



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 528

DATA: 22/04/2013

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Paradisi

MATERIA: Fisica II

Prof. Raffa

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

RAFFA FRANCESCO

francesco.raffa@polito.it

CONSULENZA Lunedì h 10.30-12.30

3° piano ex DINEC (DINEAS)

LIBRO: Mazzoldi, Nigro, Voci, - Elementi di Fisica: Elettromagnetismo - Onde, Vol II Edises, Napoli, 2010.

Tartaglia, - 300 esercizi svolti di elettromagnetismo e ottica, Editrice Lattes/Boringhieri, Torino, 1998.

## EQUAZIONI DI MAXWELL

### FORMA DIFFERENZIALE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### FORMA INTEGRALE

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{j}_{lm} dS = q / \epsilon_0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{j}_{lm} dS = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{j}_{lm} dS$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{j}_{lm} dS$$

$\vec{E}$  = campo elettrico

$\vec{B}$  = campo magnetico

$$\vec{\nabla} = \text{NABLA} = \vec{j}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{j}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \psi = \text{gradiente di } \psi = \text{grad } \psi = \vec{j}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{j}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$\psi(x, y, z, t)$ : CAMPO SCALARE  $\leadsto$  es. temperatura  $T(x, y, z)$ , potenziale elettrico  $V(x, y, z)$ .

$\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$ : CAMPO VETTORIALE

$$C_x(x, y, z, t)$$

### DIVERGENZA DI C

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \text{div } \vec{C}$$

$$\vec{C}(C_x, C_y, C_z) = C_x \vec{u}_x + C_y \vec{u}_y + C_z \vec{u}_z$$

### ROTORE DI C

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \text{rot } \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \vec{u}_x \left( \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) - \vec{u}_y \left( \frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z} \right) + \vec{u}_z \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right)$$

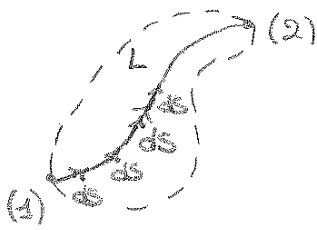
$$\textcircled{2} \quad \frac{d\psi}{dm} = (\vec{\nabla}\psi) \cdot \vec{m} = (\vec{\nabla}\psi)_m = |\vec{\nabla}\psi| \cdot 1 \cdot \cos\theta$$

↳ modulo del vettore  $\vec{m}$

$$\left(\frac{d\psi}{dm}\right)_{\max} \equiv \theta = 0 \quad \leadsto \text{il gradiente è allineato con } m.$$

Punta sempre nella direzione in cui il potenziale è max

## TEOREMA DEL GRADIENTE



$$\int_{(1)}^{(2)} (\vec{\nabla}\psi) \cdot d\vec{s} = \psi(2) - \psi(1)$$

↳ Non dipende dal percorso che faccio.

Non dipende da  $L$

$$\int_{(1)}^{(2)} d\psi = \int_L (\vec{\nabla}\psi) \cdot d\vec{s} = \psi(2) - \psi(1)$$

↳  $d\vec{p}$   
variazione del campo

Il lavoro che una forza compie è indipendente dal percorso.

Se la forza è conservativa

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

$$\left\{ \begin{aligned} W_{1,2} &= - \int_{(1)}^{(2)} (\vec{\nabla}E_p) \cdot d\vec{s} = - [E_p(2) - E_p(1)] = E_p(1) - E_p(2) \\ W_{1,2} &= \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \dots = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = E_{K2} - E_{K1} \end{aligned} \right.$$

$$E_{K1} + E_{p1} = E_{K2} + E_{p2} = \text{cost.}$$

$$d\Phi_{1,2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} dx dy dz$$

effetto della variazione  $C_x - C_x$

$$d\Phi_{3,4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} dy dx dz$$

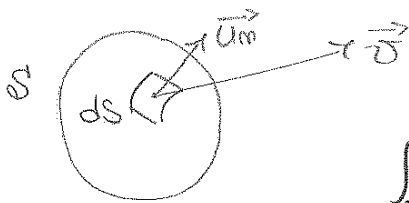
$$d\Phi_{5,6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} dz dx dy$$

$$d\Phi = \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV$$

C.V.D.

DE TH di GAUSS  $\rightarrow$

**EQUAZIONE DI CONTINUITA'** (o di conservazione)  
 ↳ della materia



densità di carica.

[Non parliamo di conservazione della carica elettrica].

$$\int_V \rho dV = Q$$

(massa del fluido contenuta nella nostra superficie S).

$$\Phi = \oint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_m dS > 0$$

[da prima]

immaginatelo che ci sia e che sia positivo.

Se dico che c'è ed è  $> 0 \Rightarrow$  allora è pari alla quantità totale di massa persa nella variazione di tempo.

$$\oint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_m dS = - \frac{dQ}{dt}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'  
 (o conservazione)

$$\oint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_m dS = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

↓ TH GAUSS

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV \quad \forall V$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

EQ. DI CONTINUITA'

lato 1:  $-C_y(1) dy$

lato 3:  $C_x(3) dx$

lato 2:  $C_y(2) dy$

lato 4:  $-C_x(4) dx$

$C_y(2) = C_y(1) + \frac{\partial C_y}{\partial x} dx$  ;

$C_x(4) = C_x(3) + \frac{\partial C_x}{\partial y} dy$ .

Se voglio la circolazione attorno al quadrato faccio la somma.

$$\frac{\partial C_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial C_x}{\partial y} dy dx = \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) dx dy$$

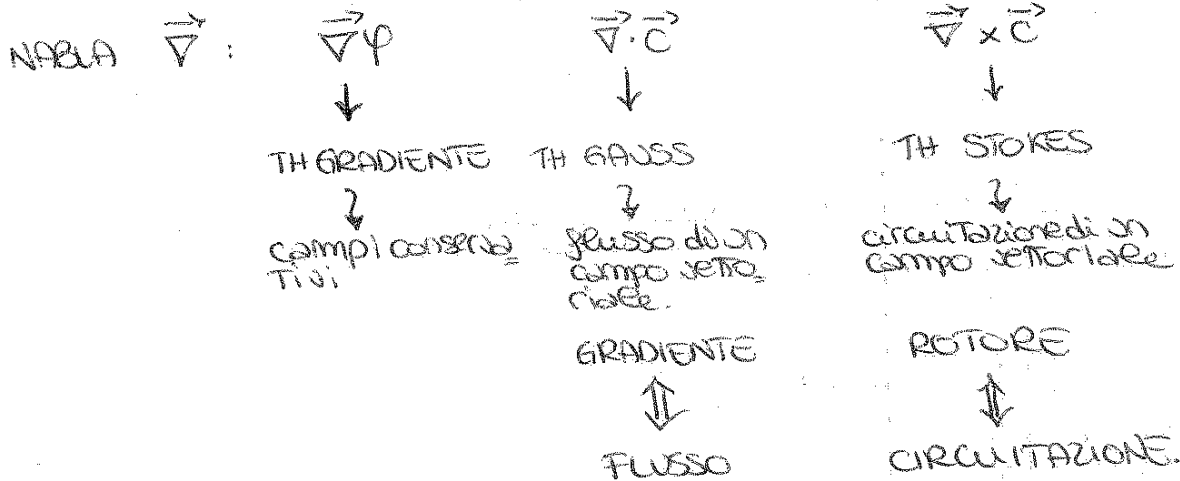
componente del rotore lungo z.  
[vedi 1° PAG.]

CIRCOLAZIONE =  $(\vec{\nabla} \times \vec{C})_z dx dy$   
 =  $(\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \vec{u}_z dx dy$

se è disposto per il piano xy

⇒ In qualunque piano sia disposto il rettangolo vale sempre il TH di Stokes.

RIASSUMENDO :



## CAMPI IRROTAZIONALI

$\vec{C}$ ,  $\nabla \times \vec{C} = 0 \rightsquigarrow$  se il ROTORE è nullo per STOKES:  
 $\vec{C} = \nabla \phi$   $\oint \vec{C} \cdot d\vec{S} = 0$

ROTORE  $\Rightarrow$  CIRCUITAZIONE (STOKES)



$W_L = 0$

La forza  $\vec{C} \equiv \vec{F}$  compie un lavoro nullo.

$0 = \oint (\nabla \phi) \cdot d\vec{S}$

$\phi(2) - \phi(1) = \int_1^2 (\nabla \phi) \cdot d\vec{S}$   
 (1) X TH DIVERGENZA

il ROTORE NULLO non mi dice nulla senza il Teo di STOKES.

$\Rightarrow$  So che il lavoro del campo in un circuito chiuso è 0 e quindi lo posso scrivere come gradiente di qualcosa.

$\Rightarrow$  CAMPO CONSERVATIVO ( $\vec{E}$ ) campo elettrico.

3<sup>o</sup> eq. di MAXWELL e poniamoci in condizioni stazionarie

$\frac{d}{dt} = 0 \rightsquigarrow$  vedo che il rotore è nullo.

CONSERVATIVO  $\Rightarrow$  IRROTAZIONALE

IRROTAZIONALE è associato al concetto di conservativo.

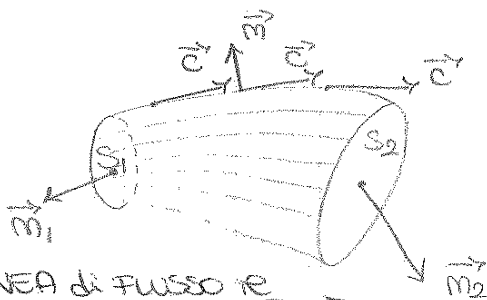
## CAMPI SOLENOIDALI

$\nabla \cdot \vec{C} = 0$

$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{u}_m dS = \int_V \nabla \cdot \vec{C} dV$   
 $\nabla \cdot \vec{C} = 0$  TH GAUSS.

Un campo è solenoideale se il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è nullo.

Grazie al TH di Gauss se la divergenza è 0 sono sicuri che il flusso attraverso la superficie è 0.



LINEA di FLUSSO il campo in ogni punto è tangente a questa linea.

### LINEE DI FLUSSO (o di forza)

$\hookrightarrow$  curva in ciascun punto della quale il campo è tangente alla linea stessa.

### TUBO DI FLUSSO

ESISTONO TUBI DI FLUSSO LUNGO I QUALI IL FLUSSO SI CONSERVA

$\nabla \cdot \vec{C} = 0$

$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{u}_m dS = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_{LATERALE}}$   
 $\int_{S_{LATERALE}} = 0$  perché la normale è  $\perp$  al campo.

# CAMPO ELETTRICO PAG 13

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

$\epsilon_0$  = PERMITTIVITA' DEL VUOTO

$\uparrow$   
ke

CARICA SORGENTE

$$F = q' \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)$$

$\hookrightarrow$  CARICA DI PROVA

$$E = \frac{F}{q'}$$

regione dello spazio in ogni punto della quale esiste una carica elettrica sente la forza di Coulomb.

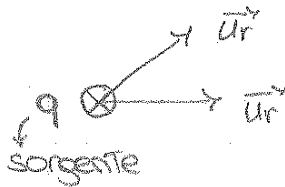
Il campo elettrostatico prodotto in un punto P da un sistema di cariche gemme e' definito come la forza elettrostatica risultante F che agisce su una carica di prova q<sub>0</sub> posta in P divisa per la carica q<sub>0</sub> stessa

CAMPO ELETTRICO: forza per unita' di carica.

