NUMERO: 529

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Risoli

MATERIA: Analisi Matematica I + Riassunto
Prof. Tilli

1/10/12

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = naturali = $\{1, 2, 3, 4 \dots\}$ $+ \cdot$

$\mathbb{Z}$ = interi relativi $\{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$ $+ \cdot -$

$\mathbb{Q}$ = razionali $\left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ $+ \cdot - :$

L'insieme $\mathbb{Q}$ può essere rappresentato come una nebulosa di punti. Al suo interno però non è possibile effettuare alcune radici quadrate, ci sono quindi dei buchi nella nebulosa che fanno sì che essa non sia una retta. Ciò lo si può dimostrare attraverso i numeri irrazionali.

Vogliamo cercare un numero che elevato al quadrato (appartenente a $\mathbb{Q}$) dia 2

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2 \} = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO CHE $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

supponiamo che $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2$.

Essendo un razionale x possiamo scriverlo come $x = \frac{p}{q}$ con

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e p e q PRIMI TRA LORO

$$x = \frac{p}{q} \iff \frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

se $p^2 = 2q^2$ p^2 è pari allora $p = 2n$ $n \in \mathbb{Z}$

$4n^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2$ q^2 è pari allora $q = 2m$.

essendo sia p che q due numeri pari sono divisibili per 2 ma avendo supposto che erano primi tra loro allora NON ESISTE NESSUN NUMERO CHE ELEVATO AL QUADRATO DIA 2.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 70

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

- Sia $X \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Ha quindi almeno un maggiorante, allora $\exists \mathbb{R}$ il $\sup X$
- Sia $X \subset \mathbb{R}$ un insieme inferiormente limitato. Ha quindi almeno un minorante, allora $\exists \mathbb{R}$ il $\inf X$

NB in $\mathbb{Q}$ l'esistenza del sup non è sempre vera!

ESEMPIO $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0,\ x^2 < 2\}$

$X = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

L'insieme dei maggioranti di X è $[\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, cioè una nebulosa di punti in cui è impossibile trovare il più piccolo maggiorante ossia l'estremo superiore di X

LA DIFFERENZA TRA $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ è che $\mathbb{Q}$ non ammette l'assioma di completezza

$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ x^2 < 2\}$

$X \neq 0$ perché $1 \in X$

X è limitato superiormente perché 3 è un maggiorante

uso l'assioma di completezza $\exists\, y = \sup X$, si può dimostrare che $y^2 = 2$

se X non è limitato superiormente si pone $\sup X = +\infty$

$\sup \emptyset = -\infty$

se X non è limitato inferiormente si pone ~~$\sup X = -\infty$~~

~~$\sup \emptyset = +\infty$~~

$\inf X = -\infty$

$\inf \emptyset = +\infty$

Come si caratterizza y?

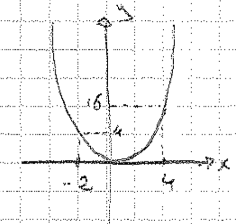
1) $y \geq x \ \forall x \in X$ (dice che y è un maggiorante di X)

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid x > y - \varepsilon$ (dice che y è il più piccolo maggiorante di X)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 70

Si chiama IMMAGINE DI F l'insieme $Im(f) = f(A)$

Es $f(x) = x^2$ $f: R \to R$



$f(I) = f(\{1, 2, -2, 5\}) = \{1, 4, 25\}$

$f^{-1}(J) = f^{-1}(\{9, 0, 1, -10\}) = \{+3, -3, 0, -1, +1\}$

$f([-2, 10)] = [0; 100]$

$f^{-1}([0, 100]) = [-10, 10]$

FUNZIONE INIETTIVA: se $f^{-1}(\{b\})$ ha un solo elemento

$\forall b \in Im(f)$

oppure $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

FUNZIONE SURIETTIVA: se $Im(f) = B$

FUNZIONE BIUNIVOCA, O BIETTIVA se è INIETTIVA e SURIETTIVA

FUNZIONE INVERSA sia $f: A \to B$ una f INIETTIVA,

Si chiama "FUNZIONE INVERSA DI F" (f^{-1})

$f^{-1}: Im(f) \to A$

che nel generico punto $b \in Im(f)$ è l'unico $a \in A \mid f(a) = b$

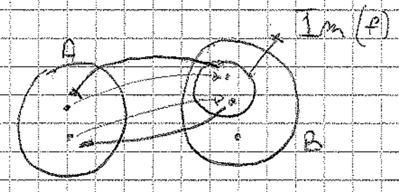
OSSERVAZIONE

Se $f: A \to B$ è invertibile, allora

$f^{-1}(f(a)) = a \; \forall a \in A$

$f(f^{-1}(b)) = b \; \forall b \in Im(f)$

se $f: A \to B$ è INIETTIVA

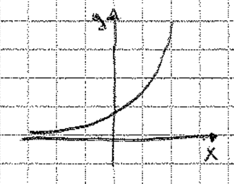


$f^{-1}: Im(f) \to A$
$\Downarrow$
$F(A)$

$Im(f^{-1}) = A$

$Im(f) \subseteq B$

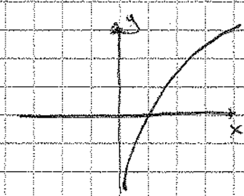
es. sia $f(x) = e^x : R \to R$



$Im(f) = (0 + \infty)$

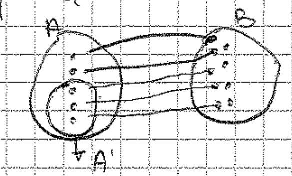
$f^{-1}(y) = \log y : (0, +\infty) \to R$

$Im(f^{-1}) = R$



nel caso in cui $f(x)$ non è invertibile si può effettuare una RESTRIZIONE

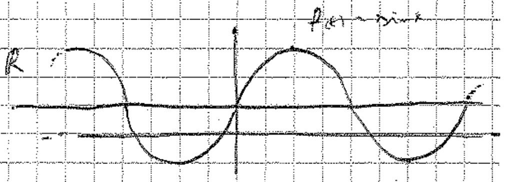
$f: A \to B$ sia $A' \subseteq A$, $A' \neq 0$



se $f: A \to B$ non è invertibile la diventa

$f: A' \to B$, tale funzione viene indicata con $f_{|A'}$

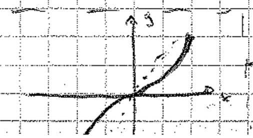
es. $f(x) = \sin x$ $f: R \to R$



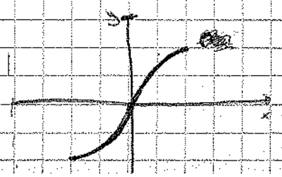
non è INVERTIBILE

se noi effettuiamo una RESTRIZIONE, possiamo renderla invertibile.

$f(x) = \sin x$ $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to R$ otteniamo



$f^{-1}(\sin x) = \arcsin(x) \to$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 70

TEOREMA Se $f: I \to R$ è strettamente crescente o strettamente decrescente allora f è INIETTIVA, cioè

$$\exists f^{-1}: Im(f) \to I$$

DIMOSTRAZIONE: sia f strettamente crescente, ovvero

$\forall x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ IPOTESI

se prendo $a, b \in I$ può essere $a > b$ o $b > a$

se $a > b$ $\quad f(b) < f(a) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

se $b > a$ $\quad f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

in entrambi i casi $f(a) \neq f(b)$ $\forall a, b \in I$, f è INIETTIVA su I

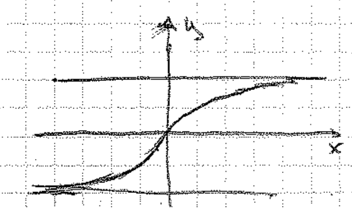
FUNZIONE PERIODICA

Def. $f: A \to R$ si dice "PERIODICA DI PERIODO T" se $T > 0$ e se $\forall x \in A$ $\quad x+T \in A$ e $f(x+T) = f(x)$

es. $f(x) = \sin x$ è periodica di periodo $T = 2\pi$, $(4\pi, 6\pi \ldots 2k\pi)$

$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ha periodo $T = \pi$ perché

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = f(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$



$\tan_{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$ è crescente, quindi INIETTIVA, quindi INVERTIBILE

$\arctan x: R \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

GRAFICO Data $f: A \to B$ si chiama grafico di f il seguente insieme:

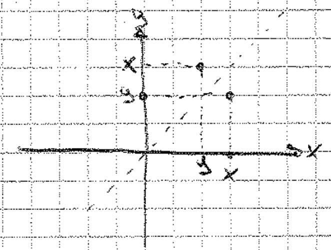
$$G(f) = \{(a, b) \mid a \in A, \ b = f(a)\}$$

se $A \subseteq R$, $B = R$ si ha che $G(f)$ è un sottoinsieme di R^2

TEOREMA $f: A \to B$ è iniettiva allora

$$G(f^{-1}) = \{(y, x) \mid x \in A, \ y = f(x)\}$$

cioè



$f^{-1}_{(x)}$ è la funzione simmetrica di $f(x)$ rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

$y = x$

SUCCESSIONE Si chiama successione una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

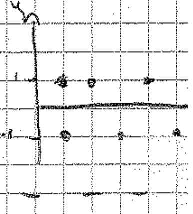
(o più in generale una $f: A \to B$ con $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \bar{n}\}$)

es. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f(n) = \frac{1}{n}$ $\quad f(n) = \frac{n^2}{n^2+1}$ ecc...

Solitamente una successione f viene indicata con a_n, dove $a_n = f(n)$

ATTENZIONE! Non bisogna confondere una successione a_n $(f(n))$ con l'insieme dei valori $\{a_n \mid n \in Dom(a_n)\} = \{a_n\}$

cioè: $\quad a_n = (-1)^n \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad a_1 = -1, \ a_2 = 1, \ a_3 = -1, \ a_4 = 1$ ecc...



SUCCESSIONE

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ che è L'IMMAGINE di a_n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 70

CRITERIO DI NON ESISTENZA DEI LIMITI

Se trovo 2 intervalli I_1, I_2, disgiunti e separati (che NON ABBIANO un estremo in comune), tali che $a_n \in I_1$ per infiniti valori di n e anche $a_n \in I_2$ per infiniti valori di n, allora la successione NON HA LIMITE $L \in \mathbb{R}$

Limite NON FINITO di a_n — Si dice che a_n tende a $+\infty$ $(-\infty)$ e si scrive $\lim_{x \to \infty} a_n = +\infty$ se vale la seguente condizione:

"$\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n > M$ definitivamente" OVVERO:

"$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \bar{n} \mid a_n > M$ $\forall n > \bar{n}$"

Es: $a_n = n^2$ DIMOSTRARE CHE $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

per la definizione di limite $\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ $n^2 > M$ $\forall n > \bar{n}$

VERIFICO: 2 casi $\begin{cases} M \le 0 \\ M > 0 \end{cases}$

1) se $M \le 0$ $n^2 > M$ sempre esempio scelgo $\bar{n} = 1$

2) se $M > 0$ risolvo nell'incognita n

$n^2 > M$

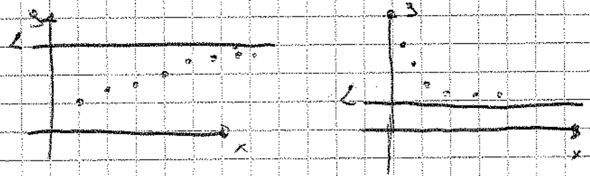
$n > +\sqrt{M}$ scelgo la radice positiva perché $n \in \mathbb{N}$

allora scelgo $\bar{n} = \sqrt{M} + 1$

MONOTONA = o crescente o decrescente

TEOREMA Se (a_n) è MONOTONA, allora esiste il limite L, sia esso finito oppure no.

