Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 525

DATA: 22/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Paradisi

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Chiadò - Piat

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 214

TESTI:

- C. Canuto, A. Tabacco, Analisi matematica, 3^ edizione, Springer, (CT)
- S. Lancelotti, Esercizi di analisi matematica I, Celid, 2010 (L)

www.didattica-online.polito.it

SQUADRA B

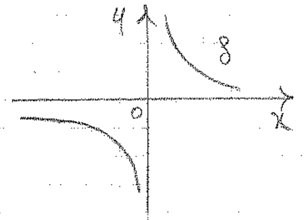
ANALISI → studia le funzioni (reali o complesse)

STRUMENTI:
- limite
- derivata
- integrale

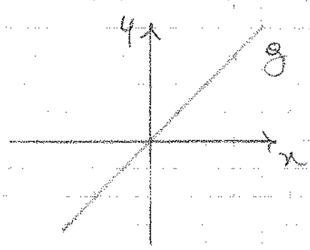
PROBLEMI:
- operazioni con infinitesimi e infiniti
- risoluzioni di equazioni differenziali

ANALISI MATEMATICA → calcolo infinitesimale

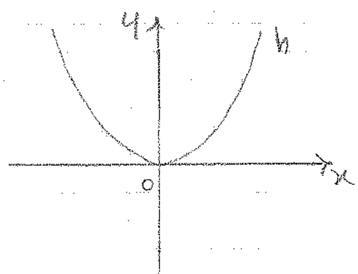
- $y = f(x) = \frac{1}{x}$



- $y = g(x) = x$



- $y = h(x) = x^2$



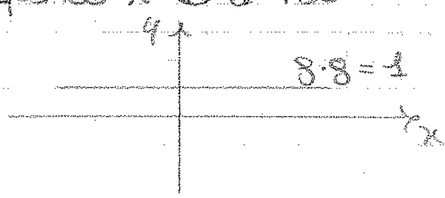
$x \to +\infty$ (se cambio x, cambia $f(x)$ ⤳ non è costante)

- $f(x) \to 0$ - $g(x) \to +\infty$ - $h(x) \to +\infty$

OPERAZIONI ALGEBRICHE

Come si comporta il prodotto quando x va a $+\infty$

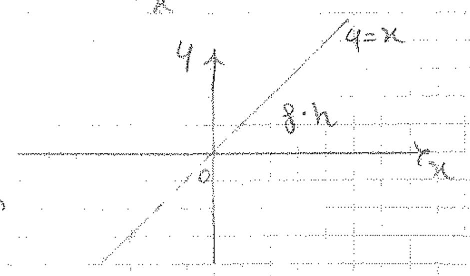
- $y = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot x = 1$



se $x \to +\infty$ $f \cdot g = 1$

- $y = f(x) \cdot h(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ ⤳ operazioni con infinitesimi e infiniti.

se $x \to +\infty$ $f \cdot h \to +\infty$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 214

LOGICA MATEMATICA

- proposizioni
- connettivi logici
- predicati
- quantificatori

Proposizioni: qualsiasi affermazione di cui possiamo affermare con certezza se il contenuto è vero o falso.

p= Fabrizio si è iscritto ad ingegneria V

q: 2 è maggiore di 3 F

Connettivi logici

- negazione ¬ (non) afferma il contrario di p. Cambia il valore di verità della proposizione a cui si affianca.

p	¬p
V	F
F	V

- congiunzione ∧ (e) $p \wedge q$ afferma contemporaneamente il valore di p e di q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	F	F
V	F	F
F	V	F

- disgiunzione ∨ (o) $p \vee q$ è vera almeno una delle due. Afferma che si verifica almeno una delle due affermazioni contenute in p e q

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	F	F
V	F	V
F	V	V

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 214

Proprietà:

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ commutativa sia per $\wedge$ che per $\vee$
2. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ associativa sia per $\wedge$ che per $\vee$
3. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$ NO
4. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ distributiva.
5. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ NO
6. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

PREDICATO: affermazione contenente variabili

$p(x)$: x è pari

$p(x,y)$: $x+y=0$

$p(x)$: il triangolo x è isoscele.