$[E] = NC^{-1}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

- Se la carica q è positiva il campo è USCENTE da q
- Se è negativa il campo è ENTRANTE



forza di repulsione all'incirca lungo  $\vec{u}_r$

se Q fosse negativa  $\rightarrow$  forza di attrazione.

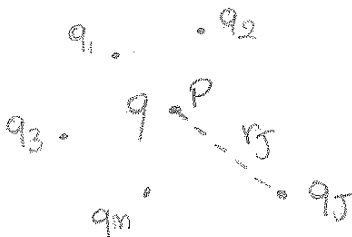
Il campo è sempre uscente dalla sorgente in ogni caso.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

## PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$\begin{cases} E \propto \frac{1}{r^2} \\ E = \text{costante} \end{cases}$$

Se avessi tutte cariche sorgenti invece che una:



Posso scrivere l'equazione del campo elettrico prodotto da qj generica

$$\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_j^2} \vec{u}_{rj}$$



EQUAZIONE DEL MOTO (scritta vettorialmente)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \vec{r}(x, y)$$

$$x = \vec{v}_0 t \quad y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 \rightarrow y(x) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E x^2}{\vec{v}_0^2} \quad \text{PARABOLA}$$

Nei campo elettromagnetico uniforme la particella segue una traiettoria che è una parabola.

$d = l \operatorname{Tg} \alpha$   
 Non è esattism.  $\operatorname{Tg} \alpha$ , approssimo  
 ↳ pendenza di questa curva a  $\vec{v}_0$  costante  
 $= y'(x) = \frac{q}{m} \frac{aE}{\vec{v}_0^2}$

$$\frac{d-h}{e} = \operatorname{Tg} \alpha$$

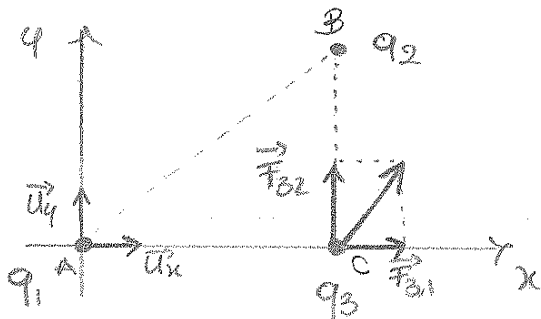
$$h = y(d) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{\vec{v}_0^2} d^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{e} = \frac{q}{m} \frac{aE}{\vec{v}_0^2}$$

(Ignoriamo che una carica in moto genera un campo magnetico).

Esercizio

Distribuzione discreta di cariche



Calcola la forza di Coulomb e il campo elettrico in  $q_3$  (carica di prova).

$$q_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\overline{AC} = 1,2 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 0,5 \text{ m}$$

F. Coulomb agente sulla carica  $q_3$ .

$$\vec{F}_{31} \text{ (è sulla carica 3 prodotta dalla carica 1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{\overline{AC}^2} \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2| q_3}{\overline{BC}^2} \vec{u}_y$$

RISULTATI:

$$F_{31} = 1875 \text{ N}$$

$$F_{32} = 3600 \text{ N}$$

$$F_3 = 4060 \text{ N}$$

→ Adesso devo completare i conti considerando tutto il filo, non solo  $dS$ .

$$\vec{E} = \int_{\text{filo}} d\vec{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_0^{\arcsin \frac{e}{\sqrt{e^2+x^2}}} \cos\theta d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{e}{\sqrt{e^2+x^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{e^2+x^2}} \neq \frac{1}{x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ e = r \sin\theta \\ \theta = \arcsin \frac{e}{r} = \arcsin \frac{e}{\sqrt{e^2+x^2}} \end{array} \right.$$

Distribuzione di carica sul filo → Quando è una carica concentrata?

$$x \gg e \rightarrow \sqrt{x^2+e^2} = x \sqrt{1+(\frac{e}{x})^2} \sim x$$

Quando siamo MOLTO lontani dal filo

Posso dire che coincidono perché della radice serve solo  $x$ .

In questo caso limite:

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \vec{u}_x \sim \text{CARICHI CONCENTRATA.}$$

2° CASO IMPORTANTE

$$e \rightarrow \infty$$

o invece una distribuzione infinita di cariche.

$$\sqrt{x^2+e^2}$$

Vediamolo nel campo elettrico:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 q \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q \int_1^2 (\nabla V) \cdot d\vec{s} = -q(V_2 - V_1) = q(V_1 - V_2)$$

I 2 risultati rappresentano la stessa quantità.

$$\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = q(V_1 - V_2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + qV = \text{COSTANTE}$$

il percorso non è rilevante.  
 ⇒ il campo elettrico è conservativo!

NB → VERO SOLO IN STATICA

3° eq MAXWELL → Faraday - Henry PAG 45

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_m dS$$

CAMPO CONSERVATIVO

⇒ CAMPO IRROTAZIONALE

Tutto ciò che dipende dal tempo.  
 Perché siamo in regime STAZIONARIO.

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \iff q \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$q \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{L_1} + \int_{L_2} = -q(V_2 - V_1) + q(V_2 - V_1)$$

è sempre nullo perché  $\vec{E}$  è conservativo.

il percorso in senso inverso (cambio segno)

$L = L_1 + L_2$

CAMPO CONSERVATIVO → il rotore su un circuito chiuso è 0.

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \iff \nabla \times (\nabla V) = 0$$

se  $\vec{E} = -\nabla V$  allora il rotore è 0.

CAMPI IRROTAZIONALI

IRROTAZIONALE = CONSERVATIVO.

IL CAMPO ELETTRICO, CONSERVATIVO, IRROTAZIONALE ha cioè rotore sempre nullo.

# CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME

q PUNTIFORME → SORGENTE

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r = E_r \vec{u}_r$$

componente radiale.

le vettore  $\vec{u}_r$  è SEMPRE uscente dalla carica indipendentemente dal segno di quest'ultima. Poi cambia l'orientazione del campo.

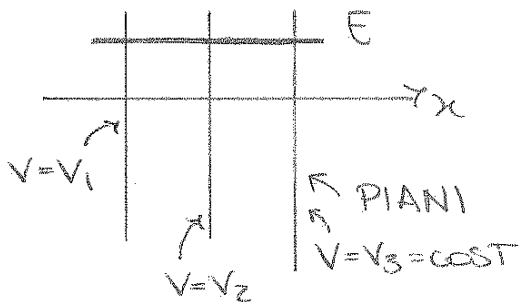
Quanto vale il potenziale associato a quel campo?

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Il potenziale se la distanza dalla sorgente tende a  $\infty$  è 0.

• E = COSTANTE.



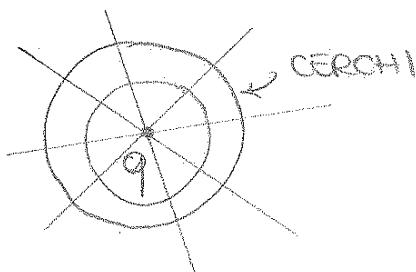
SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

$$(V = \text{cost})$$

pari. alle linee di flusso

$$V = -Ex.$$

• CARICA PUNTIFORME



CAMPO RADIALE

Es linee di campo non può che essere cost.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

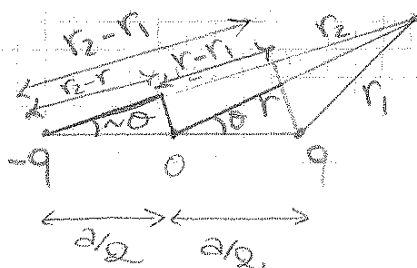
SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

cerchi ⊥ alle linee di flusso.

$$V = \text{cost.}$$

$$\left[ \frac{d\varphi}{dm} = (\vec{\nabla}\varphi)_m \text{ vedi dietro!} \right]$$





$$V(\vec{P}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Impongo che  $r \gg a$  APPROSSIMAZIONE DI DIPOLIO

$$r_2 - r_1 = a \cos\theta$$

$$r_2 - r = \frac{a}{2} \cos\theta, \quad r - r_1 = \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_2 = r + \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_1 = r - \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_1 r_2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cos^2\theta \sim r^2$$

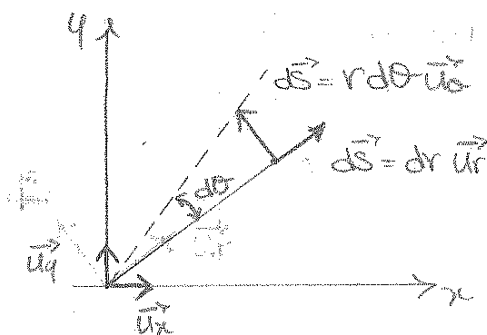
$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos\theta}{r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_p(r, \theta)$$

(coordinate polari.)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad \boxed{E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}}$$

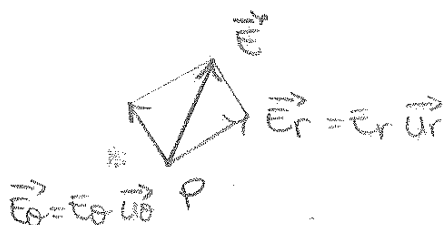
$$ds \equiv dr$$

$$\underline{ds \equiv r d\theta}$$

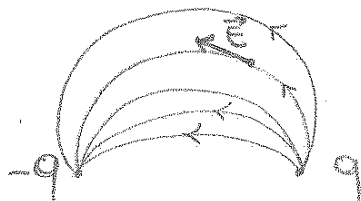


$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



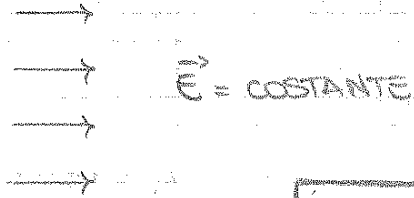
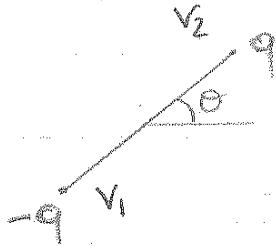
Se faccio lo stesso discorso per tutti i punti del piano trovo le linee di forza associate al dipolo.



Curva di queste linee ha come tangente la risultante del campo elettrico.

LINEE DI FORZA di  $\vec{E}$

## QUAL'E' L'ENERGIA POTENZIALE DI UN DIPOLO



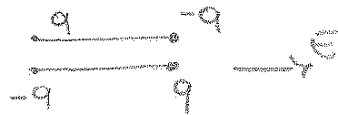
$$\boxed{E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}}$$

$$\begin{aligned} E_p &= qV_2 - qV_1 = q(V_2 - V_1) \\ &= q\alpha \cdot [(V_2 - V_1)/\alpha] = q\alpha \left( -\frac{V_2 - V_1}{\alpha} \right) \\ &= q\alpha \left( -\frac{dV}{d\alpha} \right) \\ &= -pE_\alpha = -pE \cos\theta \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

↳ componente del campo elettrico lungo il dipolo (lungo  $\alpha$ )

### • DIPOLO

1) Forze



2) Coppia

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

3) Energia

$$-\vec{p} \cdot \vec{E}$$



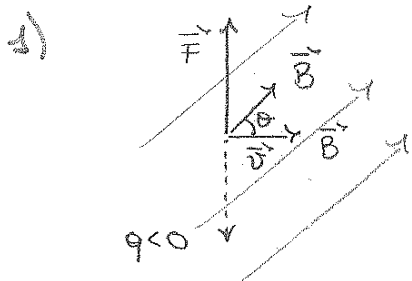
Il magnetismo è "trasferibile" e "selettivo": alcuni (ma non tutti) materiali possono essere magnetizzati.