- Se a_n è CRESCENTE e LIMITATA SUPERIORMENTE, $L \in \mathbb{R} = \sup\{a_n\}$
- Se è DECRESCENTE e LIMITATA INFERIORMENTE, $L \in \mathbb{R} = \inf\{a_n\}$



dimostrazione teorema:

HP: a_n: 1) CRESCENTE 2) SUPERIORMENTE LIMITATA

TESI: se chiamo $L = \sup\{a_n\}$, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

DIMOSTRAZIONE

- (2) se a_n è superiormente limitata allora $L \in \mathbb{R}$
- se il $\sup\{a_n\} = L$, $\Rightarrow \begin{cases} \forall n \quad a_n \le L \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_{\bar{n}} > L - \varepsilon \end{cases}$
- (1) se a_n è crescente

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} \mid a_n > L - \varepsilon$ $\forall n > \bar{n}$

DUNQUE se dimostro che $|L - a_n| < \varepsilon$, L è il sup e il limite

$|L - a_n| < \varepsilon$, posso togliere il valore assoluto

$L - a_n < \varepsilon$

$-a_n < -L + \varepsilon \rightarrow \boxed{a_n > L - \varepsilon} \rightarrow L$ è il LIMITE

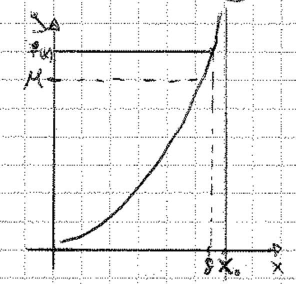
TEOREMA Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ equivale alla validità simultanea delle due seguenti condizioni

a) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

b) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

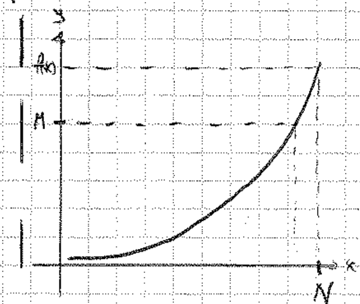
$L = L$, limite è unico

Rappresentazione grafica dei limiti precedentemente citati:



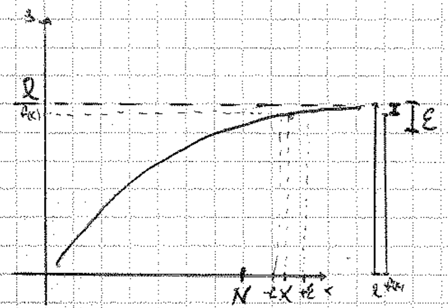
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall M, \exists \delta \mid f(x) > M \quad \forall x \quad 0 < x - x_0 < \delta$



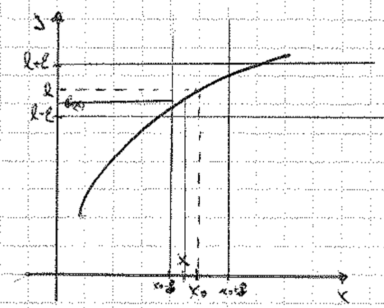
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\forall M, \exists N \mid f(x) > M \quad \forall x > N$



$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x > N$



$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

VERIFICA DEL LIMITE DI SUCCESSIONI:

1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ ricordiamo che vale:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, \; |a_n - l| < \varepsilon$

$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \longrightarrow \frac{|-1|}{|n+1|} < \varepsilon \longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$1 < \varepsilon n + \varepsilon$

$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < n \longrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

VERIFICHIAMO: sia $\varepsilon = 0{,}007$

sia $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right]$

$N = \left[\frac{1-0{,}007}{0{,}007} \right] = [141{,}86] = 141$

prendiamo un $n > N$ es. 142 allora

$|a_{142} - l| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{2 \cdot 142 + 1}{142 + 1} - 2 \right| < 0{,}007$

$\left| \frac{2 \cdot 142 + 1 - 143 \cdot 2}{143} \right| < 0{,}007$

$0{,}0069 < 0{,}007$ VERO

FUNZIONE CONTINUA Sia f definita (almeno) in un intorno* di un punto $X_0 \in \mathbb{R}$, f si dice "continua in X_0" se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

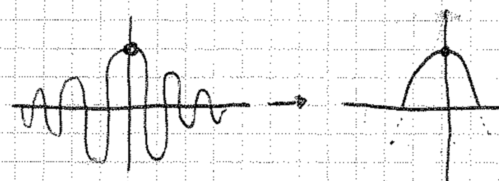
* Potrebbe anche essere un intorno unilaterale destro o sinistro, in tal caso si richiede che $f(x)$ sia definita ANCHE in X_0.

Sia F una FUNZIONE, in X_0 può essere

- DEFINITA ANCHE IN X_0 $\rightarrow$ continua in X_0 / $\rightarrow$ non continua in X_0

- NON DEFINITA IN X_0
  $\downarrow$

1) $\exists$ limite ed è finito
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$



es. $\frac{\sin x}{x}$ $x \to 0$ $f(0) = 1$

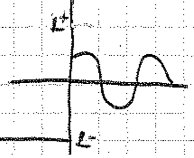
è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE $\rightarrow$ pongo $f(x_0) = l \rightarrow$ la funzione è ora CONTINUA

2) $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ma $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+$; $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^-$

SINGOLARITÀ DI PRIMA SPECIE, DI TIPO SALTO

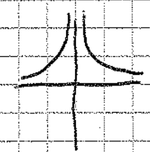
$l^+ - l^-$ = ampiezza del salto

es. $f(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



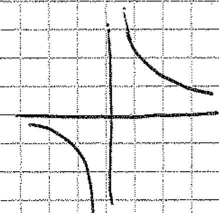
3) $\boxed{a}$ $\exists \lim_{x \to x_0} = l$ con $l = \pm\infty$ $X = X_0$ ASINTOTO VERTICALE

es. $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ $\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$



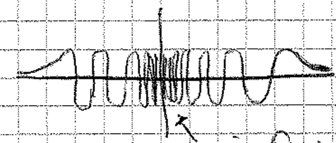
es. $f(x) = \frac{1}{x}$

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ $\rightarrow$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\rightarrow$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



$\boxed{b}$ $\nexists \lim_{x \to x_0}$, $\nexists \lim_{x \to 0^+}$, $\nexists \lim_{x \to 0^-}$

es. $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$



in 0 NON ESISTE IL LIMITE

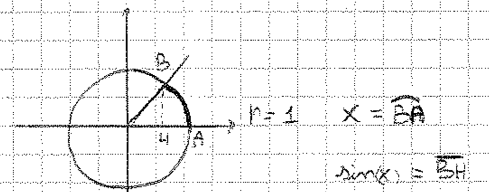
I polinomi sono funzioni continue perché ottenuti tramite operazioni di SOMMA e PRODOTTO di funzioni continue

TEOREMA Se f è continua in X_0, g è continua in $f(X_0)$ allora $g \circ f$ è continua in X_0

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$

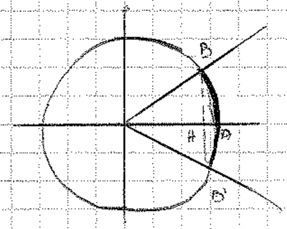
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 70

USO UNA DISUGUAGLIANZA DI BASE $\quad 0 < \sin(x) < X \quad \forall_x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$



$r = 1 \quad X = \widehat{BA}$

$\sin(x) = \overline{BH}$



TEOREMA DEL CONFRONTO

raddoppio $\overline{BH}$

$0 < \sin(x) < X \quad \longrightarrow \quad 2\sin x < 2X$

quindi $\sin x < X$ è VERIFICATO

$$\lim_{x\to 0} 0 \le \lim_{x\to 0} \sin(x) \le \lim_{x\to 0} X$$

$$0 \le \lim_{x\to 0} \sin(x) \le 0 \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \sin(0) = 0}$$

2) $\sin(x)$ è continua in ogni $X_0 \in \mathbb{R}$

CIOÈ $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

pongo $h = X - X_0$

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} \sin(x_0+h) = X_0$$

$$\lim_{h\to 0} \sin(X_0+h) = \lim_{x\to 0}\left[\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \underbrace{\sin h}_{=0}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\sin X_0 \cos h\right]$$

RIMANE DA VERIFICARE CHE $\displaystyle\lim_{h\to 0} \cos h = 1$

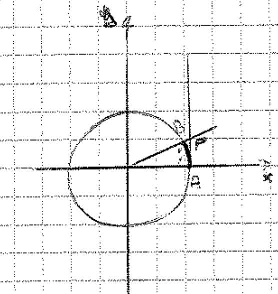
$$\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos h}{2} \Rightarrow \cos h = 1 - 2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2 \longrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \cos h = \lim_{h\to 0} 1 - 2\Big(\underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{\to 0}\Big)^2 = 1 \quad \lim_{h\to 0} \cos h = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} \sin(\pi - x) = \lim_{x\to x_0} \sin(\pi - X_0) = \cos X_0 \rightarrow \cos X \text{ è CONTINUA}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sin X_0 \cdot \cos h\right) = \sin X_0 \rightarrow \sin X \text{ è CONTINUA}$$

DIMOSTRAZIONE LIMITE NOTEVOLE $\dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad x \to 0$



$$0 < \sin x < X < \tan x \quad X \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin X < X < \tan X$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < X < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{X}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1}$$

$X = \widehat{BA}$

$\tan(X) = \overline{PA}$

l'area del settore $O\hat{A}B$ < area $O\hat{A}P = \dfrac{\tan x}{2}$

PER $O\hat{A}B$: A cerchio = arco : circonferenza

$O\hat{A}B : \pi = X : 2\pi$

$O\hat{A}B = \dfrac{X\pi}{2\pi} = \dfrac{X}{2}$

$$\frac{X}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

$$X < \tan x$$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim_{x \to +\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \ln e^a$

$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a$ pongo $\frac{a}{x} = t$

$x = \frac{a}{t}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{t} \ln 1 + t = a$ $t \to 0$

$\lim_{t \to +0} a \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} = a$ $\to 1$

$\lim_{t \to 0} a \cdot 1 = a$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} a = a}$$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ per la definizione di logaritmo $a^{\log_a y} = y$

$a = e^{\log a}$

$a^x = e^{x \log a}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \cdot \log a} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \cdot \log a} - 1}{x \cdot \log a} \cdot \log a$ $x \cdot \log a = t$

$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \log a = \log a$ $\to 1$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{\log(1+x)}$ $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{\log(1+x)}$ $(1+x)^a - 1 = y$

$(1+x)^a = y + 1$

$\log(1+y) = a \log(1+x)$

$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\frac{\log(1+y)}{a}}$ $\log(1+x) = \frac{\log(1+y)}{a}$

$\lim_{y \to 0} \frac{y \cdot a}{\log(1+y)} = a$ $\to 1$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE NEI LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t)$ A PATTO CHE:

1) $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$

2) $g(x) \neq t_0$ in un intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0

