NUMERO: 526

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Paradisi

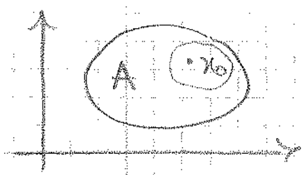
MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Codegone

CODEGONE MARCO
marco.codegone @ polito.it
Dipartimento scienze matematiche 7507
CONSULENZA: lunedì ore 13 (AULA 1 o DIP.)

TESTO: • Canuto, Tabacco - Analisi matematica II Springer
• Carlo Bianca - Quiz CLUT.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad n = 1, 2, 3$
$\quad m = 1, 2, 3$

$\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
insiemi in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

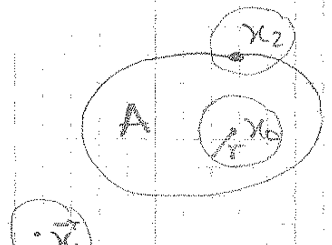


A sottoinsieme del piano
$x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ NORMA
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\|x - x_0\| < r$ $\rightsquigarrow$ distanza tra x e x_0
cerchio di raggio r e centro x_0.

$B_r(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \}$ Intorno circolare di x_0 di raggio r.



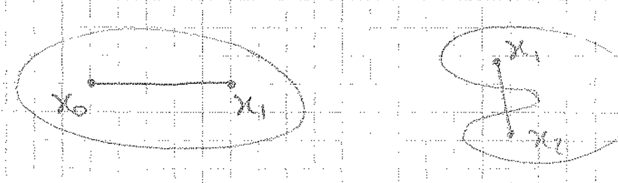
Se esiste $B_r(x_0) \subset A \Rightarrow x_0$ è punto INTERNO ad A.

Se esiste $B_r(x_1) \cap A = \emptyset \Rightarrow x_1$ è punto ESTERNO ad A

In ogni $B_r(x_2)$ [INTORNO] ci sono sia punti interni che punti esterni ad A $\Rightarrow$ punto di FRONTIERA di A.

A è limitato se $\forall \vec{x} \in A \ \exists M \,/\, \|\vec{x}\| < M$
$\hookrightarrow$ norma = distanza dall'origine

A è convesso se $\forall x_0$ e $\forall x_1 \in A$ il segmento che li congiunge è contenuto in A.



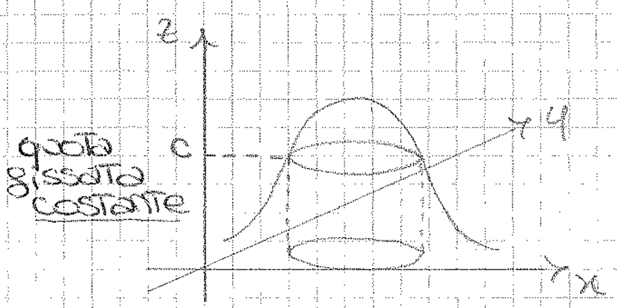
CONVESSO NON CONVESSO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 168

INSIEMI DI LIVELLO

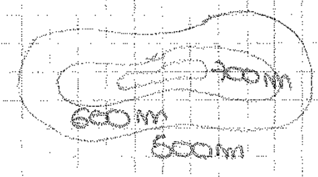
$y = f(\vec{x})$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}$

$f(\vec{x}) = \text{cost}$ $\quad$ [fisso una quota ⇝ piano // al piano xy]



$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ si hanno <u>CURVE DI LIVELLO</u>

(piantine ⇝ carte topografiche)



FUNZIONI VETTORIALI

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{y} = f(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\qquad\qquad\quad \vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Esempio:

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ $\quad$ se $n = m$ la funzione vettoriale si chiama <u>CAMPO</u>

$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$

$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$ $\quad$ f. vettoriale ⇝ insieme di funzioni

$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$

CURVE γ

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

<u>es</u>: $m = 2$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\,\text{sen}\,t \end{pmatrix}$$

r assegnato $\quad (r = 2,\ r = 1,\ r = 100)$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Esempio 2:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

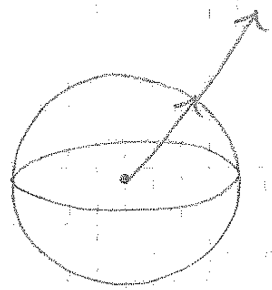
il grafico sarà in 6 dimensioni però posso disegnare nel piano il campo.

$\vec{x}\,(x,y,z)$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|\vec{x}\|$

$$f = \begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{x}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{x}\|} \\ \frac{z}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

CAMPO RADIALE



$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

il campo è nella stessa direzione del vettore

CONTINUITÀ

4/10/12

$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\vec{f}$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall \vec{x} \in \operatorname{dom} f$

$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell} \rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x} \in \operatorname{dom} f\quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

$\Rightarrow \|f(\vec{x}) - \ell\| < \varepsilon$

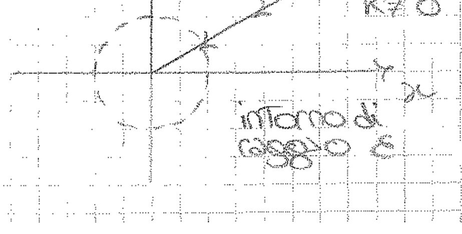
f è continua in $x_0 \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

Esempio:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} x\, e^{x^2/y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

f = funzione scalare

$\vec{x} \in \mathbb{R}\quad \vec{x} = (x,y)$



COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}\in} \xrightarrow{\vec{f}} \underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y}\in} \xrightarrow{\vec{g}} \underset{\mathbb{R}^q}{\vec{z}\in}$$

$\left.\begin{array}{l}\vec{f} \in \mathbb{R}^m \\ \vec{y} \in \mathbb{R}^m\end{array}\right\}$ sennò non posso comporre.

I valori di f devono stare in $\mathbb{R}^m$ e le variabili g devono stare in $\mathbb{R}^m$

Le immagini di f devono $\in$ al dominio di g.

Es.

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\vec{\gamma}(t)]{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[f(x,y)]{f} \mathbb{R}$$

f ⇝ funzione scalare

$f(\vec{\gamma}(t))$? $= f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen}\, t \end{pmatrix}$ Punti della circonferenza unitaria.

$f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

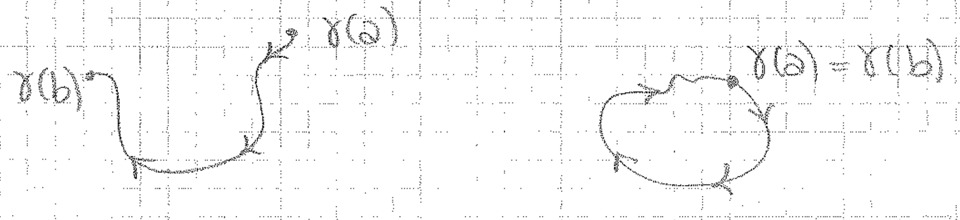
$f(\vec{\gamma}(t)) = f(\cos t, \mathrm{sen}\, t) = \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t} = \mathrm{Tg}\, t$

↳ sono passata attraverso la composizione

valore della f in ogni punto della circonferenza

$\vec{\gamma}(t)$ si dice ARCO se $t \in [a,b]$ arco di estremi a, b.

Si dice CHIUSO se $\gamma(a) = \gamma(b)$ se i 2 estremi coincidono



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 168

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ calotta inferiore
↳ superficie topografica.

- $z = f(x,y) \rightarrow$ superficie **ESPLICITA**
- $g(x,y,z) = \text{cost} \rightarrow$ superficie descritta in modo **IMPLICITO**

OSSERVAZIONE

$x^2+y^2+z^2=1$ esplicito $\rightarrow$ $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$
posso esplicitare la variabile che voglio:

$y = \pm\sqrt{1-x^2-z^2}$
$x = \pm\sqrt{1-y^2-z^2}$

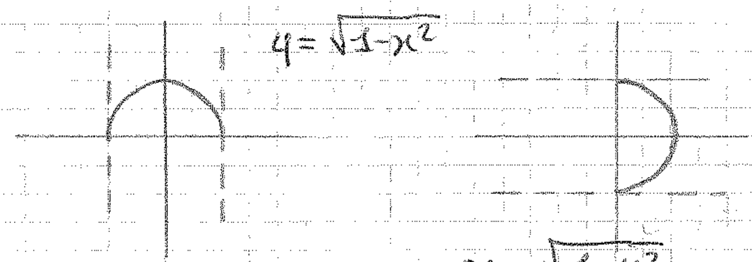
sono tutte superfici esplicite che descrivono superfici topografiche.

OSSERVAZIONE

in $\mathbb{R}$

$x^2+y^2=1$

$y = \sqrt{1-x^2}$



$x = \sqrt{1-y^2}$

DERIVABILITÀ $\neq$

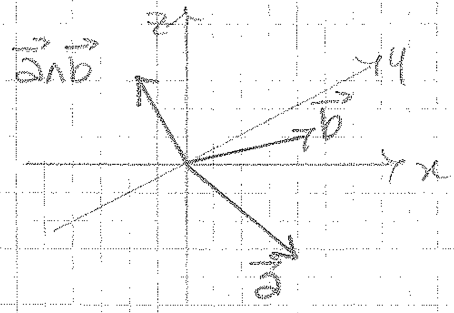
Rappresentazione parametrica di una superficie

