrizione dell'insieme



(Tale che)

- $\text{im} f = \{ y \in Y : \exists\, x \in \text{dom} f \}$

$\text{im} f \subseteq Y$ sottoinsieme di Y in cui includiamo tutte le immagini

$\log(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ quindi l'immagine di f è tutto R

- grafico: $\Gamma(f) = \{ (x; f(x)) \in X \times Y : x \in \text{dom} f$ e $f(x) \in \text{im} f \}$ è un insieme di coppie ordinate

$- \; y = x^2$

Prendiamo $x \in [0;2]$ quindi $A = [0;2]$

Troviamo l'immagine di A attraverso g

$g(A) = \{ y \in \text{im} f \;/\; y = g(x);\; x \in A \}$

È necessario che A abbia un'intersezione non vuota con dom g

- controimmagine di f

$y \in \text{im} f \qquad f^{-1}(y) = \{ x \in \text{dom} f \;/\; f(x) = y \}$

la controimm. di y appartenente all'insieme delle immag. di x

* Fare attenzione al dominio della funzione di partenza

DEF.

- Funzione iniettiva: $\forall\, x_1, x_2 \in \text{dom} f$ con $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

- Funzione suriettiva: $f: \text{dom} f \subseteq X \to Y$ suriettiva se $Y = \text{im} f$

- Funzione monotona:
  - strett. crescente $\forall\, x_1, x_2 \in \text{dom} f : x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$
    mantiene la funzione d'ordine
  - strett. decrescente $\forall\, x_1, x_2 \in \text{dom} f : x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$
    capovolge la funzione d'ordine

- Funzione pari $f: \text{dom} f \subseteq X \to Y \quad f(-x) = f(x)$

  Funzione dispari $f: \text{dom} f \subseteq X \to Y \quad f(-x) = -f(x)$

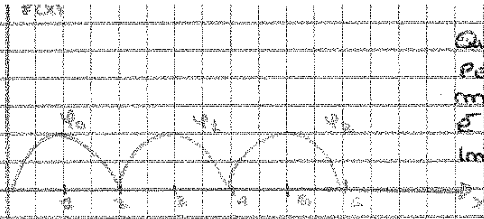
Prendo un pezzo della f e faccio copia e incolla

- Funzione periodica $\exists\, p \in \mathbb{R}^+$ f è periodica quando $f(x) = f(x+p)$
  dom f è un insieme invariante per traslazioni di $\pm p$

$\varphi_0(x) = x(2-x)$

$\varphi_1(x) = (x-2)(-x+4)$

$\varphi_2(x) = (x+4)(-x+6)$



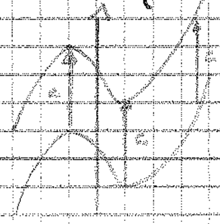
Queste funzioni sono usate per approssimare delle funzioni ma mentre quella di prima è troppo spigolosa questa è invece più morbida

OPERAZIONI SUI GRAFICI

Grafico: $\Gamma(f) = \{(x;y) \in R^2 / y = f(x); x \in \mathrm{dom} f\}$

① con $c \neq 0$ $\quad y \to y+c \mid \to x \to f(x)+c$

$\Gamma'(f) = \{(x; c+f(x)) \in R^2$



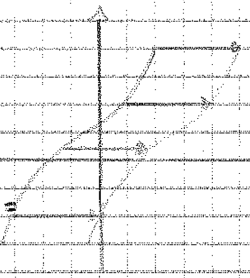
Prendiamo tutti i punti e li spostiamo, trasliamo di c.

② con $c \neq 0$ $\quad x \to f(x) \mid \to x+c \to f(x+c)$

quando traslo sull'asse x sto operando anche sul dominio

- Per traslare di meno c posso:

$x' = x+c$
$f(x') = g(x'-c)$



- $x_1 = x+c_1$ $\qquad g(x) = f(x+c_1)$
  $x_2 = x_1+c_2 = x+c_1+c_2$ $\qquad g_2(x_2) = g_1(x_1+c_1) = f(x+c_1+c_2)$

(è una composizione di traslazioni)

- Quando $f(x) = f(x+c)$ la funzione è periodica oppure è simmetrica per traslazione

Se $f(x) \neq f(x+c)$ la funzione non rispecchia le due condizioni di prima

- $f(x) \overset{?}{=} f(x+c)$

$x^2 = (x+c)^2$
$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2xc + c^2$
$c(c+2x) = 0$
- $x=0$
- $x = -\frac{c}{2}$ $\qquad x = -\frac{c}{2} \qquad x+c = \frac{c}{2}$

③ $f_0(x) = x^4$
$f_1(x) = x^4 + c_1$
$f_2(x) = (x+c_2)^4 + c_1$
} Traslo sull'asse x e y

