NUMERO: 527

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Paradisi

MATERIA: Geometria

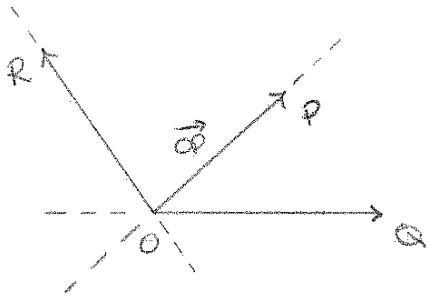
Prof. Cumino

VETTORI DELLO SPAZIO EUCLIDEO

Fisso un punto O

Fisso un punto P

Considero il segmento $\vec{OP}$ orientato da O a P.



OSSERVAZIONE

Fissato O, c'è una corrispondenza biunivoca:

{punti dello spazio P} <=> {segmenti orientati di origine O ed estremo P.}

Fisso un'unità di misura dei seguenti vettori: $\overset{u}{\vdash\!\dashv}$

<u>Def</u>

Un **VETTORE** applicato nel punto O è un segmento orientato

$\vec{v} = \vec{OP}$

$\vec{v}$ è caratterizzato da:

1) <u>DIREZIONE</u> (retta del segmento OP)
2) <u>VERSO</u> (da O a P)
3) <u>MODULO</u> (lunghezza di OP)

Notazione:

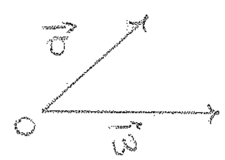
$\vec{v}$, v, $\underline{v}$, $\vec{v} = P - O$

il modulo si indica $|\vec{v}|$, v, $\|\vec{v}\|$

A volte il modulo è detto "<u>norma</u>"

Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono uguali se hanno:

- stessa direzione
- stesso verso
- stesso modulo.



$\vec{w} \neq \vec{v}$

Se scelgo un altro punto di origine come O', cambiando il punto di applicazione, ottengo un sistema analogo ma diverso dal precedente.

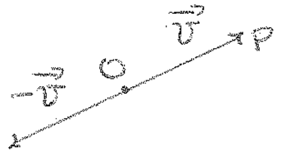
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 167

4• $\vec{v} = \vec{OP}$ essendo $-\vec{v}$ l'opposto di $\vec{v}$; cioè un vettore con:

- stessa direzione e modulo
- verso opposto.

$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$

Sommando un vettore al suo opposto si ottiene il vettore nullo.



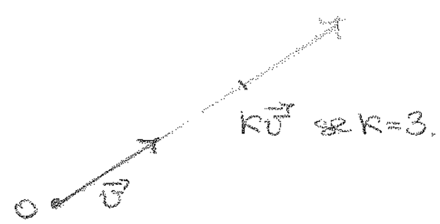
• PRODOTTO SCALARE (vettore per un numero)
↳ detto anche scalare.

Dati $\vec{v} = \vec{OP}$, $k \in \mathbb{R}$

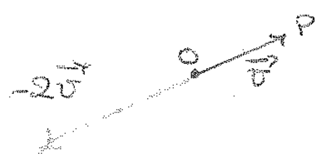
Definizione di $k \cdot \vec{v}$ è un vettore:

- la cui direzione è la stessa di $\vec{v}$
- il verso → lo stesso di $\vec{v}$ se $k > 0$
  ↳ l'opposto di $\vec{v}$ se $k < 0$
- il modulo di $|k \cdot \vec{v}| = |k| \, |\vec{v}|$

se $k = 0$ $\quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ vettore nullo.



Es



$\vec{v} = \vec{OP}$

$k = -2$

VETTORE COMBINAZIONE LINEARE

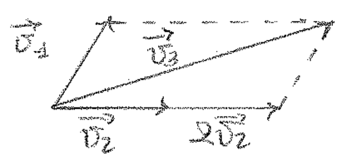
Dati $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_m} \in V$
e $a_1, a_2, \dots a_m \in \mathbb{R}$

$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_m\vec{v_m} \in V$
→ quello costruito è un vettore $\in V$, ottenuto per combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2} \dots \vec{v_m}$ a coefficienti $a_1, a_2 \dots a_m$.

Es

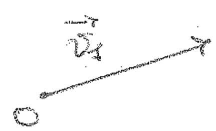
1° coefficienti:
$a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} = \vec{v} + 2\vec{v_2} = \vec{v_3}$.



[Una qualsiasi combinazione lineare di due vettori è un vettore complanare ad essi.]

2° $\forall a_1 \in \mathbb{R}$
$a_1 \cdot \vec{v_1}$ ha la stessa direzione di $\vec{v_1}$ con $a_1 \neq 0$.



Def: Dati $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_m} \in V$.
Si dicono vettori LINEARMENTE DIPENDENTI se uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri.

Nel caso dell'esempio 1 $\vec{v_3} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2}$
$\vec{v_3}$ è linearmente dipendente da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sono linearmente dipendenti.

Dati $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m \in V$

dati $a_1, a_2, \dots a_m \in \mathbb{R}$

$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$

↳ COMBINAZIONE LINEARE

Def: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m$ sono <u>LINEARMENTE DIPENDENTI</u> se uno di essi è combinazione lineare degli altri:

es: $\vec{v}_1 = b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3 + \dots + b_m\vec{v}_m$

per $b_2, b_3, \dots b_m \in \mathbb{R}$ opportuni

$\Leftrightarrow \vec{0} = -\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \dots + b_m\vec{v}_m \Leftrightarrow \vec{0}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m$ di coefficienti $-1, b_2, b_3, \dots b_m$ non tutti nulli.

Def: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m \in V$ sono <u>LINEARMENTE INDIPENDENTI</u> se $\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$ <u>solo</u> con i coefficienti $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0$.

Es:

1) $\vec{v}_1 \in V$ è linearmente dipendente se $\vec{0} = a_1\vec{v}_1$ con $a_1 \neq 0$

$\exists a_1^{-1}$ · $a_1^{-1} \cdot \vec{0} = a_1^{-1}(a_1\vec{v}_1)$

$\vec{0} = \underbrace{(a_1^{-1}a_1)}_{1}v_1$

$\vec{0} = v_1$

v_1 è linearmente indipendente quando $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ sono linearmente dipendenti se $\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ a coefficienti non tutti nulli.

Supponiamo $a_2 \neq 0$; $a_2^{-1}\vec{0} = a_2^{-1}a_1\vec{v}_1 + a_2^{-1}a_2\vec{v}_2$

$\vec{0} = (a_2^{-1}a_1)\vec{v}_1 + \vec{v}_2$;

$\vec{v}_2 = -(a_2^{-1}a_1)\vec{v}_1$

3) $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono linearmente dipendenti se $\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ a coefficienti non tutti nulli

Supponiamo $a_3 \neq 0$; $a_3^{-1}\vec{0} = a_3^{-1}a_1\vec{v}_1 + a_3^{-1}a_2\vec{v}_2 + a_3^{-1}a_3\vec{v}_3$.

$\vec{v}_3 = -a_3^{-1}a_1v_1 - a_3^{-1}a_2\vec{v}_2$

Def: Si dicono <u>VERSORI DEGLI ASSI</u>

$\vec{i} = (1,0,0)$ dell'asse x
$\vec{j} = (0,1,0)$ dell'asse y
$\vec{k} = (0,0,1)$ dell'asse z

$\vec{v} = (x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

SOMMA $\vec{v} = (x,y,z)$
$\vec{w} = (a,b,c)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x,y,z) + (a,b,c) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} =$$
$$= (x+a)\vec{i} + (y+b)\vec{j} + (z+c)\vec{k}.$$

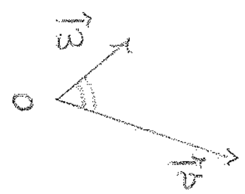
Teorema

le componenti del vettore somma sono ordinatamente la somma delle componenti.

$$(x,y,z) + (a,b,c) = (x+a, y+b, z+c)$$

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO

$$m\,(x,y,z) = m\,(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$
$$= (mx)\vec{i} + (my)\vec{j} + (mz)\vec{k}$$
$$= (mx, my, mz)$$



• ANGOLO
$0 \leq \widehat{\vec{v}\vec{w}} \leq \pi$ prendo l'angolo convesso

Calcolo $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

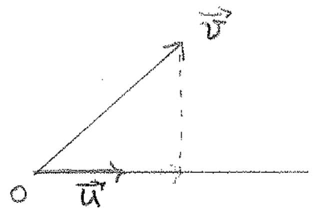
$$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}||\vec{v}|\cos 0 = |\vec{v}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{xx+yy+zz}$$

OSSERVAZIONE

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = (x,y,z)\cdot(1,0,0) = x$$
$$\vec{v}\cdot\vec{j} = y$$
$$\vec{v}\cdot\vec{k} = z$$

PROIEZIONE ORTOGONALE



Def: il vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sulla direzione di $\vec{u}$ è il segmento orientato di origine O come da disegno.