Si trasforma in PROPOSIZIONE se:

- le variabili sono sostituite da costanti
- le variabili vengono "quantificate"
- si combinano i 2 casi precedenti

Modo per quantificare le variabili

▷ far precedere la variabile da un quantificatore

QUANTIFICATORI

$\forall$ "per ogni" quantificatore universale

$\exists$ "esiste almeno" quantificatore esistenziale

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ naturali

$\mathbb{Z}$ interi

$\mathbb{Q}$ razionali $\{p/q \mid p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ reali

$\mathbb{C}$ complessi

$\exists x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari [/ : "tale che"]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 214

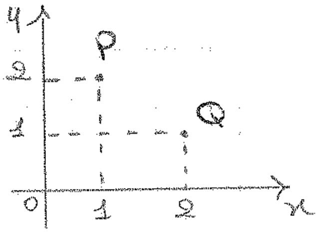
PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

A, B insiemi qualsiasi

Sia $x \in A$, $y \in B$

(x,y) **COPPIA** ordinata in cui x è la I componente e y è la II componente.

L'ORDINE È VINCOLANTE ⇝ se li scambio ottengo una coppia diversa.



$P(1,2)$

$Q(2,1)$

(x,y) coppia

$\{x,y\}$ insieme (li posso scambiare)

$(1,1)$ → punto sul piano cartesiano

$\{1,1\} = \{1\}$

$A \times B$ prodotto cartesiano di A e B (nell'ordine)

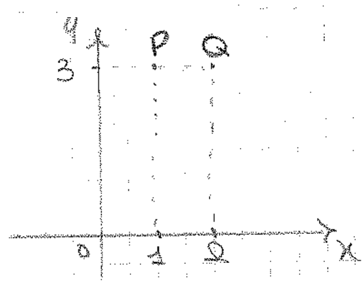
È l'insieme di TUTTE le coppie con I componente in A e II componente in B

$A \times B = \{(x,y) : \forall x \in A, \forall y \in B\}$

$A = \{1,2\}$

$B = \{3\}$

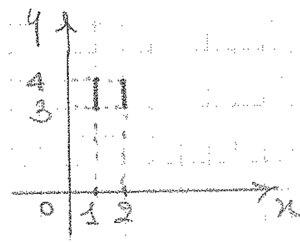
$A \times B = \{(1,3), (2,3)\}$



$A = \{1,2\}$

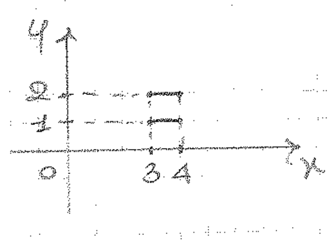
$B = [3,4]$

$A \times B = \{(x,y) : x \in \{1,2\}, 3 \leq y \leq 4\}$



sono simmetriche rispetto a $y = x$

$B \times A = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 4, y \in \{1,2\}\}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 214

$\mathbb{N}$ è un insieme LIMITATO

↳ è contenuto in un intervallo.

$[0,1]$ è un insieme INFINITO e LIMITATO

C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$? SI

$1 \to 2 \quad 3 \to 4 \quad 5$

$1/2 \quad 2/2 \quad 3/2 \quad 4/2 \quad 5/2$

$1/3 \quad 2/3 \quad 3/3 \quad 4/3 \quad 5/3$

$1/4 \quad 2/4 \quad \dots$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è NUMERABILE

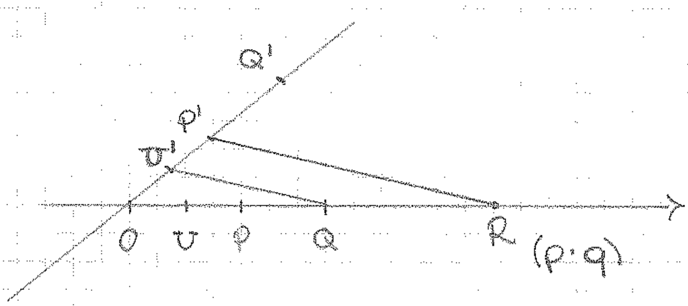
C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ è l'insieme di tutti i punti della retta (delle ascisse dei punti del piano)