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 196

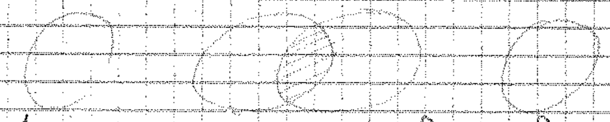
FUNZIONE COMPOSTA

Supponiamo di avere due funzioni:

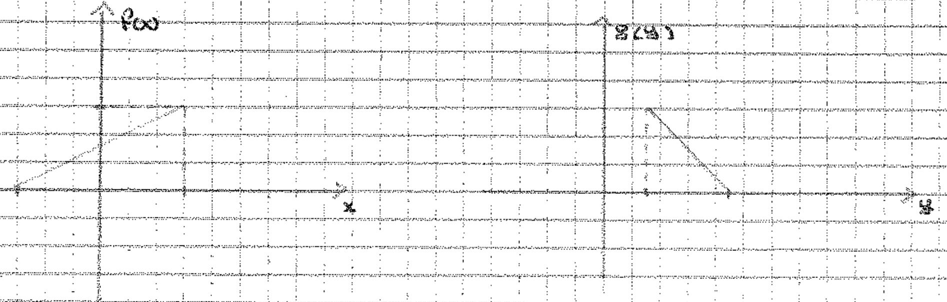
f

g

$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$



$\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$



$g \circ f$

$\mathrm{dom}\, f = [-1; 1]$ $\quad$ $\mathrm{im}\, f = [0; 1]$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = y$

$\mathrm{dom}\, g = [1/2; 3/2]$ $\quad$ $\mathrm{im}\, f = [0; 1]$ $\quad$ $g(x) = -y + \frac{3}{2}$

(1) Prima di comporre devo verificare che $\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset = [1/2; 1]$

$g(f(x)) = -\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{3}{2}$ $\quad$ quindi $y \in [1/2; 1]$

ma $x \in [0; 1]$ perché $+\left(\frac{x+1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$

$+\left(\frac{x+1}{2}\right) \leq 1$

(2) Calcolo la controimmagine:

$(g \circ f)(2/3) = \left\{ x \in \mathrm{dom}\, g \circ f \;/\; (g \circ f)(x) = \frac{2}{3} \right\}$

$g \circ f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ $\quad$ x deve appartenere al dom

Esempio:

- $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - 2x$ $\quad\Big|\quad$ $f \circ g = f(g(x)) = 1 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 1$

  $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{im}\, g = [-1; +\infty)$

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = 2x + 1$ $\quad\Big|\quad$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - (2x+1)^2} = \sqrt{\cancel{1} - 4x^2 - 4x - \cancel{1}}$

  $x \in [-1; 0]$

  $f(y) = \sqrt{1 - y^2}$

  $y = 2x + 1$

  $\mathrm{im}\, g \cap \mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} \mathrm{dom}\, f = [-1; 1] \\ \mathrm{im}\, g = \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 2x + 1 \leq 1 \\ y = 2x + 1 \geq -1 \end{array}$ $\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

- Posso anche calcolare la funzione composta e poi il dominio, si può fare ma in questa maniera si capisce il motivo alla base del cambiamento di dominio

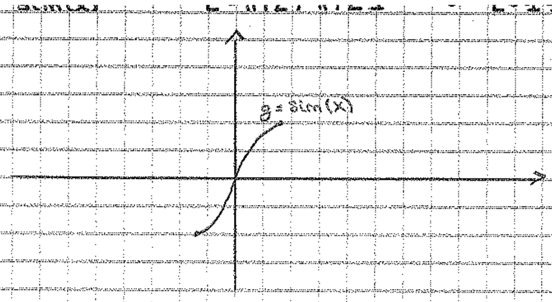
- $g(x) = x^2 + 2x$, $h(y) = \frac{1}{y}$ $\quad\Big|\quad$ $f = h \circ g$

  $[-1; +\infty) \cap y \neq 0 = [-1; 0) \cup (0; +\infty)$

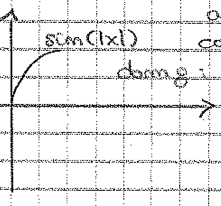
  $\mathrm{im}\, g \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

  $h(g(x)) = \frac{1}{x^2 + 2x}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 196



$x \longrightarrow |x| \longrightarrow \sin(|x|)$ Per fare il valore assoluto di $\sin x$ calcolo una f. compost