Dati $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$|\vec{v}_{\vec{u}}| = |\vec{v}|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$$
$$\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}_{\vec{u}}|\,\mathrm{vers}\,\vec{u} = (|\vec{v}|\cos\widehat{\vec{u}\cdot\vec{v}})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} =$$

$$= (\vec{u}\cdot\vec{v})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$$

2) $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\wedge$ non è un'operazione associativa

$\Rightarrow$ $\vec{v} = (x, y, z)$ $\quad \vec{w} = (a, b, c)$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

$$= \cancel{xa\vec{i} \wedge \vec{i}} + ya\vec{j} \wedge \vec{i} + za\vec{k} \wedge \vec{i} + xb\vec{i} \wedge \vec{j} + xc\vec{i} \wedge \vec{k} +$$

$$+ \cancel{yb\vec{j} \wedge \vec{j}} + zb\vec{k} \wedge \vec{j} + yc\vec{j} \wedge \vec{k} + \cancel{zc\vec{k} \wedge \vec{k}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} (yc - zb)\vec{i} - (xc - za)\vec{j} + (xb - ya)\vec{k}.$$

<u>Es:</u>

$\vec{u} = (1, 0, 1)$

$\vec{v} = (2, 4, 0)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0-4)\vec{i} - (0-2)\vec{j} + (4-0)\vec{k}$$

$$= (-4, 2, 4).$$

- Dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \in \mathbb{R}$ PRODOTTO MISTO

se $\vec{u} = (x, y, z)$

$\vec{v} = (a, b, c)$

$\vec{w} = (e, f, g)$

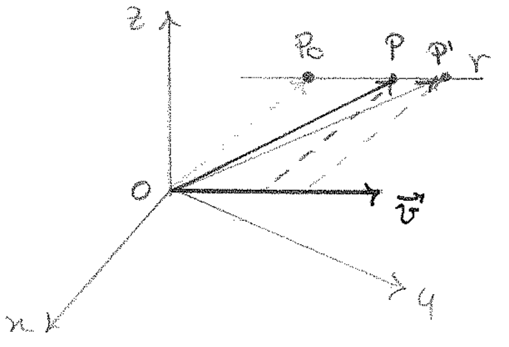
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = (x, y, z) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = x(bg - cf) - y(ag - ce) + z(af - be)$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix}$$

GEOMETRIA ANALITICA

Dato $R(O,x,y,z)$ ortogonale monometrico

① Rappresentare una retta.



Retta r passante per Po e parallela a $\vec{v}$.

$\vec{v}$, $\vec{OP}$ e $\vec{OP_0}$ sono complanari
$\Rightarrow$ uno di essi è combinazione lineare degli altri due.

$P \in r \iff$
$\vec{OP}$ è complanare con $\vec{OP_0}$ e $\vec{v}$

$\boxed{\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v}}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ (coefficiente opportuno)

↳ posso caratterizzare qualsiasi punto della retta r come somma di $\vec{OP_0}$ con un multiplo di $\vec{v}$.

EQUAZIONE VETTORIALE DELLA RETTA r

Dati

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ VETTORE DIRETTORE $\vec{v}(l, m, n)$

generico punto
$P \equiv (x, y, z)$
$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\vec{v}$

→ Traduco da vettori a coordinate cartesiane:
due vettori sono uguali se hanno ordinatamente le stesse componenti.

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \iff \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

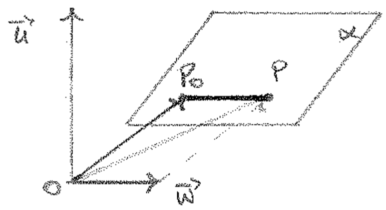
EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA r.

t parametro reale al variare del quale ottengo tutti i punti della retta r.

- Retta nel piano riferito a $R(O, x, y)$
  r passante per $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ parallela $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j}$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

(2) Rappresentare un piano nello spazio riferito a $R(O, x, y, z)$



α = piano passante per P_0 ortogonale a $\vec{u}$

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$P \equiv (x, y, z)$

$P \in \alpha \iff$ segmento $\overline{P_0P} \perp \vec{u}$

Osservo:

$\vec{OP_0} + \vec{w} = \vec{OP}$

$\vec{OP} - \vec{OP_0} = \vec{w}$

$P \in \alpha \iff \vec{w} \perp \vec{u} \iff \vec{OP} - \vec{OP_0} \perp \vec{u}$

$\iff \boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{u} = 0}$ EQUAZIONE VETTORIALE DI α.

→ Traduco da vettori a coordinate:

$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

$\boxed{\alpha : ax + by + cz + d = 0}$ EQUAZIONE CARTESIANA di α.

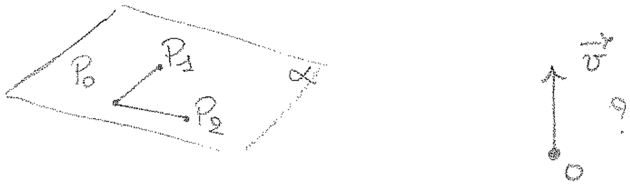
a, b, c coordinate del vettore ortogonale al piano.

EQUAZIONE CARTESIANA di α:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

PRODOTTO MISTO

- Un piano può essere assegnato anche dando:
  3 punti non allineati $P_0, P_1, P_2 \in \alpha$.



Hp: P_0, P_1, P_2 non allineati

$P_0(x_0, y_0, z_0)$
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
} dati $\rightsquigarrow$ devo ottenere un vettore $\vec{v}$ ortogonale al piano.

Se unisco i punti a coppie (P_0P_1 e P_0P_2) ottengo 2 segmenti che giacciono nel piano
$\hookrightarrow$ il segmento $\overline{P_0P_1}$ è parallelo al vettore $\vec{OP_1} - \vec{OP_0}$
il segmento P_0P_2 è parallelo al vettore $\vec{OP_2} - \vec{OP_0}$ } vettori paralleli a α.

$\vec{v} \perp \alpha$, $\vec{v} = (\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) \wedge (\vec{OP_2} - \vec{OP_0}) \Rightarrow$

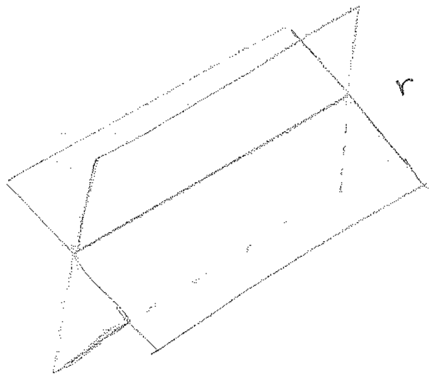
$$\Rightarrow \quad \alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Es: Determinare il piano α passante per $P_0(1,0,0)$ $P_1(0,1,1)$ $P_2(1,1,0)$
Devo controllare se sono allineati o no.

Controllo che $\vec{OP_1} - \vec{OP_0}$ non sia parallelo a $\vec{OP_2} - \vec{OP_0}$ (non abbiano la stessa direzione)

ossia devo controllare che non sono linearmente dipendenti
$\vec{OP_1} - \vec{OP_0} \neq k(\vec{OP_2} - \vec{OP_0})$
$(-1,1,1) \overset{?}{=} k(0,1,0)$ $k \in \mathbb{R}$ NO $\nexists k$

L'intersezione dei due piani è la retta r da cui sono partita.



NB Una retta nello spazio va sempre descritta con 2 equazioni perché è l'intersezione di 2 piani.

Almeno un coefficiente tra ℓ, m, n deve essere <u>non nullo</u>

Es

$\vec{v} = (0, 4, 0)$

$P_0 \ (1, 2, 3)$

Rappresentare la retta r che passa per P_0 e che è // a $\vec{v}$. (parametricamente e in equazioni cartesiane)

$$r: \begin{cases} x = 1 + 0 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 0 \end{cases}$$

• EQUAZIONI PARAMETRICHE.

eq.ni cartesiane? ⇝ devo eliminare il parametro t.

Non posso farlo come prima perché i denominatori sarebbero nulli!

$$\begin{cases} \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{4} & ??! \\ \frac{x-1}{0} = \frac{z-3}{0} & ?!! \end{cases}$$

<u>CONVENZIONE</u>

Se uno dei denominatori (ℓ, m, n) è nullo, allora è nullo il corrispondente numeratore.