CASO ESTREMO

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(g(x))}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

OSSERVAZIONE: Se f è continua in t_0, allora la 2° condizione è SUPERFLUA

1) $\lim_{x \to 0} \sin t = 0$ ok

2) se prendiamo $g(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ allora non è valido più il caso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 70

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

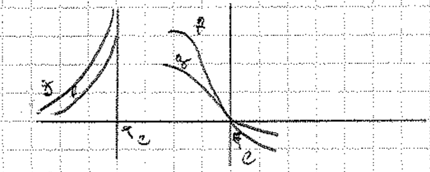
Siano f, g definite in un intorno di c ($c \in \mathbb{R}, c = \pm\infty, c = x_0^+, c = x_0^-$), tranne eventualmente in c:

1) EQUIVALENZA $\quad f \sim g$ per $x \to c$ ("f è equivalente a g per $x \to c$")

$$\iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2) O PICCOLO $\quad f = o(g)$ per $x \to c$ ("f è trascurabile rispetto a g per $x \to c$")

$$\iff \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$



OSSERVAZIONE IMPORTANTE

$f \sim g$ per $x \to c \iff f = g + o(g)$ per $x \to c$

Dimostrazione $\Rightarrow$ $\quad f - g = o(g)$ per $x \to c$

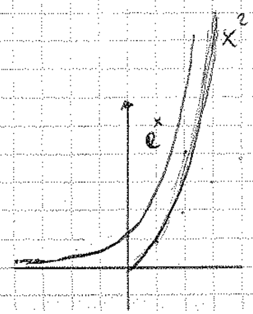
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f \sim g \quad \text{CVD}$$

es. $x^4 \sim \sin x^4$ per $x \to 0$

$\iff \lim_{x \to 0} \dfrac{x^4}{\sin x^4} = 1$ VERO

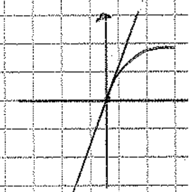


es. $x^2 = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

$\iff \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ VERO

LIMITI NOTEVOLI SCRITTI SOTTO FORMA DI O PICCOLI

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \iff \sin x \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$



$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \iff 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0 \iff 1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

$\iff \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ per $x \to 0$

NB.

$$f \underset{x \to c}{=} o(g) \iff f \underset{x \to c}{=} o(a \cdot g) \quad \forall a \neq 0$$

Nella forma $f \underset{x \to c}{=} g + o(g)$, $o(g)$ rappresenta l'errore commesso.

Esempio sia $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$, $\quad 1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

sia $x = 0{,}001$

$\cos 0{,}001 = 0{,}9999995$ $\quad$ Vuol dire che la precisione è di 10^{-6}

$1 - \dfrac{(0{,}001)^2}{2} = 0{,}9999995$

infatti $o(g) = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(0{,}001)^2}{2} = 0{,}0000005$, cioè l'errore è nell'ordine di 10^{-8}

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \iff e^x - 1 = x + o(x)$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 70

3) Sia $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$ Qual è l'ordine di infinito rispetto al campione x^{-1} nell'origine (per $x \to 0$)? $\alpha = 2$

4) Sia $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$ Qual è l'ordine di infinitesimo rispetto al campione x^{-1} $x \to +\infty$

$\alpha = 1$

ALGEBRA DEGLI o PICCOLI

N.B. CONCETTO CHIAVE $o(g)$ rappresenta un'intera famiglia di funzioni che quando le divido per g, il $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

1) $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(a \cdot g)\ \forall a \neq 0$

2) $f = o(g)$; $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

3) $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$

4) $f \sim g$, $g \sim h$, $\Rightarrow f \sim h$ infatti $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = 1 \cdot 1 = \boxed{1}$ PROPRIETÀ TRANSITIVA

5) $f = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$ (generica funzione infinitesima)

6) $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$

7) $f = o(g)$, $F = o(G) \Rightarrow f \cdot F = o(g \cdot G) \Rightarrow \frac{f}{g} \cdot \frac{F}{G} = 0$

$o(g) \cdot o(G) = o(g \cdot G)$

8) $o(x^2) + o(x^4) = o(x^2)$ per $x \to 0$ prende il termine con esponente minore

9) $o(x^2) + o(x^4) = o(x^4)$ per $x \to +\infty$ prende il termine con esponente maggiore

È SBAGLIATO INVECE

$o(g) + o(G) = o(g + G)$ es. $f = x^2$ $g = x^4 + x$ $F = x^2$ $G = x^4 - x$ $f = o(g)$ $x \to 0$ $F = o(G)$ $x \to 0$

$f + F = 2x^4$ che non è o piccolo di $o(g+G) = 2x^4$ per $x \to 0$

TEOREMA => Eliminazione dei termini trascurabili

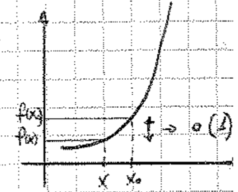
Se $f = o(F)$ e $g = o(G)$ $x \to c$

$$\lim_{x \to c} \frac{f+F}{g+G} = \lim_{x \to c} \frac{F}{G}$$

Dim. $\lim_{x \to c} \frac{f+F}{g+G} = \frac{F\left(1 + \frac{f}{F}\right)}{G\left(1 + \frac{g}{G}\right)} = \frac{F(1+0)}{G(1+0)} = \lim_{x \to c} \frac{F}{G}$

Definizione di CONTINUITÀ con gli o PICCOLI

se f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e cioè che



$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1) \quad \text{se } h \to 0$$

DERIVATA E DERIVABILITÀ

Sia f definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, f si dice "derivabile in x_0" se esiste un numero $m \in \mathbb{R}$ |

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$\boxed{m}$ si chiama derivata di f nel punto x_0 e si indica con

$$f'(x) \circ \left[(f(x))' \circ \frac{df}{dx}\right]$$

Se f è derivabile in ogni $x_0 \in A$, si ottiene una nuova funzione: "LA DERIVATA"

$$f' : A \to \mathbb{R}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 70

$f(x) = e^x$ è derivabile in $x_0 = 0$?

Limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(0) + 1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$m = 1$

$f(x) = e^x$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$?

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$e^{x_0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) \to 1$$

$f'(x) = e^{x_0}$

$f'(x) = e^x$

$f(x) = x^2 \qquad f(x_0+h) = f(x_0+h)^2 =$

$f(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0 h + h^2 \quad x \to x_0$

$$f(x_0) + 2x_0 \cdot h + o(h) \quad h \to 0$$

$f'(x) = 2x_0$

$f(x) = x^3$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$?

$$f(x_0+h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot h + \underbrace{3x_0 \cdot h^2 + h^3}_{\to o(h)} \quad h \to 0$$

$= f(x_0) + 3x_0^2 h + o(h)$

$f'(x) = 3x_0^2 \qquad f'(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

$(f+g)' = f' + g'$

$(af + bg)' = af' + b \cdot g' \quad a, b \in \mathbb{R}$

es. $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^2$

$f'(x) = 10x^4 - 16x^3 + 6x$

$f(x) = c \quad \forall x$ (funzione costante)

$f'(x) = 0 \qquad f(x_0+h) = c$

$$= \overset{f(x_0)}{c} + \underset{m}{0} \cdot h + \underset{o(h)}{0}$$

$f(x) = \sin x$

$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$

$\sin x_0 - (\sin x_0)(1 - \cos h) + \cos x_0 \cdot \sin h$

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) - \underbrace{(\sin x_0)\left(\frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}_{o(h)} + \cos x_0 \cdot (h + o(h))$$

$1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

$h \to 0$

$$f(x_0) + \underset{m}{\cos x_0} \cdot h + o\,h$$

$\sin h = h + o(h)$

$f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$

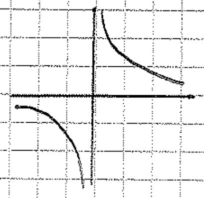
$f(x) = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = g'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = -\sin x$

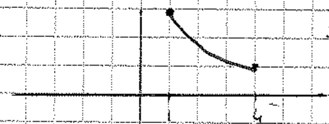
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 70

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$



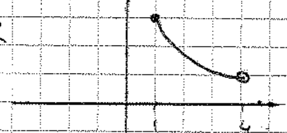
NÉ MASSIMO
NÉ MINIMO

$f: [1;4] \to \mathbb{R}$



1 = MAX ASSOLUTO
4 = MIN ASSOLUTO

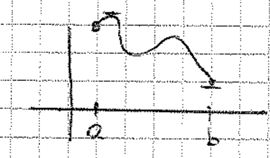
$f: [1;4) \to \mathbb{R}$



1 = MAX ASSOLUTO
NON HA MINIMO

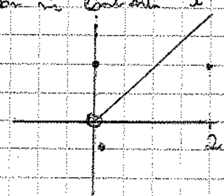
TEOREMA DI WEIRSTRASS

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione CONTINUA, allora f ammette almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ di MINIMO ASSOLUTO e almeno un punto x_1 di MASSIMO ASSOLUTO.



provo a trovare una funzione $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ che non sia continua e abbia punti di max e min.

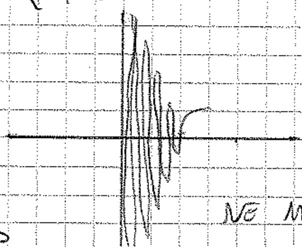
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$



il $\sup(f) = 2$ ma non è il VALORE MAX perché $\nexists\, x_0\, [0, 2] \mid f(x_0) = 2$

adesso troviamo una funzione $f: (0; 2] \to \mathbb{R}$ continua

$f(x) = \sin \frac{1}{x} \cdot \log x$



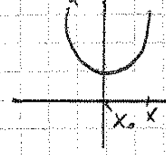
il fattore $\sin \frac{1}{x}$ fa cambiare segno alla funzione infinite volte, mentre $\log x$ fa amplificare le oscillazioni $\Rightarrow$ NÉ MAX, NÉ MIN

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di MINIMO o MASSIMO RELATIVO, se x_0 è INTERNO a I, cioè non è un punto di bordo, e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE Suppongo che x_0 sia un punto di minimo

Il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$



allora $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (per la permanenza del segno)

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (")

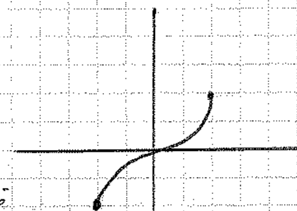
allora $f'(x_0)$ dovendo essere contemporaneamente ≥ 0 e ≤ 0, per l'unicità del limite $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Come si applica?

se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a, b)

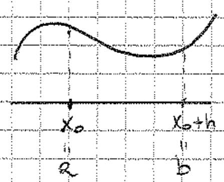
- PUNTI DI MIN e MAX $\exists$ per il teorema di Weirstrass
- li cerco tra $x_0 = a$, $x_0 = b$ e gli eventuali punti $x_0 \in (a, b)$ dove $f'(x_0) = 0$

$f(x) = x^3 \quad [a, b] \to \mathbb{R}$
$\qquad [-1, 1] \to \mathbb{R}$



$f'(x)$ si annulla solo nell'origine che però non è punto di min o max relativo.