MAGNETISMO: manifestazione di cariche elettriche in moto

- 1)  $q$  in quiete: non sente effetti magnetici; su  $q$  non agiscono forze
- 2)  $q$  in moto: risente di una forza  $\vec{F}$  che dipende da  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$
- 3) Un conduttore percorso da corrente  $I$  crea un campo magnetico (sorgente)
- 4) Tra due conduttori percorsi da corrente si sviluppa attrazione o repulsione magnetica, a seconda del verso di  $I$ .

$$\vec{F}_{MAG} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

→ forza magnetica che agisce su  $q$



- Se tra  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  c'è un angolo  $\theta \leq 90^\circ$  avremo una forza magnetica;
- Se  $\theta = 90^\circ \Rightarrow F$  è MASSIMA
- Se  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$ , cioè  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}$  stessa direzione  $\Rightarrow$  su  $q$  non agisce forza.

2) Lavoro della forza magnetica:  $dW = \vec{F}_M \cdot d\vec{s} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$   
 $= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} \cdot dt) = \underline{0} \cdot dt$

$\Rightarrow$  l'effetto della forza magnetica su  $q$  non varia la sua velocità:  $v = |\vec{v}|$  non varia. La forza varia la direzione della velocità.

3) Unità di misura:  $[B] = \frac{Ns}{Cm} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{C \cdot s^2 \cdot m} = kg \cdot C^{-1} \cdot s^{-1} = \frac{\text{Tesla}}{(T)}$

4) Interazione del campo magnetico + quello elettrostatico su  $q$ :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

→ FORZA DI LORENTZ

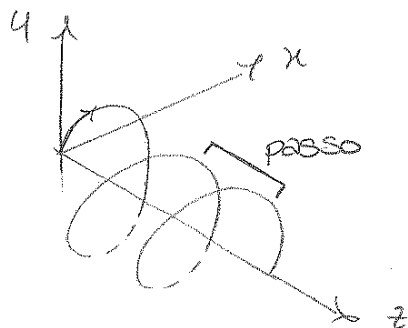
• piano  $[xy]$  :  $r = \frac{m}{q} \frac{v}{B} = \frac{m}{q} \frac{v \sin \theta}{B}$

MOTO CIRCOLARE  $\omega = \frac{q}{m} B$

• Lungo asse  $z$  : MOTO RETTILINEO  $v_p = v \cos \theta$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow p = \text{PASSO DELL'EUCA} = v_p \cdot T$

•  $\Rightarrow p = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$  MOTO AD EUCA (moto-Traslazione)



17/10/12

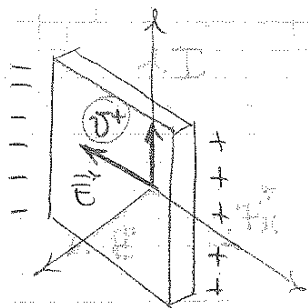
• RIEPILOGO

•  $\vec{F}_{MAG} = q \vec{v} \times \vec{B}$

• Se  $\vec{B} = \text{UNIFORME}$   $\left. \begin{array}{l} \vec{v} \perp \vec{B} \\ \Rightarrow r = \frac{m}{q} \frac{v}{B}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \\ \omega = \frac{q}{m} B \end{array} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

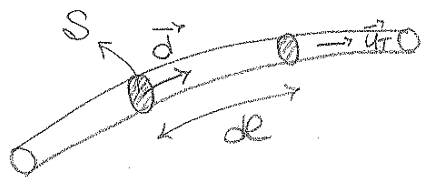
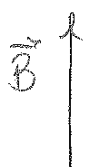
-  $\vec{v} \text{ NON } \perp \vec{B}$  : MOTO AD EUCA,  $p = v_p \cdot T$





Cambia le verso di  $\vec{E}$

## FILO PERCORSO DA CORRENTE IMMERSO IN $\vec{B}$



$\vec{j} = nq\vec{v}$  (densità di corrente)  
 ↳ numero di cariche  
 ↳ velocità di deriva (velocità delle cariche positive parallele al campo  $\vec{E}$ )  
 $I = j \cdot S$  (area)

So che  $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , lo esprimo per unità di volume

$$\Rightarrow \vec{j}_{mag} = nq\vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_{mag} = \vec{j}_{mag} \cdot dV$$

↳ per unità di volume (dV)

$$= \vec{j}_{mag} \cdot S dl = \vec{j} \times \vec{B} \cdot S dl = j S \cdot \vec{u}_T \times \vec{B} dl = I \vec{u}_T \times \vec{B} dl$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{mag} = I L \vec{u}_T \times \vec{B} ; \quad \frac{d\vec{F}_{mag}}{dl} = I \vec{u}_T \times \vec{B}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{mag} = I \int_L \vec{u}_T \times \vec{B} dl}$$

### Conduttore rettilineo

$$\vec{u}_T \times \vec{B} = B \sin\theta \vec{u}_z$$

↳ applico la formula di sopra ↑:

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = I \cdot B \sin\theta \cdot L \vec{u}_z}$$

• Dato in  $\vec{B}$ :

23/10/12

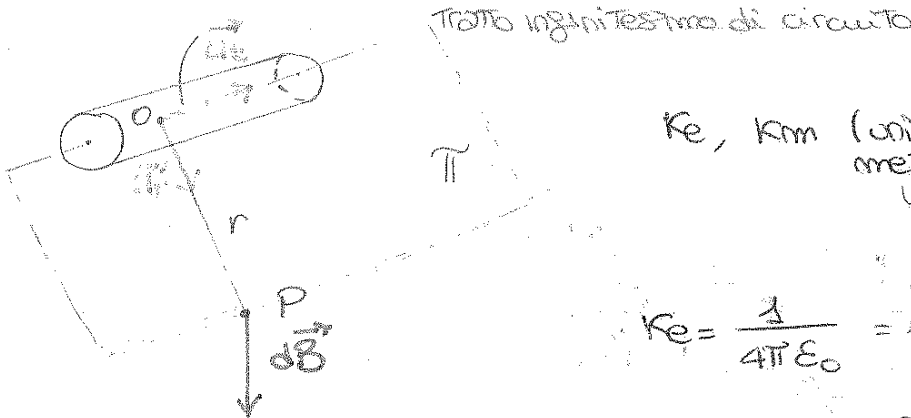
$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{F} &= I \int_L \vec{u}_t \times \vec{B} \, dl \end{aligned} \right.$$

Se ho un conduttore immerso in un campo magnetico scopro che c'è una forza di origine magnetica che agisce sul conduttore stesso.

• SORGENTI di  $\vec{B}$

Oersted  $\rightarrow$  LEGGE di AMPÈRE - LAPLACE

$$\vec{B} = k_m I \oint_L \frac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} \, ds$$



$k_e, k_m$  (unità di misura, mezzo)

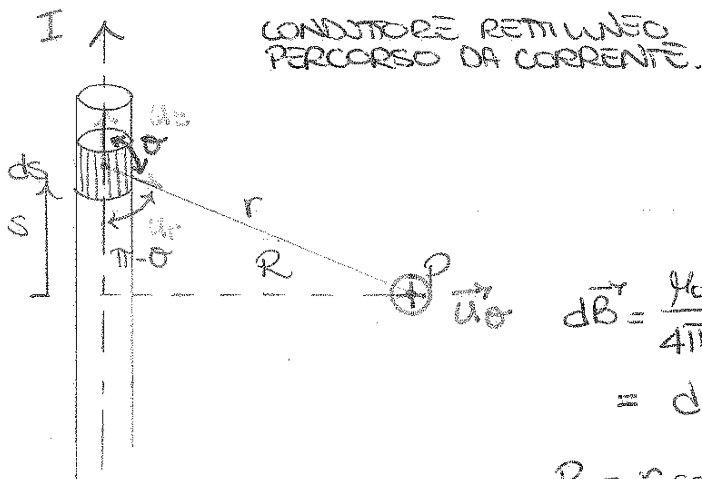
non nel vuoto / MATERIALE

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-9} \text{ C}^2$$

$$k_m = \frac{10^{-7}}{4\pi} \text{ kgmC}^{-2} \rightarrow \mu_0 \text{ PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO.}$$

$$[k_m] = \frac{I}{A} \text{ m} = \frac{\text{mA}}{C} \text{ s} \frac{N}{C} \frac{s}{\text{mA}} = \text{kgmC}^{-2}$$

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{1/c^2}{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} = c^2$$

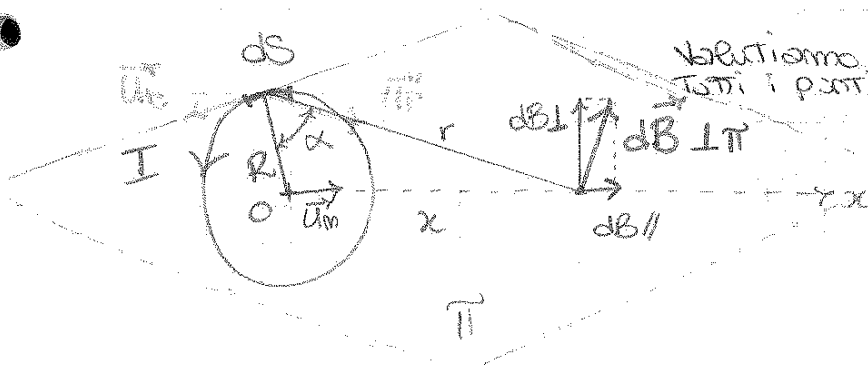


LE ONDE ELETTROMAGNETICHE NEL VUOTO SI PROPAGANO CON LA VELOCITÀ DELLA LUCE AL QUADRATO.

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} \, ds \\ &= dB \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta \rightarrow r = \frac{R}{\sin\theta} \\ |\vec{u}_t \times \vec{u}_r| &= \sin\theta \\ s &= r \cos(\pi - \theta) = \frac{R}{\sin\theta} (-\cos\theta) = \end{aligned}$$

# SPIRA CIRCOLARE percorsa da corrente



Calcoliamo il campo magnetico su tutti i punti dell'asse della spira.

L'elemento simmetrico diametralmente a ds sarà lo stesso cos'altro sotto dell'asse  $x \Rightarrow$  le componenti  $\perp$  si annullano  
NB  $\rightarrow$

$$dB_{||} = dB \cos \alpha$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \quad R = r \cos \alpha$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{R^2 + x^2} \cos \alpha \cdot 2\pi R \quad (\text{lungo } \vec{u}_m)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \pi R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \pi R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{u}_m$$

Per  $x=0$  (al centro della spira) B assume il suo valore massimo.

$$x=0 \quad B_{max} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R}$$

$R \ll x \equiv$  spira molto piccola.

$$x^3 \left[ 1 + \left( \frac{R}{x} \right)^2 \right]^{3/2} \approx x^3$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \pi R^2}{x^3} \vec{u}_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I S \vec{u}_m}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \vec{u}_m}{x^3} \quad *$$

se la spira è molto piccola può avere qualsiasi forma.

$$\vec{m} = m \vec{u}_m$$

## DIPOLO ELETTRICO:

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

Per  $\theta=0$  siamo sull'asse del dipolo.