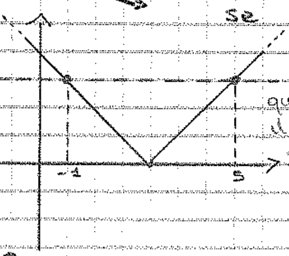


dom g : $[0; \pi/2]$

Equazione con il valore assoluto

① $|x-2| = 3$

- se $x - 2 \geq 0$ $\quad x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$
- se $x < 2$ $\quad -x + 2 = 3 \Rightarrow x = -1$



qualitativamente il grafico assume questa forma

② $|x-2| < 3$

$$\begin{cases} \text{se } x \geq 2 \text{ allora } x - 2 < 3 \Rightarrow x < 5 \\ \text{se } x < 2 \text{ allora } -x + 2 < 3 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

ESERCIZI

① $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$; $\sup A = \sqrt{5}$

② $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 5\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$; $\sup A = \sqrt{5}$

A è limitato

$-\sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt{5}$

DERIVATA

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$ (intervallo aperto)

$B(x_0, \delta)$, $x \in B(x_0, \delta)$

$x = x_0 + h$ (numero che ha una direzione: vettore)

$\Longrightarrow$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right]$$

rapporto incrementale — rapporto perché sto facendo un confronto

h incremento

- Ho definito un rapporto tra la variazione della funzione per h
- Variazione di f relativamente ad h

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

il limite del rapporto incrementale quando $h \to 0$

Possiamo generalizzare con $f'(x_0)$ che non è una funzione ma un numero

$f \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f'$ (da index non è un rapporto) $= \frac{df}{dx}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(f+g) = f' + g'$

operatore lineare

Esempio:

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $f(\cdot) = \sin(\cdot)$

$f'(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $f'(\cdot) = \cos(\cdot)$

REGOLE DI DERIVAZIONE

① $k(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$

② $f(x) = x^\alpha$; con $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

③ $f(x) = a^x$ con $a > 0 \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

PROP. $x = b^y = b^{\log_b(x)}$; $y = \log_b x$

$\log_k(x) = \log_k(b^y) = y \log_k b$

$y = \frac{\log_k x}{\log_k b}$

$\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b}$

④ $f(x) = \log_a |x|$ $\quad a > 0,\ a \neq 1 \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \log}$

⑤ $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

⑥ $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$

⑦ $f(x) = \arctan x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

⑧ $f(x) = \operatorname{arccotg} x \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

APPLICAZIONI

- $r = 21$ cm ; $\Delta r = 0{,}05$ cm

  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\Delta V = 4\pi r^2 \cdot \Delta r = 4\pi(21)^2 \cdot (0{,}05)$ cm^3 [derivata del volume rispetto ad r moltiplicata per il Δr]

- $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

  $v(t) = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

  $a(t) = v'(t) = 6t - 12 = 6(t-6)$

  $a'(t) = 6$ tasso di variazione dell' accellerazione

DERIVATA: tasso di variazione di una grandezza rispetto alla grandezza da cui deriva

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 196

5) $\int_0^{-} \tau e^{-\,-} \, d\tau \Rightarrow$ $\quad \circ \; f(\tau) = -\tau^2 \quad df(t) = -2\tau \, d\tau$

$\circ \int f(x) \cdot f'(x) \, dx \Leftarrow$ Potrei ricondurla a

$$\int_0^x \tau e^{-\tau^2} d\tau = -\frac{1}{2}(-2) \int_0^x \tau e^{-\tau^2} d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^x e^{-\tau^2}(-2\tau)\, d\tau =$$

$$-\frac{1}{2}\left[e^{-\tau^2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2} - 1\right] = \frac{1-e^{-x^2}}{2}$$

6) $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}} \, dx =$ $\quad$ integrale per sostituzione $\tau = e^{2x}$

$d\tau = 2e^{2x} dx$

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{1+\tau} \, d\tau =$$

$$\frac{1}{2} \frac{(1+\tau)^{3/2}}{3/2} = \frac{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}{3} + c$$

7) $\int_0^y e^{(\sin x)^2} dx = Fy$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 196

$x^2+7x+12=0$

$x_{1-2}=-4\,;\,-3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+7x+12} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x+3} =$ A e B? Principio d'identità dei polinomi

$\dfrac{A(x+3)+B(x+4)}{(x+4)(x+3)} = -\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x+3}$ $Ax+3A+Bx+4B$

$Ax+Bx+3A+4B$

$x(A+B)+3A+4B$

$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+4B=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

④ $I(x)=\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x-1 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} x^2-4x+4 & 1 \\ \hline 2x-5 & \end{array}$$

$I(x)=\displaystyle\int 1+\frac{2x-5}{x^2-4x+4}\,dx = x+\int\frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx-\int\frac{1}{x^2-4x+4}\,dx=$

$x+\log|x^2-4x+4|-\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = x+\log|x^2-4x+4|-\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c=$