COME SI APPLICA?



$$f'(c) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

senza fare il limite (se lo facessi calcolerei il lim coefficiente della retta t_g a x_0)

lega la MONOTONIA AL SEGNO DELLA DERIVATA

TEOREMA Sia $f: I \to R$ DERIVABILE:

1) f CRESCENTE $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

2) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è CRESCENTE

3) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente su I

OSSERVAZIONE, la 3° IPOTESI e CONSEGUENZA non dimostra che $f'(x) > 0$ se f è strettamente crescente

Es. x^3 è STRETTAMENTE CRESCENTE ma $\underline{f'(0) = 0}$

DIMOSTRAZIONE

1) f è crescente il rapporto incrementale $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è NON NEGATIVO $\forall x$

perché $x_0 \quad x \qquad \dfrac{+}{+} = +$

$x \quad x_0 \qquad \dfrac{-}{-} = +$

$\Rightarrow$ per la permanenza del segno $f'(x_0) \geq 0$

2) Se $f'(x) \geq 0$ prendiamo $a < b \in I$ e applico il Teorema di Lagrange

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a)$$

3) Se $f'(x) > 0$, prendiamo $a < b \in I$ e applico il Teorema di Lagrange

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0 \to f(b) > f(a)$$

POSSIBILI ESERCIZI DEL TEST es 1

$f(x) = x^4 \cdot \cos x$, quante volte si annulla $f'(x)$ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7}{2}\pi\right)$?

RISPOSTA:

Posso applicare Rolle $\Rightarrow f$ si annulla 6 volte $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

quindi $f(a) = f(b)$

Applico Rolle in $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \to f'$ ha almeno 1 zero in $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

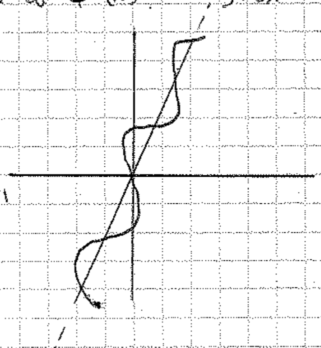
$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to f'$ ha - - - - $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right] \to f'$ ha - - - - $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$

ecc..

Segue che è vero che $f'(x)$ si annulla ALMENO 5 VOLTE

es. 2 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DERIVABILE, l'equazione $f(x) = 2x$ ha esattamente 10 soluzioni distinte, cosa si può dire di $f'(x)$?



con ROLLE:

$f(x) - 2x = 0$, si annulla in 10 punti

$f'(x) - 2 = 0 \quad f'(x) = 2$ in ALMENO 9 PUNTI

con LAGRANGE

il coeff. angolare della retta $2x$ è 2

quindi $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2$ in ALMENO 9 PUNTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 70

$f(x) = g(h(x))$ è certamente derivabile nei punti dove $\exists\, h'(x)$ e $\exists\, g'(h(x))$

se $x \neq 0$ $\quad f' = g'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$

se $x = 0$ il teorema della derivazione di una funzione composta NON È APPLICABILE

allora faccio $f'(0) = m \quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{x} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}|x|^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ è CONTINUA? Sì per $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Nell'origine è continua? SÌ perché $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

Con $C^k(I)$ la classe di tutte le funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ derivabili k volte con $f^{(k)}$ CONTINUA

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

Siano f e g definite e derivabili in un intorno di x_0 (tranne eventualmente in x_0), se:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ OPPURE

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ ALLORA:

Se $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

esempi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} \quad \text{ma } o(x) = \begin{cases} 4x^2 ? \\ x^3 ? \\ 2x^5 ? \end{cases}$$

SI RISOLVE CON DE HOPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{\sin x}{6x} = -\frac{\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$

es. 2 $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

es. 3 $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^{\alpha x}} = \frac{4x^3}{\alpha e^{\alpha x}} = \frac{12x^2}{\alpha^2 e^{\alpha x}} = \frac{24x}{\alpha^3 e^{\alpha x}} = \frac{24}{\alpha^4 e^{\alpha x}} = 0$

ciò significa che se ho $\beta > 0$, $\beta \in \mathbb{N}$, derivando β volte

ho $= \frac{\beta!}{\alpha^\beta \cdot e^{\alpha x}}$; se $\beta > 0$, $\beta \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow \frac{x^\pi}{e^{\alpha x}}$

$= \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)\, x^{\pi-4}}{\alpha^4\, e^{\alpha x}}$; derivando $\lfloor\beta\rfloor + 1$ volte

ho: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-\lfloor\beta\rfloor) \cdot x^{\beta-\lfloor\beta\rfloor-1}}{\alpha^{\lfloor\beta\rfloor+1}\, e^{\alpha x}} = 0$ $\quad$ <0 tende a 0 il numeratore

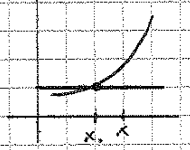
es. 4 $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$; $\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ $\quad$ $2x \cdot \sin\frac{1}{x} \to 0$; NON HA LIMITE ; $\cos x \to 1$

il limite della f' NON ESISTE PERÒ LA FUNZIONE HA UN LIMITE FINITO NEL PUNTO 0 PUR ESSENDO una FORMA INDET.

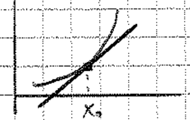
$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} \quad 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 70

TAYLOR   I: Intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$



- f è continua $\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{costante}} + o(1) \quad x \to x_0$



- f è derivabile $\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tangente}} + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

Se f è derivabile 2 volte? Qual è l'equazione di una parabola tangente alla retta $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$?

sarà: $y_A = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + A(x-x_0)^2$

perché $y(x_0) = f(x_0)$

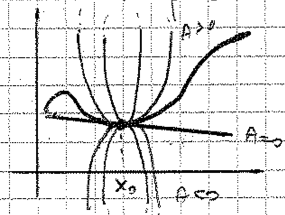
$y'_A = f'(x_0) + 2A(x-x_0) \quad y'(x_0) = f'(x_0) \quad \forall A \in \mathbb{R}$

$y''_A = 2A$

Quindi la generica parabola tangente alla retta sarà

1) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + A(x-x_0)^2 + \mathcal{E}_A(x)$

dove $\mathcal{E}_A(x)$ è l'errore di approssimazione della funzione in x_0 con la parabola e dipende da A



Esistono ∞ parabole approssimabili alla funzione, ma:

SI PUÒ TROVARE UN $A \in \mathbb{R}$ | $\mathcal{E}_A(x) = o\left((x-x_0)^2\right)$?

Dalla 1 ricavo che $\mathcal{E}_A(x) = f(x) - y_A(x)$

$$\mathcal{E}_A(x) = o\left((x-x_0)^2\right) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{E}_A(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y_A}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{H'OPITAL}} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - y'_A(x)}{2(x-x_0)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{H'OPITAL}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - y''_A(x)}{2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2A}{2} \Rightarrow f''(x) - 2A = 0$$

$$\frac{f''(x)}{2} = A \quad \text{HO TROVATO A} \;\Big|\; \mathcal{E}_A(x) = o\left((x-x_0)^2\right)$$

quindi

- f è derivabile 2 volte $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \quad x \to x_0$

FORMULA DI TAYLOR I, resto di Peano

$f: I \to \mathbb{R}$, derivabile m volte, $x_0 \in I$. Allora:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \left[\frac{f^j(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \right] + o(x-x_0)^m \quad \text{per } x \to x_0$$

FORMULA DI TAYLOR II, resto di Lagrange

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \quad \text{se } f \text{ è derivabile} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

con c compreso tra x e x_0

se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile $m+1$ volte $\to$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \left[\frac{f^j(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \right] + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \cdot (x-x_0)^{m+1}$$

occhio a non confondere la FORMULA (che contiene l'errore) con il POLINOMIO $\longrightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 70

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot(e^x-1)-x^2}{x^3} \qquad \sin x = x + o(x) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+o(x))\cdot\left(\cancel{1}+x+\frac{x^2}{2}-\cancel{1}+o(x^2)\right)-x^2}{x^3}$$

$$\frac{\cancel{x^2}+\frac{x^3}{2}+o(x)^3-\cancel{x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2}+o(x^3)\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$\cos x$ è PARI

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} \dots (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot o(x^{2(k+1)})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

NON È PRESENTE IL FATTORIALE PERCHÉ:

$f' = \frac{1}{1+x}$ valutata in $0 = 1$

sarebbe f^n per esempio

$f'' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad = \quad = -1$

$f''' = \frac{2}{(1+x)^3} \quad = \quad = +2 = 2! \qquad 2\cdot\frac{x}{3!} = \frac{2x^2}{3\cdot 2!}$

$f^{IV} = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad = \quad = -6 = -3! \qquad -3!\,\frac{x^4}{4!} = -\cancel{3!}\,\frac{x^4}{\cancel{3!}4} = -\frac{x^4}{4}$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\frac{x^3}{3!} \dots \frac{(\alpha-n+1)\cdot x^n}{n!}$$

$$f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \dots + (-1)^n x^n$$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

si noti come se $\alpha \in \mathbb{N}$ Taylor o MacLaurin non sono altro che lo sviluppo di un BINOMIO, e quindi esiste un $\bar{n} \mid \forall n > \bar{n}$, f^n è pari $= 0$

es. $\alpha = 2 \qquad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^n)$ tutti gli altri termini sono nulli se $n > 2$

es. $\alpha = 3 \qquad (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + o(x^n)$ se $n > 3$

se $\alpha \notin \mathbb{N}$ i coefficienti dello sviluppo sono tutti NON NULLI

Come si calcolano le radici? es. $\sqrt{10}$?

$$\sqrt{10} = \sqrt{\frac{9\cdot 10}{9}} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}} = 3\cdot\sqrt{\frac{9+1}{9}} = 3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}} = 3\sqrt{1+x}$$

$$3\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right) = 3\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{8\cdot 81}\right) = 3{,}162037037$$

$3{,}1622 \to$ CALCOLATRICE

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

come si dimostra che e è un numero irrazionale?