$x - 1 = 0 \quad (\ell = 0)$

$z - 3 = 0 \quad (n = 0)$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

• EQUAZIONI CARTESIANE

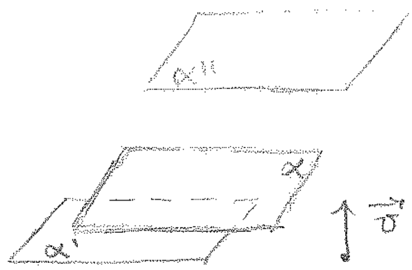
sono due piani che si intersecano lungo la retta.

$\vec{v}$ parallelo alla retta si ottiene facendo il prodotto vettoriale dei due vettori.

$$\vec{v} = (1,-1,1) \wedge (1,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + 0 \\ z = -1 + t \end{cases}$$

PIANI PARALLELI



$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

cerco $\alpha' // \alpha$

$\vec{v} = (a, b, c)$

$\Rightarrow \alpha' \perp \vec{v}$

$\Rightarrow \alpha': ax + by + cz + d' = 0$

se $d' = d$ allora $\alpha' = \alpha$

se $d' \neq d$ allora $\alpha' \neq \alpha$ al variare di d' ottengo tutti i possibili piani paralleli ad α.

Es

$\alpha: x - y + 1 = 0$

Tutti i piani $\alpha' // \alpha$

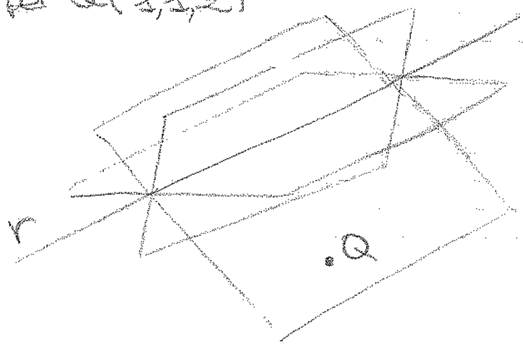
$\alpha': x - y + d' = 0 \quad \forall d' \in \mathbb{R}$ <u>FASCIO IMPROPRIO DI PIANI PARALLELI AD α.</u>

per esempio:

$\alpha': x - y + 100 = 0$ è un piano parallelo al piano dato ma distinto da questo.

PROBLEMA

- Trovare il piano contenente r e passante per $Q(1,1,2)$



Fascio di asse r:

$F: \lambda(x-y+1)+\mu(z-1)=0$

Impongo passaggio per Q

$\lambda(1-1+1)+\mu(2-1)=0$

$\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=-\lambda$

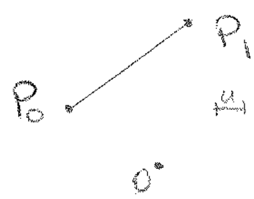
$F: \lambda(x-y+1)+\mu(z-1)=0$

per esempio:

$\lambda=10 \;;\; \mu=-10$

$\Rightarrow \alpha: 10(x-y+1)-10(z-1)=0.$ piano passante per Q.

DISTANZE



$d(P_0,P_1)$ = misura del segmento P_0P_1

$= |\vec{OP_1}-\vec{OP_0}| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$

Formula che mi permette di calcolare la distanza di 2 punti nel piano.

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$P_1(x_1,y_1,z_1)$

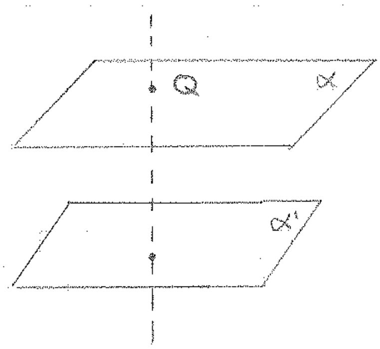
TRA 2 PUNTI

DISTANZE:

- punto - piano
- punto - retta
- piani paralleli
- rette parallele
- rette sghembe

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 167

Distanza tra due piani paralleli



Es

$\alpha: x-y+z=0$

$\alpha': x-y+z+1=0$

$$\boxed{d(\alpha,\alpha') = d(Q,\alpha') \ , \ \forall Q \in \alpha}$$

per esempio $Q(1,1,0)$

$$d(Q,\alpha') = \frac{|1-1+0+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = d(\alpha,\alpha')$$

Distanza punto-retta

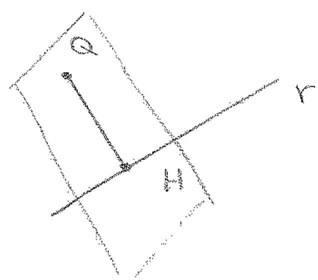
NEL PIANO:

$Q(x_0, y_0)$

$r: ax+by+c=0$

$$d(Q,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

NELLO SPAZIO



$d(Q,r) = d(Q,H)$

$H = r \cap \alpha$

$\alpha =$ piano per $Q \perp r$

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3-t \end{cases}$$

$Q(0,0,1) \notin r \qquad (a,b,c) = (1,2,-1)$

$\alpha: (x-0)+2(y-0)-(z-1)=0.$

Def L'angolo tra due rette r e s è l'angolo tra i due vettori direttori $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$

Ricordando il prodotto scalare: $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}||\vec{v_s}| \cos \widehat{v_r v_s}$

$$\cos \widehat{v_r v_s} = \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}}{v_r v_s}$$

Se cambio il verso di un vettore, cambio di segno il valore del coseno. Quindi:

$$\boxed{\cos \hat{rs} = \pm \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}}{v_r v_s}}$$

Es

Date le rette:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 1+k \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$$

calcolare l'angolo tra r e s.

$\vec{v_r} = (0, -1, 1)$ $\quad \vec{v_s} = (1, 1, 0)$

$$\cos \hat{rs} = \pm \frac{0 - 1 + 1}{\sqrt{0+1+1}\ \sqrt{1+1+0}} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{rs} = \frac{\pi}{3} \text{ oppure } \hat{rs} = \frac{2}{3}\pi$$

le rette r e s sicuramente non sono parallele perché non hanno i vettori proporzionali tra loro

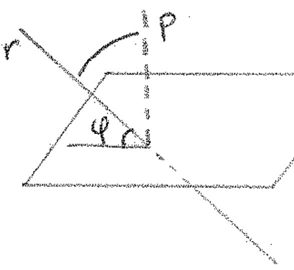
Per verificare se sono incidenti risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1+k \\ -t = k \\ 1+t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 0 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Non è possibile}$$

il sistema non ha soluzione quindi le rette sono incidenti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 167

- Tra una RETTA e un PIANO



Per calcolare l'angolo tra r e α si costruisce la retta p perpendicolare al piano.

$p \perp \alpha \qquad \widehat{rp} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (complementare di φ)

$$\cos \widehat{rp} = \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{r\alpha} = |\cos \widehat{rp}| = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{v_r v_s}$$

Es

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad \alpha: x+y=0 \qquad \widehat{r\alpha} = ?$$

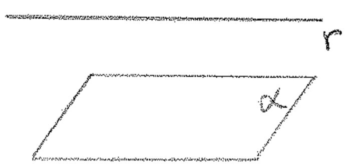
ricaviamo

$\vec{v}_r = (0, 1, -1) \qquad \vec{v}_p = (1, 1, 0)$

applicando la formula:

$$\operatorname{sen} \widehat{rs} = \frac{|0+1+0|}{\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{r\alpha} = \frac{\pi}{6}$$

- Se la retta è PARALLELA al piano:



Svolgendo lo stesso procedimento otterrò che:

$\widehat{r\alpha} = 0$ oppure $\widehat{r\alpha} = \pi$

Es

$$\alpha: x+y=0 \qquad r: \begin{cases} x = 1+k \\ y = 2-k \\ z = 3+3k \end{cases} \qquad \widehat{r\alpha} = ?$$

$\vec{v}_r = (1, -1, 3)$

$\vec{v}_s = (1, 1, 0)$

$$\operatorname{sen} \widehat{r\alpha} = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{v_r \cdot v_s} = 0 \Rightarrow \widehat{r\alpha} = 0$$

Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{vettore colonna} \in \mathbb{R}^{4,1}$$

~ è sempre una quaterna ordinata di numeri.

$$tN = (1\ 1\ 0\ 1) \in \mathbb{R}^{4,1}$$

OPERAZIONI

Date le matrici

$A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij})$

- MATRICE SOMMA

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

ES

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \pi-1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ

1) $A+B = B+A$ commutativa
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ associativa
3) $\exists\, 0$ matrice nulla $/ \forall A,\ A+0 = A$
   $0 = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0\ \forall ij$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$
4) $\forall A \neq 0,\ \exists -A$ **matrice opposta** $/ \ A + (-A) = A - A = 0$
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- MATRICE PRODOTTO

$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad A = (a_{ij})$

$kA = (k a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

ES

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\pi \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

– se $k = 0$

$$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{MATRICE NULLA}$$

– se $k = -1$

$$-1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\pi \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{MATRICE OPPOSTA}$$

Es

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 0+2 & 1+0 \\ 3+8 & 0+4 & 3+0 \\ 5+12 & 0+6 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 3 \\ 17 & 6 & 5 \end{pmatrix} \neq AB.$$

PROPRIETÀ

In generale il prodotto righe per colonne non è commutativo

Es

Date

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

} MATRICE IDENTITÀ
ha 1 nella diagonale principale, nelle altre posizioni ha 0.

$$CI = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = IC = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = C$$

La matrice identica (I) è elemento neutro del prodotto di righe per colonne.