$x+2\log(x-2)+\dfrac{1}{x-2}+c$

Formule parametriche

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

① $I(x) = \int \frac{1}{\cos x}\,dx$ Pongo $t = \tan\frac{x}{2}$

$x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$I(x) = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2}\cdot\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt =$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sec x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt$

② $I(x) = \int \frac{1}{\cos x + \sin x}\,dx$

se sommo le formule parametriche di $\sin x + \cos x$ ottengo $\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}$

$\int \frac{\cancel{1+t^2}}{-t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt =$

$2\int \frac{1}{-t^2+2t+1}\,dt$

③ $I(x) = \int \frac{\sin x \cos x}{[\sin x]^2 - 3\sin x + 2}\,dx \rightarrow dt$ Pongo $t = \sin x$

$dt = \cos x\,dx$

$= \int \frac{t}{t^2-3t+2}\,dt$

integral importanti

ⓐ $I_1(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx \Longrightarrow I_2(x) = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$ $[x = \sin t]$

ⓑ $I_1(x) = \int \sqrt{1+x^2}\,dx \Longrightarrow I_2(x) = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt$

a) • $x = \sin t \longrightarrow dx = \cos t\,dt$

• $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\Rightarrow \int \cos t \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$

b) • $x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ seno iperbolico

$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ coseno iperbolico

• $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t}$

$x = \sinh t \longrightarrow dx = \cosh t\,dt$

$\Rightarrow \int \cosh t \cdot \cosh t \cdot dt = \int \cosh^2 t\,dt$

$t = \text{settsinh}(x)$

$x = \sinh t$

$1+x^2 = \cosh^2 t \longrightarrow \sqrt{1+x^2} = \cosh t$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

PREMESSA

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

se f è derivabile su ogni $c \in I$ allora è definita la funzione DER. PRIMA

$$f': I \to \mathbb{R}$$
$$c \mapsto f'(c)$$

se f' è derivabile in ogni $c \in I$ allora è definita la sua derivata prima (derivata prima della derivata prima)

$$(f')' = \text{DER. SECONDA} = f''$$

Iteratamente si definisce:

$$f^{(k+1)} = (f^{k})' \qquad \forall k \geq 0$$

Notazioni: $f'; f''; f'''; f^{(IV)};$

$f^{0}; f; f^{(2)}; f^{(3)}$

Esempio:

$f(x) = x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{(3)}(x) = 24x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{(4)}(x) = 24 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{(5)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \geq 5$

DEFINIZIONE:

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si dice di classe C^k su I $(k \geq 0)$ e si scrive $f \in C^k(I)$ se

f è derivabile k-volte su I e

$f^{(k)}$ è continua su I

Esempio: $C^1(I)$ esistono $f; f'$ e f' continua

$C^2(I)$ esistono f, f', f'' e f'' continua

DEFINIZIONE:

Si chiama eq. differenziale del secondo ordine, una relazione del tipo:

$$y'' = f(x; y; y')$$

RICORDIAMO CHE: $y' = f(x; y)$ eq. diff. 1° ordine

y variabile dipendente

$y = y(x)$ f. incognita

PROPRIETÀ ELEMENTARI

① Se y_1 e y_2 sono due soluzioni dell'eq. omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

allora anche $y_1 + y_2$ è soluzione su I

② Se y_1 è soluzione di un'eq. omogenea su I e α è una costante

allora αy_1 (α volte la soluzione) è ancora soluzione

③ Se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'eq. completa:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \quad \text{su } I$$

vale solo per la differenza

allora $y_1 - y_2$ è soluzione dell'eq. omogenea associata

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad \text{su } I$$

Dimostrare la ① e ② per esercizio

③ y_1 soluzione dell'eq. compl.

y_2 soluzione dell'eq. compl. (IPOTESI)

$v = y_1 - y_2$ soluzione dell'equazione omog. associata (TESI)

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = g(x) \quad \forall x \in I \\ &2)\quad y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x) = g(x) \quad \forall x \in I \end{aligned}\right\} \text{IPOTESI}$$

$$v''(x) + a(x)v'(x) + b(x)v(x) = 0 \quad \forall x \in I \qquad \text{TESI}$$

Sottraiamo membro a membro le relazioni 1 e 2

$$\underbrace{y_1''(x) - y_2''(x)}_{v''(x)} + a(x)[\underbrace{y_1'(x) - y_2'(x)}_{v'(x)}] + b(x)[\underbrace{y_1(x) - y_2(x)}_{v(x)}] = \underbrace{g(x) - g(x)}_{0} \quad \forall x \in I$$

Risolviamo: 1

integrale generale di un'eq. omogenea nel caso particolare di un'equazione a coefficienti costanti, nel caso generale non ci sono metodi risolutivi sempre validi

