NUMERO: 530

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Contadin

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. Lancelotti

Teorema 3.4 cap. 3 DIPENDENZA DELL'INTEGRALE DI LINEA DAL VERSO INDOTTO DALLA CURVA PARAMETRICA SUL SOSTEGNO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma [a,b] \to \Omega$ e $\eta [c,d] \to \Omega$ due curve parametriche semplici e regolari.

Valgono i seguenti fatti: 1) se γ e η sono equivalenti, allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_\eta F \cdot dP$$

2) se esiste una funzione $\alpha : [c,d] \to [a,b]$, biiettiva, di classe C^1 con $\alpha'(\tau) < 0 \;\; \forall \tau \in [c,d]$ tale che $\eta = \alpha \circ \gamma$ allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = -\int_\eta F \cdot dP$$

Dimostrazione

Poiché $\eta = \gamma \circ \alpha$ allora $\forall \tau \in [c,d]$, si ha che

$$\eta'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)$$

Allora $\displaystyle\int_\eta F \cdot dP = \int_c^d F(\eta(\tau)) \cdot \eta'(\tau) dt = \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau))\, \alpha'(\tau) d\tau$

Poniamo $t = \alpha(\tau)$, da cui $dt = \alpha'(\tau) d\tau$. Essendo α biiettiva con $\alpha'(\tau) < 0 \;\; \forall \tau \in [c,d]$ si ha che α è decrescente e $\tau = c \Rightarrow t = \alpha(c) = b \quad \tau = d \Rightarrow t = \alpha(d) = a$

Quindi

$$\int_\eta F \cdot dP = \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau))\, \alpha'(\tau) d\tau =$$

$$= \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = -\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = -\int_\gamma F \cdot dP$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione 1.5 cap. 6

Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo radiale continuo. Allora F è conservativo.

Dimostrazione Essendo $F(x) = \varphi(\|x\|)x$, si ha che $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua. Quindi anche la funzione $\{t \to t\varphi(t)\}$ è continua. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale questa funzione ammette una primitiva su (a,b). Sia $\Phi: (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di questa funzione su (a,b). Quindi

$$\forall t \in (a,b) \quad \Phi'(t) = t\varphi(t)$$

Consideriamo la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \quad f(x) = \Phi(\|x\|) = \Phi\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

La funzione f ammette tutte le derivate parziali in Ω con

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \Phi'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} = x\varphi(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|} = x_i \varphi(\|x\|)$$

Poiché queste derivate parziali sono continue, si ha che f è differenziabile in Ω con

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \quad \nabla f(x) = (x_1\varphi(\|x\|), \dots, x_n\varphi(\|x\|)) = \varphi(\|x\|)x = F(x)$$

Quindi f è un potenziale di F su Ω e di conseguenza F è conservativo. ∎

Teorema 19 cap. 6

INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti.

Allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Inoltre, se γ è chiusa risulta che

$$\oint_\gamma F \cdot dP = 0$$

Dimostrazione Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti, siano $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ tali che γ è derivabile in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k), per ogni $k = 1, \dots, m$ con derivata non nulla, e negli estremi di tali intervalli esistono le derivate laterali. Per definizione si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Poiché F è continuo e f è un potenziale di F, allora f è di classe C^1 in Ω. Ne segue che φ è di classe C^1 a tratti su $[a,b]$, cioè φ è continua su $[a,b]$ ed è derivabile con derivata continua in ogni $t \neq t_k$, per ogni $k = 0, \dots, m$, con

$$\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt =$$

Applicando il teorema di Torricelli - Barrow alla funzione φ' su ogni intervallo $[t_{k-1}, t_k]$ si ottiene

$$= \sum_{k=1}^{m} [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] = \varphi(t_1) - \varphi(t_0) + \varphi(t_2) - \varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1}) =$$

$$= \varphi(t_m) - \varphi(t_0) = \varphi(b) - \varphi(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Infine, se γ è chiusa, allora $\gamma(a) = \gamma(b)$ e

$$\oint_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

funzione differenziabile $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = F$, ossia se $F = (f_1, \dots, f_n)$, che per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$

Sia $x_0 \in \Omega$. Consideriamo la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall x \in \Omega: \quad f(x) = \int_\gamma F \cdot dP$$

dove $\gamma [a,b]$ è una curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Per l'ipotesi 2) la funzione f è ben definita, cioè non dipende dalla scelta della curva γ. Dimostriamo che f è un potenziale di F. Per fare ciò proviamo che f ammette tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in Ω, che sono continue e che per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$.
Per semplicità espositiva consideriamo $j = 1$.
Si ha che

$$x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}), \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Poiché Ω è aperto, esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u - x\| < r\} \subseteq \Omega$. Sia $0 < h < r$ e consideriamo la curva parametrica $\eta: [a, b+h] \to \Omega$ definita da