Ci sono, quindi, dei casi però in cui il prodotto è commutativo oppure non si può svolgere.

Es

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \qquad CH \nexists$$

PROPRIETÀ

Date A, B, C soddisfando tutte le condizioni del prodotto:

1) $A(B+C) = AB + AC$

2) $A(BC) = (AB)C$

3) $\forall k \in \mathbb{R}, \; k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Def Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{m,m}$, si dice **DIAGONALE** se ha coefficienti non nulli solo sulla diagonale principale.

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Def Una matrice **TRIANGOLARE ALTA** è una matrice quadrata A che ha coefficienti non nulli solo sulla diagonale principale e sopra la diagonale principale.

Es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

POTENZE DI MATRICI

Data una matrice quadrata A:

$A^2 = A \cdot A$ generalizzando A^m

Es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicazioni di matrici per la risoluzione di SISTEMI LINEARI

le incognite compaiono nelle equazioni lineari

Es

sistema di equazioni lineari

$$* \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow$$

SISTEMA LINEARE
m equazioni
n incognite
a_{ij} e $b_i \in \mathbb{R}$

Generalmente a un sistema si associa una o più matrici.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow$$ MATRICE dei COEFFICIENTI

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \Rightarrow$$ MATRICE o colonna dei TERMINI NOTI

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1} \Rightarrow$$ VETTORE colonna delle INCOGNITE

il sistema lineare sarà uguale a $\boxed{AX = B} \Leftrightarrow *$

↳ EQUAZIONE MATRICIALE

(5) $$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\quad\quad}_{A}$

Applico il metodo di sostituzione dal basso verso l'alto.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 = 0 \\ 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ -2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

la soluzione è $(0,0,0,1)$

PROBLEMI

1) Dato un sistema lineare risolverlo (se è possibile)
$\Rightarrow$ cioè trovare le soluzioni.

2) Dato un sistema lineare dire se esistono soluzioni e dire quante sono.

Teorema

Dato un sistema lineare di matrice $(A|B)$ con A quadrata $n \times n$ triangolare alta con i coefficienti della diagonale principale non nulli $\Rightarrow$ esiste una sola soluzione.

(6) $$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

la A è una MATRICE a **SCALA**

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_5 \\ x_3 - 2x_5 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 + 2x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

le soluzioni saranno $(1+2x_5,\ x_2,\ 1+2x_5,\ +x_5)$ quindi ho $\infty^2 \Leftrightarrow$ 2 coniugate libere

Teorema

Un sistema (A/B) con $A \in \mathbb{R}^{r,m}$ a scala con r righe non nulle è risolubile con ∞^{m-r} soluzioni

ESEMPIO corollario

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Def il numero delle righe non nulle di una matrice a scala si dice **RANGO** $rg(A) = r$

(A/B) non a scala ? Non abbiamo nessuna procedura per discuterlo

Def (A/B) e (A'/B') nelle incognite $x_1, x_2, \dots x_m$ sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

- Dato (A/B) qualsiasi, cerco (A'/B') equivalente tale che (A'/B') sia a scala.
  ↳ sono + facili da risolvere e da discutere.

(1) Se cambio l'ordine delle righe di (A/B) trovo un sistema (A'/B') equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(A/B) \longrightarrow (A'/B')$$

(1) (2) (3) } TRASFORMAZIONI ELEMENTARI sulle righe di una matrice.

$M \in \mathbb{R}^{m,n}$ qualsiasi, applico le trasformazioni elementari posso ottenere M' ridotta a scala.
Comunque sia ottenuta M' ho sempre

$$\boxed{rg(M') = rg(M) = r}$$

(2) moltiplico $\because$ un'equazione per $K \neq 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad K = 2.$$

(3) Sommare un'equazione a un'altra moltiplicata per $K \neq 0$

$$K = -1 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ (x_1 - 2x_2) - (x_1 + x_2) = 3 - 1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 167

Proposizione

$$(A|B) = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m = \beta \end{cases}$$

$$(A'|B') \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = \alpha \\ (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) + k(b_1x_1 + \dots + b_mx_m) = \alpha + k\beta \end{cases} \quad \text{con } k \neq 0.$$

Questi due sistemi sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE

1) Se $(c_1, c_2 \dots c_m)$ è soluzione di $(A|B)$ sostituisco in $(A'|B')$ e osservo che è soluzione anche di $(A'|B')$

2) Se $(d_1, d_2 \dots d_m)$ è soluzione di $(A'|B')$ cioè:

$$\begin{cases} a_1d_1 + a_2d_2 + \dots a_md_m = \alpha \\ (\underbrace{\cancel{a_1d_1 + \dots + a_md_m}}_{=\alpha}) + k(b_1d_1 + \dots + b_md_m) = \cancel{\alpha +} k\beta \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{k}(b_1d_1 + \dots + b_md_m) = \cancel{k}\beta$ (divido per k perché x ipotesi $k \neq 0$.)

$\Rightarrow (d_1, d_2 \dots d_m)$ è soluzione dell'equazione $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m = \beta$.

$\Rightarrow$ è soluzione del sistema di partenza.

Es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array}$$

Discutere con riduzione a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti A' è a scala.
La matrice completa $(A'|B')$ non è a scala.

$\Rightarrow (A'|B')$ non è risolubile

$\Rightarrow (A|B)$ è INCOMPATIBILE

Se $h \neq -1$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{A'} \qquad rg(A') = 3$$

compatibile $\forall h \neq -1$

∞^{4-3} soluzioni $\Rightarrow$ 1 incognita libera

CASO $h=2$

indicatore

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right)}_{A'}$$

$\rightarrow$ le righe non nulle di una matrice a scala sono linearmente indipendenti

ES $a_1(2,1,-2,1) + a_2(0,0,3,0) + a_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} 2a_1 + 0 + 0 = 0 \\ a_1 + 0 + 0 = 0 \\ -2a_1 + 3a_2 + 0 = 0 \\ a_1 + 0 + a_3 = 0 \end{cases}$$

unica possibilità $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ le 3 righe sono linearmente indipendenti.

Le colonne sono linearmente indipendenti oppure no? NO perché per esempio la I e la II sono una il doppio dell'altra! quindi sono linearmente dipendenti.

$\Rightarrow$ Però le colonne con indicatore sono linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ le colonne senza indicatore sono linearmente dipendenti da quelle che precedono

VERIFICA:

$$a_1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

prendo le colonne con indicatore e vedo se effettivam. sono l.d.

$$\begin{cases} 2a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \\ 0 + 3a_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

unica possibilità $\Rightarrow$ l.i.

soluzioni?

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 167

TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI

Dato il sistema lineare $(A|B)$

1. se $rg(A) < rg(A|B)$ allora $(A|B)$ è incompatibile.

$(A|B) \rightarrow (A'|B')$
riduco a scala.

$rg(A) = rg(A')$
$rg(A|B) = rg(A'|B')$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{A'} \quad B' \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\bullet} \end{array}\right) \end{array}$$

vediamo cosa significa $rg(A') < rg(A'|B')$

2. Se $rg(A) = rg(A|B)$ allora $(A|B)$ è compatibile e ha $\infty^{n-rg(A)}$ soluzioni

NB $\Longrightarrow$ le incognite libere sono in corrispondenza delle colonne senza indicatore in una qualsiasi riduzione a scala A'.

$$\begin{array}{ccc} rg(A) & = & rg(A|B) \\ \| & & \| \\ rg(A') & = & rg(A'|B') \end{array} \quad \text{per } (A'|B')$$

$\rightsquigarrow$ # colonne l.i. di A' = # colonne l.i. di $(A'|B')$
$\Longleftrightarrow$ B' è l.d. dalle colonne di A'.