$\vec{\sigma}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix}$$

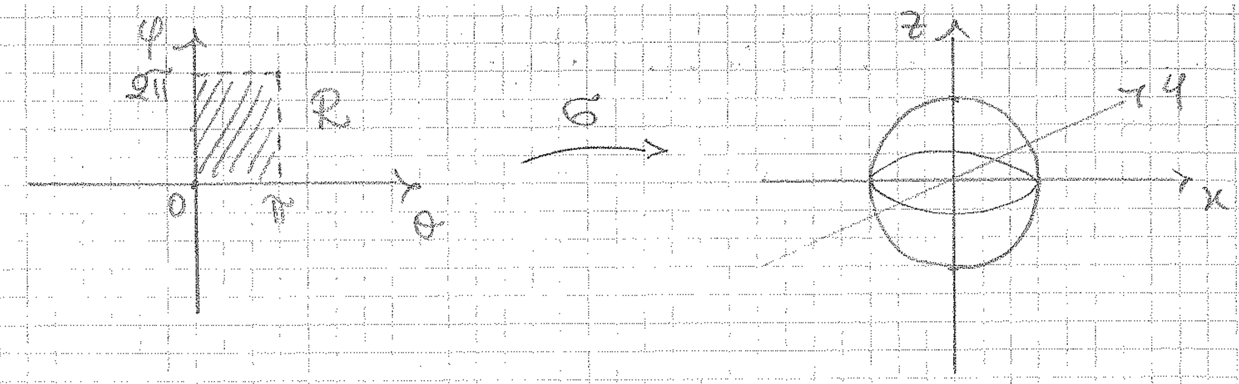
Esempio

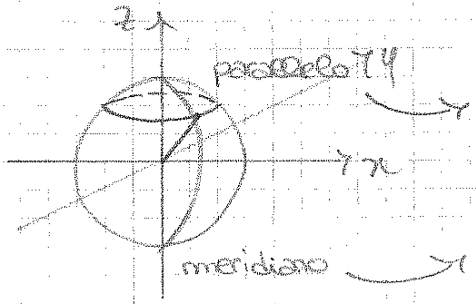
Voglio descrivere un piano



Prendo 2 vettori nello spazio
↳ Piano che passa per quei 2 vettori

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \dots = N$$





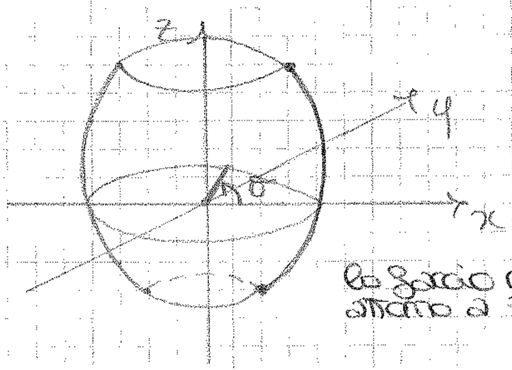
$0 < \varphi < 2\pi$

ruota TUTTO

$0 < \theta < \pi$

ruota solo di 180°.

SUPERFICI DI ROTAZIONE



$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t))$

curva piana nel piano xz

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases} \qquad \gamma_1(t) \geq 0$$

la faccio ruotare attorno a z.

$$\vec{\sigma}(t, \theta) = (\gamma_1(t)\cos\theta, \gamma_1(t)\operatorname{sen}\theta, \gamma_3(t))$$

$z = f(x,y)$ è detta DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0) se esiste un vettore $\vec{v}$ tale che

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|)$$

per $\vec{x} \to \vec{x}_0$

FUNZIONE DI TAYLOR IN 2 VARIABILI

GRADIENTE

Allora $\vec{v} = \vec{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)$

f è differenziabile in (x_0, y_0)

se $f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot (\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{PIANO TANGENTE}} + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|)$

per $\vec{x} \to \vec{x}_0$.

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Teoremi

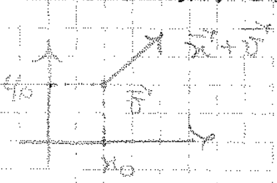
1) f differenziabile in $\vec{x}_0 \Rightarrow f$ è continua in $\vec{x}_0$

2) $f \in C^1$ cioè f è continua e le derivate parziali sono continue (in 2 variabili) $[\Rightarrow f$ è differenziabile$]$

3) **DEF** Sia $\vec{v}$ un vettore

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

DERIVATA DIREZIONALE



TEOREMA

Se $f \in C^1$ $\quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}$ DERIVATA DIREZIONALE

4) $\|\vec{v}\| = 1$ $\quad e_1$ versore, e_2 versore

DIFFERENZIALE DI f in x_0:

$df_{x_0}(\Delta x) = \nabla f(x_0) \cdot \Delta x$

applicazione lineare

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial e_1}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial e_2}$

La derivata parziale di f rispetto a x è uguale alla derivata direzionale lungo il versore e_1.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} \cdot \cos\alpha = \|\nabla f\| \cdot \cos\alpha$$

So che $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. La derivata direzionale lungo un vettore di norma 1 è sempre minore della norma del gradiente di f.

$z = f(x,y)$

$y = f(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x_0})(\vec{x}-\vec{x_0})} + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x_0})\, Hf(\vec{x_0})\,(\vec{x}-\vec{x_0})^T + o$$

PIANO TANGENTE

$$z = f(\vec{x_0}) + \vec{\nabla} f\,(\vec{x}-\vec{x_0})$$

$$z = f(\vec{x_0}) + \nabla f \cdot (\vec{x}-\vec{x_0}) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x_0})\, Hf\,(\vec{x}-\vec{x_0})^T.$$

$\hookrightarrow$ $n=2$ QUADRICA

Punti di massimo e minimo dove il gradiente è NULLO

$\rightsquigarrow$ Poi guardo Hf.

Supponiamo che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ $\rightsquigarrow$ significa che lì la tangente è orizzontale.

$$= \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x_0})^T Hf(x_0,y_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x_0})} + o\,(\|\vec{x}-\vec{x_0}\|)$$

prendiamo $(x_0,y_0) = (0,0)$ e $f(x_0,y_0) = 0$.

$$z = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}_{a}\, x^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)}_{2c}\, xy + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)}_{b}\, y^2$$

$z = ax^2 + 2cxy + by^2.$ QUADRICA

$$z = \left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

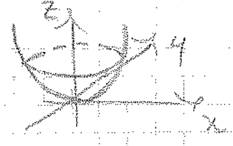
$A = A^T$ [la matrice Hessiana è una matrice simmetrica]

Autovalori reali λ_1, λ_2 ed è diagonalizzabile

$A \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con cambiamento di base.

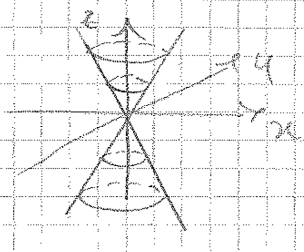
$$z = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

- $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ PARABOLOIDE



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 168

- $x^2+y^2+z^2=0$ cono degenere $(0,0,0)$
- $x^2+y^2-z^2=0$ $\quad z^2=x^2+y^2$

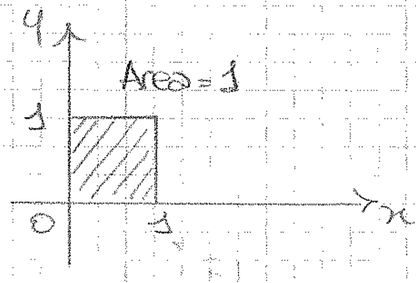


MATRICE JACOBIANA

La matrice jacobiana di $\vec{g}$ è una matrice quadrata le cui righe sono i gradienti delle componenti del campo di $\vec{g}$.

$$\vec{g}(x,y)=\begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix}$$

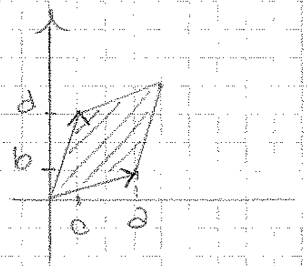
$$J_g=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad J_{\vec{g}}$$



$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\det A \neq 0$



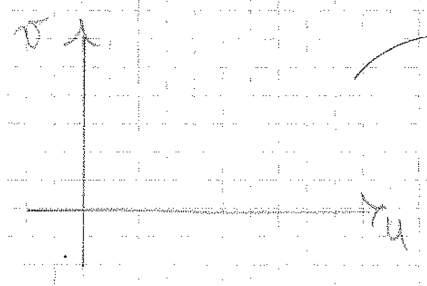
Qual è l'area di questo quadrato trasformato? Prodotto vettoriale!

$$\text{Area}=\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right| = |ad-bc| = |\det A|$$

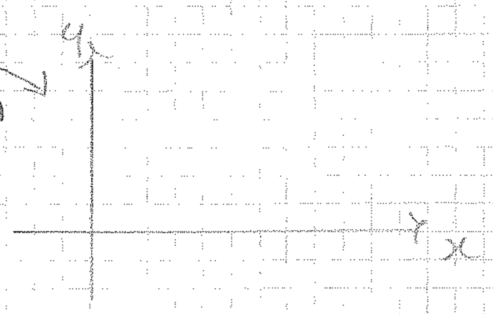
è il determinante (in modulo) della matrice che mi dà la trasformazione.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ w \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \\ h \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & w \\ c & d & h \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} bh-dw \\ cw-ah \\ ad-cb \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad-bc$ (suppongo w e h = 0.)



$\Phi(u,v)$



DIVERGENZA

legato alla variazione di volume di una porzione di materia che si muove sotto l'effetto del campo vettoriale

Divergenza di un campo $\vec{f}(\vec{x})$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{f} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} \vec{f}(x,y) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

PAG 213

$$\vec{\Phi}(t, \vec{x}) \qquad \vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \Phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \Phi' = \vec{f}(\vec{\Phi}) \\ \Phi(0,x) = x \end{cases} \qquad x_0 \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\Omega_t = \{ z = \vec{\Phi}(t, \vec{x}) : x \in \Omega_0 \} = \Phi(t, \Omega_0)$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega_t} g(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}$$

Se $g = 1$ e' integrale triplo e' uguale al volume di Ω!

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} dx\,dy\,dz}_{\text{Volume di } \Omega_t} = \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz.$$

in 2 dimensioni è la superficie

↳ Variazione del volume di Ω_t nel tempo.

La divergenza del campo f e' responsabile della variazione di volume lungo la traiettorie del campo

Se la divergenza di f e' nulla $\Rightarrow$ Non c'e' variazione di volume.

ROTORE

legato alla rotazione di un solido attorno ad un punto

Sia $\vec{f}(\vec{x})$ un campo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot} \vec{f} \doteq \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

PAG 219

In Analisi I

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=f(x)} \left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{sen}x}\right) = \frac{d}{dy}e^{y} \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = e^{y}\cos x = e^{\operatorname{sen}x}\cos x.$$

In funzioni a più variabili si dice:

REGOLA DELLA CATENA

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$

$$g(f) = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$J(g(f)) = \underbrace{\underbrace{Jg}_{p\times m}\ \underbrace{Jf}_{m\times n}}_{p\times n}$$

$\vec{f}(\vec{x})$ $\quad J_x f \quad$ sto derivando rispetto a x

$g(y)$ $\quad J_y g \quad$ sto derivando rispetto a y

$$J(g(f)) = \underbrace{J_y\, g(y)}_{a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}}\ \underbrace{J_x f(x)}_{b_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}}\Bigg|_{y=f(x)}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

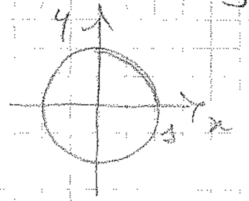
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

- Sia $\vec{\gamma}(t)$ una curva in $\mathbb{R}^n$

$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

1) $\vec{\gamma}(t)$ è la descrizione del sostegno di γ in forma parametrica

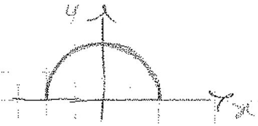
$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$



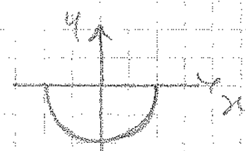
PARAMETRICA

2) $x^2 + y^2 = 1$ è la descrizione in forma implicita della circonferenza. IMPLICITA

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$



$y = -\sqrt{1 - x^2}$



ESPLICITA

Rappresentazioni esplicite (localmente) della circonferenza.