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Per risolverla richiamiamo le eq. di secondo grado algebriche:

$$\ell^2 + a\ell + b = 0$$

$$\ell = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \Delta = a^2 - 4b$$

con $\Delta > 0$ — 2 soluz. reali distinte

$\Delta = 0$ — 2 soluz. reali coincidenti

$\Delta < 0$ — non ci sono soluzioni (in $\mathbb{R}$)

Esempio: $\ell^2 + \ell + 2 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ non ci sono soluzioni reali

$\ell = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ in $\mathbb{R}$ non ha mess. significato

allora $\ell = \frac{-1 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$ $\begin{cases} -1/2 + i\sqrt{7}/2 \\ -1/2 - i\sqrt{7}/2 \end{cases}$ ($\sqrt{-1} = i$)

2 numeri complessi

quindi:

$\Delta > 0$ 2 reali distinte

$\Delta = 0$ 2 sol. reali coincidenti

$\Delta < 0$ 2 sol. complesse $\ell_1 = \alpha + i\beta$, $\ell_2 = \alpha - i\beta$

Conclusione: Ogni equazione del 2° ordine (algebrica) ha sempre due soluzioni

TORNIAMO A INTEGRALE GENERALE di:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Siano $\ell_1 : \ell_2$ soluzioni dell'eq. algebrica

$$\ell^2 + a\ell + b = 0$$

L'equazione differenziale omogenea (o) ha integrale generale

$$\underline{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)} \qquad c_1 \, c_2 \in \mathbb{R}$$

dipende da due costanti

dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono date

① $\Delta > 0$ ($\ell_1 \neq \ell_2$ soluzioni reali)

$y_1(x) = e^{\ell_1 x}$

$y_2(x) = e^{\ell_2 x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

② $\Delta = 0 \qquad \ell_1 = \ell_2$

$y_1(x) = e^{\ell_1 x}$

$y_2(x) = x e^{\ell_1 x}$

③ $\Delta < 0 \qquad \ell_1, \ell_2$ soluzioni complesse

$\ell_1 = \alpha + i\beta, \ \ell_2 = \alpha + i\beta$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Dell'eq 2° ordine siamo giunti a calcolare $y_{GEN(c)}(x) = y_{GEN(o)}(x) + \psi(x)$

• RICERCA DI UN INTEGRALE PARTICOLARE

(1) Metodo di Lagrange

Si applica ad ogni
$g: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

ma è un metodo lungo e complicato anche con espressioni semplici

(2) Metodo di somiglianza

VANTAGGIO: è facile e breve
SVANTAGGIO: si applica solo a particolari funzioni g

Può essere applicato a:

$g(x) =$ Polinomio
$g(x) = Ae^{\alpha x}$ $A, \alpha \in \mathbb{R}$
$g(x) = A\cos\alpha x$ $A, \alpha \in \mathbb{R}$
$A \sin \beta x$

Esempio:

$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$ $A, \alpha \in \mathbb{R}$

① Integrale generale di

$y'' + ay' + by = 0$ eq. caratteristica...

② Integrale particolare ψ di (c)

• Si cerca una soluzione del tipo:

$$\psi(x) = Bx^m e^{\alpha x}$$

dove m è la molteplicità di α come soluzione dell'eq. caratteristica $\rho^2 + a\rho + b = 0$ cioè:

$m = 0$ se α non è soluz.

$m = 1$ se α è soluz. semplice

$m = 2$ se α è soluzione doppia

B va trovato in modo che ψ sia soluzione di (c)

ESERCIZIO: $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$

① Omogenea associata: $y'' - 5y' + 6y = 0$

$\rho^2 - 5\rho + 6 = 0$ eq. caratteristica
$\rho_1 = 2, \rho_2 = 3$ $\Delta = 1$

$y_1(x) = e^{2x}$
$y_2(x) = e^{3x}$ $\Longrightarrow$ $y_{GEN(o)}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② Soluzione particolare:

$g(x) = 4e^{2x}$ $\alpha = 2$ è soluz. dell'eq. caratterist.
quindi $m = 1$ xk α soluz. semplice

$\psi(x) = Bx^1 e^{2x} = Bxe^{2x}$

③ Trovare B in modo che $\psi(x)$ sia soluzione di (c)

APPLICAZIONI DELLE EQ. DEL 2° ORDINE:

- Moto rettilineo

t = tempo
$x(t)$ = posizione al tempo t

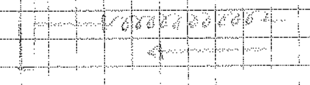
2° legge della dinamica $F = ma$
poiché $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$

$mx'' = F$ eq. differenziale

quindi quando studiamo la forza in un moto rettilineo abbiamo a che fare con eq. differenziali del 2° ordine

Esempio

$$F = F_{elastica} + F_{attrito} + F_{esterna}$$



$F_{elastica} = -kx$ $k>0$

$F_{attrito} = -\mu x'$ $\mu \geq 0$

$F_{esterna} = F\cos\omega t$ $F, \omega > 0$ F periodica

$$mx'' = -kx - \mu x' + F\cos\omega t$$

$$mx'' + \mu x' + kx = F\cos\omega t \quad (eq\,1)$$

ADD.