Es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

Sistema omogeneo $AX = 0$, per Teorema di R-C $(A|B)$ è incompatibile se $rg(A) < rg(A|B)$.

$$(A|0) \rightarrow (A'|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A') = 3$
$rg(A'|0) = 3$

In generale un sistema omogeneo è sempre compatibile perché il rango della matrice dei coeff è sempre uguale al rango della matrice completa. (la colonna dei termini noti che aggiungo sono sempre tutti 0)

Es

$AX = B$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad (A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$A'X = 0$ ha soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0 + 0 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}x_2 ; x_2 , 0 , 0\right) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

$A'X = B'$ ha soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - \frac{2}{3} - 1 = 0 \ ; \ 2x_1 = -x_2 + \frac{2}{3} + 1 \\ x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} , x_2 , 1/3 , -1\right) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, x_2 , \frac{1}{3}, -1\right) = \left(-\frac{1}{2}x_2, x_2, 0, 0\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, -1\right)$$

↑ verifichiamo che questa quaterna inserita x far quadrare i calcoli sia davvero soluzione di $A'X = B'$.

EFFETTIVAMENTE LO E'

$\boxed{\text{Data } A \text{ quadrata } m \times m \text{ esiste } A^{-1} \Leftrightarrow rg(A) = rg(A/I)}$

$$(A/I) = \left(\begin{array}{c|cc} \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

determinante $\neq 0$

NB

SPAZI VETTORIALI $\mathbb{R}^m$

PAG 53 ALGEBRA LINEARE

$\mathbb{R}^m = \{(a_1, a_2, \dots a_m) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

→ SOMMA

$(a_1, a_2 \dots a_m) + (b_1, b_2 \dots b_m) = (a_1+b_1, a_2+b_2 \dots a_m+b_m)$

→ PRODOTTO PER UN NUMERO REALE

$k(a_1, a_2 \dots a_m) = (ka_1, ka_2 \dots ka_m)$

PROPRIETÀ

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3) $\exists\, \vec{0} = (0, 0 \dots 0)$ tale che $\forall \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

4) $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$, $\exists\, -\vec{v}$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

$-\vec{v} = (-a_1, -a_2 \dots -a_m)$ se $\vec{v} = (a_1, a_2 \dots a_m)$

5) $\forall k, m \in \mathbb{R}$ $\quad k(m\vec{v}) = (km)\vec{v}$

6) $1\vec{v} = \vec{v}$

7) $(k+m)\vec{v} = k\vec{v} + m\vec{v}$

8) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

UNO SPAZIO VETTORIALE NON È MAI VUOTO, CONTIENE SEMPRE ALMENO UN ELEMENTO NEUTRO.

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sottoinsieme si dice sottospazio vettoriale se:

1. V non vuoto $\quad [0 \in V]$
2. $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} + \vec{v} \in V$
3. $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V$ $\quad k\vec{v} \in V$.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

E è un piano che passa per l'origine

(se è un sottospazio in generale contiene il vettore nullo)

PROPRIETÀ

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ sottospazio $\Rightarrow \vec{0} \in V$

DIMOSTRAZIONE

$\vec{v} \in V$ a piacere

o $\vec{v} = \vec{0}$ o $\vec{v} \neq \vec{0}$.

se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\exists -\vec{v} \Rightarrow \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \in V$.

$\Rightarrow$ Dati $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_p \in \mathbb{R}^m$

$V = \{ a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_p\vec{v}_p \mid \forall a_i \in \mathbb{R} \}$

$= \{$ tutte le combinazioni lineari di $\vec{v}_1, \vec{v}_p \}$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

+ DIMOSTRAZIONE GENERALE vedi internet

Def $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p$ si dicono GENERATORI del sottospazio V.

$V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$

In particolare $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ è sottospazio $\{\vec{0}\} = V$.

Es

$\mathbb{R}^m$, dati $\vec{u}, \vec{v}$

$V = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v})$

$W = \mathcal{L}(\vec{u}, 2\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v})$

$V \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} W$?

$W \subset V$ perché i generatori di W $\vec{u}, 2\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \in V$.

viceversa dati $\vec{z} \in V$, $\vec{z} \in W$?

$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$ per definizione

? è anche uguale a $a_1\vec{u} + a_2 2\vec{u} + a_3\vec{v} + a_4(\vec{u}+\vec{v})$

basta che $a_1 = a$ $a_2 = 0$ $a_3 = b$ $a_4 = 0$.

$\Rightarrow z \in W$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 167

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \end{cases}$$

$$S' = \{(2y, y, -3y)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$= \{ y(2, 1, -3) \}$$

$\Rightarrow$ un generatore è $(2, 1, -3)$

se ne volessi di più, vado a cercare dei vettori $\in$ all'insieme S. che abbiano almeno una direzione uguale a quel generatore.

$\mathbb{R}^m$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

dato $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p)$

$\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12} \dots a_{1m})$

$\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22} \dots a_{2m})$

$\vdots$

$\vec{v}_p = (a_{p1}, a_{p2} \dots a_{pm})$

Costruisco una matrice inserendo questi vettori:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2m} \\ \vdots \\ a_{p1}, a_{p2} \dots a_{pm} \end{pmatrix} \qquad M \in \mathbb{R}^{p,m}$$

i vettori riga sono i generatori del nostro sottospazio V.

V = spazio delle righe di M, $R(M)$

se riduco a scala M (per righe) $\rightsquigarrow$ uso le trasformazioni elementari:

$$\left.\begin{array}{ll} R_i \longleftrightarrow R_j & \\ R_i \longleftrightarrow kR_i & k \neq 0. \\ R_i \rightarrow R_i + kR_j & \end{array}\right\}$$

trasformazioni che non alterano le informazioni sui generatori.

$\Longleftrightarrow$ lo spazio $R(M)$ non cambia.

ottengo M' ridotta a scala con le righe non nulle linearmente indipendenti

$V = R(M) = R(M')$

ES

4) BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$ è $\mathcal{B} = \{(1,0,0 \dots 0), (0,1,0 \dots 0) \dots \dots (0,0, \dots 0,1)\}$

5) 3bis) base canonica in $\mathbb{R}^3$ è $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

PROPRIETÀ

Le componenti di un vettore $\vec{v} \in V$ rispetto a una base $\mathcal{B}_V$ sono univocamente determinate

DIMOSTRAZIONE Per assurdo

$\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r)$

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \dots + a_r\vec{v}_r$

$\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 \dots + b_r\vec{v}_r$

$\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + \dots (a_r - b_r)\vec{v}_r$

$\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ sicuramente

Abbiamo supposto male!. Le componenti sono univocamente determinate. $\leftarrow$ $\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \dots \\ a_r - b_r = 0. \end{cases}$

Dato V e $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k)$
ogni altra base di V ha k elementi

Def

> k si chiama DIMENSIONE del sottospazio V
> k = dim V.
> (il sottospazio nullo ha dimensione k = 0.)

+ DIMOSTRAZIONE vedi internet

Si dice che il K-spazio vettoriale V ha dimensione n se V ha una base costituita da n elementi.

- Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha almeno una base, e quindi una dimensione, che è un numero intero.

$\Rightarrow$ Per calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale V basta trovare una base di V e contarne gli elementi.

NB pag 107

$(y-z, y, z, y+z) = y(1,1,0,1) + z(-1,0,1,1)$

① il generico vettore di V è combinazione lineare di $(1,1,0,1)$ e
② $(-1,0,1,1)$

$(1,1,0,1)$ è linearmente indipendente da $(-1,0,1,1)$

$(1,1,0,1) \neq K(-1,0,1,1)$

$\Rightarrow B_V = ((1,1,0,1),(-1,0,1,1))$ [BASE]

3) $W \subseteq \mathbb{R}^4$

$W = \{(x,y,z,t) \mid x+y-2z-t=0\}$

Trovare una base B_W

soluzioni

$t = x+y-2z$

$\to (x,y,z, x+y-2z)$ tutte le poss soluzioni al variare di x,y,z.

$\boxed{x=1}, y=0, z=0 \to (1,0,0,1)$

$x=0, \boxed{y=1}, z=0 \to (0,1,0,1)$

$x=0, y=0, \boxed{z=1} \to (0,0,1,-2)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sono linearmente indipendenti.

$B_W = ((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-2))$

4) $V \subseteq \mathbb{R}^3$

$V = \mathcal{L}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ con $\vec{u} = (0,1,2)$

$\vec{v} = (1,1,0)$

$\vec{w} = (1,2,2)$

Trovare B_V

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ è una base?

① sono generatori

② ?