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \le t \le b \\ (x_1 + t - b, x_2, \dots, x_n) & \text{se } b < t \le b+h \end{cases}$$

Si ha che η è semplice e regolare a tratti.
Inoltre $\quad \eta(a) = \gamma(a) = x_0, \qquad \eta(b+h) = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$.
Consideriamo il rapporto incrementale di f in x nella direzione x_1. Si ha che

$$\frac{f(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_\eta F \cdot dP - \int_\gamma F \cdot dP\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^b F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt + \int_b^{b+h} F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt - \int_\gamma F \cdot dP\right) =$$

Essendo $\eta = \gamma$ su $[a,b]$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_\gamma F \cdot dP + \int_b^{b+h} F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt - \int_\gamma F \cdot dP\right) = \frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} F(x_1 + t - b, x_2, \dots, x_n) \cdot (1, 0, \dots, 0)\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f_1(x_1 + t - b, x_2, \dots, x_n)\, dt \underset{\substack{\tau = t - b \\ d\tau = dt}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{h}\int_0^h f_1(x_1 + \tau, x_2, \dots, x_n)\, d\tau.$$

Essendo la funzione $\{\tau \to f_1(x_1 + \tau, x_2, \dots, x_n)\}$ continua, per il teorema del calcolo integrale la funzione integrale $\left\{ h \to \int_0^h f_1(x_1 + \tau, x_2, \dots, x_n)\, d\tau \right\}$ è derivabile in h con derivata uguale a $f_1(x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$.

Teorema 1.13 cap. 6

CONDIZIONE NECESSARIA PER I CAMPI CONSERVATIVI DI CLASSE C^1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \dots, f_n)$.
Se F è conservativo, allora per ogni $x \in \Omega$ si ha che

$$\forall\, i,j = 1, \dots, n \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Dimostrazione È una conseguenza del lemma di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste di una funzione di classe C^2. Infatti, essendo F conservativo, esiste $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$ per ogni $x \in \Omega$. In particolare per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in \Omega$ si ha che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$. Poiché F è di classe C^1, anche le sue componenti f_i lo sono. Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è di classe C^1 e quindi il potenziale f è di classe C^2. Per il lemma di Schwarz si ha che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $i,j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.17 cap. 6

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER I CAMPI CONSERVATIVI DI CLASSE C^1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, \dots, f_n)$
Se Ω è semplicemente connesso e per ogni $x \in \Omega$ si ha che

$$\forall\, i,j = 1, \dots, n \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

allora F è conservativo.

Dimostrazione Casi $n=2$ e $n=3$. Per dimostrare che F è conservativo, ricorriamo al teorema di equivalenza. Consideriamo una qualunque curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega$ chiusa, semplice e regolare a tratti e proviamo che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$.
Se $n = 2$, allora per ipotesi si ha che

$$\forall\, (x,y) \in \Omega \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

Sia A l'aperto costituito dalla parte di piano racchiusa dal sostegno di γ avente per bordo proprio il sostegno di γ. Quindi $\partial A = \operatorname{im}(\gamma)$ e, essendo Ω semplicemente connesso, si ha che $\bar{A} = A \cup \partial A \subseteq \Omega$. Se γ induce su ∂A un verso di percorrenza antiorario, allora per il teorema di Green si ha che

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy = 0$$

Se γ induce un verso di percorrenza orario, allora sempre per il teorema di Green si ha che

$$\oint F \cdot dP = -\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy = 0$$

Per il teorema di equivalenza F è conservativo.

Proposizione 1.9 cap. 8

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ convergente uniformemente a f in Ω. Allora f è continua.

Dimostrazione Sia $x_0 \in \Omega$. Proviamo che f è continua in x_0, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \Omega \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ si ha } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché (f_n) converge uniformemente a f in Ω, si ha che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall x \in \Omega \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ si ha } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Poiché f_{n_0} è continua, si ha che $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in \Omega$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Ne segue che per ogni $x \in \Omega$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Pertanto f è continua in x_0 e per l'arbitrarietà di x_0 si ha la tesi. ■

Teorema 1.8 cap. 9

CRITERIO DI WEIESTRASS

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$. Supponiamo che esista una successione (M_n) in $\mathbb{R}$ tale che:

1) $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

2) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ sia convergente

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in Ω.

Dimostrazione Poiché $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in \Omega$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| \leq M_n$$

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, per il Criterio del confronto anche $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in Ω. ■