- $\mathbb{Q}$ RAZIONALI ⇝ retta con dei buchi
- $\mathbb{R}$ REALI ⇝ retta continua

↳ insieme COMPLETO

In $\mathbb{R}$ si conservano le operazioni $+, \cdot$ con le loro proprietà



$\overline{OR} = p \cdot q$

$U'Q \parallel P'R$

$+, \cdot$ soddisfano tutti gli assiomi algebrici già validi in $\mathbb{Q}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 214

ES

$A = [2,5) = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5\}$

$B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$C = \{1/n \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

Calcola i MAGGIORANTI e i MINORANTI di questi insiemi

$M(A) = [5; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$ $\quad 5 \notin A$

$m(A) = (-\infty; 2] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$ $\quad 2 \in A$

$M(B) = \emptyset$ (B non ha maggioranti)

$m(B) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\} = (-\infty; 0]$

$M(C) = [1; +\infty)$

$m(C) = (-\infty; 0]$ $\quad 0 \notin C$

- Maggioranti e minoranti non sempre esistono
- Se esiste un maggiorante o un minorante allora ne esistono infiniti

- A si dice SUPERIORMENTE LIMITATO se ha maggioranti
- A si dice INFERIORMENTE LIMITATO se ha minoranti

↳ A si dice LIMITATO se è sia superiormente, sia inferiormente limitato.

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$
- M è MASSIMO di A se:
  1) M è un maggiorante di A
  2) $M \in A$
- m è MINIMO di A se:
  1) m è un minorante di A
  2) $m \in A$

ES

Calcola i MASSIMI e i MINIMI di A, B, C.

Massimi di A → $\nexists$ M che sia MAX di A

minimi di A → 2 è minimo di A

Massimi di B → $\nexists$ M che sia MAX di B

minimi di B → 0 è minimo di B

Massimi di C → 1 è MAX di C

minimi di C → $\nexists$ m che sia min di C

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 214

ASSIOMA di COMPLETEZZA di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ vale il principio dell'estremo superiore che afferma che qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A superiormente limitato, allora esiste l'estremo superiore di A $S = \sup A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ vale l'assioma analogo per l'estremo inferiore

Conseguenze

Teorema (ESISTENZA DELLA RADICE n-ESIMA)

$\forall y \in \mathbb{R},\ y > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$\Rightarrow \exists!\ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \ /\ x^n = y \qquad x = \sqrt[n]{y}$

es

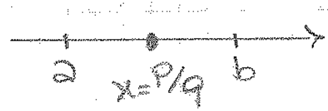
$x^2 = 2 \qquad 2 = y > 0$

$\qquad\qquad n = 2$

Teorema (DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$\exists x \in \mathbb{Q} \ /\ a < x < b$



corollario...

Ogni numero reale si può approssimare per eccesso o per difetto con la precisione voluta mediante un numero razionale.

$\Rightarrow$ PROPRIETÀ

sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sia $S \in \mathbb{R}$

(1) se S è il max dell'insieme A allora è anche estremo superiore

(2) se $S = \sup A$ e $S \in A$ allora $S = \max A$ (analogo x min)

es

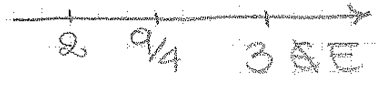
$E = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \ /\ n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \}$

$E \subseteq \mathbb{Q}$

$1 < x \qquad n = 1 \rightarrow (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$

$\qquad\qquad n = 2 \rightarrow (1 + \frac{1}{2})^2 = 9/4$

$\qquad\qquad n = 3 \rightarrow (1 + \frac{1}{3})^3 = \ldots$



$\forall x \in E \quad 2 < x < 3$ (da dimostrare)