Se per assurdo $e = \frac{P}{p}$ con $P, Q \in \mathbb{N}$ avremo moltiplicando per $p\cdot n!$

$$\frac{P}{p} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} \dots \Rightarrow \overbrace{P\cdot n! - n!\left(1+1+\frac{1}{2} \dots \frac{1}{n!}\right)}^{\text{INTERO}} = \underbrace{\frac{e^c}{n+1}}_{\text{NON INTERO}}$$

il secondo membro non è intero se $n > 2$ perché

$$\frac{e^c}{n+1} \in \left(0; \frac{3}{n+1}\right) \subset (0;1)$$

INTERO = NON INTERO $\to$ ASSURDO

e NON È RAZIONALE

PRIMITIVA Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si chiama "Primitiva" di f su I se:

1) F è derivabile su I ; la generica primitiva di f si indica con $\int f(x)\,dx$
2) $F' = f(x) \quad \forall x \in I$

$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$ è una primitiva di $f(x)$ su $\mathbb{R}$

$F(x) = e^x + 1$ è una " " " "

Più in generale $e^x + c$ è una primitiva di e^x per $\forall c$ costante

Teorema Se $f: I \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$,

- se I è un intervallo allora f è costante su I
- se I non è un intervallo f non è costante su I

DIMOSTRAZIONE: $a, b \in \mathbb{R}$, applico Lagrange in $[a,b]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(b) = f(a)$$

es. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$F(x) = |x| + c$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $F_1'(x) = f(x)$

ma può essere anche $F_2(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{se } x > 0 \\ |x| - 4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

e ancora $F_2'(x) = f_x$ ma $F_1 \neq F_2$ quindi essendo la funzione f definita su 2 intervalli la sua primitiva NON è unica

Teorema 2 [IMPORTANTE] siano F e G due primitive di f nel medesimo intervallo I, allora $\exists c \in \mathbb{R} \mid F(x) = G(x) + c$

DIMOSTRAZIONE $\left(F(x) - G(x)\right)' = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

quindi $F - G = c$

TABELLA INTEGRALI SEMPLICI

f	$\int f(x)\,dx$
1	$x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$

È importante distinguere 2 cose:

1) TROVARE una primitiva di $f(x)$ $\qquad 1) \Rightarrow 2)$
2) chiedersi se "ESISTE" una primitiva di $f(x)$

Se f è continua ammette sempre primitive

$f(x) = e^{x^2}$ ha primitive che NON sono esprimibili come funzioni elementari combinate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 70

PRATICAMENTE:

1) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx$

oppure

$y = e^x \quad | \quad x = \log y$

$dy = e^x dx \quad | \quad dx = dy \cdot \frac{1}{y}$

$\frac{dy}{e^x} = dx$

$\frac{dy}{y} = dx$

$\int \frac{y}{y^2+1} \cdot \frac{1}{y} dy$

$\arctan(y) + c$

$\arctan(e^x) + c$

2) $\int (\sin(x))^{45} \cdot \cos x dx \qquad y = \sin x$

$dy = \sin x dx$

$\int y^{45} dy$

$\frac{y^{46}}{46} + c \Rightarrow \frac{(\sin x)^{46}}{46} + c$

3) $\int e^{x^2} dx \qquad x^2 = y \qquad x = \sqrt{y}$

$2x dx = dy$

$dx = \frac{dy}{2x} \qquad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$\int \frac{e^{(\sqrt{y})^2} dy}{2\sqrt{y}}$

$\Downarrow$

$\int e^g \cdot g'$

$\Downarrow$

$\int f(g) \cdot g'$

4) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \qquad e^x = y$

$dx e^x = dy$

$dx = \frac{dy}{e^x} \qquad dx = \frac{dy}{y}$

$\int \frac{1}{y + y^{-1}} \cdot \frac{1}{y} dy$

$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y + c$

$= \arctan(e^x) + c$

INTEGRALI RAZIONALI consideriamo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$

con $P(x)$ grado ≤ 1

$Q(x)$ grado 2

1) P di grado 0, Q di grado 2

$\int \frac{d}{ax^2+bx+c} dx = \frac{d}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}$ che risulta

$\int \frac{1}{x^2+cx+f}$; conosco $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$

posso ricondurmi a tale forma traslando la variabile se il $\underline{\underline{\Delta < 0}}$

l'idea è quella di completare il quadrato al DENOMINATORE

ponendo $x = X - \frac{b}{2}$

esempio: $\int \frac{1}{x^2-8x+100} = \int \frac{1}{(x-4)^2+84} dx$

$x^2 - 8x + 16$ → deve arrivare a 100

$100 - 16 = 84$

raccolgo $\frac{1}{84} \Rightarrow \frac{1}{84} \int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{\sqrt{84}}\right)^2 + 1} dx$

$\sqrt{84} \cdot \frac{1}{84} \arctan\left(\frac{x-4}{\sqrt{84}}\right) \Rightarrow \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = a \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

es. $\int \frac{1}{x^2-4x+1} dx =$

$\int \frac{1}{(x-2)^2-3} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}$ per questi abbiamo rimandato ai Fratti semplici

SVILUPPI DI MACLAURIN

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 \dots \binom{\alpha}{n}x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

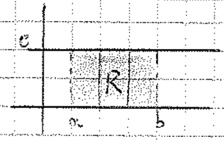
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$$

$$\arcsin = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 70

OSSERVAZIONE

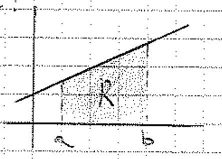
• Se $f(x) = c \ \forall x$



$$A_n = \sum_{j=1}^{n} c \cdot \frac{b-a}{n}$$

sommato n volte $= c \cdot (b-a)$
che è proprio l'area del RETTANGOLO, ALTEZZA X BASE,
è coerente con il teorema!

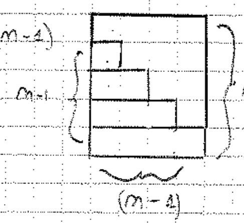
• Se $f(x) = p + px$



$$A_n = \sum \left(p + qa + q(j-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \Rightarrow \text{sommato } n \text{ volte}$$

$$(p + q a)(b-a) + q \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} (j-1)$$

cioè $\sum_{j=1}^{n} (j-1) = 0 + 1 + 2 \dots + (n-1)$



$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(p + q a)(b-a) + p \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(p + p a)(b-a) + p \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{(n-1)}{2}$$

la formula geometrica è: $(p + pa + p + pb) \frac{b-a}{2}$

$$(2p + pa + pb) \frac{b-a}{2}$$

se faccio il limite $\lim_{n \to +\infty} A_n = (p + q a)(b-a) + q \frac{(b-a)^2}{2}$

mettendo in evidenza $\frac{b-a}{2}\left(2p + 2pa + p(b-a)\right)$

è uguale a quella geometrica, è coerente con il TEOREMA!

TEOREMA 2 Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue a TRATTI allora:

1) $f \geq 0 \to \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ per il teorema della permanenza del segno
$\leq 0 \qquad \leq 0$

2) $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ per il teorema del confronto

3) linearità: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

4) $(b-a) \inf_{[a,b]} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]}$

5) se f è CONTINUA, per Weierstrass

$$(b-a) \min_{[a,b]} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \max_{[a,b]}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Il numero $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ si chiama VALOR MEDIO di f su $[a,b]$

ed è l'altezza di un rettangolo che ha per base $(b-a)$ e area equivalente all'integrale, si dimostra facilmente le disuguaglianze

$$\inf_{[a,b]} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 70

TEOREMA Sia f continua su un intervallo I e G una qualunque primitiva di f su I. Allora se prendo $[a,b] \subset I$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \Rightarrow \Big(G(x)\Big|_a^b$$

si indica così per non ripetere 2 volte $G(x)$

DIMOSTRAZIONE Sappiamo dal teorema del calcolo di prima che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f su I e che G è una primitiva di f su I

quindi $G(x) = F(x) + c$ per una certa costante c quindi

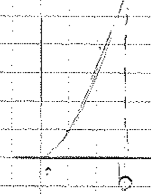
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F(b) - F(a) \quad \text{e quindi}$$

Perché $F(a) = 0$

$$= F(b) + c - F(a) + c$$

$$= G(b) - G(a)$$

es.



$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}(b) - \frac{x^3}{3}(0) = \frac{b^3}{3}$$

es. $\int_2^4 e^{\cos^2 x} \cdot \sin 2x\,dx$

$$\int e^{\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx \Rightarrow y = \cos x$$

$dy = -\sin x\,dx$

$dx = -\frac{dy}{\sin x}$

$$-\int e^{y^2} \cdot 2\sin x\cos x\,\frac{dy}{\sin x}$$

$$= -e^{\cos^2 4} + e^{\cos^2 2}$$

$$= -\int e^{y^2} \cdot 2y\,dy$$

$$= -e^{y^2} + c \Rightarrow -e^{\cos^2 x} + c$$

ERRORE

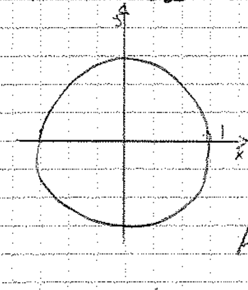
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x| + c\Big]_{-1}^1$$

$0 - 0 = 0$ errato!

1) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ non esiste perché ha un asintoto verticale in $x=0$, non è una discontinuità di prima specie.

2) $\log|x|$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ solo negli intervalli $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ ma non su $(-1,1)$

AREA DEL CERCHIO



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{consideriamo il semipiano positivo}$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$A = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}$$

metodo 1) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ pongo $x = \cos y$

$dx = -\sin y\,dy$

$$\sqrt{1-\cos^2 y} = |\sin y| \rightarrow -\int |\sin y| \cdot \sin y\,dy + c$$

analizzo $\int (\sin y)^2\,dy$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\int \frac{1}{2} - \int \frac{\cos 2y}{2}$$

$$\frac{1}{2}y - \frac{\sin 2y}{4} + c \Rightarrow -\int (\sin y)^2\,dy = -\frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + c$$

$-\frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + c$ è una primitiva di $-|\sin y| \cdot \sin y$ in ogni intervallo in cui il SENO è positivo, $[0,\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[-2\pi, -\pi]$

ma consideriamo solo $[0,\pi]$ quindi $x = \cos y$

$y = \arccos x$

$$-\frac{\arccos x}{2} + 2\,\frac{\sin y \cos y}{4}$$

$\sin y = \sqrt{1-x^2}$ perché il $\sin y$ lo stiamo prendendo POSITIVO

$$-\frac{\arccos x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

DERIVIAMO x VEDERE SE È GIUSTO

$$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

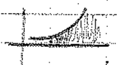
$$\frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{che è la funzione esatta}$$

$\longrightarrow$

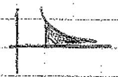
Esempi base $\alpha = -1$ $\quad \int_1^{+\infty} x^{\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \log b - \log 1 \Big|_1^b = +\infty$

$\alpha \neq -1$ $\quad \int_1^{+\infty} x^{\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{\alpha} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^b = \left(\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right)$

tale limite $= +\infty$ se $\alpha \geq -1$



$-\frac{1}{\alpha+1}$ se $\alpha < 1$



Quindi $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} dx$ è $\begin{cases} \text{DIVERGENTE a } +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \text{CONVERGENTE a } -\frac{1}{\alpha+1} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$

CRITERIO DEL CONFRONTO Siano f, g continue su $[a, +\infty)$ e $f \geq g$:

a) $\int_a^{+\infty} g(x)$ DIVERGE a $+\infty$, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ DIVERGE a $+\infty$

b) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE e $g(x) \geq 0$, allora $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE

c) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ DIVERGE a $-\infty$, allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)$ DIVERGE a $-\infty$

d) $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE e $f \leq 0$, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE

Esempio STUDIARE $\int^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^4 + 2} dx$ devo trovare una funzione più grande per applicare il punto b

$\frac{x + \sin x}{x^4 + 2} \leq \frac{x + 1}{x^4} \leq \frac{2x}{x^4} = 2 \cdot x^{-3} = f(x)$ che converge

allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^4 + 1}$ CONVERGE.