$f(\vec{x}) = C$ sia la descrizione implicita di una curva γ

$f(\vec{\gamma}(t)) = C$

es

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{f} = 1 \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

$f(\vec{\gamma}) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ IDENTITÀ

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} C = 0$$

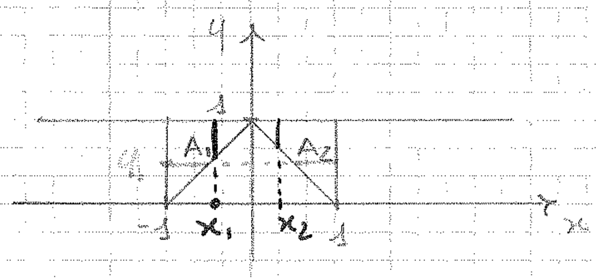
regola della catena mi dice che questo è uguale a:

$\Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \vec{\gamma}'(t) = 0 \Rightarrow$ <u>IL GRADIENTE È ORTOGONALE ALLA TANGENTE ALLA CURVA</u>

ESEMPIO

$$\iint_A x^2\,dx\,dy$$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -1\le x\le 1,\ \ 1-|x|\le y\le 1\} =$
$= A_1\cup A_2$



$A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ -1\le x\le 0,\ 1+x\le y\le 1\}$

$A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ 0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le 1\}$

Se fisso x_1 compreso tra -1 e 0 $-1\le x\le 0$ e y che stanno in A del tipo (x_1,y) devono essere tali che $1+x\le y\le 1$.

Se fisso x_2 $0\le x_2\le 1$, e y tali che $(x_2,y)\in A$ devono essere tali che $1-x\le y\le 1$

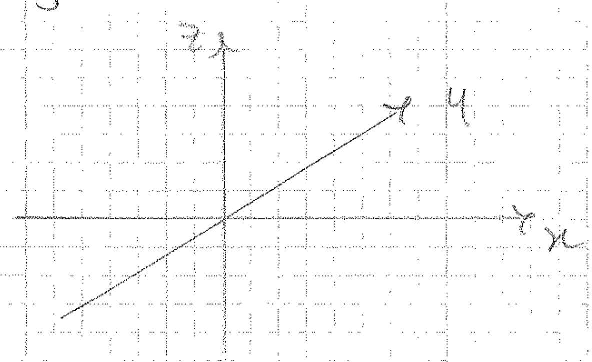
Se fisso y_1 con $0\le y_1\le 1$ e cerco le x / $(x,y_1)\in A$ so allora che $-1\le x\le y-1$ oppure $1-y\le x\le 1$

ESEMPIO

$$\iiint_A 2y\,dx\,dy\,dz$$

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ 0\le x\le z\le 2,\ \ 0\le y\le\sqrt{4-z^2}\}$

Fare l'integrale triplo è soprattutto capire la regione di integrazione.

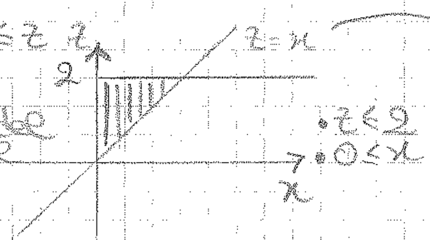


3 piani: $x=0$, $z=2$, $x=z$

$\boxed{0\le y}$

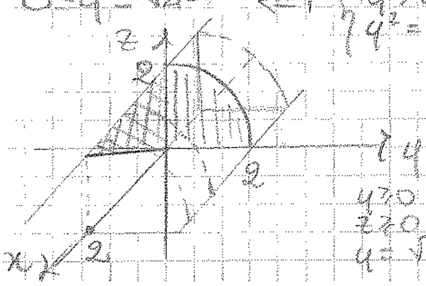
$0\le y=\sqrt{4-z^2} \iff \begin{cases} y\ge 0\\ y^2=4-z^2\end{cases}$

• $x\le z$



Proiezione del solido A sul piano xz

• $z\le 2$
• $0\le x$



$y\ge 0$
$z\ge 0$
$y=\sqrt{4-z^2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 168

17/10/12

CURVE NEL PIANO

1) $f(x,y) = C$

2) grad $f \neq 0$, se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow x = g(y)$ Th di DINI

se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow y = h(x)$

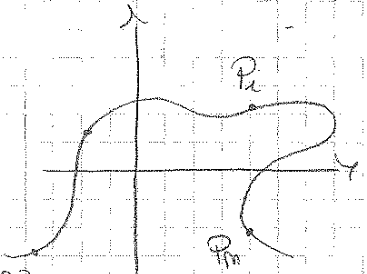
3) $\vec{\gamma}(t)$ $a \leq t \leq b$ parametrica

Lunghezza di una curva PAG 229

$\vec{\gamma}(t)$ in forma parametrica

$a \leq t \leq b$

$P_i = (x_i, y_i) = \vec{\gamma}(t_i) = (\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i))_{P_0}$



$$[\text{poligonale}] = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \| \vec{\gamma}(t_i) - \vec{\gamma}(t_{i-1}) \|$$

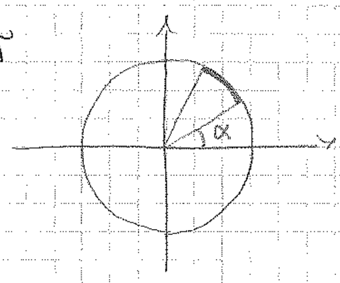
distanza euclidea di 2 punti

Moltiplico e divido per $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ e costruisco l'integrale:

$$\boxed{L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt}$$

Esempio:

$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq 2\pi$



$$L = \int_\alpha^\beta r \cdot \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt = -\int_\alpha^\beta r \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt =$$

$$= -(\alpha - \beta) r = r(\beta - \alpha)$$

$$\vec{v} \cdot t(x_i; y_i) \cdot \quad = t(x_i, y_i) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f}(x,y)\, d\vec{\tau} = \int_\gamma \vec{f}(x,y) \cdot \vec{\tau}\, d\gamma$$

$\vec{\tau}$ → versore Tangente

$$= \int_a^b \vec{f}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt. \qquad \vec{\gamma}(t) \text{ con } a \le t \le b.$$

$\|\gamma'(t)\|$ → perchè $d\vec{\tau}$ versore!

$\|\gamma'(t)\|$ → perchè integro su γ.

$$= \boxed{\int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt}$$

Esempio

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} d\vec{\tau} \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^2)\, dt = \int_0^1 -t^2 \cdot dt = -\frac{1}{3}$$

Potenziale di campi conservativi PAG 409

Sia $\vec{f}(\vec{x})$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ e supponiamo che le sue componenti siano funzioni continue ($\vec{f}$ continua) in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\vec{f}$ è detto <u>CAMPO CONSERVATIVO</u> in Ω se esiste una funzione scalare $\varphi(\vec{x})$ definita in Ω (derivabile!) tale che

$$\vec{f}(x) = \vec{\text{grad}}\, \varphi$$

- se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\vec{f}(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \qquad (\text{analogo se } \gamma \subseteq \mathbb{R}^3)$$

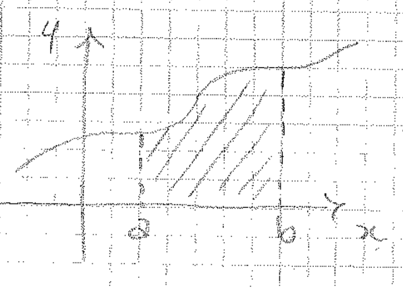
la funzione $\varphi(\vec{x})$ è detta POTENZIALE del campo $\vec{f}$.

INTEGRALI DOPPI

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>INTRODUZIONE</u>

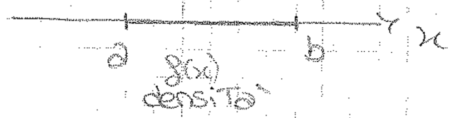
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$f(x) \geq 0$

→ Area sottesa dalla curva

→ Massa totale del filo.



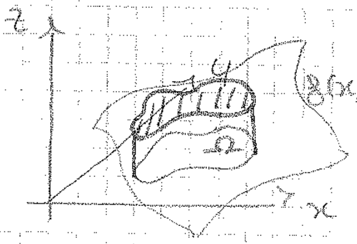
→ Lunghezza del filo

$$\int_a^b dx = b-a.$$

integrale ⇝ MASSA TOTALE.

$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ ha una doppia lettura:

→ Volume del cilindroide

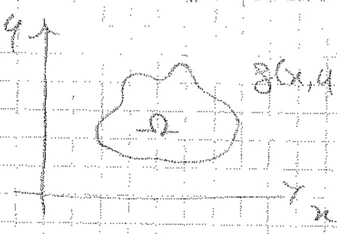


$f(x,y) \geq 0$

→ Massa totale di una superficie

→ Area di una superficie

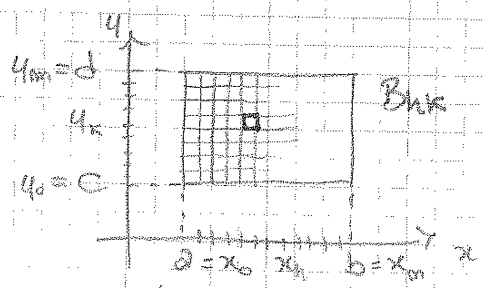
$$\iint_{\Omega} dx\,dy =$$



$f(x,y)$ densità di massa

—

$B \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad B = [a,b] \times [c,d]$



B_{hk}

↳ le suddivisioni possono anche non essere tutti uguali.

$f: B \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_h < \ldots < b = x_n$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k < \ldots < d = y_m$

$B_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k]$

OSSERVAZIONE 1

Anche se non è diviso bene come prima io posso sempre dividerlo ulteriormente fino a ricondurmi al mio caso → diventa anche sempre più preciso.

OSSERVAZIONE 2

$f(x,y)$ continua su B è Rieman integrabile.

OSSERVAZIONE 3

FORMULE DI RIDUZIONE

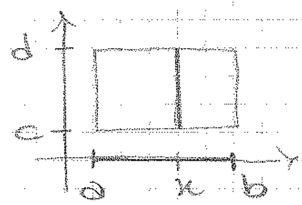
$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy =$$

se c'è l'integrale di Rieman ⇒ la riduzione può essere fatta per orizzontale o per verticale.