PROBLEMA DI CAUCHY PER LE EQ. 2° ORDINE

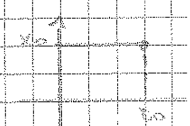
$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x') \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

posizione all'istante iniziale

velocità all'istante iniziale (qst condizione non c'era nelle eq. del 1° ordine)

1° ordine

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Risolviamo (eq 1)

IPOTESI: $\mu^2 < 4km$ poco attrito fa sì che venga $\Delta < 0$

(1) eq. omogenea associata:

$$mx'' + \mu x' + kx = 0$$

eq. caratteristica:

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0 \qquad \Delta = \mu^2 - 4km < 0$$

2 soluzioni complesse

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} =$$

$$= -\frac{\mu}{2m} \pm \frac{\sqrt{-1(4km - \mu^2)}}{2m} =$$

$$= -\frac{\mu}{2m} \pm i\,\frac{\sqrt{4km - \mu^2}}{2m} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\sqrt{\frac{4km - \mu^2}{4m^2}} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\; t\right)$$

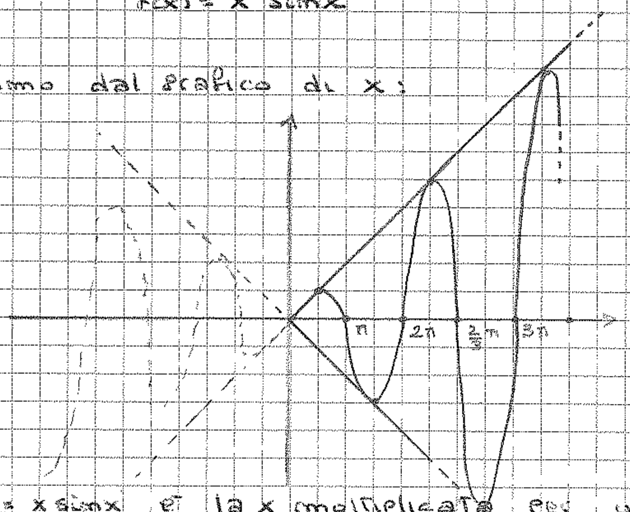
$$x_2(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\; t\right)$$

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(c_1 \sin\sqrt{\quad}\, t + c_2\cos\sqrt{\quad}\, t\right)$$

Esercizio: Vogliamo disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = x \sin x$$

- Partiamo dal grafico di x:



$f(x) = x \sin x$ è la x moltiplicata per un qualcosa che oscilla tra -1 e 1 quindi

$-x \le f(x) \le x$

Adesso: Torniamo all'oscillatore, dobbiamo risolvere l'eq. completa per trovare un integrale particolare

$x_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ $\qquad c_1$ e $c_2 = ?$

- $x''_p(t) = -\omega^2 c_1 \cos \omega t - \omega^2 c_2 \sin \omega t$

$x'_p(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$

Sostituiamo

- $-m\omega^2 c_1 \cos \omega t - m\omega^2 c_2 \sin \omega t + \mu \omega c_2 \cos \omega t - \mu \omega c_1 \sin \omega t +$

$+ k c_1 \cos \omega t + k c_2 \sin \omega t = F \cos \omega t$

- $(-m\omega^2 c_1 + \mu \omega c_2 + k c_1) \cos \omega t + (-m\omega^2 c_2 - \mu \omega c_1 + k c_2) \sin \omega t$

$F \cos \omega t + 0 \sin \omega t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

- $\begin{cases} (-m\omega^2 + k) c_1 + \mu \omega c_2 = F \\ \mu \omega c_1 + (-m\omega^2 + k) c_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 = \dots \\ c_2 = \dots \end{cases}$

scrivere la somma di cos e sin come un unico seno

$x_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = a \sin(\omega t + \varphi')$

$$x_p(t) = \frac{F}{\sqrt{\mu^2 \omega^2 + m^2(\omega^2 - \omega_0^2)}} \sin(\omega t + \varphi')$$

Conclusione:
$$x(t) = A e^{-\frac{\mu}{2m} t} \sin(\gamma t + \varphi) + \underbrace{\frac{F}{\sqrt{\mu^2 \omega^2 + m^2(\omega^2 - \omega_0^2)}} \sin(\omega t + \varphi')}_{\text{PERIODICO}}$$