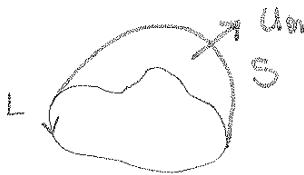
$$\sim E_\theta = 0 \quad E_r = \frac{2p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad *$$

# CAMPI $\vec{E}$ , $\vec{B}$ in regime STAZIONARIO

$$\Phi = \int_S \vec{c} \cdot \vec{u}_m \, dS \quad \text{oppure} \quad \oint_S \vec{c} \cdot \vec{u}_m \, dS$$

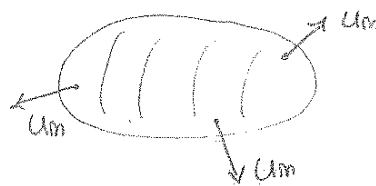
$\vec{c}$  campo vettoriale  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$

S APERTA



$u_m$  coerente secondo la regola della mano dx al verso della curva su cui S si appoggia.

S CHIUSA



$u_m$  è sempre uscente rispetto alla superficie.

$$\vec{c} \cdot \vec{u}_m \geq 0$$

$\Phi > 0$  FLUSSI USCENTI

$\Phi < 0$  FLUSSI ENTRANTI

$$[\Phi] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\vec{c} = \rho \vec{v}$$

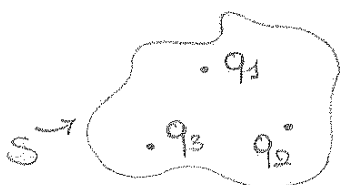
$$\vec{j} = m q \vec{v} = \begin{matrix} \text{densità di} \\ \text{particelle} \end{matrix} \begin{matrix} \text{densità di} \\ \text{corrente} \end{matrix}$$

$$[j] = \text{C} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\int_S \vec{j} \cdot \vec{u}_m \, dS = I}$$

$$I = j \cdot S$$

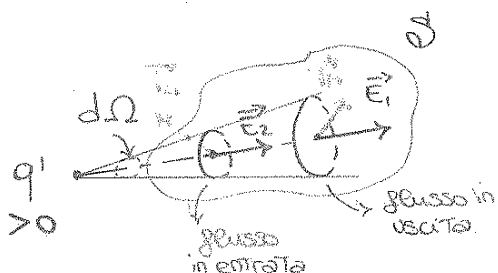
B)



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_{\text{nm}} dS = \frac{\sum q_j}{\epsilon_0}$$

SOMMA ALGEBRICA (le cariche > prendono con il loro segno)

⇒ il flusso delle cariche esterne attraverso la superficie è zero!



$$d\Phi_{E, q'} = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$$

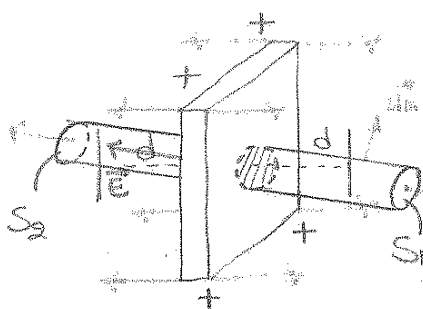
i due flussi sono uguali essendo sottesi allo stesso angolo solido.

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_{\text{nm}} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$q = \sum_j q_j \text{ INTERNE}$$

### APPLICAZIONI



$$[\epsilon] = \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

Dimostrazione per assurdo.

$$\Phi_E = \left\langle \begin{array}{l} \oint_S \\ \frac{q}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \underbrace{\Phi_{\text{est}}}_{=0} = ES_1 + ES_2 = 2ES$$

↳ modulo del campo

Per legge di GAUSS  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

## LA CARICA OCCUPA TUTTO IL VOLUME DELLA SFERA



$$r < R$$

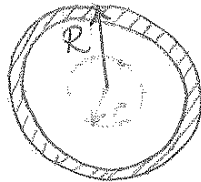
$$Q' = Q \frac{V'}{V} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

carica contenuta nella sfera verde.

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

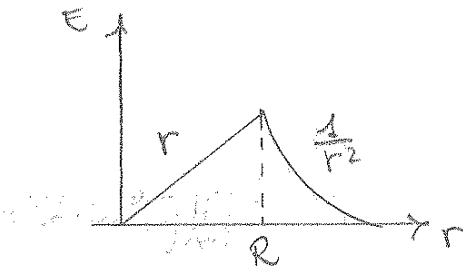
## CARICA CONCENTRATA SUL GUSCIO DELLA SFERA



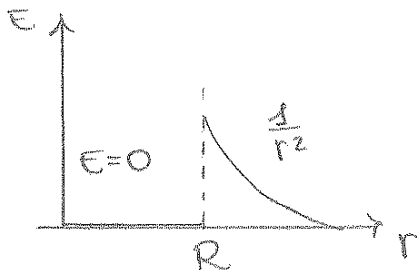
$$\Phi_E = E 4\pi r^2 = 0$$

## RIASSUMENDO

- SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

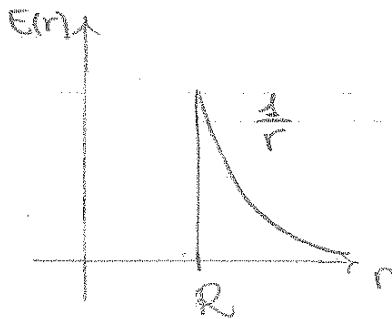


- GUSCIO SFERICO

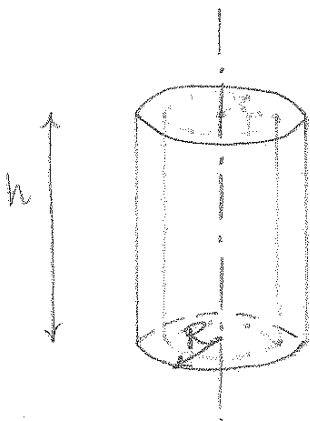
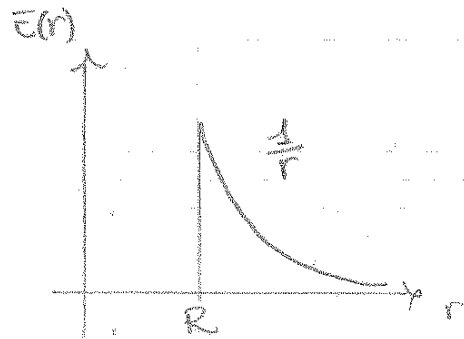


# CIUNDRIO

## VOLUME



## SUPERFICIE



$$\Phi_E = E \pi r h = \frac{Q'}{\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2} =$$

$$Q = \rho \pi R^2 h \quad \left. \begin{array}{l} Q' = \rho \pi r^2 h \end{array} \right\} Q' = Q \frac{r^2}{R^2}$$

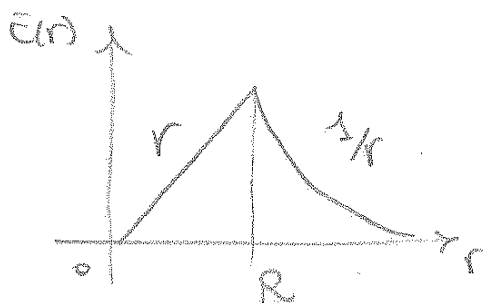
$$\Phi_E = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{r^2 h}{R^2}$$

Eguagliando questo risultato

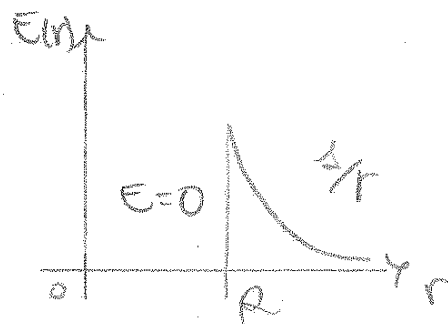
$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{r}{R^2}$$

Se la carica fosse distribuita sul guscio cilindrico  
 $\Rightarrow$  il campo è nullo.

## $\Rightarrow$ VOLUME



## SUPERFICIE



LASCIAMO IL VUOTO E VEDIAMO CHE SUCCEDE ALLE LEGGI CHE ABBIAMO INTRODOTO NELLA MATERIA.

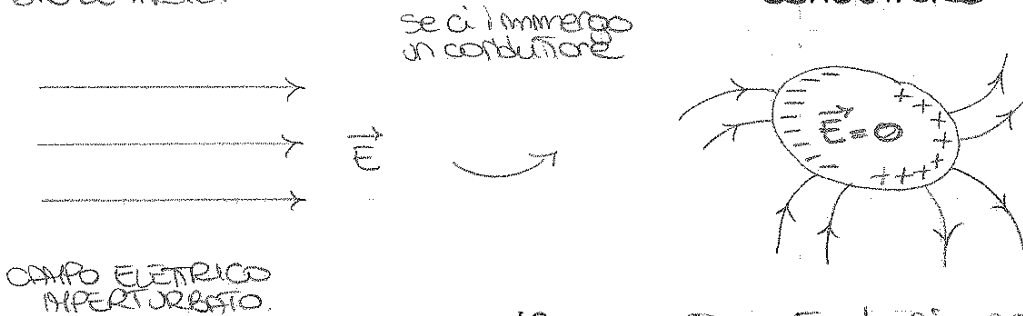
VUOTO  $\rightsquigarrow$  MATERIA.

# POLARIZZAZIONE

Interazione tra campo elettrico e materia

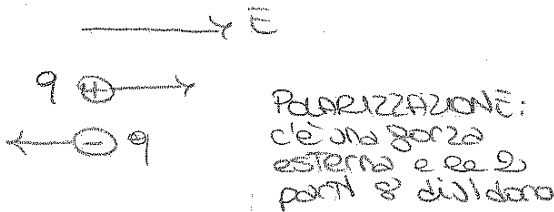
$\rightarrow$  CONDUTTORI

$\rightarrow$  DIELETRICI



Il comportamento degli elettroni di conduzione è stato studiato da FERMI.

GAS DI FERMI



spin  $\frac{1}{2}$  FERMIONI

$\rightarrow$  Si arriva ad una condizione di equilibrio

Nasce un campo elettrico all'interno del conduttore.

L'effetto finisce quando si raggiunge l'EQUILIBRIO: il campo elettrico INDOTTO  $\rightsquigarrow$  INDUZIONE ELETTROSTATICA compensa il campo elettrico esterno.

$\Rightarrow$  su tutta la massa del conduttore, all'interno  $\vec{E} = 0$ .

APPROSSIMAZIONE CONTINUA

L'intera carica elettrica di un conduttore in equilibrio si trova sulla sua superficie.