Esempio STUDIARE $\frac{2 + \cos x}{x + \sqrt{x}} \geq \frac{1}{2x} = 2\, x^{-1}$ $\alpha = -1 \Rightarrow$ DIVERGE a $+\infty$

allora anche $\int^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x + \sqrt{x}}$ diverge a $+\infty$

ho applicato il punto a)

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se f, g sono funzioni CONTINUE, da $[a, +\infty)$ ed entrambe abbiamo il segno COSTANTE e CONCORDE

se $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} c \cdot g(x)$ con $c > 0$ $\quad \int_a^{+\infty} f(x)$ e $\int_a^{+\infty} g(t)$ hanno lo stesso COMPORTAMENTO

cioè o entrambe CONVERGONO o entrambe DIVERGONO.

se $c \neq 0$ (caso in cui $c < 0$) se sono DIVERGENTI uno andrà a $+\infty$
l'altro molto probabilmente andrà a $-\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}}}{5x + 3\sqrt{x}} dx \sim \frac{\sqrt{x}}{5x}$ $\quad x \to +\infty$, $c = \frac{1}{5}$

DIVERGE a $+\infty$ $\qquad x^{-\frac{1}{2}}$ diverge a $+\infty$

oppure posso usare entrambi i metodi

$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x + \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{x} = x^{-1}$ per $x \to +\infty$

DIVERGENTE $\quad$ DIVERGENTE $\quad$ DIVERGENTE

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA se $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ CONVERGE,
(per le funzioni che oscillano ogni ∞ volte)

allora converge anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, ma non è vero il contrario

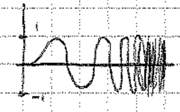
$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ $\quad \left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2$ CONVERGE

CONVERGE

OSSERVAZIONE IMPORTANTE Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge non è detto

che il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ma se ESISTE, allora $= 0$

es. $\int_2^{+\infty} \sin(x^2) dx$ CONVERGE



ma il $\lim_{x\to+\infty} \sin(x^2) \nexists$

INTEGRALI DOPPIAMENTE IMPROPRI

Si spezzano con un punto intermedio qualunque e si studiano separatamente i due integrali ottenuti, l'integrale iniziale è:

CONVERGENTE quando ENTRAMBI sono CONVERGENTI

DIVERGENTI " " " DIVERGENTI a $+\infty$ o $-\infty$

INDETERMINATI in tutti gli altri casi $\perp$ oppure se uno converge e l'altro non

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sim x^{-\frac{1}{2}} \qquad 0 \le \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \le e^{-x}$$

CONVERGE + CONVERGE → CONVERGE

CONFRONTO ASINTOTICO II Siano f, g continue e $f, g \ge 0$ (≤ 0) se $f = o(g)$ per $x \to +\infty$ se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Es. $\int^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}$ converge perché $e^{-\sqrt{x}} = o(x^{-2})$ per $x \to +\infty$

CRITERIO DI DERIVABILITÀ "TAPPABUCHI"

f derivabile in I tranne (eventualmente) in $x_0 \in I$

Se: 1) $\exists$ finito il limite $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$

2) f è continua in x_0

Allora $\exists\ f'(x_0) = l$

Dim Con de L'Hopital: $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se so che f è continua allora il limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e per l'Hopital $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = l$

Es. $f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \ln|x| & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \cdot \log x & \text{se } x > 0 \\ (-x)^{\frac{3}{2}} \cdot \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} + (-x)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

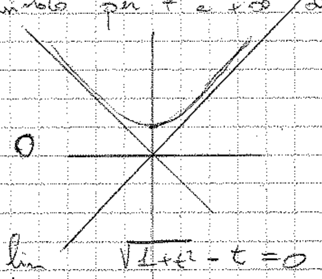
1) $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ $\quad \exists\ f'(0) = 0$

2) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

ASINTOTO A $+\infty$

Sia f definita almeno in un intorno di $+\infty$ e $y = px + q$, la retta è asintoto a $+\infty$ (asintoto obliquo, a destra a $+\infty$, a $+\infty$ a destra) se $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - px - q) = 0$

Es. verificare che la retta $y = x$ è asintoto per f a $+\infty$ di $f(x) = \sqrt{x^2+1}$



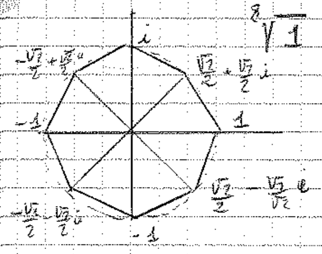
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - (-x) \text{ se } t = (-x) = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{1+t^2} - t = 0$$

COME TROVARE L'ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - px - q = 0}{x} = \frac{f(x)}{x} - p - \frac{q}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = p$$

se p è finito allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) - p(x) = q$



$\sqrt[8]{1}$ 8 Soluzioni in $\mathbb{C}$

NUMERO CONIUGATO $\bar{Z} = (x, -y)$ in $\mathbb{R}$ $Z \equiv \bar{Z}$ perchè

MODULO DI Z $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $Im(Z) = 0$ $Z \in \mathbb{R}$

rappresenta la distanza tra Z e l'origine

OSSERVAZIONE $Z \cdot \bar{Z} \Rightarrow (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |Z|^2$

$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$$

DIVISIONE Se $Z \neq 0$ Allora Z^{-1} chi è? $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

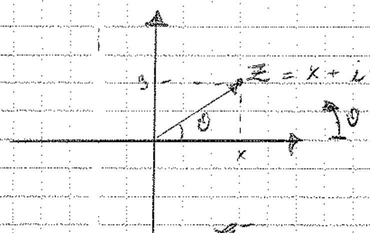
verifico $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{1}{|Z|^2} \cdot \bar{Z} = \frac{1}{|Z|^2} \cdot \frac{|Z|^2}{Z} = Z^{-1}$

$$\frac{W}{Z} = W \cdot Z^{-1} = \frac{W \cdot \bar{Z}}{|Z|^2}$$

Es. $\frac{2+3i}{1-9i} = \frac{2+3i}{1+81}(1+9i) = 2 - 27 + 18i + 3i$

$$\frac{-25+21i}{82} = -\frac{25}{82} + \frac{21}{82}i$$

FORMA POLARE DI UN NUMERO COMPLESSO

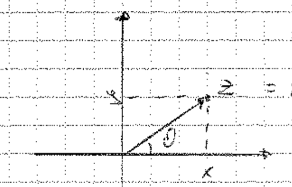


$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$ MODULO

θ = Argomento di Z è determinato a meno di multipli di 2π

È unico se si lavora con $\theta \in [0, 2\pi)$

allora è detto ARGOMENTO PRINCIPALE



$Z = x+iy$ $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $x = |Z| \cdot \cos\theta$

$\theta = arg(Z)$ $y = |Z| \cdot \sin\theta$

$$Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$arg(z) = \{\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$Arg(z) = \theta \in [0, 2\pi)$$

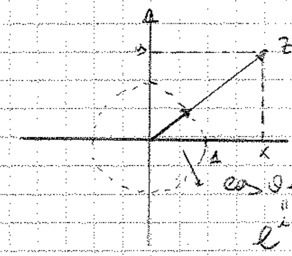
Se Z è nel primo quadrante $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Se $Z = 0$ il modulo di $Z \Rightarrow 0$ ma l'$arg(z)$ non è definito.

$Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$

REALE COMPLESSO $\Rightarrow$ ha modulo 1 serve a dare la direzione di Z nel piano, è anche detto FASE

è un vettore di $\rho = 1$ che punta verso Z, amplificato di $|Z|$



$e^{i\theta}$ $=$ $\frac{Z}{|Z|}$

ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

$Z = x+iy$

$e^Z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

N.B. Se $Z \in \mathbb{R}$, cioè se $y = 0$

$e^Z = e^x$ coincide con la def. usuale.

. Se Z è immaginario cioè $x = 0$

$e^Z = \cos y + i\sin y = e^{iy} = e^{i\theta}$

$Z = x+iy$ $W = a+ib$

$Z+W = (x+a) + i(y+b)$

$$Z = |Z| \cdot e^{i\theta}$$

$e^{Z+W} = e^{x+a}(\cos(y+b) + i\sin(y+b))$

$e^x \cdot e^a(\cos y\cos b - \sin y\sin b + i\sin y\cos b + i\cos y\sin b)$

$e^x(\cos y + i\sin y) \cdot e^a(\cos b + i\sin b)$

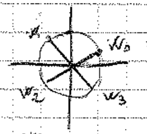
$e^Z \cdot e^W \Rightarrow e^{Z+W} = e^Z \cdot e^W$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 70

→ * Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha esattamente n radici n-esime distinte

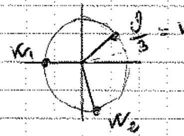
Se $R = |z|$ e $\vartheta \in arg(z)$, cioè $z = R \cdot e^{i\vartheta}$, le radici ennesime sono

$$R^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot s\right)} \qquad s = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

es. $n = 4$  $r = R^{\frac{1}{4}}$ 

↓ è vero perché

$$= \left(R^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi s}{n}\right)}\right)^n$$

es. $n = 3$ $r = R^{\frac{1}{3}}$ 

$$= R \cdot e^{i(\vartheta + 2\pi s)}$$

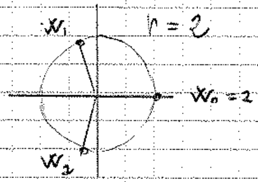
$$= R \cdot e^{i\vartheta}$$

es. $z = 8$ $n = 3$ $\quad |z| = 8$ $\quad \vartheta = 0$ $\quad R^{\frac{1}{3}} = 2$

$W_0 = 2 \cdot e^{i(0)} = 2$

$W_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$

$W_2 = 2 \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}$

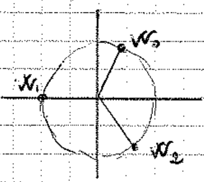


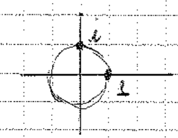
es. $z = -125$ $n = 3$ $\quad |z| = 125$ $\quad \vartheta = \pi$ $\quad R^{\frac{1}{3}} = 5$

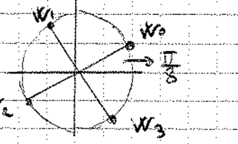
$W_0 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$W_1 = 5 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right)} = 5 \cdot e^{i\pi} = -5$

$W_2 = 5 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right)} = 5 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$



es. $z = i$ $n = 4$ 



* Ciò è equivalente a dire che

" Il polinomio $p(x) = x^n - z$ ha esattamente n radici $= n$ zeri

infatti $p(x) = (x - W_0)(x - W_1)(x - W_2) \ldots (x - W_{(n-1)})$

es. $n = 3$ $z = 8$ $\quad x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ in $\mathbb{R}$

$x^3 - 8 = (x-2)(x + 1 - i\sqrt{3})(x + 1 + i\sqrt{3})$ in $\mathbb{C}$

$x = -1 \pm \sqrt{-3} \Rightarrow x = -1 \pm i\sqrt{3}$ in $\mathbb{C}$

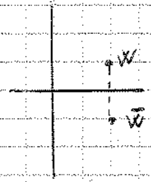
TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

" Ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots a_1 x + a_0$ ha esattamente n RADICI $= n$ ZERI COMPLESSI, $(W_1, W_2 \ldots W_n)$, quindi si fattorizza $p(x) = a_n (x - W_1)(x - W_2) \ldots (x - W_n)$"

NB(1) non esistono formule esplicite per radicali se $n > 4$

NB(2) Se $p(x)$ ha coefficienti REALI, se $p(W) = 0$ e $W \notin \mathbb{R}$

allora anche $p(\overline{W}) = 0$ e $\overline{W}$ ha la stessa molteplicità di W



$p(x) = x^8 - 8x^5 + 4x + 2$

$p(x) = (x-2)^3 (x+4)^2 (x-10)$ $\quad p(x) = x^6 \ldots$ grado 6,

ha 6 radici REALI

3 volte 2

2 " -4

1 " 10

es. Costruisci un polinomio a coefficienti complessi che abbia radici 1 con moltep. 1, i " " 2

ci chiede COEFFICIENTI COMPLESSI → $p(x) = (x-1)(x-i)^2$

$p(x) = (x-1)(x^2 - 2ix - 1)$

$p(x) = x^3 - (1 + 2i)x$

costruiscine uno a coefficienti REALI con le stesse caratteristiche.