$B = [a,b] \times [c,d]$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{h(x)} \Big)\,dx \qquad \int_a^b h(x)\,dx$$

↳ per VERTICALI



$$= \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy$$

↳ per ORIZZONTALI

Mi riconduco a due integrali dell'analisi 1.

Teorema [illegible]

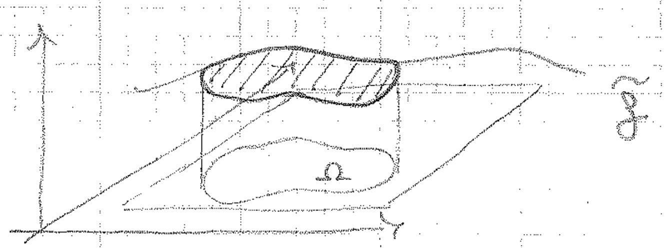
[DI GUIDO FUBINI]

Vogliamo arrivare a definire l'integrale doppio

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \quad \text{con } \Omega \text{ limitato},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Esiste B rettangolo con $\Omega \subseteq B$.

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & se\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & se\ (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_B \tilde{f}(x,y)\,dxdy.$$

25/10/12

Dell'altra volta:

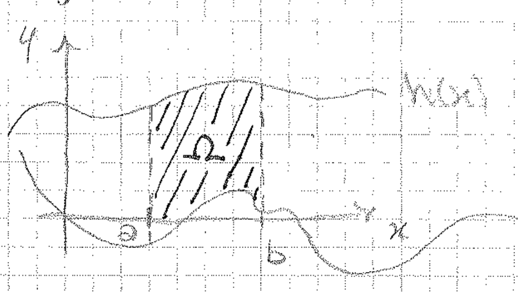
$\iint_B f(x,y)\,dxdy$ B rettangolo

$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ $\Omega \subseteq B$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

Ω VERTICALMENTE CONVESSO (i due punti che prendo sono uno verticale all'altro ⇝ segmento verticale)

se $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \le y \le h(x)$ e $x \in [a,b]\}$



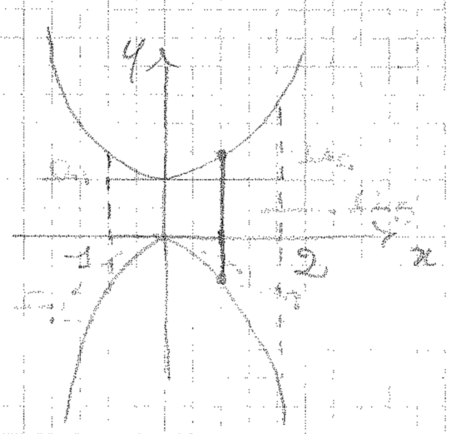
Ω NON È CONVESSO

ma lo è VERTICALMENTE.

ESEMPIO

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad -x^2 \le y \le 1+x^2 \,,\ x \in [-1,2]\}$$

$$\iint_\Omega (x+y)\,dxdy$$



Ω verticalmente convesso ma non orizzontalmente.

$\Rightarrow$ Faccio l'integrale PER VERTICALI.

$$\iint_\Omega (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{-x^2}^{1+x^2} (x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x^2}^{y=1+x^2} dx =$$

↳ devo sostituire a y.

$$\int_{-1}^{2} \left(x(1+x^2) - x(-x^2) + \frac{(1+x^2)^2}{2} - \frac{(-x^2)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x + x^3 + x^3 + \frac{1}{2} 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \ldots\ldots$$

- Se lo voglio fare orizzontalmente lo devo spezzare in più insiemi

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5$$ ognuno di questi è orizzontalmente convesso.

$$\iint_\Omega (x+y)\,dxdy = \iint_{\Omega_1} (x+y)\,dxdy + \iint_{\Omega_2} (x+y)\,dxdy +$$

$$\iint_{\Omega_3} (x+y)\,dxdy + \iint_{\Omega_4} (x+y)\,dxdy + \iint_{\Omega_5} (x+y)\,dxdy$$

NB

$$\Omega_1 = \{(x,y) : -1 \le x \le -\sqrt{y-1} \,,\ 1 \le y \le 2\}$$

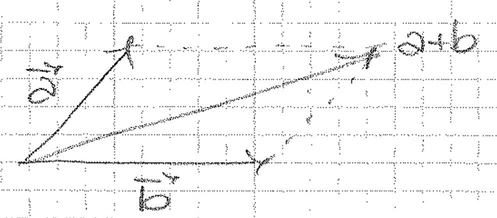
$$\Omega_2 = \{(x,y) : \sqrt{y-1} \le x \le 2 \,,\ 1 \le y \le 5\}$$

NB

OSSERVAZIONE

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

nei vettori:



$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

il terzo lato è più corto della somma degli altri due.

GENERALIZZANDO: $|a+b+c+d| \leq |a|+|b|+|c|+|d|$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

L'integrale è un limite della sommatoria!

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left| \iint_\Omega f\,dx\,dy \right| \leq \iint_\Omega |f|\,dx\,dy$$

5) Teorema DELLA MEDIA

Ω misurabile

$$m = \inf_{(x,y)\in\Omega} f(x,y) \qquad M = \sup_{(x,y)\in\Omega} f(x,y)$$

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \leq M$$

GENERALIZZAZIONE DELLA MEDIA

↳ VALOR MEDIO di f su Ω

6) Additività del dominio

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \qquad |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

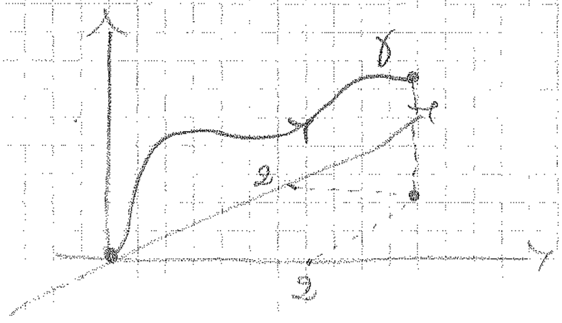
la misura dell'intersezione è 0.

Se f è integrabile su Ω_1 e su Ω_2 allora è anche integrabile nell'unione e vale

$$\iint_\Omega f\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f\,dx\,dy.$$

$$\vec{F} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

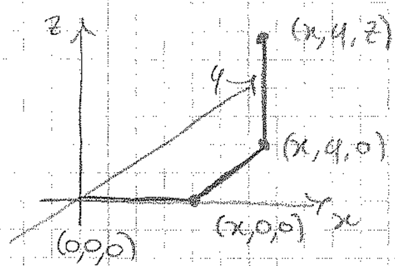
$$\vec{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$$



$A = (0,0,0)$

$B = (2,2,2)$

$$\varphi(x,y,z) \;?\; \varphi(2,2,2) - \varphi(0,0,0) = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$



$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_0^x \left(\vec{F}(t,0,0)\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^y \left(\vec{F}(x,t,0)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^z \left(\vec{F}(x,y,t)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt =$$

Faccio 3 integrali spostandomi parallelamente agli assi lungo quei 3 segmenti e ogni volta metto t alla variabile che si muove.

$$= \int_0^x \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt + \int_0^y \frac{-2t}{(x^2+t^2-1)^2}\,dt + \int_0^z \frac{-2t}{(x^2+y^2+t^2-1)^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{t^2-1}\right]_0^x + \left[\frac{1}{(x^2+t^2-1)}\right]_0^y + \left[\frac{1}{(x^2+y^2+t^2-1)}\right]_0^z =$$

$$= \cancel{\frac{1}{x^2-1}} - \frac{1}{-1} + \cancel{\frac{1}{x^2+y^2-1}} - \cancel{\frac{1}{x^2-1}} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} - \cancel{\frac{1}{x^2+y^2-1}} =$$

$$= \varphi(x,y,z) = 1 + \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$$

è il potenziale che si annulla nello 0!

[È uno dei potenziali]

$\varphi(0,0,0) = 0$.

È facile verificare che

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{F}$$

Ogni altro potenziale di $\vec{F}$ si ottiene da φ con l'aggiunta di una costante su ogni insieme connesso di definizione del campo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2-1)^2}$$

sistema di eq. differenziali.

Dalla I eq:

$$\underbrace{\varphi = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} + \boxed{C(y,z)}}$$

C è costante rispetto a x ma dipende da y e z.
NB

↳ lo derivo rispetto a y e lo pongo uguale alla II equazione differenziale.

$$\cancel{\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2-1)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} C(y,z) = \cancel{\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2-1)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y,z) = 0 \Rightarrow C \text{ è costante rispetto a } y.$$

$$\underbrace{\varphi(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} + \boxed{C(z)}}$$

NB

↳ lo derivo rispetto a z e lo pongo uguale alla III eq. differenziale

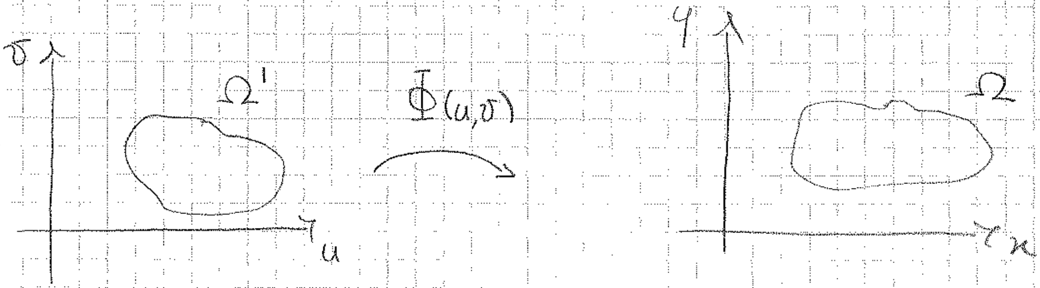
$$\cancel{\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2-1)^2}} + \frac{\partial}{\partial z} C(z) = \cancel{\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2-1)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} C(z) = 0 \Rightarrow C(z) \text{ è costante rispetto a } z.$$

TUTTI I POTENZIALI SONO $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} + \text{Cost.}$

è cost nella sfera e esternamente alla sfera.
↳ separatamente. ⇒ Non nell'unione delle 2 regioni posso usare 2 costanti differenti per le 2 regioni.