A regime (quando $t \to +\infty$) il moto è periodico

frequenza = frequenza f. esterna

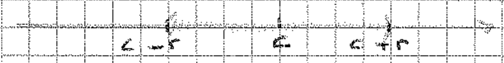
ampiezza $= a(\omega) = \dfrac{F}{\sqrt{\mu^2 \omega^2 + \dots}}$

LIMITI, CONTINUITÀ, DERIVABILITÀ

Limite di una f in un p

$c \in \mathbb{R}$

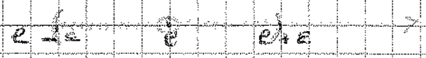
$I(c) = (c-r, c+r) \quad r>0$

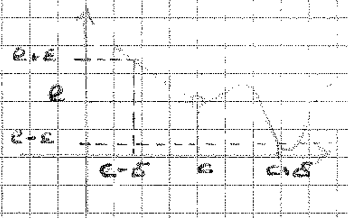


$f: I(c)\setminus\{c\} \to \mathbb{R} \qquad l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to c} f(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ / \ |x-c|<\delta \ \ x\neq c \implies |f(x)-l|<\varepsilon$

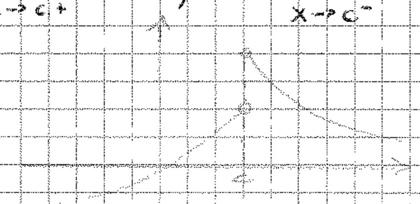




movimento locale: se x è vicino a c e $x\neq c$ allora f(x) è vicino ad l

A volte il limite potrebbe non esistere, in alcuni casi potrebbe esistere il <u>limite destro</u> o/e <u>sinistro</u>

$\lim_{x\to c^+} f(x), \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)$



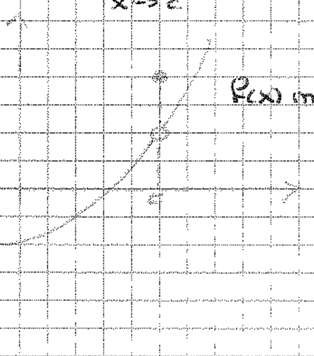
Solitamente c'è un salto

La definizione non chiede che f sia definita in c ma se lo fosse:

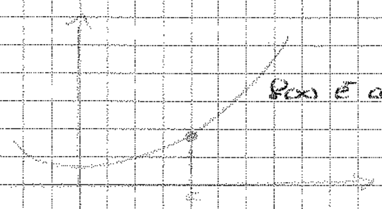
IPOTESI AGGIUNTIVA f è definita anche in $x=c$

$f: I(c) \longrightarrow \mathbb{R}$

Di solito $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ ma se f(x) è definita in c allora il $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ e f si dice <u>continua</u> in $x=c$

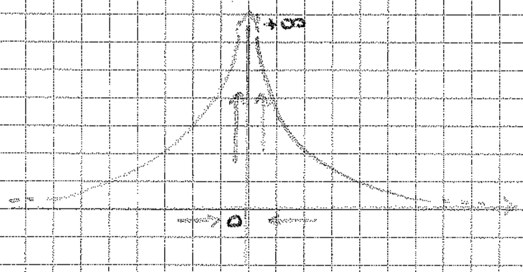


f(x) non è continua



f(x) è continua

Aspetto grafico



Aspetto analitico (verifica tramite la definizione)

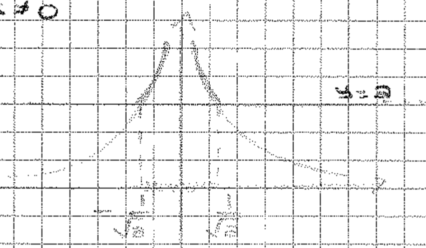
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\forall I(+\infty)\ \exists I(0) : \quad x \in I(0),\ x \neq 0 \implies f(x) \in I(+\infty)$

- $I(+\infty) = (a; +\infty) \quad a > 0$
- $I(0) = (0+\delta;\ 0-\delta)$

$\forall a > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x| < \delta \quad x \neq 0 \implies \frac{1}{x^2} > a$

– Dato $a > 0$ dobbiamo provare che esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{1}{x^2} > a$ se $|x| < \delta,\ x \neq 0$



$$\frac{1}{x^2} > a \iff -\frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{\sqrt{a}} \quad x \neq 0$$

$$\iff |x| < \frac{1}{\sqrt{a}} \quad x \neq 0$$

Basta prendere $\delta = \frac{1}{\sqrt{a}}$

[leggere sul libro le definizioni di asintoto orizzontale e obliquo]

TEOREMA SUI LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: I(c) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$
intorno sinistro di c

IPOTESI: con $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Supponiamo che f sia monotona crescente su $I_-(c) \setminus \{c\}$