$p(x) = (x-1)(x-i)^2(x+i)^2$

$(x-1)\underbrace{(x-i)(x+i)}_{\text{REALI}}\underbrace{(x-i)(x+i)}_{\text{REALI}}$

NB(3) Se $p = x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots a_1 x + a_0$ ha zeri REALI e/o COMPLESSI MA coniugati con molteplicità uguale allora p ha COEFFICIENTI REALI

MOTIVO se $W \in \mathbb{C}$ $\quad (x - W)(x - \overline{W}) = x^2 - (W + \overline{W})x + |W|^2$

$W + \overline{W} = 2 Re(W)$

$= x^2 - 2Re(W) + |W|^2$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL I ORDINE

$* \quad y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x) \qquad x \in I$ e $a(x), b(x)$ funzioni date continue almeno su I

1) Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$
2) Sia $B(x)$ una primitiva di $e^{A(x)} \cdot b(x)$

Allora: la soluzione generale su I è: $y(x) = e^{-A(x)} \cdot (B(x) + c)$

Perché? considero $y'(x) + a(x) y(x)$, moltiplico per $e^{A(x)}$

$$e^{A(x)} \cdot y'(x) + a(x) \cdot e^{A(x)} \cdot y(x) \quad \text{cioè}$$

$$\left(e^{A(x)} \cdot y(x)\right)', \text{ funziona solo se } A'(x) = a(x)$$

moltiplico $*$ per $e^{A(x)}$: $y' e^{A(x)} + a(x) \cdot e^{A(x)} \cdot y = b(x) \cdot e^{A(x)}$

$$\left(e^{A(x)} \cdot y\right)' = e^{A(x)} \cdot b(x)$$

$$e^{A(x)} \cdot y(x) = \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)\, dx$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot (B(x) + c)$$

es. RISOLVERE

$$y' + x^2 y = -x^2$$

$a(x) = x^2$; $b(x) = -x^2$

$A(x) = \frac{x^3}{3} \qquad B(x) = \int -e^{\frac{x^3}{3}} \cdot x^2 = -e^{\frac{x^3}{3}} + c$

SOLUZIONE $= e^{-\frac{x^3}{3}} \left[-e^{\frac{x^3}{3}} + c\right] = -1 + c \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$

es. RISOLVERE $y' + y = \frac{1}{x} \qquad a(x) = 1 \quad b(x) = \frac{1}{x}$

$A(x) = x \quad B(x) = \int \frac{e^{x}}{x}$

poiché $b(x) = \frac{1}{x}$ l'eq. non ha soluzioni su intervalli che includono l'origine e $B(x)$ ha soluzione non esprimibile su intervalli $(0, +\infty)$ oppure $(-\infty, 0)$ SEPARATAMENTE.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE A "VARIABILI SEPARABILI"

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$g(x)$: dipende solo da x; $h(y(x))$: dipende $y(x)$

es. $y'(x) = \frac{e^x}{x} \cdot y(x^4)^2 \quad$ è a V.S

$y'(x) = e^{2x + \cos y} \quad$ è a V.S $= e^{2x} \cdot e^{\cos y}$

$y'(x) = e^x (1 + y^2) \qquad g(x) = \underset{>0}{e^x} \quad h(y) = \underset{>0}{1 + y^2}$

non ha soluzioni costanti

es. $y'(x) = e^x (1 - y^2)$ ha soluzioni costanti? SI! $y(x) = 1$, $y(x) = -1$

COM'È...

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$g(x)$ è una funzione data almeno continua su $I \not\equiv 0$

$h(x)$ è data, almeno continua su un suo dominio

1) Trovare tutte le soluzioni costanti $y = c \Leftrightarrow c$ è zero di h

$h(c) = 0$ (se h non ha zeri allora l'eq. non ha soluzioni costanti)

2) Divido per $h(y) \Rightarrow \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$

Sia J una primitiva di $\frac{1}{h(t)}$ e G una primitiva di $g(x)$

$$\left[J(y(x))\right]' = G'(x)$$

NB J è invertibile perché J' è $\frac{1}{h} \neq 0$ sempre >0 o <0 per $\forall I$ dove J è primitiva

$$J(y(x)) = G(x) + c$$

$$y(x) = J^{-1}(G(x) + c)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 70

EQUAZIONI LINEARI DI II ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Formula generale: $y'' + by' + cy = f(x) \quad b, c \in \mathbb{R}$

Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice OMOGENEA

Iniziamo a considerare il caso OMOGENEO

$y'' + by' + cy = 0$; le soluzioni sono del tipo $e^{\lambda x}$ $\quad y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

sostituendo

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} \cdot b + e^{\lambda x} \cdot c = 0$ raccolgo $e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$ Trovare le radici di tale equazione

significa risolvere $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ con $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

e TUTTE LE SOLUZIONI sono del tipo

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

L'equazione è lineare e omogenea quindi OGNI COMBINAZIONE LINEARE di λ_1 e λ_2 è ancora SOLUZIONE.

esempio $y'' - 5y' + 6y = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$

soluzioni $= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

il Δ però può essere $> < = 0$

1) $\Delta > 0$, 2 SOLUZIONI REALI DELL'ALGEBRA $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ soluzione generale $= y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$ con $\forall\, c_1$ e $c_2 \in \mathbb{R}$

2) $\Delta = 0$, 1 SOLUZIONE, DOPPIA RADICE $\equiv \lambda$ sol. gen. $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$

infatti $y'' + by' + cy = 0 \quad y = e^{\lambda x}$ è soluzione

ma anche $y = x \cdot e^{\lambda x}$

$y' = (1 + \lambda x) \cdot e^{\lambda x}$

$y'' = (2\lambda + \lambda^2 x) \cdot e^{\lambda x}$

$\Downarrow$

$e^{\lambda x}(2\lambda + \lambda^2 x + b + b\lambda x + cx)$ $\rightarrow$ $x(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$ è soluzione ; (ma anche $2\lambda + b = 0 \quad \lambda = -\frac{b}{2}$)

ciò corrisponde a dire che λ è RADICE e $\Delta = 0$

3) $\Delta < 0$, 2 SOLUZIONI COMPLESSE e CONIUGATE $\rightarrow$ $\alpha + i\beta = \lambda_1$, $\alpha - i\beta = \lambda_2$

la soluzione generale è $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

esempi 2, 3 $\quad$ 2) $y'' - 10y' + 25y = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \quad \lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 5$

$y = c e^{5x} + c_2 x \cdot e^{5x}$

3) $y'' - 8y' + 25y = 0 \quad \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \quad \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} \rightarrow 4 \pm 3i$

sol. $= e^{4x}(\cos 3x + \sin 3x)$

CASO NON OMOGENEO $\rightarrow$ riconducibile all'omogeneo

$y'' + by' + cy = f(x)$

1) RISOLVERE L'EQUAZIONE OMOGENEA $y'' + by' + cy = 0$

2) TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $y_{p(x)}$ della NON OMOGENEA

3) SOMMARE $y(x) + y_{p(x)} \rightarrow$ TUTTE LE SOLUZIONI DELLA NON OMOGENEA

es. $y'' - 5y + 6y = 24$

$y_{p(x)} = 4 \quad y'' = 0 \quad y' = 0 \quad 6 \cdot 4 = 24 = 24$ OK

soluzione generale $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4$

TECNICHE x TROVARE 1 SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA

- $f(x) = \beta \cdot e^{\alpha x}$, la soluzione è del tipo $c \cdot e^{\alpha x}$

es. $y'' - 5y' + 6y = 2 \cdot e^{8x}$ $\quad c \cdot e^{8x} \quad y' = 8 \cdot e^{8x} \quad y'' = 64 \cdot e^{8x}$

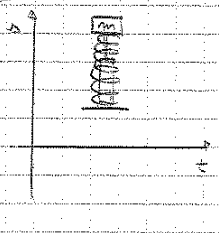
$c64 \cdot e^{8x} - c40 e^{8x} + 6c = 2e^{8x}$ divido per e^{8x}

$64c - 40c + 6c = 2 \Rightarrow 30c = 2 \quad c = \frac{1}{15}$

$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{15} e^{8x}$

RISONANZA

x = tempo, $y(x)$ = l'allungamento al tempo x rispetto alla posizione di equilibrio



$F = m \cdot a \qquad a = y'' \qquad F =$ forza elastica $-Ky(x)$; attrito olio $-By'(x)$; forze esterne $F(x)$

$$my'' = -Ky - By' + F(x)$$

$$\frac{K}{m} = c; \quad \frac{B}{m} = b; \quad \frac{F(x)}{m} = f(x)$$

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

- SENZA ATTRITO E SENZA FORZE ESTERNE

$y'' + cy = 0 \qquad \lambda^2 + c = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{c}$

$y = c_1 \cos\sqrt{c}\,x + c_2 \sin\sqrt{c}\,x \Rightarrow$ MOLLEGGIA ALL'INFINITO

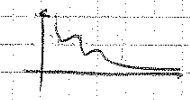
- CON ATTRITO MA SENZA FORZE ESTERNE

$y'' + by' + cy = 0$

$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

- se b è grande rispetto a $c \Rightarrow y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

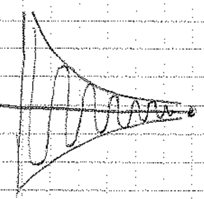
e $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,



$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ SI FERMA DOPO un Tempo t

- se b è piccolo rispetto a $c \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta$

$y = e^{x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$ LE OSCILLAZIONI SONO SMORZATE



PROBLEMA DI CAUCHY II ORDINE

TEOREMA: Per ogni problema di Cauchy lineare di II ordine ha una soluzione unica definita su tutto $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

RIASSUMENDO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE di I e II ORDINI HA ∞ SOLUZIONI

IL PROBLEMA DI CAUCHY di ORDINE

I = ha un'UNICA soluzione se f è derivabile

II = ha un'UNICA soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$

PERMANENZA DEL SEGNO Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $L \neq 0$, allora $\exists\, I_c \mid f(x)$ ha lo stesso segno di L

COROLLARIO $f(x) \geq 0$ in un intorno di c, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\Rightarrow$ $L \geq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\lg a} \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0 \quad \lim_{x \to 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha$$

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, continua, $\exists\, c \in (a,b) \mid f(c) = 0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, $a \in I$, $b \in I$ con $f(a) < f(b)$ allora $\forall z \in (f(a); f(b))$ $\exists\, c$ compreso tra a e b o b e a $\mid f(c) = z$

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI Siano f e g definite in un intorno di c, tranne eventualmente in c

- $f \sim g$ $x \to c$ $\iff$ $\lim_{x \to c} \frac{f}{g} = 1$

$f \sim g \Rightarrow f = g + o(g)$ $x \to c$

- $f = o(g)$ $x \to c$ $\iff$ $\lim_{x \to c} \frac{f}{g} = 0$

- $f = o(g)_{x \to c}$ $\iff$ $f = o(\lambda g)_{x \to c}$ $\forall \lambda \neq 0$