CAMBIAMENTO DI COORDINATE NEGLI INTEGRALI DOPPI



$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

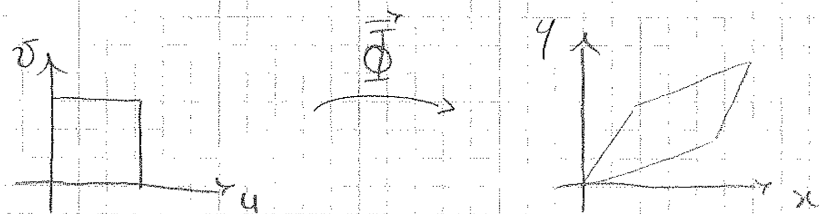
determinante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u,v)$$

Analogo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

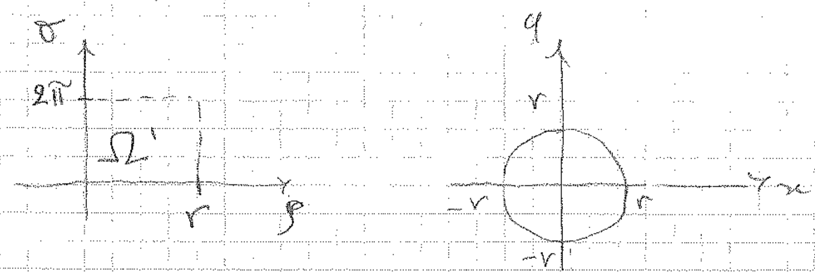
$x = \varphi(u)$



$$\Phi(u,v) = \Phi(u_0, v_0) + J\Phi(u_0, v_0)\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{matrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{matrix} \right\|\right)$$

Esempio

$$\iint_{\Omega} dx\,dy$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 168

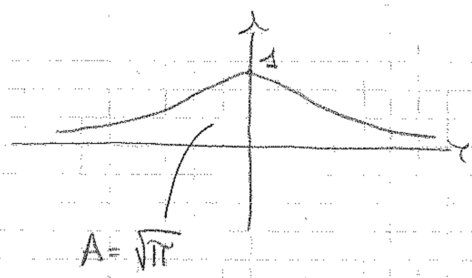
$$\iint_{\Omega'} (\rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta) \cdot \underset{\Uparrow}{\rho}\; d\rho\, d\theta =$$

$$= \iint_{\Omega'} \rho^2 \cos\theta \, d\rho\, d\theta + \iint_{\Omega'} \rho^2\, \text{sen}\,\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho^2 d\rho \int_{\text{arctg}\frac{1}{2}}^{\text{arctg}\,2} \cos\theta\, d\theta + \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \rho^2 d\rho \int_{\text{arctg}\frac{1}{2}}^{\text{arctg}\,2} \text{sen}\,\theta\, d\theta =$$

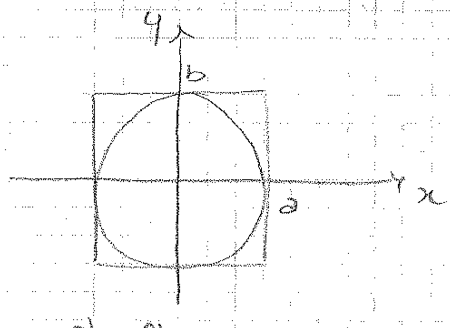
$$= \left[\rho^3/3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left[\text{sen}\,\theta\right]_{\text{arctg}\frac{1}{2}}^{\text{arctg}\,2} + \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left[-\cos\theta\right]_{\text{arctg}\frac{1}{2}}^{\text{arctg}\,2} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Avrà lo stesso val. di quella sopra

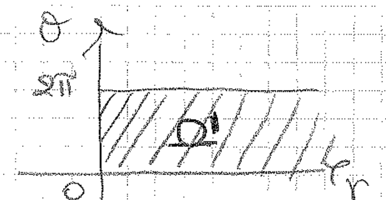


$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx$$

↳ integrale per verticali

$$= \iint_{\Omega'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$ passo in coordinate polari $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Omega' = \{(\rho, \theta) : 0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

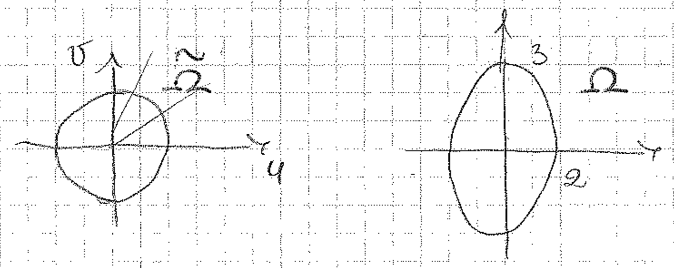
$$= \iint_{\Omega'} e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\theta \right) d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

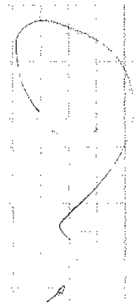
$$\iint_{\Omega} xy \, dxy \underset{\uparrow}{=} \iint_{\tilde{\Omega}} 2u \cdot 3v \cdot 6 \, du\,dv$$

$x = 2u$
$y = 3v$ $\quad |J| = 6$



INTEGRALI TRIPLI

La parte di teoria è analoga a quella svolta per gli integrali doppi

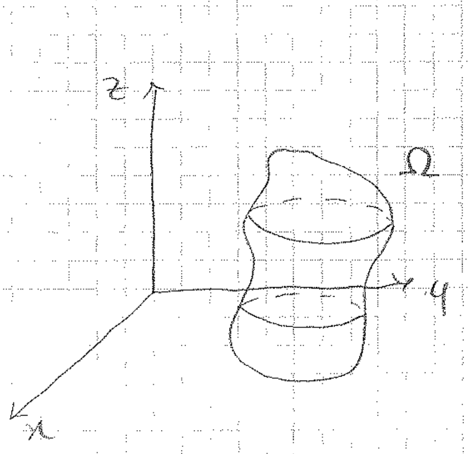


$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitata

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

$w = f(x,y,z)$

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \vec{N} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 1 + y + z = 0$$

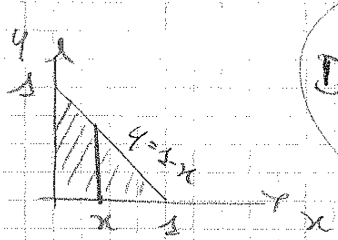
$x + y + z = 1$ equazione del piano.

$\Rightarrow$ Devo stare sotto questo piano

↳ lo metto nell'equazione dell'ottante! ⊛

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le 1 - x - y, \ (x,y) \in D \}$$

↳ dalla 3° eq del piano



$$D = \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 1 \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dx\,dy = \iint_D [z]_0^{1-x-y} dx\,dy$$

$$= \iint_D (1-x-y)\,dx\,dy = \int \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy \right) dx =$$

↳ varia tra 0 e 1 (vedi grafico)

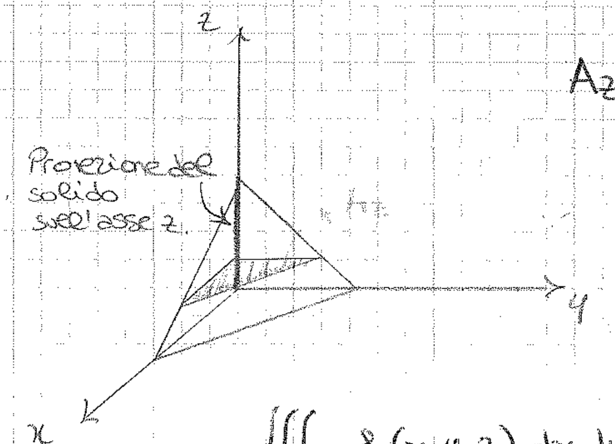
$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(1 - x - \cancel{x} + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

INTEGRAZIONE PER STRATI

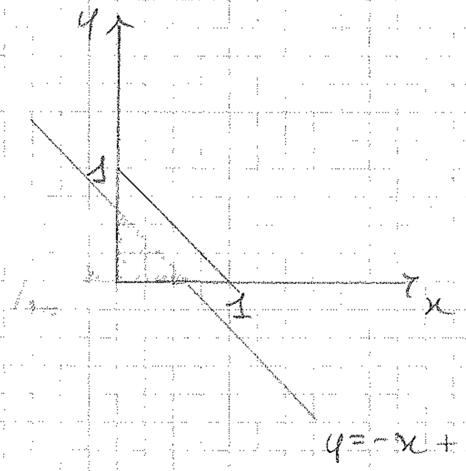
- Paralleli al piano xy



$A_z = \Omega \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0, z_0 \in I\}$

I è la proiezione del solido Ω sull'asse z.

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_I \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$



Ω tetraedro

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{A_z} dx\,dy \right) dz =$$

$x+y+z=1$

$x+y = 1-z$ (a fisso z)

$y = -x + (1-z)$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{-x(1-z)} dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (-x+(1-z))\,dx \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{x^2}{2} + (1-z)x \right]_0^{1-z} dz = \int_0^1 \left(-\frac{(1-z)^2}{2} + (1-z)^2 \right) dz =$$

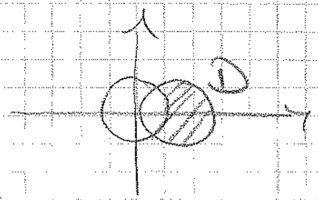
$$= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = \left[-\frac{(1-z)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 168

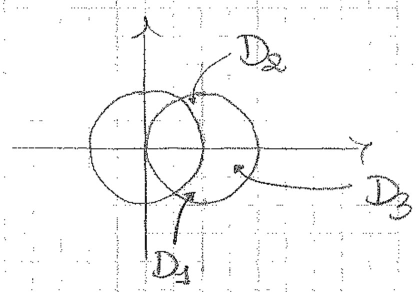
Integro per fili paralleli a z.

$$I = \iint_D \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dz \right) dx\,dy = \iint_D \left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\, z \right]_{z=0}^{z=\frac{x^2+y^2}{x^2}} dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{y^2}{\cancel{x^2+y^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2+y^2}}{x^2} \right) dx\,dy$$



Se volessi risolvere l'integrale per verticali



Devo dividere il dominio di integrazione in 3 insiemi che siano VERTICALMENTE CONVESSI

$D_1: \; -\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2}$

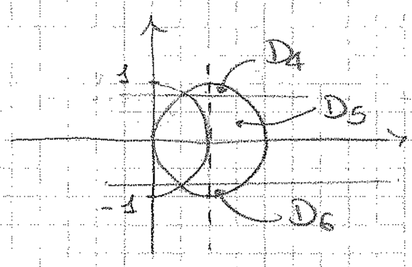
$D_2: \; \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}$

$D_3: \; -\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}$

2 CIRCONFERENZE
$x^2+y^2=1$
$(x-1)^2+y^2=1$

Poi devo trovare le limitazioni per x.