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, per quali a,b,c?

$$x_1(a_{11}\vec{w}_1 + \dots + a_{1h}\vec{w}_h) + x_2(a_{21}\vec{w}_1 + \dots + a_{2h}\vec{w}_h) +$$
$$\dots\dots + x_k(a_{k1}\vec{w}_1 + \dots + a_{kh}\vec{w}_h) = \vec{0}.$$

$$(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \dots + x_ka_{k1})\vec{w}_1 + \dots + (x_1a_{1h} + x_2a_{2h} + \dots$$
$$\dots + x_ka_{kh})\vec{w}_h = \vec{0}$$

combinazione lineare dei $\vec{w}_i$

$\vec{w}_i$ sono linearmente indipendenti perchè sono basi

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{21} + \dots + x_ka_{k1} = 0 \\ \dots \\ \dots \\ x_1a_{1h} + x_2a_{2h} + \dots + x_ka_{kh} = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo

k incognite, matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1h} & \dots & a_{kh} \end{pmatrix}$$

$rg(A)$

$A \in \mathbb{R}^{h,k}$ con $h<k$.

sicuramente le $rg(A) \leq \min(h,k) \overset{\text{per hp } h<k}{<} k$

$\Rightarrow$ il sistema ha ∞ soluzioni, non solo la soluzione nulla. *

** contraddizioni $\Rightarrow$ k non è $>h$

suppongo $h>k$ stesso ragionamento

Esempio

Trovare base e dimensione di $V = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$

$\vec{u} = (1, 2, 0, 3)$

$\vec{v} = (2, 0, 1, 1)$

$\vec{w} = (0, 1, 2, 1)$

$\vec{t} = (2, 1, 3, 2)$

completare la base trovata per ottenere base di $\mathbb{R}^4$, che contenga la base trovata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 167

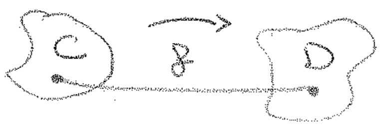
MATRICI e FUNZIONI

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

<u>associo una funzione f_A</u>

una funzione $f : C \to D$.

?



$\forall c \in C \quad f(c) = d \in D.$

$c \mapsto d.$

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

dominio $= \mathbb{R}^4$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^4, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

PER DEFINIZIONE

$$f_A(\vec{v}) \underset{def}{=} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z + t \\ 3y + z \\ x + 2y + t \end{pmatrix}$$ vettore colonna $\in \mathbb{R}^3$.

<u>PROPRIETÀ</u>

1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$

2) $A(k\vec{v}) = kA\vec{v}, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

Traduzione

1) $f_A(\vec{v} + \vec{w}) = f_A(\vec{v}) + f_A(\vec{w})$ l'immagine della somma di due elementi di V è sempre uguale alla somma delle immagini

2) $f_A(k\vec{v}) = k f_A(\vec{v})$ l'immagine del prodotto di un n. reale k per un elemento x di V è sempre uguale al numero k moltiplicato per l'immagine di x.

$\to f_A(x, y, z, t) = (2x + z + t, \; 3y + z, \; x + 2y + t)$ [ho scritto la stessa cosa di prima]

espressioni lineari in $xyzt$

<u>casi particolari</u> ?

- $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$

  $f_A(\vec{v}) = (4, 4, 4)$

- $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$

  $f_A(\vec{u}) = (2, 0, 1)$

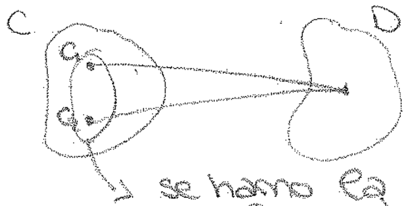
- $\vec{w} = (0, 0, 1, 0)$

  $f_A(\vec{w}) = (1, 1, 0)$

le colonne di A sono le immagini

<u>Def</u>: La funzione f_A si dice APPLICAZIONE LINEARE.

Def: una funzione f è **iniettiva** se $f(c_1) = f(c_2) \Rightarrow c_1 = c_2$



→ se hanno la stessa immagine significa che coincidono.

APPLICAZIONI INIETTIVE ...

fra 3 pag.

f_A è iniettiva? NO perché c'è un Teorema* che dice che
f_A iniettiva $\Leftrightarrow \ker f_A = \{\vec{0}\}$

$$\ker(A) = \text{soluzioni di } A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ker(A)$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1
(perché ho una incognita libera! $4 - rg(A) = 1$)
↳ n° incognite − rango

$\rightsquigarrow$ $\boxed{A \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow \dim \ker(A) = n - rg(A)}$

Esempio APPLICAZIONE LINEARE

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

base canonica $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}((\overset{i}{1,0}), (\overset{j}{0,1})) = (\vec{i}, \vec{j})$ vettore colonna

So che $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = f_A(\vec{i})$; $\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = f_A(\vec{j})$
I colonna II colonna

$\boxed{f_A(\vec{i}) = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j}}$? il versore $\vec{i}$ viene trasformato in questo nuovo vettore

$f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$

$f(\vec{v}) = b_1\vec{u_1} + b_2\vec{u_2} + \dots + b_m\vec{u_m}$

In particolare conosco dai dati le immagini dei vettori di $B_{\mathbb{R}^n}$

$f(\vec{e_1}) = a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2} + \dots + a_{m1}\vec{u_m}$

$f(\vec{e_2}) = a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + \dots + a_{m2}\vec{u_m}$

$\vdots$

$f(\vec{e_n}) = a_{1n}\vec{u_1} + a_{2n}\vec{u_2} + \dots + a_{mn}\vec{u_m}$

So che le colonne di A sono le immagini dei vettori di $B_{\mathbb{R}^n}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Verifica

Provo a calcolare $f_A(\vec{e_1}) = A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = 1\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + 0\vec{e_n}$

$f_A(\vec{e_n}) = \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$

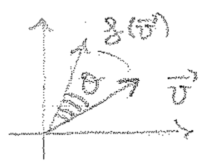
$f_A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = f(\vec{v})$

Esempio

Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

f = rotazione in senso antiorario di un angolo θ

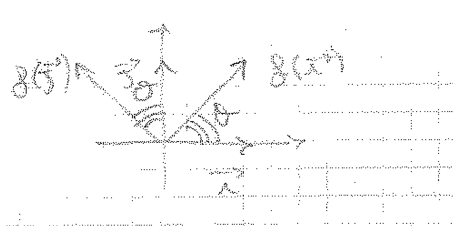
Trovare la matrice associata a f rispetto alla base $B_{\mathbb{R}^2} = (\vec{i}, \vec{j})$



Devo ricavare $f(\vec{i}) = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$

$f(\vec{j}) = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

?



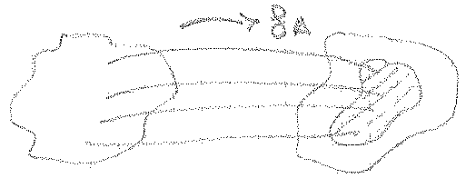
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 167

$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Def Si dice IMMAGINE di f_A

$\mathrm{Im} f_A = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^m \,/\, \text{esiste un } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ con } f_A(\vec{v}) = \vec{w} \}$.



$\mathrm{Im} f_A \subseteq \mathbb{R}^m$

PROPOSIZIONE

$\mathrm{Im} f_A$ ($= \mathrm{Im}(A)$) è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots C_n)$$

DIMOSTRAZIONE

$C_i = f_A(\vec{e_i})$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f_A(\vec{v}) = f_A(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \dots a_n\vec{e_n}) =$
$= a_1 f_A(\vec{e_1}) + a_2 f_A(\vec{e_2}) + \dots + a_n f_A(\vec{e_n})$

per linearità

combinazione lineare dei vettori $f_A(\vec{e_i})$

$\rightsquigarrow$ combinazione lineare delle colonne C_i.

Le colonne C_i sono i generatori dell'immagine della nostra matrice $\Rightarrow$ TESI.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 167

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \rightarrow 2R_2 - R_1$ $\qquad$ $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$

$R_3 \rightarrow 2R_3 - R_1$

$rg(A) = 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

soluzioni $(-x_3 - 2x_4 ; -2x_3 ; x_3 ; x_4)$ al variare di $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$Ker(A) = \{(-x_3 - 2x_4, -2x_3, x_3, x_4)\} \quad \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

dim Ker(A) = numero incognite libere

$= n - rg(A) = 4 - 2 = 2$.