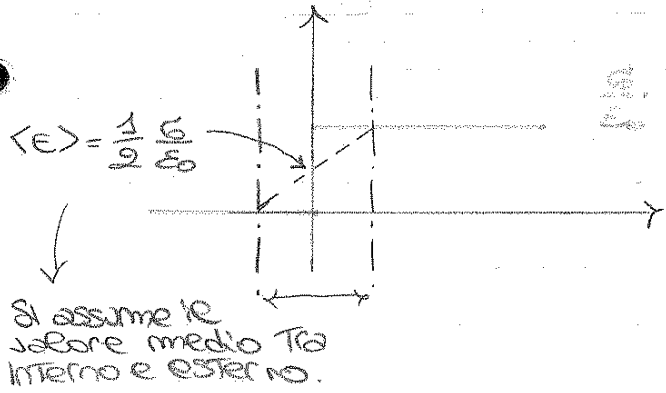
1)  $\vec{E} = 0$  (all'interno del conduttore)

2)  $V = \text{costante}$ . (ovunque  $\rightsquigarrow$  in particolare sulla superficie)  
 $= V_0$  (potenziale sulla superficie esterna del conduttore)

Se ho una superficie equipotenziale  $\rightarrow$  il campo è  $\perp$ .

3)  $\vec{E} \perp S$ . Il campo elettrico alla superficie di un conduttore in equilibrio è normale alla superficie altrimenti le cariche sarebbero libere di muoversi e non raggiungere un equilibrio  $\rightarrow$  CAMPO NULLO.





$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_{mp}$$

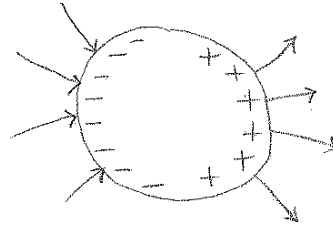
TH DI CULOMB.

P = PRESSIONE ELETTROSTATICA

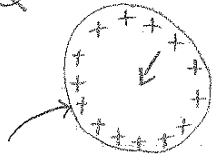
$$P = \sigma \langle E \rangle = \frac{C}{m^2} \frac{N}{C} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$$

(sullo strato superficiale)

CONDUTTORE SEMPRE NEUTRO  
 $\rightarrow$  se polarizzato



+Q inseriamo una carica su quel conduttore

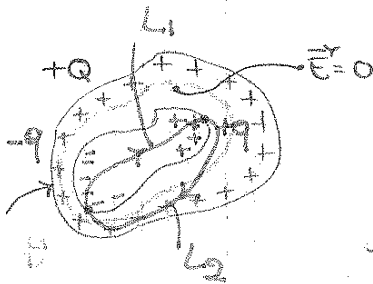


CONDUTTORE CARICATO +Q

$$\vec{E} = 0$$

$$V = \text{cost} = V_0$$

ORA IL CONDUTTORE E' CARICO! NON E' NEUTRO (lo abbiamo caricato noi)



CONDUTTORE CAVO CARICATO.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_{mp} dS = \frac{q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$= 0$

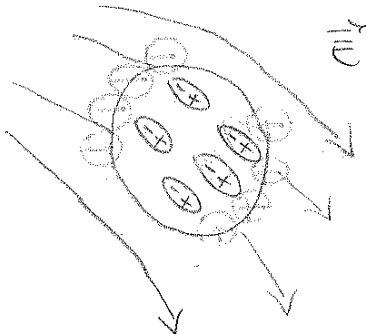
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

# DIELETRICI

Mezzo non conduttore che presenta però il fenomeno della POLARIZZAZIONE.



I dipoli si dispongono così, o sono indotti dal campo o sono preesistenti e solo riorientati da questo.

**Polarizzazione** (è da un orientamento delle cariche di quel sistema).

$$\vec{P} = n \cdot \vec{p} \quad , \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$m^{-3} \text{ Cm}$

χ<sub>e</sub> SUSCETTIVITA' ELETTRICA  
(numero puro >= 0)

[Dipende dal materiale, varia da mezzo a mezzo]

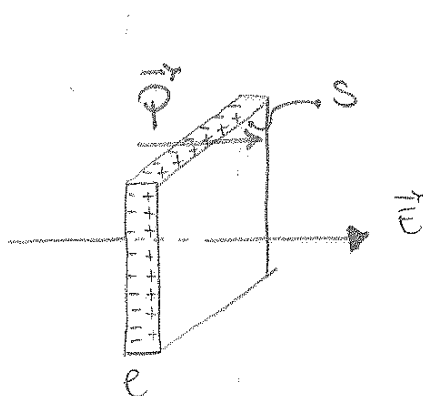
$$[P] = \text{C m}^{-2}$$

So solo che P è una funzione di E P(E) ma non so se è lineare o meno.

$$P(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k E^k = C_1 E + C_2 E^2 + C_3 E^3 + \dots$$

Se il campo non è intenso i termini di grado superiore possono essere trascurati → può essere approssimata a una dipendenza lineare di E.

$$P(E) \sim C_1 E$$



$$\vec{P} = \begin{cases} n \vec{p} \\ \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \end{cases}$$

$$[P] = \text{C m}^{-2} = \text{C m m}^{-3}$$

$\vec{P} S e$  = MOMENTO DI DIPOLO TOTALE.  
carica → distanza

La piastra ha lo stesso ruolo del DIPOLO ELETTRICO

$$P = \sigma_{POL}$$

Densità delle cariche polarizzate superficiali

$$\frac{q_{TOT}}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_{dm} dS;$$

$$q_{FREE} = \oint (\epsilon \vec{E}) \cdot \vec{u}_{dm} dS.$$

Solo se il mezzo è omogeneo

$$\frac{q_{FREE}}{\epsilon} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_{dm} dS.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$\rho_{TOT}$  densità TOTALE di volume  
 [posso avere zone cariche positive e zone cariche negativamente]

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_{FREE}$$

Solo se il mezzo è omogeneo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{FREE}}{\epsilon}$$

$\vec{E}$  è CONSERVATIVO  $\rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$   
 $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

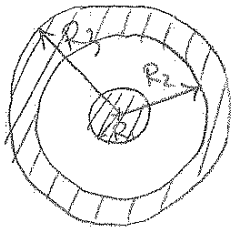
$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times (\epsilon \vec{E}) \neq \epsilon \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ANTICIPAZIONE...

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

PIANI =  $\epsilon \frac{S}{d}$

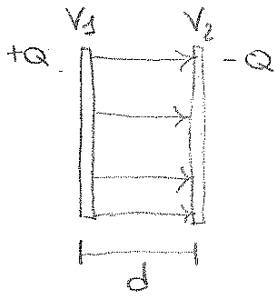
SFERICI =  $4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



$V \propto$  CARICA

↳ (geometria, mezzo)

$C = \frac{Q}{V}$  CONDUTTORE ISOLATO  
 ↳  $V_1 - V_2$



$\vec{E}$  UNIFORME

$$E = \frac{Q/\epsilon_0}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

$$D = \frac{Q}{S}$$

$$\frac{Q}{S\epsilon_0} = \frac{V_1 - V_2}{d} \rightarrow C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \rightarrow \frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \gg 1 \rightarrow \text{SEMPRE!}$$

$[C] = \text{Farad}$  ,  $F = \frac{C^2}{Nm}$

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8.8 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$$

$$C_0 = 1F, \quad d = 1m \rightarrow S \approx 10^{11} m^2$$

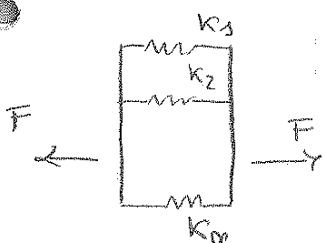
### IN PARALLELO



$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{V}, \quad Q_1 = VC_1, \quad Q_2 = VC_2, \dots$$

$$C_{eq} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$$

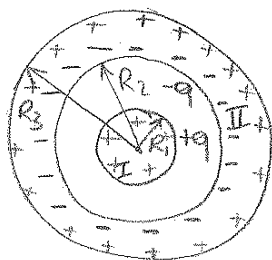
### LA MOLLA...



$\Delta s$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

### PAG 76



$$V_I = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$V_{II} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$$V_I - V_{II} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

•  $R_2 \rightarrow \infty$        $C_{SINGOLO} = 4\pi\epsilon_0 R_1$   
 C  $\gamma$  C SINGOLO

•  $R_2 = R_1 + s$        $s \ll R_1, R_2$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1(R_1 + s)}{s} \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1^2}{s} = \boxed{\epsilon_0 \frac{S}{s}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

ELEMENTO	Zc	$\rho_b$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$[10^{23} \text{ m}^{-3}]$
Cu	1	8,96	849
Ag	1	10,49	586
Au	1	19,30	5,90
Fe	2	7,87	17
Al	3	2,70	181

$$v_F = \frac{\hbar}{m} k_F$$

VELOCITÀ DI FERMII

$$m =$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

costante di planck

$$v_F = \dots$$

# CAMPO MAGNETICO STAZIONARIO

1)  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

2)  $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_m dS = \frac{q}{\epsilon_0}$  S = SFERA

3)  $\left\{ \begin{array}{l} q \rightarrow \sum_j q_j \text{ (algebrico)} \\ \text{SFERA} \rightarrow \forall S \end{array} \right.$

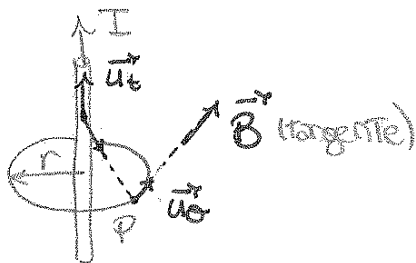
4)  $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_m dS = \frac{q}{\epsilon_0} \rightsquigarrow \text{APPLICAZIONI}$

a)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$  | ↑ I

b)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$  L = CIRCONFERENZA

c)  $\left\{ \begin{array}{l} L \text{ CIRCONFERENZA} \rightarrow \forall L \\ \forall \text{ FORMA DELLA CORRENTE} \end{array} \right.$

d)  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$  LEGGI DI AMPÈRE (4<sup>a</sup> eq. di Maxwell in stazionario)



BIOT-SAVART

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L ds = \mu_0 I$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = B 2\pi r$$

$$I' \neq I, \quad I' = j \cdot S'$$

$$I = j S$$

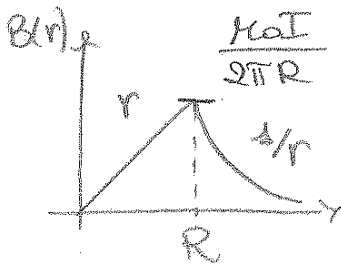
$$\frac{I'}{I} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