Se volessi risolvere l'integrale per orizzontali
→ È convesso per orizzontali! Ma la delimitazione è strana



Devo comunque spezzare l'area azzurra di sinistra in 3 parti.

$D_4: \; 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$

$D_5: \; \sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$

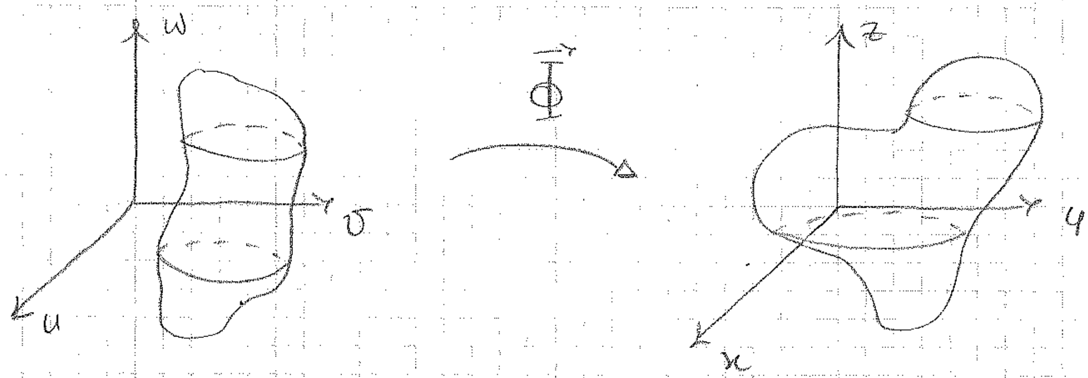
$D_6: \; 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$

Poi devo trovare le limitazioni per y

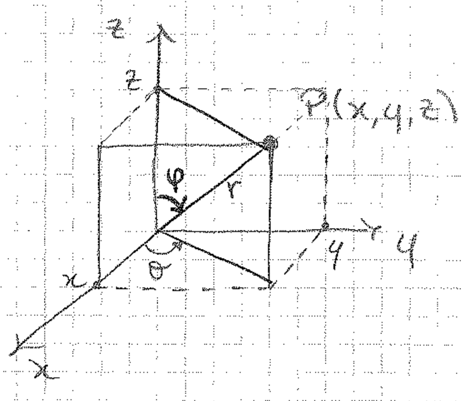
CAMBI DI VARIABILE nell'integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\vec{\Phi}(u,v,w)) \left| \det J(\vec{\Phi}) \right| du dv dw$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(\vec{\Phi}(u,v,w)) \left| \det J(\vec{\Phi}) \right| du dv dw$$



COORDINATE SFERICHE



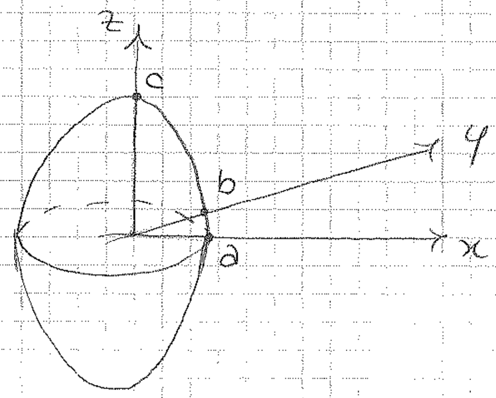
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| \det J(\Phi) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi \operatorname{sen}\theta & r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & -r \operatorname{sen}\varphi & 0 \end{pmatrix} \right|$$

VOLUME DELL'ELLISSOIDE ?



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

ELLISSOIDE

Qual'è il cambio di variabile che deforma la sfera unitaria e la fa diventare un ellissoide ?

È lineare

$x = au$
$y = bv$
$z = cw$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u,v,w) = \begin{pmatrix} au \\ bv \\ cw \end{pmatrix}$$

$$\left|\det J(\Phi)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right| = abc$$

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \Omega \text{ ellissoide}$$

$$= \iiint_{\Omega'} abc\, du\,dv\,dw = abc \iiint_{\Omega'} du\,dv\,dw$$

Ω' è la sfera di raggio 1.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{(au)^2}{a^2}+\frac{(bv)^2}{b^2}+\frac{(cw)^2}{c^2}=1$$

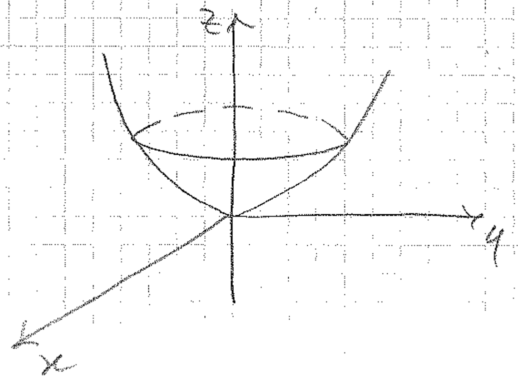
$$u^2+v^2+w^2=1 \quad \text{sfera unitaria!}$$

$$\boxed{\text{Volume ellissoide} = \frac{4}{3}\pi abc}$$

b) ELLITTICO

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$c > 0$



IPERBOLOIDI

Ellissoide

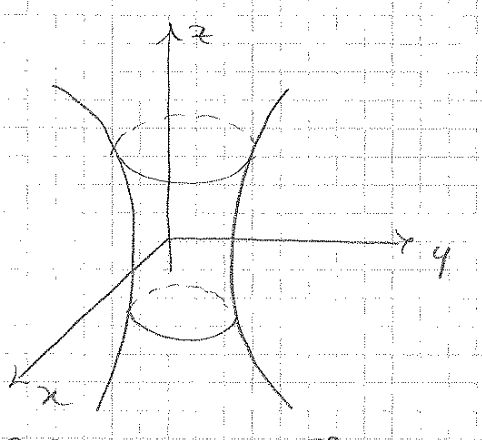
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Iperboloide a 1 falda

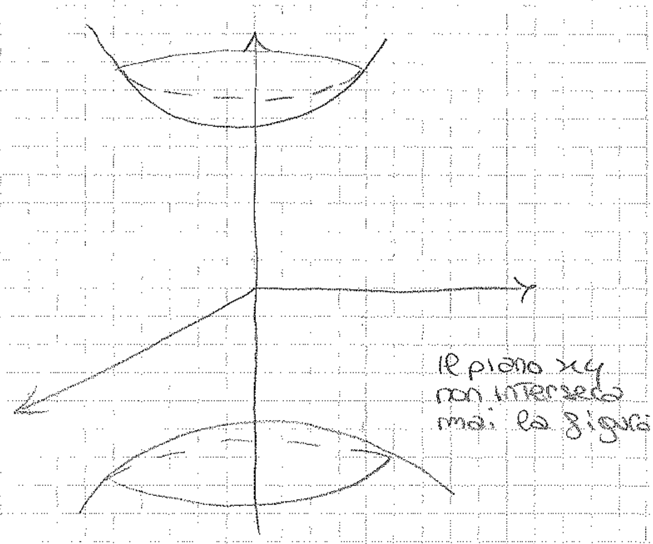
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Iperboloide a 2 falde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

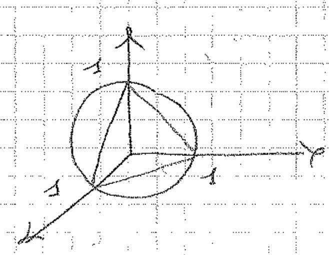


IPERBOLOIDE A 1 FALDA



ESERCIZIO

$$\iiint_{\Omega} z \, dx\,dy\,dz$$

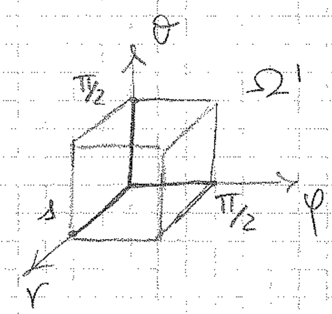


$$\Omega : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{volume}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

1/8 del volume della sfera

COORDINATE SFERICHE



$$\iiint_{\Omega'} r\cos\varphi \cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

BARICENTRO

Baricentro di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

(x_G, y_G, z_G) coordinate baricentro di Ω

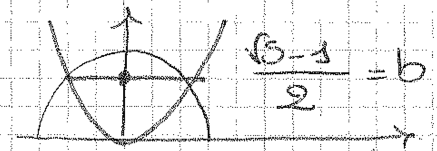
$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \text{Volume di } \Omega$$

- $x_G = \dfrac{1}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} x \, dx\,dy\,dz$
- $y_G = \dfrac{1}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} y \, dx\,dy\,dz$
- $z_G = \dfrac{1}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} z \, dx\,dy\,dz$

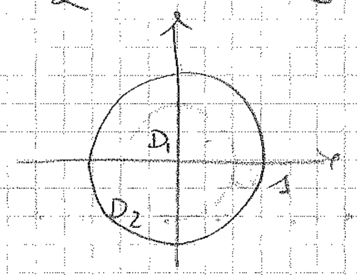
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 168

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad z^2+z-1=0$$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{\sqrt5-1}{2}$$



$$\frac{\sqrt5-1}{2}=b$$



$D=\{x^2+y^2\le 1\}$

$D=D_1\cup D_2$

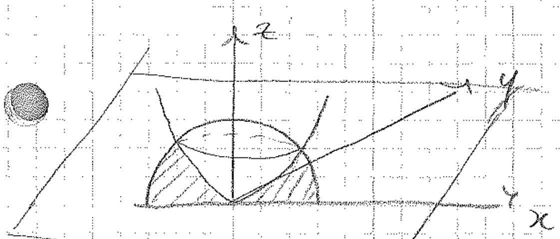
$D_1=\{(x^2+y^2)\le a\}\qquad D_2=\{a\le x^2+y^2\le 1\}$

$$\iiint_\Omega (1-z^2)\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_0^{g(x,y)}(1-z^2)\,dz\right)dx\,dy=$$

per fili // a z.

$$=\iint_{D_1}\left(\int_0^{x^2+y^2}(1-z^2)\,dz\right)dx\,dy+\iint_{D_2}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(1-z^2)\,dz\right)dx\,dy$$