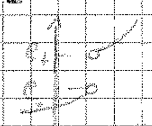
TESI: Allora $\exists \lim_{x \to c^-} f(x)$ in particolare
- f illimitata su $I_-(c) \setminus \{c\} \longrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$
- f limitata su $I_-(c) \setminus \{c\} \longrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

e quando f è limitata ℓ è $\sup\{\underbrace{f(x)\ x \in I_-(c) \setminus \{c\}}_{\text{immagine di } f \text{ su } I_-(c) \setminus \{c\}}\}$ (*)

OSSERVAZIONI:

① Esiste un'analoga versione per le funzioni decrescenti e per il limite destro

② Supponiamo che f sia definita sia da destra che da sinistra $f: I(c) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\Longrightarrow$ esistono $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$ ma possono essere diversi



$\ell_- \neq \ell_+$
in questo caso non esiste il limite completo

③ Per scrivere (*) bisogna avere la completezza di $\mathbb{R}$
questo teorema è vero in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$

Esempio: Considero $\sqrt{2}$ e costruiamo la successione delle sue approssimazioni per difetto

$S: \{1; 1,4; 1,41 \ldots\} \in \mathbb{Q}$ monotona crescente

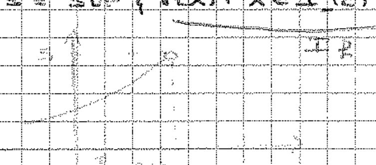
(ma S non converge in $\mathbb{Q}$ ma in $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2}$)

④ Se $c = +\infty$ f crescente su $I(c)$
$\Longrightarrow$ esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ACCENNIAMO LA DIMOSTRAZIONE PER f LIMITATA

IPOTESI: f crescente su $I_-(c) \setminus \{c\}$
f limitata su $I_-(c) \setminus \{c\}$
$\mathbb{R} \ni s = \sup\{\underbrace{f(x) : x \in I_-(c) \setminus \{c\}}_{\subset \mathbb{R}}\}$

TESI: $\lim_{x \to c^-} f(x) = s$



$\lim_{x \to c^-} f(x) = s$

$\forall I(s)\ \exists I'_-(c)\quad x \in I'_-(c) - \{c\} \Longrightarrow f(x) \in I(s)$

- $I(s) = (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \qquad s \in \mathbb{R}$

Supponiamo c finito $c \in \mathbb{R}$ [dimostrare per $c = +\infty$]

- $I'_-(c) = (c - \delta, c)$

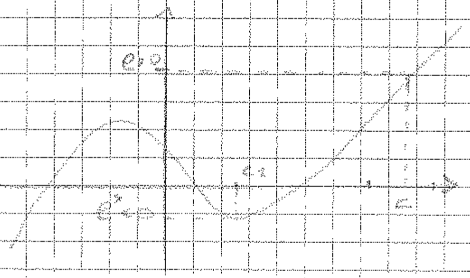
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f: I(c) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$

e sia $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$

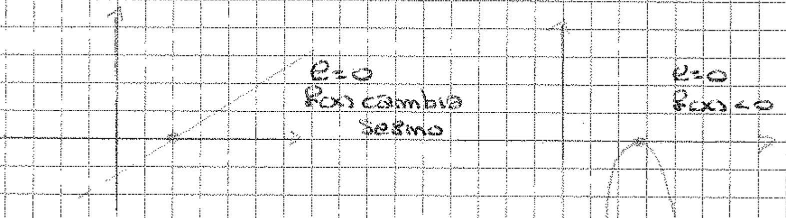
Allora ① se $\ell > 0$ oppure $\ell = +\infty$
allora esiste un intorno $I_1(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_1(c)$, $x \neq c$

② se $\ell < 0$ oppure $\ell = -\infty$
allora esiste un intorno $I_2(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x) < 0 \quad \forall x \in I_2(c)$, $x \neq c$



OSSERVAZIONI: ① L'informazione sul segno di f è di tipo locale

② Il teorema non dà informazioni sul segno di f in un unico caso: $\ell = 0$

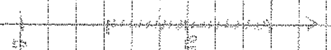


DIMOSTRAZIONE: [caso 1] (Caso 2 per esercizio)

$\ell > 0$ ipotesi
$f > 0$ localmente tesi

Passo 1 $\quad \ell > 0$ oppure $\ell = +\infty \implies$

esiste un intorno $I(\ell)$ tale che $y \in I(\ell) \implies y > 0$



Passo 2 $\quad$ Si applica la definizione di limite.

Dato $I(\ell)$ come al passo 1 allora $\implies \exists\ I_1(c)$ tale che
$x \in I_1(c),\ x \neq c \implies f(x) \in I(\ell)$
$\downarrow$
$f(x) > 0$