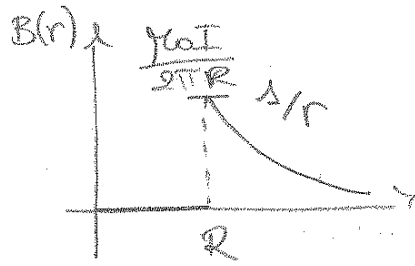
Se la corrente giuisce solo sulla superficie:

$$B 2\pi r = 0 \quad (= \text{con la CARICA e il campo ELETTRICO})$$

VOLUME



SUPERFICIE

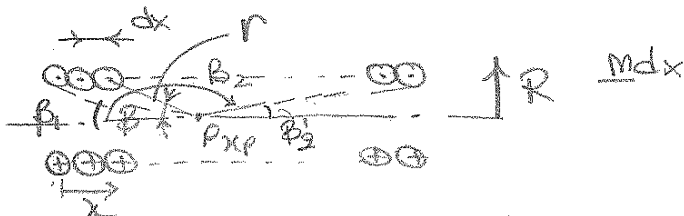




Per Ampère  $B_{\infty} = (\mu_0 m) I \mu_0$

$$B = \mu_0 m I = B_{\infty}$$

FINITO



$$dB_p = \frac{\mu_0}{2} (m dx I) \frac{R^2}{r^3}$$

$$R = r \sin \beta \rightarrow r^3 = \frac{R^3}{(\sin \beta)^3}$$

$$x_p - x = R \cot \beta$$

$$-dx = R \left( -\frac{1}{\sin^2 \beta} \right) d\beta$$

$$dB_p = \frac{\mu_0 m I}{2} \frac{R^2}{\frac{R^3}{(\sin \beta)^3}} \frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta = \frac{\mu_0 m I}{2} \sin \beta d\beta$$

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} dB(\beta) = \frac{\mu_0 m I}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

$$\beta_2' = \pi - \beta_2 \rightarrow \frac{\mu_0 m I}{2} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2')$$

$$\beta_1 \cong 0; \beta_2' \cong 0$$

$$B_{\infty} = \mu_0 m I$$

AMPÈRE:  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$  PAG 177

178-179

$$\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \vec{u}_m ds$$

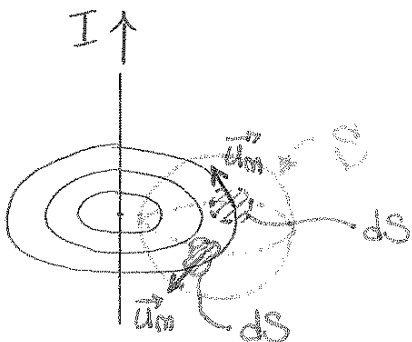
lo abbiamo già dimostrato ora  
e possiamo usare

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_m ds = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{u}_m ds$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad [4^{\text{a}} \text{ eq. MAXWELL stazionario}]$$

# FLUSSO DI $\vec{B}$

LINEE DI FORZA  $\rightarrow$  CHIUSE  
 $\rightarrow$  CONTINUE }  $\Phi_{B,S \text{ CHIUSA}} = 0$



$$d\Phi_{IN} = \boxed{\vec{B} \cdot \vec{u}_m} ds < 0$$

elemento di flusso in ingresso

elem di flusso uscente

$$d\Phi_{OUT} = \boxed{\vec{B} \cdot \vec{u}_m} ds > 0$$

I 2 flussi sono uguali in modulo

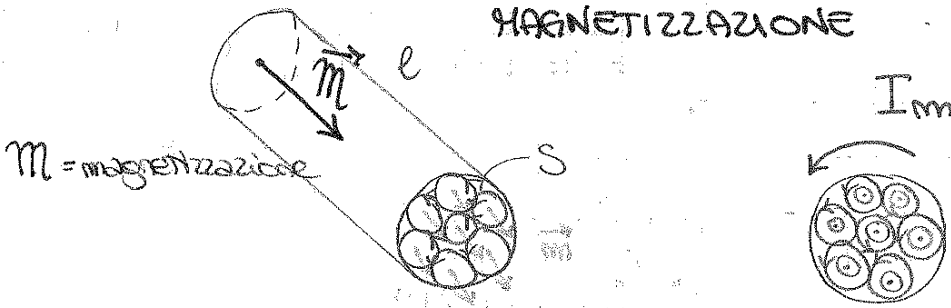
le di forza totale è zero per le prop intrinseche delle linee

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_m ds = 0, \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad \text{Per TH GAUSS}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_m ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

### MAGNETIZZAZIONE



$$\vec{M} = m \vec{m} \quad , \quad [M] = m^{-3} \cdot A m^2 = A m^{-1}$$

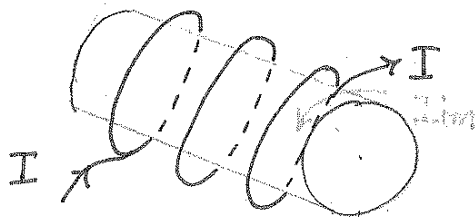
$\downarrow$   
 $m^{-3}$

$M S e =$  MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO TOTALE  
 $\downarrow$   
 volume del cilindro

$(m e) s$  ,  $m e =$  CORRENTE TOTALE DI MAGNETIZZAZIONE.

$$M = I_m \quad , \quad [M] = A m^{-1}$$

$$I_m \neq I_{LIBERE}$$



SOLENOIDE ESTERNO  
 (corrente libera,  $I$ )

$\oplus$   
 CILINDRO MAGNETIZZATO  
 (corrente  $I_m$ )

$=$   
 SOLENOIDE  
 ( $mI + I_m$ )

$m =$  spire per unità di lunghezza.

$\rightarrow$  CAMPO MAGNETIZZANTE

$$B = \mu_0 (mI + M)$$

$$mI = \frac{B}{\mu_0} - M \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad H = mI$$

$\uparrow$   
CAMPO MAGNETIZZANTE

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + M)$$

$$\boxed{H = mI} \quad \rightsquigarrow \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{FREE} \quad ?$$



RS:  $\vec{H} = 0$   
 QR, SP:  $\vec{H} \perp \text{LATI}$

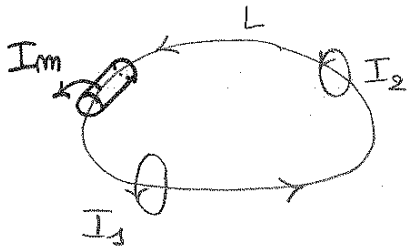
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{RS} \vec{H} \cdot d\vec{s} = He$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = He = mIe = I_{FREE}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

CORRENTI TOTALI  
 (concatenate da e  
 circuito)

Esempio



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_{m \cdot e})$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_1 - I_2$$

$\vec{P}$

POLARIZZAZIONE  
 ELETTRICA

$\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_{m} \vec{H}$$

↳ SUSCETTIVITÀ  
 MAGNETICA

$\vec{M}$

MAGNETIZZAZIONE  
 (Polarizzazione magnetica)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$= \mu \vec{H}$$

PERMEABILITÀ

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$$

PERMEABILITÀ  
 RELATIVA

$\chi_m \leq 0$  } dipende dalle  
 materiali  
 $\mu_r \geq 1$   
 $\chi_e \geq 0 \hookrightarrow \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \geq 1$

$\epsilon_r = K$ $\mu_r = K_{em}$	xVAZZOLDI
--------------------------------------	-----------

$$\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_S = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e} (\vec{L} - \gamma_e \vec{S})$$

## DIAMAGNETICI

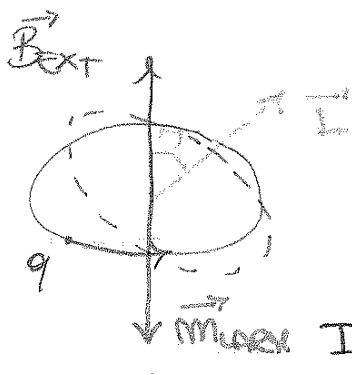
$$(\vec{m}_{RS} \approx 0)$$

### PRECESSIONE DI LARHOR

=> Hanno suscettività magnetica  $\neq 0$ .

Non ci sono momenti di dipolo magnetico

ma il campo magnetico disturba le traiettorie delle cariche elettriche (orbite elettroniche)



Il momento angolare  $\neq$  l'orbita!

$v_{Larmor}$  frequenza del moto di precessione

$$\vec{m}_{Larmor} = I A \vec{u} = q v_{Larmor} \vec{u}$$

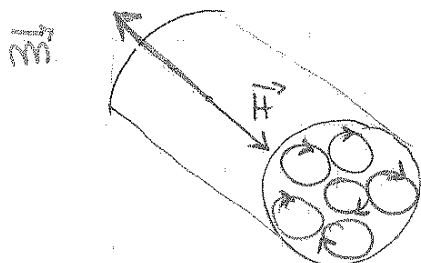
Allo corrente posso associare un momento di dipolo magnetico:

$$\vec{m}_{Larmor} = I A \vec{u} S.$$

$\hookrightarrow$   $\vec{L}$  è opposto al campo esterno!

$$\vec{M} = m \vec{m}_{Larmor}$$

La corrente nelle spire gira in senso opposto  $\rightarrow$   $\neq$  oppongono al campo  $H$ .



$$\vec{M} = -\chi_m H$$

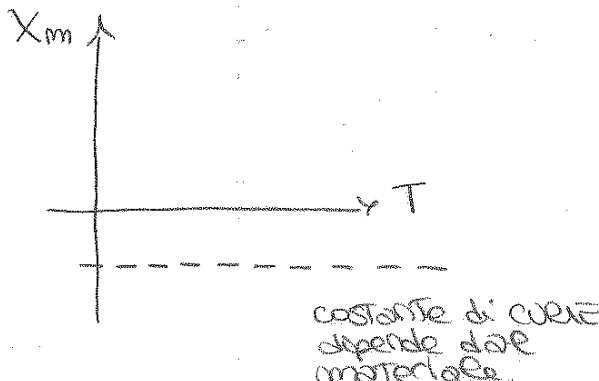
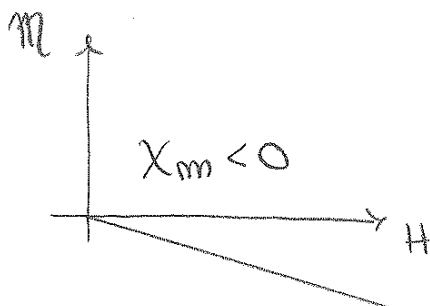
$k_B$  = costante di BOLTZMAN

CAMPO MAGNETICO → cerca di dare ordine, allineare il dipolo con il campo magnetico esterno

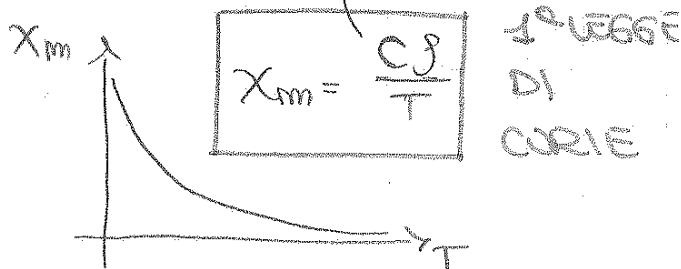
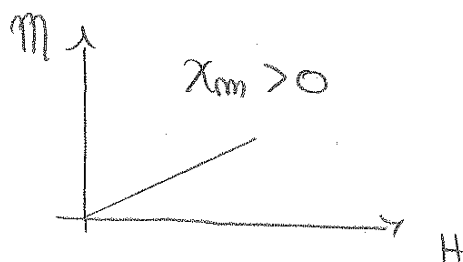
TEMPERATURA → un innalzamento di T crea disordine, tende a disallineare il momento di dipolo.

⇒ 2 Tendenze opposte.