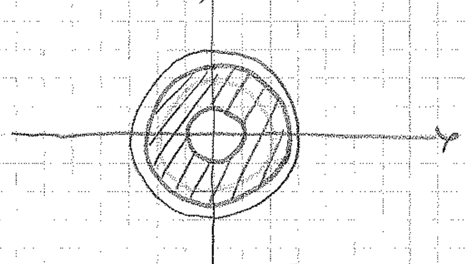
→ Impostiamo lo stesso esercizio PER STRATI



$$0\le z\le\frac{\sqrt5-1}{2}$$

Le intersezioni con un piano // a xy sono CORONE CIRCOLARI

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z \end{cases}$$

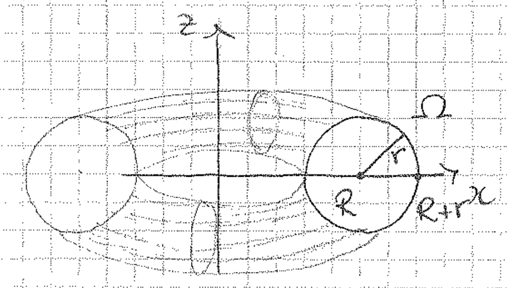


$$A_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad z\le x^2+y^2\le 1-z^2\}$$

$$\iiint_\Omega (1-z^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\frac{\sqrt5-1}{2}}\left(\iint_{A_z}(1-z^2)\,dx\,dy\right)dz$$

ESEMPIO (Applicazione Th di Guldino)

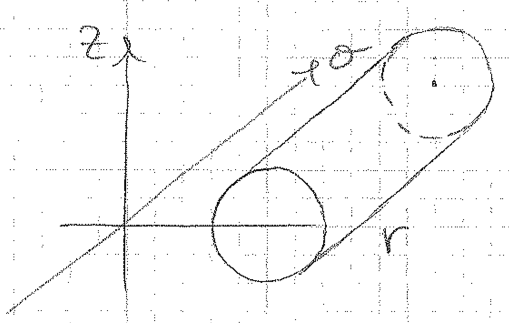
$$\Omega = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + z^2 \leq r^2,\ r \leq R\}$$



Calcolare il volume di rotazione attorno all'asse z.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} r\,dr\,d\theta\,dz = \iint_\Omega \Big(\int_0^{2\pi} \underset{r = x}{x}\, d\theta \Big) dx\,dz =$$

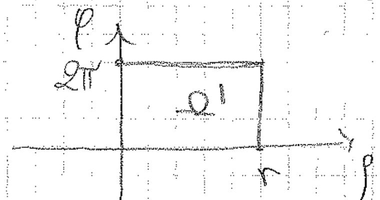


$$= 2\pi \iint_\Omega x\,dx\,dz =$$

Passo a coordinate polari (solo perchè ho un cerchio)

$$\begin{cases} x - R = \rho\cos\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi & 0 \leq \rho \leq r \end{cases}$$

$$= 2\pi \iint_{\Omega'} (R + \rho\cos\varphi)\, \underbrace{\rho}_{|J|}\, d\rho\, d\varphi \quad = 2\pi \int_0^r \Big(\int_0^{2\pi} \big(\underset{R\rho}{\rho^2\cos\varphi} \big) d\varphi \Big) dr =$$



$$= 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} R\rho\, d\varphi\, d\rho + 2\pi \int_0^r \Big(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos\varphi\, d\varphi \Big) d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^r R\rho \cdot 2\pi\, d\rho + \cancel{2\pi \int_0^r \rho^2 \big[\text{sen}\,\varphi\big]_0^{2\pi} d\rho} =$$

$$= 0$$

$$= 4\pi^2 R \Big[\frac{\rho^2}{2} \Big]_0^r = 4\pi^2 \frac{r^2}{2} R = 2\pi^2 r^2 R.$$

$$\text{GULDINO} \longrightarrow 2\pi x_G |\Omega| = 2\pi \underset{x_G}{R} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{|\Omega|}$$

INTEGRALI IMPROPRI

su tutto $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

$B_R = \{(x^2+y^2+z^2) \leq R\}$ sfera di raggio R

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \lim_{R \to +\infty} \iint_{B_R} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz.$$

Se $f(x,y,z)$ è possibile e integrabile (integrabile in val assoluto) su B_R $\forall R$ e il $\lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} |f(x,y,z)|\, dx\,dy\,dz$ esiste finito.

allora diciamo che f è integrabile in modo improprio e il suo integrale in $\mathbb{R}^3$ è il limite

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f\, dx\,dy\,dz = \lim_{R\to+\infty} \iiint_{B_R} f\, dx\,dy\,dz$$

Questo valore non cambia se invece di B_R ho dei parallelepipedi con gli spigoli che tendono a ∞.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2(r,\theta)} e^{-r^2} \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobiano}}\, dr\,d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 168

- $\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ r_0 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ r_0 \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le \pi$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

r_0 è assegnato, costante

RAPPRESENTAZIONE **PARAMETRICA** della superficie

$$\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix}$$

1) $f(x,y,z) = c \qquad f \in C^1 \qquad \vec{\nabla} f \neq \vec{0}$

2) $z = g(x,y) \qquad g \in C^1 \qquad \vec{\nabla} g \neq \vec{0}$

3) $\vec{\sigma}(u,v) \qquad \vec{\sigma} \in C^1$

$$\vec{\sigma}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \vec{\nabla}\sigma_1 \\ \to \vec{\nabla}\sigma_2 \\ \to \vec{\nabla}\sigma_3 \end{matrix}$$

J abbia rango massimo

ricapitolando SUPERFICI ...

1. $f(x,y,z) = c$ IMPLICITE

2. $\begin{cases} z = g(x,y) \\ y = h(x,z) \\ x = l(y,z) \end{cases}$ ESPLICITE

3. $\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix}$ $\quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

PARAMETRICHE

$$= \begin{pmatrix} r_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \\ r_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \\ r_0^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \cdot 1 \end{pmatrix} \quad \text{NORMALE} \quad = \pm \vec{N}$$

$+ \rightsquigarrow$ normale esterna della sfera

$- \rightsquigarrow$ normale verso l'interno della sfera.

calcoliamo la norma di $\vec{N}$:

$$\|\vec{N}\| = \left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \right\| = \sqrt{r_0^4 \operatorname{sen}^4\varphi \cdot 1 + r_0^4 \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{r_0^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cdot 1} = r_0^2 \operatorname{sen}\varphi$$ La norma della normale.

Se la superficie è descritta in forma ESPLICITA

$z = g(x,y) \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\vec{\sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

$y = f(x)$ ESPLICITA

i punti del piano sono la coppia $(x, f(x))$

Voglio trovare la normale:

$$N = \pm \frac{\partial\vec{\sigma}(x,y)}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}(x,y)}{\partial y} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \pm \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normale nel caso di superfici topografiche.

Cerco la norma della normale

$$\|N\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

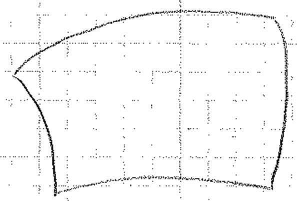
OSSERVAZIONE

Se $\vec{\sigma}(u,v)$ $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ e D è un sottoinsieme aperto allora sicuramente σ è orientabile

Se la superficie σ è bordo di un volume V allora è sicuramente orientabile.

INTEGRALE SUPERFICIALE

$$\int_\Sigma f(x,y,z) \qquad \int_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma$$



$$\int_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D f(\vec{\sigma}(u,v))\, \|N\|\, du\, dv$$

suppongo che Σ sia descritto:

$$\Sigma: \{(x,y,z) \subseteq \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix} \text{ con } (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \}$$

$$N = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}$$

ESEMPIO

Sia $f(x,y,z) = z(y-2x)$

$$\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{16-u^2-v^2} \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in D = \begin{cases} u \leq 0 \\ v \geq 0 \\ u^2+v^2 \leq 16 \\ \frac{u^2}{4} + v^2 \geq 1 \end{cases}$$

Σ sia la superficie descritta da σ. (il sostegno di $\vec{\sigma}$ è la nostra superficie)

Calcolare $\int_\Sigma f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 168

INTEGRALE DI FLUSSO

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$ CAMPO VETTORIALE

$$\int_\Sigma \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{\nu}$$

Σ descritta da $\vec{\sigma}(u,v)$

$$\pm N = \pm \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}$$

$$\vec{\nu} = \frac{\pm N}{\|N\|}$$

$(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_\Sigma \vec{f} \cdot \vec{\nu} = \iint_D \vec{f} \cdot \frac{\pm N}{\|N\|} \|N\| \, du\, dv = \pm \iint_D \vec{f}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \vec{N} \, du\, dv$$

il segno è dato da una ulteriore informazione.

ESEMPIO

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}$$

Σ è descritta dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

superficie sferica di raggio 1 nel primo ottante.

$\vec{\nu}$ orientato in direzione uscente dalla sfera

$$\vec{\sigma}(\varphi,\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$N = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}$$

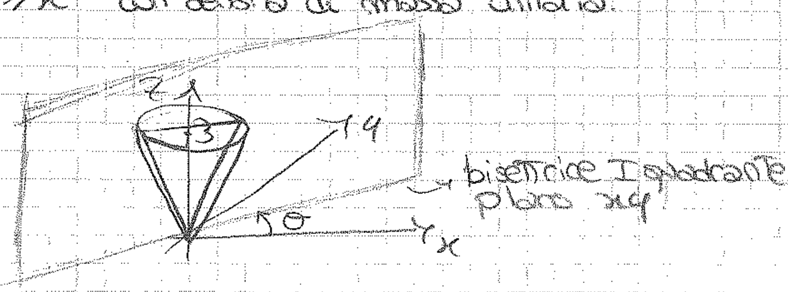
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 168

ESERCIZIO

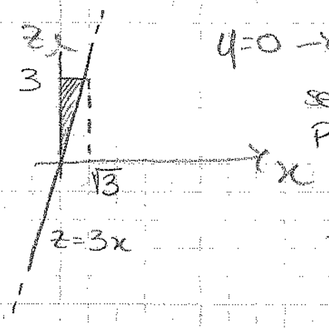
Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z della parte di superficie Σ del cono $z^2 = 3(x^2+y^2)$ per cui si ha $0 \le z \le 3$ e $y \ge x$ con densità di massa unitaria.