$x_3 = 1 \quad x_4 = 0$ [imporre un'incognita libera = 1 e le altre (in questo caso un'altra) = 0]

$\hookrightarrow (-1, -2, 1, 0)$

$x_3 = 0, \; x_4 = 1 \longrightarrow (-2, 0, 0, 1)$

una $\mathcal{B}_{Ker(A)} = ((-1, -2, 1, 0); (-2, 0, 0, 1))$

$Im(A) = \mathcal{L}(c_1, c_2, c_3) \subseteq \mathbb{R}^3$

dim $Im(A) = rg(A) = 2$

una $\mathcal{B}_{Im(A)} = \left(\underset{2^a}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{3^a}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right)$

3) f_A è iniettiva? NO

iniettiva $\Leftrightarrow Ker(A) = \{\vec{0}\}$

suriettiva $\Leftrightarrow Im(A) = \mathbb{R}^3$.

f_A è suriettiva? NO

perché dim $Im(A) = 2 < 3$

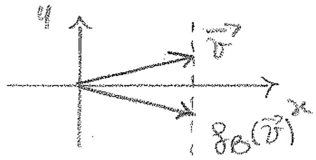
NB

Esempio

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

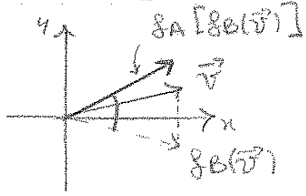
Def $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ da uno spazio in se stesso si dice ENDOMORFISMO

f_A = rotazione in senso antiorario di $\theta = \pi/4$
f_B = simmetria rispetto all'asse x.



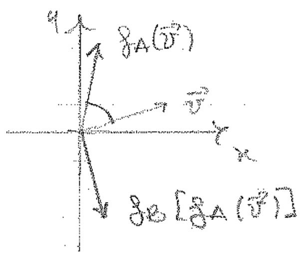
1) Trovare matrice B rispetto a $(\vec{i}, \vec{j})$
2) comporre $f_A \circ f_B$ oppure $f_B \circ f_A$

$\boxed{f_A \circ f_B}$



$$f_A \circ f_B(\vec{v}) \underset{def}{=} f_A[f_B(\vec{v})]$$

$\boxed{f_B \circ f_A}$



$$f_B \circ f_A(\vec{v}) \underset{def}{=} f_B[f_A(\vec{v})]$$

calcolo:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_B(\vec{i})$ $\quad$ $f_B(\vec{j})$

$$f_B[f_A(\vec{i})] = f_B\left[\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = f_B\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$f_B[f_A(\vec{j})] = f_B\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

L'APPLICAZIONE INVERSA esiste solo se $rg(A) = n$ il rango è massimo.

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

Dire per quali $m \in \mathbb{R}$ f_M è INIETTIVA, SURIETTIVA e BIETTIVA.

- f_M iniettiva?

f_M iniettiva $\iff Ker(M) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ per quale $m \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo di matrice M ha una sola soluzione

le soluzioni sono $\infty^{n - rg(M)} = \infty^{3 - rg(M)}$

$\Rightarrow$ per quali valori di $m \in \mathbb{R}$, $rg(M) = 3$.

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$$

se $m = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $rg(M) = 3$

se $m \neq 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$ se $m \neq -2 \Rightarrow rg(M) = 3$
se $m = -2 \Rightarrow rg(M) = 2$

si conclude che f_M è iniettiva quando $m \neq -2$

- f_M suriettiva?

f_M suriettiva $\iff Im(M) = \mathbb{R}^3$ Bisogna fare una valutazione dal punto di vista delle dimensioni.

<u>so che</u> $\dim Im(M) = rg(M)$

quindi se $m = -2 \Rightarrow \dim Im(M) = 2 \Rightarrow f$ non suriettiva.

se $m \neq -2 \Rightarrow \dim Im(M) = 3 \Rightarrow Im(M) = \mathbb{R}^3$

$\hookrightarrow f$ è suriettiva.

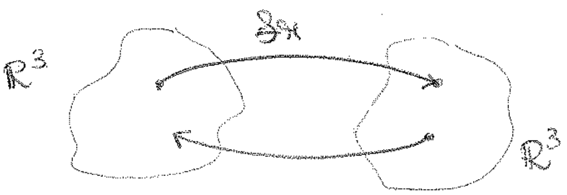
- f_M è biettiva quando è sia iniettiva che suriettiva.

$\Rightarrow m \neq -2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 167

$$\begin{cases} x = 1 + y = 3/2 \\ 2y + z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow f_M^{-1}(1,1,1) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}, -1\right)$$

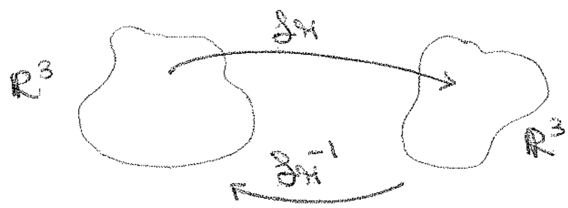
Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ f_M è invertibile?



Per $m \neq -2$ perchè f_M deve essere sia iniettiva che suriettiva.

es

se $m=0$ f_M è invertibile



$$f_M \circ f_M^{-1} = f_M^{-1} \circ f_M = Id.$$

La matrice associata a f_M^{-1} è M^{-1}

(Ricordo che una funzione è invertibile se il rango è max)

M^{-1} si può calcolare con il sistema $(M|I)$

SOTTOSPAZI

Def Dato V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale (di cui so solo che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$)
$U \subseteq V$ si dice **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** se:
- U è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per un numero
- ed è non vuoto.

BASE

Def Dato V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m \in V$ sono linearmente indipendenti se:
$\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$
solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

Def $U \subseteq V$ sottospazio $U = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_m)$ si dice **generato** dai vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_m$

Def Una **BASE** del sottospazio U è:
$B_U = (\vec{w}_1, \dots \vec{w}_m)$
con $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_m$ insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti.

So che $\forall \vec{u} \in U$ $\vec{u} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \dots + a_r\vec{w}_r$ e i coefficienti sono univocamente dati
$\Rightarrow$ posso identificare (fissata B_U)
$\vec{u} \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots a_r)$?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 167

$B'_{\mathbb{R}_2[x]} = (1+x;\ 2x;\ x+x^2)$

verifico che è base.

linearmente indipendenti?

$a(1+x) + b(2x) + c(x+x^2) = 0$

$a + (a+2b+c)x + cx^2 = 0$ $\rightsquigarrow$ polinomio scritto nella base canonica di prima.

$\Leftrightarrow a=0 \quad a+2b+c=0 \quad c=0$

sistema lineare $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ linearmente indipendenti!!

Devo verificare che sono generatori, devo proprio farlo? NO.
ho trovato 3 vett lin. indip.

$\mathcal{L}(1+x,\ 2x,\ x+x^2) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

Penso al sottospazio vettoriale generato da questi 3 vettori.
Che dim ha? 3

$\Rightarrow \mathcal{L}(1+x,\ 2x,\ x+x^2) = \underline{\mathbb{R}_2[x]}$

Fissata $B'_V = (1+x;\ 2x;\ x+x^2)$

$\mathbb{R}_2[x] \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$.

Teorema

Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Se ho una base $B_V = (\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_m)$
allora ho un isomorfismo:

$\mathbb{K}^m \longleftrightarrow V$

definito da $\underset{\mathbb{K}^m}{(a_1, a_2 \dots a_m)} \longleftrightarrow \underset{V}{a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_m\vec{u}_m}$

$a_i \in \mathbb{K}^m$

SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}_2[x]$, PROPRI

$\mathbb{R}_2[x] \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$

- rette? sono del tipo $\mathcal{L}(p(x))$ con $p(x) \neq 0$.

<u>Es</u> $W = \mathcal{L}(1+x) = \{k(1+x)\},\ \forall k \in \mathbb{R}$.

- piani? sono del tipo $\mathcal{L}(p(x), q(x))$ con $p(x), q(x)$ l.i.

<u>Es</u> $W = \mathcal{L}(1, x^2) = \{q(x) = a+bx^2\},\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 167

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$$

$$\mathbb{R}^{2,2} \longleftrightarrow \mathbb{R}^4$$

④ $S = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A = \overset{\text{trasposta}}{{}^TA}\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$

verifico che è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$, cerco base e dimensione.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = {}^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{12} = a_{21}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}$$ <u>matrici simmetriche</u>

voglio verificare che è sottospazio vettoriale.

1 S non è vuoto ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in S$

2 La somma di 2 qualsiasi vettori $\in S$ ancora $\in S$.
$A, B \in S \Rightarrow A+B \in S$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

3 $\forall K \in \mathbb{R}$ $A \in S$, $KA \in S$

$$K\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} \\ Ka_{12} & Ka_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ S è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$

una base

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generatori di S

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$$

$\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti.

una base $\mathcal{B}_S = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\dim S = 3$.

Calcolo $D(1)=0 \longleftrightarrow (0,0,0,0)$

$D(1+x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = (1,0,0,0)$

$D(2x^2) = (0,4,0,0)$

$D(1+x^3) = 3x^2 = (0,0,3,0)$

$$\varphi_D^{\,e,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è $\neq$ da quella precedente perché ho fatto una scelta $\neq$ di base.