→ Per $x \to 0$ tra due potenze prevale SEMPRE quella di esponente MINORE (è trascurabile quella di exp. MAGGIORE)
Per $x \to \pm\infty$ " " " " SEMPRE " " " MAGGIORE (è trascurabile quella di exp. MINORE)

- f ha parte principale $= g$ $_{x \to c}$ $\iff$ $f = g + o(g)$ $x \to c$
$f \sim g$ $x \to c$

- f ha ordine di infinito (infinitesimo) α rispetto al CAMPIONE G $x \to c$ se $\exists\, \ell \neq 0 \mid f = \ell \cdot g^\alpha + o(g^\alpha)$ $x \to c$

→ $f = o(1) \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = 0$ → $f = o(g)$ $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

TEOREMA DEI TERMINI TRASCURABILI $f = o(F)$ e $g = o(G)$ $x \to c$

$$\lim_{x \to c} \frac{f + F}{g + G} = \lim_{x \to c} \frac{F}{G}$$

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ con O PICCOLI se f è continua in x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad x \to x_0$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) \quad h \to 0$$

Sia I un Intervallo, $f\ I \to \mathbb{R}$, si dice che "f è CONVESSA su I" se

$$f(ty + (1-t)x) \leq t \cdot f(y) + (1-t) \cdot f(x) \quad \forall x, y \in I \ \text{e} \ \forall t \in [0,1]$$

Sia I un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$.
1) f CONVESSA $\Rightarrow$ CONTINUA
2) f è DERIVABILE, f CONVESSA $\Leftrightarrow$ f' è CRESCENTE su I
3) f è derivabile 2 volte; f è CONVESSA $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

* sopra la retta t_g

TAYLOR Se f è derivabile n volte e $x_0 \in I$.

• Peano $f(x) = \sum_{s=0}^{n} \left[\frac{f^{s}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s\right] + o(x-x_0)^n \quad x \to x_0$

• Lagrange Se f è derivabile $n+1$ volte $f(x) = \sum_{s=0}^{n} \left[\frac{f^{s}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s\right] + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$ $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$ $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\quad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}$ $\quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ $\quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$

x MACLAURIN funzioni dispari contengono solo potenze dispari, funzioni pari contengono solo potenze pari

$f''(0) = 2 \cdot \text{coeff}\ x^2$

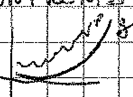
$f'''(0) = 6 \cdot \text{coeff.}\ x^3$

se n è PARI $f^n(x_0) > 0$ MINIMO
n è PARI $f^n(x_0) < 0$ MASSIMO
n è PARI $f^n(x_0) = 0$ NON SI PUÒ DIRE NULLA
n è DISPARI $f^n(x_0) = \gamma \in \mathbb{R}$ FLESSO

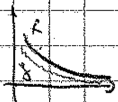
INTEGRALI IMPROPRI Sia f continua su $[a, +\infty)$ allora si pone $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
1) $\exists$ limite FINITO = CONVERGENTE
2) $\exists$ = $\pm\infty$ = DIVERGENTE a $\pm\infty$ • Se f è CONTINUA, $f \geq 0$ o $f \leq 0$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ o è CONVERGENTE o è DIVERGENTE
3) $\nexists$ = INDETERMINATO

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ CONVERGE $\alpha > 1$, DIVERGE $\alpha \leq 1$

TEOREMA DEL CONFRONTO Siano f e g continue su $[a, \infty)$ e $f \geq g$

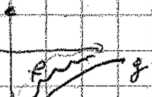


1) $\int_a^{+\infty} g(x)$ DIVERGE a $+\infty$, anche $\int_a^{+\infty} f(x)$ diverge a $+\infty$



2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE e $g(x) \geq 0$ allora $\int_a^{+\infty} g(x)$ CONVERGE

3) $\int_a^{+\infty} f(x)$ DIVERGE a $-\infty$ allora anche $\int_a^{+\infty} g(x)$ DIVERGE a $-\infty$



4) $\int_a^{+\infty} g(x)$ CONVERGE e $f \leq 0$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)$ CONVERGE

CONFRONTO ASINTOTICO Se f, g sono funzioni continue in $[a, +\infty)$ ed entrambe abbiamo segno COSTANTE e CONCORDE se $f \underset{x \to +\infty}{\sim} c\, g(x)$ con $c > 0$ a $+\infty$ hanno lo stesso comportamento (l'integrale)

CONVERGENZA ASSOLUTA se $\int_a^{+\infty} |f(x)|$ CONVERGE, allora CONVERGE anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge non è detto che il $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ma se ESISTE è 0

INTEGRALI IMPROPRI SU INTERVALLI LIMITATI Sia f continua su $(a, b]$ con una discontinuità non di prima specie nel punto $x=a$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_\varepsilon^b f(x)\,dx$

$\int_0^{b>0} \frac{1}{x^{\alpha}}$ CONVERGE se $\alpha < 1$, DIVERGE se $\alpha \geq 1$ | $\int_0^{b>0} x^{\alpha}$ CONVERGE se $\alpha > -1$, DIVERGE se $\alpha \leq -1$

CONFRONTO ASINTOTICO Siano f, g continue su $(a, b]$ e di segno COSTANTE e CONCORDE, se $f \sim c\, g$ $x \to a^+$ allora $x \to a^+$ hanno lo stesso comportamento

INTEGRALI DOPPIAMENTE IMPROPRI Si spezzano in un qualunque punto intermedio c e si studiano separatamente i 2 integrali
CONVERGENTE se entrambi convergono
DIVERGENTE se entrambi a $\pm\infty$ o $= \infty$ oppure se uno converge e l'altro no
INDETERMINATO in tutti gli altri casi

CONFRONTO ASINTOTICO II Siano f, g continue e $f, g \geq 0$ o ≤ 0 se $f = o(g)$ $x \to +\infty$ Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE, allora converge $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

CRITERIO DI DERIVABILITÀ "TAPPABUCHI" f è DERIVABILE in I tranne eventualmente in $x_0 \in I$

1) Se $\exists$ FINITO $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$ 2) f è continua in x_0 allora $\exists\, f'(x_0) = L$

ASINTOTO A $+\infty$ Sia f definita almeno in un intorno di $+\infty$ e $y = px + q$, la retta è asintoto a $+\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} f(x) - px - q = 0$

EQUAZIONI LINEARI II ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$y'' + by' + c = f(x) \quad b, c \in \mathbb{R}$

1) $f(x) = 0 \Rightarrow$ OMOGENEA $\Rightarrow \lambda^2 + b\lambda + c \lessdot \begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix} \quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

- $\Delta > 0 \quad y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0 \quad y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + x \cdot c_2 \cdot e^{\lambda x}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

2) CASO NON OMOGENEO
1) si trovano le soluzioni dell'OMOGENEA
2) si trova una sol. PARTICOLARE della NON OMOGENEA $(P(x))$
3) si sommano le soluzioni dell'omogenea e della NON OMOGENEA.

COME TROVARE $y_p(x)$

1) Se $f(x) = p_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ $\quad p_n$ polinomio di grado $n \geq 0$

$y_p(x) = x^m \cdot p_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ con

$m = 0$ se α non è radice di $\lambda^2 + b\lambda + c$
$m = 1$ se α è RADICE SEMPLICE
$m = 2$ se α è RADICE DOPPIA

2) Se $f(x) = p_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cos\beta x$ oppure $f(x) = p_n(x) \cdot e^{\alpha x} \sin\beta x$

La soluzione PARTICOLARE $y_p(x) = x^m p_{m_1} \cdot e^{\alpha x} \cos\beta x + x^m p_{m,2} \cdot e^{\alpha x} \sin\beta x$

$p_{m_1}, p_{m,2}$ POLINOMI DI GRADO N e con

$m = 0$ se $\alpha \pm i\beta$ NON è RADICE di $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
$m = 1$ se $\alpha \pm i\beta$ è SOLUZIONE di $\lambda^2 + b\lambda + c$

PROBLEMA DI CAUCHY II ORDINE

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Per ogni problema di CAUCHY lineare di II ordine ho una soluzione unica definita in tutto $\mathbb{R}$

PROPRIETÀ INSIEMI $X \subseteq \mathbb{R}$ (1)

- $y \in \mathbb{R}$ $y \geq x$ $\forall x \in X$ → MAGGIORANTE ; $y \in X$ → elemento massimo
- $y \in \mathbb{R}$ $y \leq x$ $\forall x \in X$ → MINORANTE ; $y \in X$ → elemento minimo

- X è superiormente limitato se ammette ALMENO 1 maggiorante, inferiormente limitato se ammette ALMENO un minorante, limitato se ammette minorante e maggiorante.

- $\sup X$ = + piccolo dei MAGGIORANTI
- $\inf X$ = + grande dei MINORANTI

ASSIOMA DI COMPLETEZZA: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme SUPERIORMENTE LIMITATO, ammette quindi almeno un maggiorante, $\exists \sup X$ in $\mathbb{R}$. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme INFERIORMENTE LIMITATO, ha quindi almeno un minorante, $\exists \inf X$ in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ NON AMMETTE L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA!

se X non è superiormente limitato $\sup X = +\infty$ $\sup \emptyset = -\infty$
se X non è inferiormente limitato $\inf X = -\infty$ $\inf \emptyset = +\infty$

$\sup X = y \Rightarrow \begin{cases} y \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \mid x > y - \varepsilon \end{cases}$ [y è un maggiorante di X] [y è il più piccolo dei maggioranti di X]

LE FUNZIONI

- FUNZIONE = Siano A e B due insiemi non vuoti, si chiama funzione da $A \to B$ una relazione f che associa ogni elemento $a \in A$ un unico elemento $b \in B$, indicato con $f(a)$.

L'insieme A = Dominio
" B = Codominio

Sia $f: A \to B$ e $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$

Immagine di I tramite f $f(I): \{b \in B \mid \exists a \in I \mid f(a) = b\}$

Controimmagine di J = : $f^{-1}(J): \{a \in A \mid \exists f(a) \in J\}$

$f^{-1}(f(I)) \supseteq I$ è più grande di I IMMAGINE DI F $= Im(f) = f(A)$
$f(f^{-1}(J)) \subseteq J$ è più piccolo di J

FUNZIONE INIETTIVA se $\forall a, a' \in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
FUNZIONE SURIETTIVA se $Im(f) = B$
FUNZIONE BIETTIVA/BIUNIVOCA se è INIETTIVA e SURIETTIVA

FUNZIONE INVERSA = $f^{-1}: Im(f) \to A$ se f è INIETTIVA

OSS. $f: A \to B$ è INVERTIBILE $f^{-1}(f(a)) = a \ \forall a \in A$ $Im(f^{-1}) = A$
$f(f^{-1}(b)) = b \ \forall b \in Im(f)$ $Im(f) \subseteq B$

Nel caso in cui f non sia INVERTIBILE su tutto il suo dominio possiamo effettuare una RESTRIZIONE DEL DOMINIO $f_{|A}$ per renderla INVERTIBILE

Sia $f: A \to B$, $g: C \to D$ $(f \circ g) = f(g(x))$ $C \to B$ se e solo se $Im(g) \subseteq A$

- $f \circ g \neq g \circ f$ (in generale)

Sia $f: A \to B$, $g: B \to C$ BIUNIVOCHE $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$