Soluzione:

$$\int_\Sigma (x^2+y^2)$$



Parametrizziamo in coordinate cilindriche



$y=0 \to z=\sqrt{3}\,x$

sezione cono nel piano xz

$$\vec{\sigma}(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\theta,\ \sqrt{3}\,r)$$

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le 5\frac{\pi}{4}$$

$$0 \le r \le \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\,\text{sen}\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\theta & \sqrt{3} \\ -r\,\text{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{3}\,r\cos\theta - \sqrt{3}\,r\,\text{sen}\theta + r$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,r\cos\theta \\ -\sqrt{3}\,r\,\text{sen}\theta \\ r \end{pmatrix} = \vec{N}$$

$$\|N\| = \sqrt{3r^2+r^2} = 2r.$$

$$\int_\Sigma \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\, d\sigma = \iint_D r^2 \cdot \overbrace{2r}^{\|N\|}\, dr\, d\theta = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} 2r^3\, d\theta \right) dr =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} 2r^3\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} = \cancel{2}\pi \frac{9}{\cancel{4}_2} = \frac{9}{2}\pi$$

21/11/12

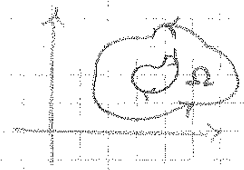
GREEN - GAUSS - STOKES

Nel piano $\mathbb{R}^2$

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}\,\vec{g}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{g}\cdot\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ → Tangente

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\partial\Omega$ bordo di Ω è una curva chiusa (o è unione di curve chiuse)



$$\mathrm{rot}\,\vec{g} = \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}$$

$\vec{\tau}$ è la tangente al bordo $\partial\Omega$ di Ω.

$$\iint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{g}\,dx\,dy = \oint \vec{g}\cdot\vec{\nu}$$

$\vec{\nu}$ → normale

$$\mathrm{div}\,\vec{g} = \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}$$

$\vec{\nu}$ è il versore normale al bordo $\partial\Omega$ di Ω.

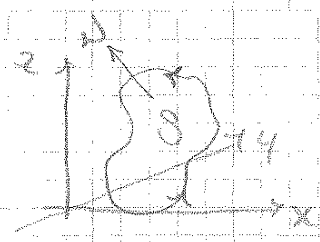
Nello spazio $\mathbb{R}^3$.

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{g}\cdot\vec{\nu} = \oint_{\partial S} \vec{g}\cdot\tau$$

$\vec{\nu}$ → normale

$\oint$ → CIRCUITAZIONE (integrale lungo un cammino chiuso)

S è una superficie con bordo ∂S



$\vec{\nu}$ versore normale alla superficie S

∂S è orientato coerentemente con ν

$$= -\int_c^d \begin{pmatrix} 0 \\ g(\gamma(y), y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'(y) \\ 1 \end{pmatrix} dy + \int_c^d \begin{pmatrix} 0 \\ g(\delta(y), y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta'(y) \\ 1 \end{pmatrix} dy$$

orientamento della curva dovrebbe essere da d a c.

$$= -\int_c^d g(\gamma(y), y)\, dy + \int_c^d g(\delta(y), y)\, dy =$$

$$= \int_c^d \left(g(\delta(y), y) - \int_c^d g(\gamma(y), y) \right) dy$$

Ora risolvo l'integrale doppio (deve venire = risultato):

$$\iint \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy \underset{\text{per orizzontali}}{=} \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\, dx \right) dy =$$

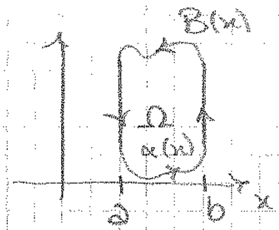
$$= \int_c^d \left[g \right]_{\gamma(y)}^{\delta(y)} dy = \int_c^d \left(g(\delta(y), y) - g(\gamma(y), y) \right) dy$$

Ho ottenuto la stessa cosa!

Abbiamo dimostrato l'identità!

In modo analogo si dimostra che:

$$\iint_\Omega \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial\Omega} h\, dx$$



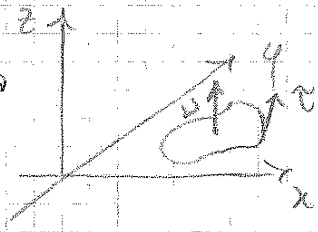
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 168

Voglio pensare questo campo in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\tilde{f}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$ è costante rispetto a z.

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{rot}\, f \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tilde{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Tangente alla superficie



Penso Ω come superficie in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ normale alla superficie.

$$\int_\Omega \vec{\text{rot}}\,\vec{\tilde{f}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \iint_\Omega \text{rot}\,\vec{f}\; dx\,dy$$

il primo membro di Stokes, quando penso a una superficie piana mi da esattamente il primo membro di Green.

Vediamo il secondo membro:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\tilde{f}} \cdot \vec{\tilde{\tau}} = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\tau}$$

Stessa cosa!

→ Stokes pensato nel piano diventa Green.

OSSERVAZIONE 1

il Teorema della divergenza (nel piano o nello spazio) permette di capire il senso della divergenza

$$\iiint \text{div}\,\vec{f}\; dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu}$$

SERIE

- Serie numeriche
- Serie di funzioni
- Serie di potenze
- Serie di FOURIER

SERIE NUMERICHE

$a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{\text{numero finito di addendi}}$$

RIDOTTA ENNESIMA DELLA SERIE

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Il comportamento di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è il comportamento del limite delle ridotte.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

SERIE GEOMETRICA di ragione r.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n =$$

→ Progressione geometrica

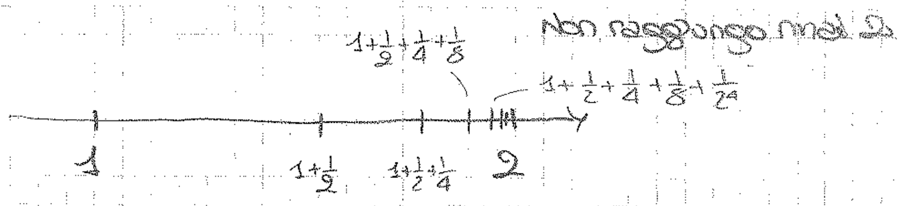
Esempi

① $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ $\qquad r = \frac{1}{2}$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$

Questa serie converge



② $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = +\infty$

$S_n = n+1 \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ ↗

La serie diverge

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$

Ci sono 2 ridotte: quella con indice pari e quella con indice dispari.

$S_{2n} = 1$ indice pari $\xrightarrow{n \to +\infty} 1$

$S_{2n+1} = 0$ indice dispari $\xrightarrow{n \to +\infty} 0$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} S_n$ non esiste

La serie è oscillante (non c'è limite)

④ $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots = +\infty$

$2 > 1$

La serie diverge

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$ ⇝ Per ipotesi la serie converge

$a_n \to 0$ CVD

OSSERVAZIONE

La condizione non è sufficiente
cioè non basta che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ affinché la serie converga.
cioè non è vero che: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ la serie converge $\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right]$

[Per dimostrare che una cosa non è vera si usa un controesempio.]

⇒ CONTROESEMPIO: serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty$$

a_n tende a 0 ma la serie non CONVERGE

OSS.

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0}_{\text{Termine infinitesimo della serie}} \quad e \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty}_{\text{serie divergente}}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2^3}} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2^4}} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{32}}_{\frac{1}{2^5}} + \dots\right.$$

Vediamo che ogni parentesi è $> \frac{1}{2}$.

- $\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) > \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 2^2 \cdot \frac{1}{7} = 2^2 \frac{1}{2^3 - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2^2}} > \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^4 - 1}\right) > 2^3 \cdot \frac{1}{2^4 - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2^3}} > \frac{1}{2}$

ESERCIZI (Prove d'esame)

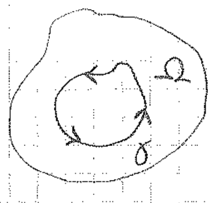
①

$$(x,y) = \left(F_1(x,y) + x^3,\ F_2(x,y) - y^2\right)$$

definite G e F_1 e F_2 in Ω semplicemente connesso, $F = (F_1, F_2) \in C^1$ ed è conservativo cioè $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \frac{\partial (F_2 - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial (F_1 + x^3)}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

Dunque G è conservativo e quindi $\int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{P} = 0$ per ogni γ chiuso, semplice e regolare



$\boxed{\text{RISPOSTA D}}$

②

A) S_n limitata non implica che la serie converga.

B) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ condizione necessaria! NON SUFFICIENTE non implica che la serie converga.

C) $\lim_{n \to \infty} S_n$ esiste → Non implica la convergenza perchè potrebbe esistere infinito.

D) CORRETTA ⇝ $\lim_{n \to \infty} S_n$ esiste finito significa che la serie converge.

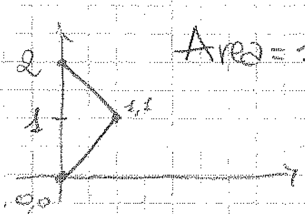
⑤

Sia T il triangolo di vertici $A = (0,0)$ $B(1,1)$ $C(0,2)$ la circuitazione del campo

$$F(x,y) = \left(2e^{2x}\operatorname{sen}(3y) + 2y,\ 3e^{2x}\cos(3y) - 5x\right)$$

sul bordo di T orientato in senso antiorario vale:

TEOREMA DI GREEN



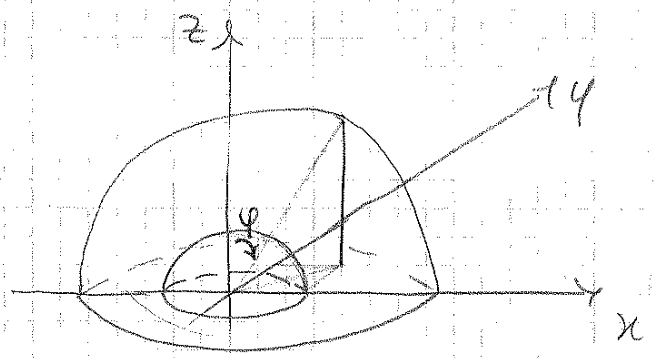
Area = 1 (Posso integrare verticale o orizzontale)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 168

$$\iiint_D 18 z^5 \, dx dy dz$$

COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$1 \le \theta \le 2\pi$$

$$1 \le r \le \sqrt{2}$$

$$\iiint_D 18 z^5 \, dx dy dz = \iiint_{D'} 18 r^5 \cos^5\varphi \cdot \underbrace{r^2 \operatorname{sen}\varphi}_{|\det J|} \, dr \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} 18 r^7 dr \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \left[18 \frac{r^8}{8} \right]_1^{\sqrt{2}} \left[-\frac{\cos^6\varphi}{6} \right]_0^{\pi/2} 2\pi = \left(18 \cdot \frac{16}{8} - \frac{18}{8} \right) \frac{1}{6} 2\pi =$$

$$= \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{8}_{4}} 15 \cdot \frac{1}{\cancel{6}} \cdot 2\pi = \frac{45}{4}\pi$$

3

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + \frac{1}{25} y^2 \le 1 , \; y \ge 0 \}$$

$$\iint_D \left(4(x-3) + 3y \right) dx dy$$

$$(x-3)^2 + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

ellisse di dimensioni 1 e 5 e centro (3,0)