2) $y''(t)=0$

soluzioni $y(t) = c_1 t + c_2$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$c_1 t + c_2 \in \mathbb{R}_1[t]$

Le soluzioni sono spazio vettoriale di dim 2, una base delle soluzioni è $(t, 1)$

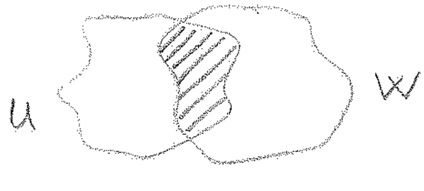
OPERAZIONI SUI SOTTOSPAZI VETTORIALI

V spazio vettoriale

U, W sottospazi di V

(pensiamo su $\mathbb{R}$-spazi a dimensione finita)

<u>Def</u>: Intersezione $U \cap W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in U, \vec{v} \in W\}$



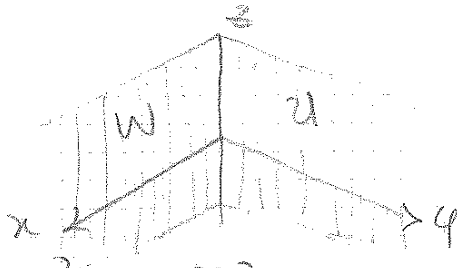
<u>Es</u> $V = \mathbb{R}^3$

$U = \{(x,y,z) \mid x=0\}$

$W = \{(x,y,z) \mid y=0\}$

Trovare $U \cap W$

$U \cap W = \{(x,y,z) \mid x=0, y=0\}$ = asse z



se $W \subseteq U$

$U \cup W = U$ è sottospazio

Def Somma di sottospazi

$U + W = \{ \vec{v} \in V / \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, con $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in W \}$.

faccio tra le poss somme prendendo un vettore da un sottospazio e l'altro dall'altro sottospazio.

VERIFICARE che $U+W$ è sottospazio

$U+W = \mathbb{R}^3$

verifica:

(1) $U+W \subseteq \mathbb{R}^3$ ovvio

(2) $U+W \supseteq \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = (x,0,z) + (0,y,0)$ oppure $(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,z)$

$(x,0,z) \in W$, $(0,y,0) \in U$

Proprietà $U+W$ è il più piccolo sottospazio di V (spazio ambiente) che contiene l'unione insiemistica.

$U \cup W$

Relazione di GRASSMANN

$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$.

$\dim U = 2$
$\dim W = 2$ } sono 2 piani

$\dim(U \cap W) = 1$ retta vettoriale

$\dim(U+W) = 3$ (è $\mathbb{R}^3$)

Rel di GRASSMANN: $2+2 = 1+3$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 167

base:

$\rightarrow B_{U+T} = B_U \cup B_T$

$B_U = ?$

$B_T = ?$

$U: \begin{cases} x = z \\ y = x \end{cases}$ $U: \{(x,x,x)\}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$B_U = ((1,1,1))$

$T: \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$ $T: \{(z,-z,z)\}\ \forall z \in \mathbb{R}$

$B_T = ((7,-7,7))$

$B(U+T) = ((1,1,1),(7,-7,7))$

__Def__ U, W sottospazi di V
se $U \cap W = \{\vec{0}\}$ la somma $U+W$ si dice __somma diretta__ $(U \oplus W)$

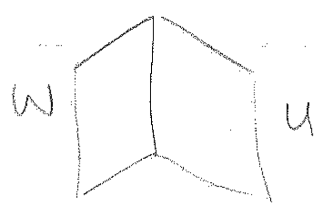
Per GRASSMANN

$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0}$

__PROPRIETÀ__ Se $U+W = U \oplus W$ allora ogni vettore $\vec{v} \in U+W$ si scrive in modo unico come:
$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in W$.

[dimostrazione su internet!]

se $U+W$ non è diretta (cioè $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$)
non è vero



$\vec{v} \in U+W$

$(x,y,z) = (x,0,z) + (0,y,0)$

oppure $= (x,0,0) + (0,y,z)$

$\Rightarrow$ __COROLLARIO__ $B_{U \oplus W} = B_U \cup B_W$ si può fare solo se la somma è diretta.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 167

CAMBIAMENTI DI BASE

V spazio vettoriale, data
$B_V = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m)$, assegnata anche:

$B'_V = (\vec{v}_1', \dots \vec{v}_m')$

vuol dire che sono dati $\vec{v}_1' = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m$
$\vec{v}_2' = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m$.

$\vec{v}_m' = a_{1m}\vec{v}_1 + \dots + a_{mm}\vec{v}_m$.

<u>Problema</u>
dato un vettore $\vec{v} = b_1\vec{v}_1' + b_2\vec{v}_2' + \dots + b_m\vec{v}_m'$
voglio sapere che componenti ha rispetto a una base B_V
e viceversa.

$$\vec{v} = b_1(a_{11}\vec{v}_1 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m) + b_2(a_{12}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m) + \dots$$
$$\dots + b_m(a_{1m}\vec{v}_1 + \dots + a_{mm}\vec{v}_m) =$$
$$(a_{11}b_1 + \dots a_{1m}b_m)\vec{v}_1 + (a_{12}b_2 + \dots)\vec{v}_2 + \dots (a_{m1}b_m \dots a_{mm}b_m)\vec{v}_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$ componenti di $\vec{v}$ rispetto a B_V.

↳ componenti di $\vec{v}$ rispetto a B'_V

$$P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$ componenti rispetto a B.

comp rispetto a B'_V

matrice di passaggio da B_V a B'_V

PROBLEMA

Dato endomorfismo (app lineare di uno spazio vettoriale V in se stesso)

$f: V \to V$

assegnando la matrice A di f rispetto a una certa base B sia nel dominio che nel codominio

$A = M_f^{B,B}$

vuol dire

$\vec{v} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$f(\vec{v}) = AX = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

come cambia la matrice di f se cambio base in V?
passo da B a B' con una matrice P.

$X = PX'$

$\Rightarrow f(\vec{v}) = AX = A(PX') = (AP)X'$

rispetto a B'

rispetto a B

poniamo $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Y$ rispetto a B.

$Y = AX$

$Y = (AP)X'$

So che $\underset{B}{Y} = P\underset{B'}{Y'}$ $\Rightarrow PY' = (AP)X'$

Tutto rispetto a B'

(moltiplico ambo i membri per P^{-1})

$P^{-1}(PY') = P^{-1}(AP)X'$

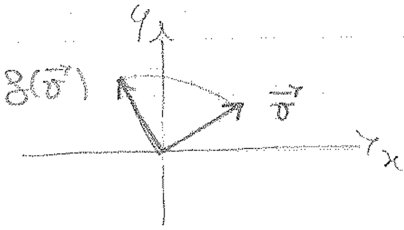
$\boxed{Y' = (P^{-1}AP)X'}$

il vett Y' $f(\vec{v})$ calcolato in componenti rispetto alla base B',

$f(\vec{v}) = M_f^{B',B'} \cdot \vec{v}_{B'}$

ho scoperto come si trasforma la matrice dell'isomorfismo quando cambio base.

$P^{-1}AP$ è la matrice di f rispetto a B' nel dominio e a B' nel codominio.



Es

$V = \mathbb{R}^2$

Dato

$f: V \to V$ definito da

$f(\vec{v})$ = rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario

Esistono autovettori di f? NO

A cosa serve trovare AUTOVETTORI?

CASO PARTICOLARE

Suppongo di avere $f: V \to V$

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ... $V = m$

Suppongo che $\exists\, B_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_m)$ tale che tutti i $\vec{v}_i$ sono autovettori di f. $\iff \forall i,\ f(\vec{v}_i) = m_i \vec{v}_i$

↑ autovalori $\in \mathbb{K}$

Costruisco $M_f^{B_V, B_V}$

$$M_f^{B_V,B_V} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,m}$$

$f(\vec{v}_1)$ .... $f(\vec{v}_m)$

$f(\vec{v}_1) = m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_m$ rispetto a B_V.

$f(\vec{v}_2) = m_2 \vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_m$.

$f(\vec{v}_m) = m_m \vec{v}_m = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_{m-1} + m_m \vec{v}_m$.

È una MATRICE DIAGONALE

VICEVERSA Suppongo di avere $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V $\dim V = m$

dato $f: V \to V$ endomorfismo tale che rispetto a una B

$$M_f^{B,B} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & m_m \end{pmatrix}$$ diagonale.

vuol dire se $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_N)$

$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = m_1 \vec{u}_1 \iff \vec{u}_1$ è autovettore relativo all'autovalore m_1.