DIAMAGNETICI



PARAMAGNETICI



SOSTANZE	$X_m$
Ar	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Co	$31.2 \cdot 10^{-5}$
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$1.2 \cdot 10^{-3}$

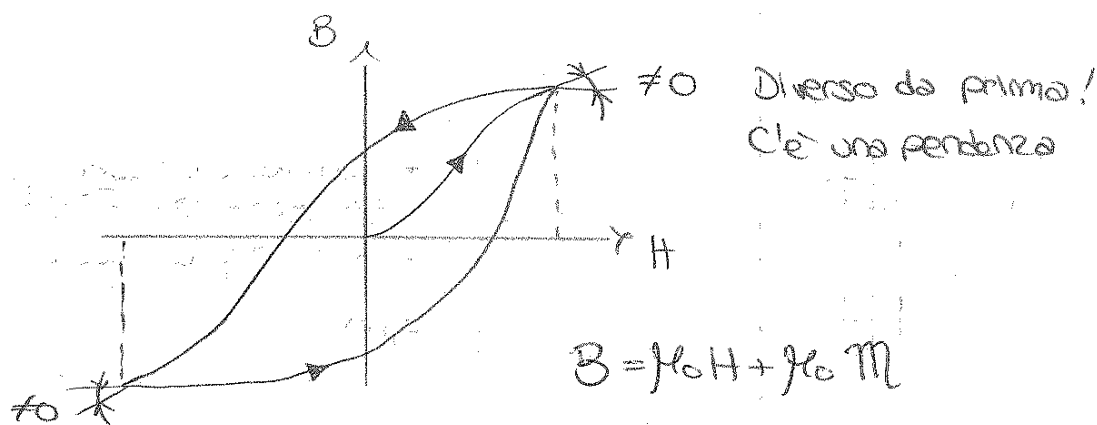
→  
TERRA RARA

$\Delta$ : CURVA DI PENNA MAGNETIZZAZIONE

$M_s$ : MAGNETIZZAZIONE DI SATURAZIONE

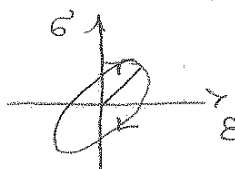
$M_R$ : MAGNETIZZAZIONE RESIDUA

$H_c$ : CAMPO COERCITIVO



$[BdH] = \frac{J}{m^3}$

IN MECCANICA:  $[\sigma \epsilon] = \frac{J}{m^3}$



$X_m$  non è ben definita.

$$X_m = \frac{C_p}{T - T_c} = X_m(T)$$

Anche nei ferromagnetici  $X_m$  dipende dalla temperatura!

Se la temperatura supera  $T_c$  allora il materiale perde le proprietà ferromagnetiche!

$T_c$  = temperatura di Curie  
~~super~~  
 $T > T_c$

# LEGGI DI MAXWELL

1)  $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{u}_m ds = q_{FREE}$  ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{FREE}$  \*

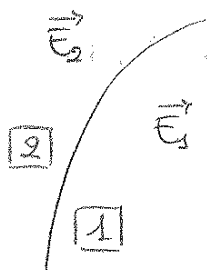
2)  $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_m ds = 0$   $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  \*

3)  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  ,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  \*

4)  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{FREE}$  ,  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{FREE}$  \*

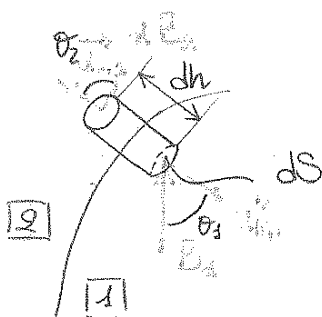
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$\vec{E} = 1/\mu \vec{H}$



$E_{t1} = E_{t2}$

$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$



$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_m ds = 0$

DIVISIONI LINEARI DI  $dS$

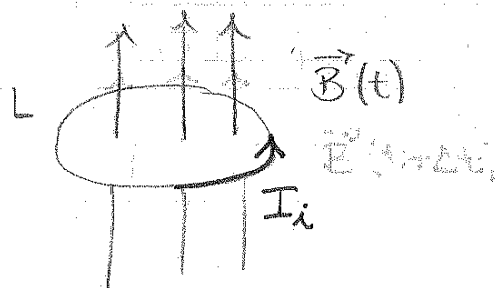
$dh \ll \sqrt{dS}$

$dh$  è molto più piccolo delle dimensioni lineari di  $dS$

$(\vec{B}_1 \cdot \vec{u}_{m1} + \vec{B}_2 \cdot \vec{u}_{m2}) dS = 0$

$(-B_{n1} + B_{n2}) = 0 \rightarrow B_{n1} = B_{n2}$





Il flusso concatenato con il circuito sta diminuendo  
 ⇒ la corrente indotta scorre in modo tale da creare un campo opposto a  $\vec{B}$

$$[E_i] = \text{volte } V = \frac{Nm}{C} = \text{kg m}^2 \text{C}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$[B] = \left[ \frac{F}{qV} \right] = \frac{N}{C \text{ m}} = \text{kg C}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{Tesla } T$$

$$[\Phi_B] = BS = \text{kg m}^2 \text{C}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{Weber } Wb$$

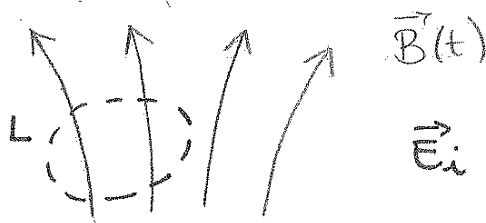
$$\left[ \frac{d\Phi_B}{dt} \right] = \text{kg m}^2 \text{C}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{volte } V$$

$$E_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_m dS$$

(3<sup>a</sup> e Maxwell)

$\vec{E}_i$  NON è CONSERVATIVO



La presenza dell'uno implica l'altro

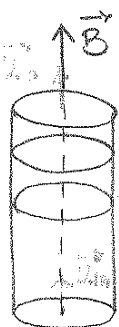
$$\vec{E}_i \rightarrow E_i \xrightarrow{L} I_i = \frac{E_i}{R}$$

$$\Phi_B = \int_S (\mathbf{B} \cdot \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_y dS = B \int_S dS = BS = B\ell x$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ell \dot{x} = B\ell v \rightarrow \mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Esercizio:

Bobina N spire, Area S.



$$B(t) = B_0 \sin(\omega t), \quad \mathcal{E}_i = ?$$

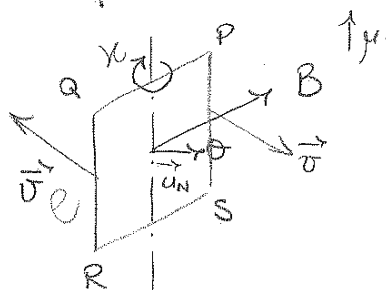
$$\Phi_B = N B(t) S = N B_0 S \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \omega N B_0 S \cos(\omega t)$$

27/11/12

Esempio

(NB)



LATO e.

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{y} \quad \theta = \omega t$$

$$\vec{B} = B \cdot \hat{x}$$

Possiamo definire il campo elettromotore

$$q \vec{E}_{indotto} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$PS \Rightarrow \vec{v} = \omega \frac{x}{2} \vec{u}_N$$

$$OR \Rightarrow \vec{v} = -\omega \frac{x}{2} \vec{u}_N$$

Da qui  $\vec{v} \times \vec{B}$  produce una forza

$$\vec{v} \times \vec{B} \begin{cases} PS: \omega \frac{x}{2} B \sin \theta \vec{u}_P \\ OR: -\omega \frac{x}{2} B \sin \theta \vec{u}_R \end{cases}$$

Sui lati con nessun campo elettrico indotto.

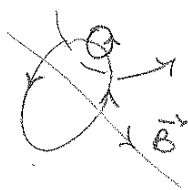
$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{PS} + \int_{OR} = \omega \frac{x}{2} B \sin \theta \left( \int_{PS} \vec{u}_P \cdot \vec{u}_P ds - \int_{OR} \vec{u}_R \cdot (-\vec{u}_R) ds \right) =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \underline{B(t) \Rightarrow E}$$

## AUTOINDUZIONE

Il circuito è la sorgente del campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \frac{d\vec{l} + \vec{U}r}{r^2} \quad \text{legge di Ampère-Laplace}$$



$$\Phi_I = \int_S \vec{B}_I \cdot \vec{u}_N dS \quad \text{ma } B_I \propto I;$$

$$\Phi_I \propto I$$

$$\boxed{\Phi_I = LI} \quad L = \underline{\text{autoinduttanza}}$$

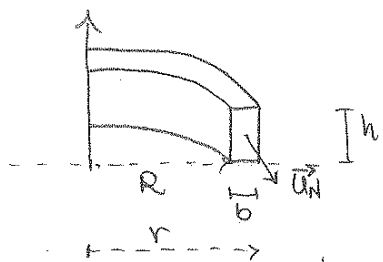
$$[L] = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{Tm}^2 \text{A}^{-1} = \frac{\text{Ns}}{\text{cm}} \text{m}^2 \frac{\text{S}}{\text{C}} = \text{kg m}^2 \text{C}^{-2}$$

$$\text{ma anche } [L] = \Omega \text{s} \Rightarrow [L] = \text{H (Henry)}$$

- L dipende principalmente dalla forma del circuito.

### Esempio NB

Solenoido Toroidale a sezione rettangolare

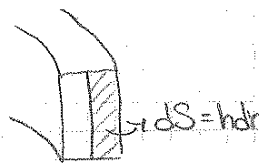


$$\vec{B} = \mu_0 m I \quad \text{se } R \sim r \quad \text{dunque dim sezione trascurabile}$$

$$\text{Altrimenti } \vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} I = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Phi_I = \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_N dS = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \int_R^{R+b} \frac{1}{r} h dr \Rightarrow$$

da moltiplicare x tutte le spire.



$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \log\left(1 + \frac{b}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \log\left(1 + \frac{b}{R}\right) I = \underline{\underline{LI}}$$

23/11/12

$$\Phi_I = L I$$

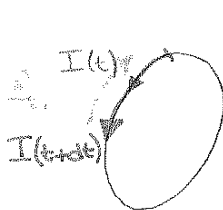
↳ AUTOINDUTTANZA

AUTOFLUSSO

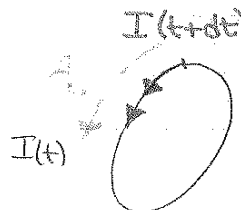
$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_I}{dt}$$

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_I}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

FORZA CONTROELETTRICITRICE  
 si oppone alla corrente (variazione)



I aumenta

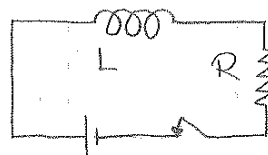


I diminuisce

$\mathcal{E}_L$  si oppone alla variazione di corrente. Se I aumenta  $\mathcal{E}_L$  orientata in verso contrario a questa. Se I diminuisce  $\mathcal{E}_L$  orientata nello stesso verso di questa.

$L \Leftrightarrow m$  "INERZIA"

# CIRCUITO RL



$\mathcal{E} = \text{costante}$

$$L=0, \quad \mathcal{E} = RI$$

legge di OHM in regime stazionario

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

in assenza di induttanza (di inerzia)

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = RI$$

legge di OHM in regime non stazionario

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI, \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = I, \quad I - \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}}{R}} = - \frac{R}{L} dt$$

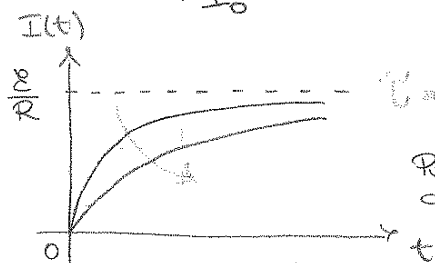
$$\int_0^I \frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}}{R}} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

$$\ln \frac{I - \frac{\mathcal{E}}{R}}{(-) \frac{\mathcal{E}}{R}} = - \frac{R}{L} t, \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

In che modo I tende al val di regime nel circuito con induttanza.

$$I(t) = \frac{I_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$



$\tau = \frac{L}{R}$  COSTANTE DI TEMPO

Po' essere + o meno rapido e dipende dalla costante di tempo

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

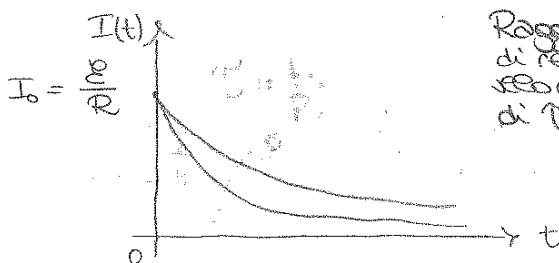
Se riapro e' interruttore del circuito osservo il decadimento della corrente nel circuito.

→ Non agisce più la forza elettromotrice esterna.

$$-L \frac{dI}{dt} = RI, \quad \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt$$

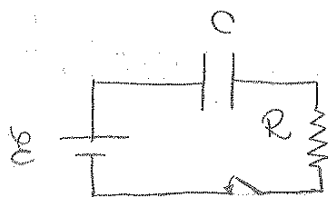
$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$



Raggiungo la corrente di regime più o meno velocemente a seconda di  $\tau$

## CIRCUITO RC



Quando e' interruttore la g.e.m carica subito il condensatore

Se non ci fosse la resistenza R:

$$V = \frac{q}{C} = E \Rightarrow q = CE$$

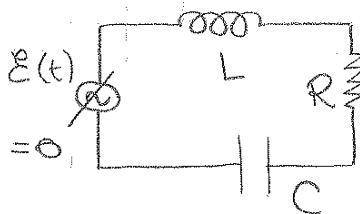
Ma siccome ho la resistenza:

$$E = V_C + V_R = \frac{q}{C} + RI = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

$$EC = q + RC \frac{dq}{dt}$$

# CIRCUITO RLC IN SERIE

(m k c - sistema massa, molla, smorzamento)



$$L \Leftrightarrow m$$

$$R \Leftrightarrow c$$

$$\frac{1}{C} \Leftrightarrow k$$

corrispondenze  
in meccanica

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = L \frac{dI}{dt} + RI + q/C$$

eq. di equilibrio

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

$$\omega_m^2 = \frac{k}{m}$$

frequenza propria  
dell'oscillatore  
armonico

$$I(t) = C e^{st}$$

$$s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$I(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

Posso avere 3 casi possibili (sotto radice)

$$\gamma^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0, & \text{SOVRASMOZZATO} \\ = 0, & \text{SMOZZAMENTO CRITICO} \\ < 0, & \text{SOTTOSMOZZATO} \end{cases}$$

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$R_{CR} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ESERCIZIO RLC

$C = 4 \text{ mF}$

$L = 2,56 \text{ mH}$

$V_c = 100 \text{ V}$

$R = 5 \cdot 10^3 \Omega$  sovrasmorz.

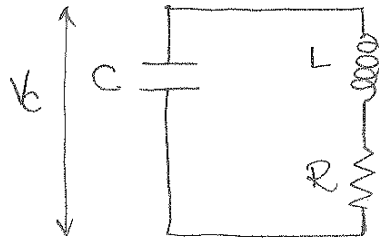
$R = 4,6 \cdot 10^3 \Omega$  circolo RCR

$R = 0,5 \cdot 10^3 \Omega$  sottosmorz.

$I(0) = 0$

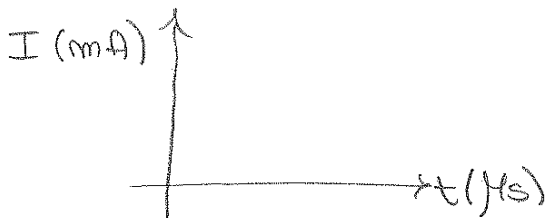
$\dot{I}(0) \neq 0$

$\dot{I}(0) = \frac{V_c}{L}$



$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 31,25 \cdot 10^4 \text{ rad/s.}$

Fare tutti e 3 i casi per i diversi valori della resistenza.



RLC in serie < LIBERO ✓  
FORZATO

NON SMORZATO (caso particolare di sottosmorzato)

$R=0$      $\zeta=0$  ;     $\delta=0$  ,     $\xi=0$

$\omega_d = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

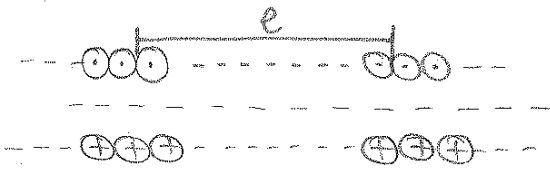
$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$  ,     $\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0$

$s = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \rightarrow \pm i \omega_0$

$I(t) = A e^{i \omega_0 t} + B e^{-i \omega_0 t} =$   
 $= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t =$

Esempio

SOLENOIDE RETTILINEO  $\infty$



$$B = \mu_0 n I, \quad [n] = m^{-1}$$

$$\frac{1}{2} L I^2$$

$$\Phi_{\text{legato}} = BS$$

$$\Phi_e = (nl) BS = nl \mu_0 n I S = \boxed{\mu_0 n^2 S e} I$$

$$L = \mu_0 n^2 S e$$

$$U_m = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 S e) I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 S e$$

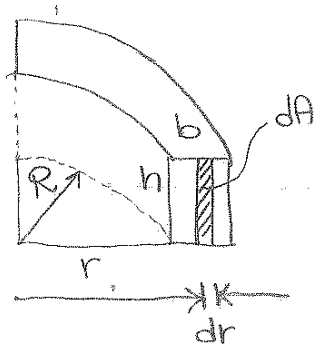
$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S e \rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 S e$$

$$\frac{CVD}{U_m} = U_m$$

$$U_m, \text{SOLENOIDE } \infty = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Esempio

TOROIDE A SEZIONE RETTANGOLARE



$$L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{R} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}, \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$dU_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{(\mu_0 N I)^2}{(2\pi r)^2} \cdot 2\pi r \cdot h dr$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{densità } U_m}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{elem. di volume}}$



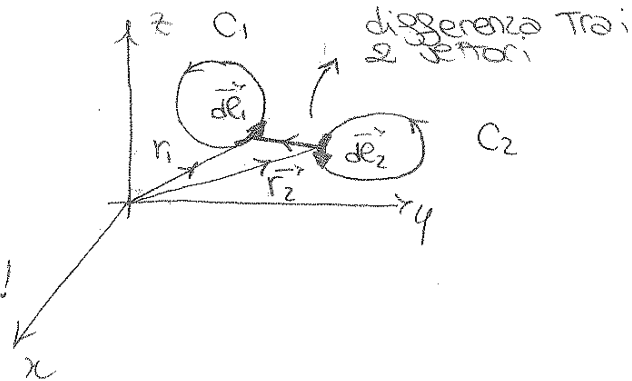
$$\Phi_{21} = \mu_{21} I_2$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = M$$

(Funzione delle proprietà del mezzo, geometria, orientazione relativa delle 2 spire)

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

↑ se scambio 1 con 2 non cambia nulla!



INDUZIONE  $\rightsquigarrow \mathcal{E}$

$$I_1 \rightarrow I_1(t)$$

[ $I_1$  non è stazionaria ma variabile nel tempo]

$$\mathcal{E}_{M2} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\mu_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

MUTUA INDUZIONE  $\rightarrow$  nel 2° circuito

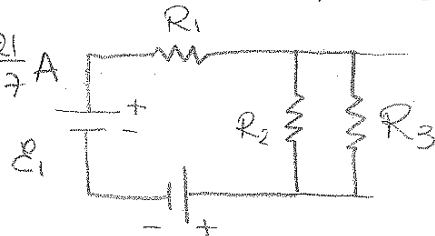
$$I_1(t) \rightarrow B_1(t) \rightarrow \Phi_{12}(t) \rightarrow \mathcal{E}_{M2} = -\mu_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{M1} = -\mu_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

MUTUA INDUZIONE

ES 10 Risultato sbagliato  $\rightarrow$

$$I = \frac{21}{17} A$$



### CONSIDERAZIONI

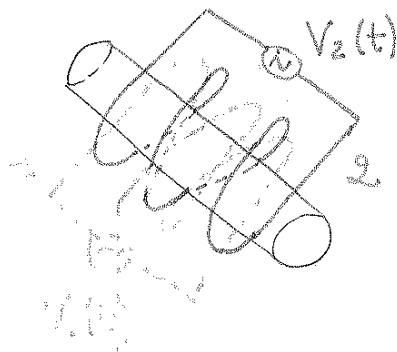
1)  $L = \mu_0 m^2 l S$

$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l^2} l S = \mu_0 N_1^2 \frac{S}{l}$

$L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{S}{l}$

$M = \sqrt{L_1 L_2}$

2)

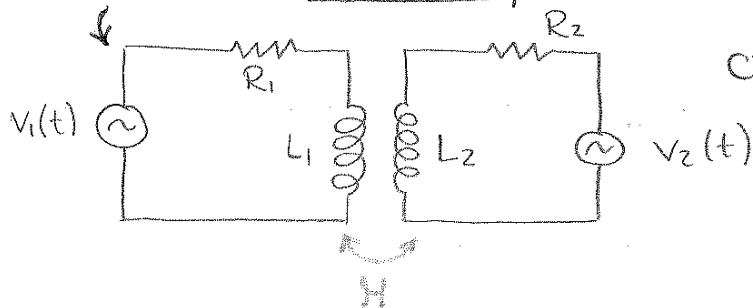


RL

$$\begin{aligned} V_1(t) &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 & + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2(t) &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 & + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

↓  
Cadute in più dovute alla mutua induzione

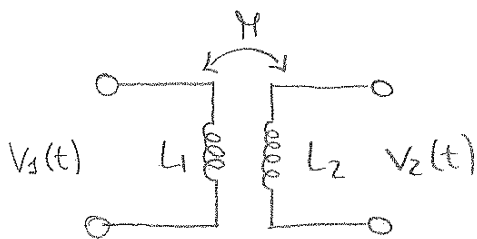
3) CIRCUITO 1 (PRIMARIO)



CIRCUITO 2 (SECONDARIO)

$R_1 \approx 0$

$I_2 = 0$  (c'è aperto)



$V_1(t) \approx L_1 \frac{dI_1}{dt}$

$V_2(t) \approx M \frac{dI_1}{dt}$

$\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$