[illegible]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 214

es

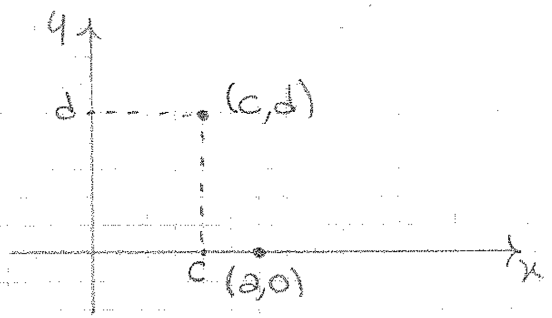
$$\underbrace{(0,1)}_{i}\cdot(0,1) = (-1;0) \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{i\cdot i = (i)^2 = -1}$$

Come opera il prodotto tra un reale e un altro numero?

$$\underbrace{(a,b)}_{\in\mathbb{R}}\cdot(c,d)$$

$b=0 \qquad (a,0)\cdot(c,d) = (ac, ad) = a\cdot(c,d)$



$\frac{ad}{ac} = \frac{d}{c}$ il risultato si trova sulla stessa retta di (c,d)

$(a,0) = a$

$(0,b) = b(0,1)$

$= (b,0)(0,1)$

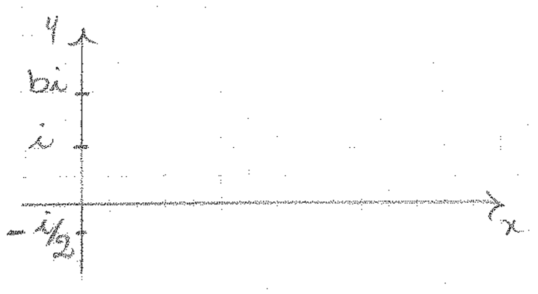
↳ $= (0,b)$ ✓

↳ $\boxed{(0,b) = b\underline{(0,1)} \quad \forall b \in \mathbb{R}}$

$(0,1) = i$

$(0,b) = bi$

↳ numeri che stanno nell'asse y ▷ IMMAGINARI PURI



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 214

$$(a,b) = (a,0) + (0,b)$$
$$= a + bi$$

$(a,b) = a + bi$ è un numero complesso in FORMA CARTESIANA o ALGEBRICA

Anche il prodotto che abbiamo definito verifica le proprietà (commutativa, associativa ...) del prodotto reale.

$(a,b) \cdot (c,d)$

→ opero come per algebra reale
unica cosa da ricordare $i^2 = -1$

$$\to (a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$
$$= \underbrace{ac - bd}_{A} + i\,\underbrace{(ad+bc)}_{B}$$

es

$$z = (2-i)^2 + (1+i)\,i$$
$$= 4 - 4i + i^2 + i + i^2$$
$$= 2 - 3i$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un CAMPO

$i > 0$ → moltiplico per i $\quad ii > 0i$

$-1 > 0$ NO

Non riusciamo a conservare l'ORDINAMENTO reale

$z \in \mathbb{C}$

$z = (x,y) = x + iy$

x = parte reale di z = $\mathrm{Re}\,z$

y = parte immaginaria di z = $\mathrm{Im}\,z$

se $z = 2 - 3i \Rightarrow \mathrm{Re}\,z = 2$
$\mathrm{Im}\,z = -3$

se $z = i \Rightarrow \mathrm{Re}\,z = 0$
$\mathrm{Im}\,z = 1$

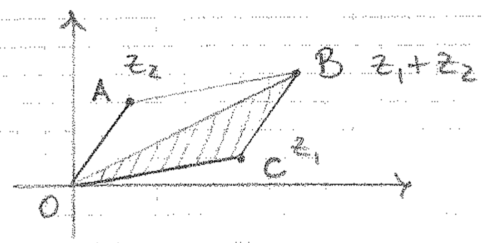
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 214

Se consideriamo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$|z_1 + z_2| = \overline{OB}$

$|z_1| = \overline{OC} = \overline{AB}$

$|z_2| = \overline{OA} = \overline{BC}$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

↳ corrisponde alla proprietà dei triangoli per cui ciascun lato ha lunghezza inferiore alla somma degli altri due.

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$|z_1 + z_2| = |(a+ib+c+id)| = |\underbrace{a+c}_{x} + i \underbrace{(b+d)}_{y}|$

$= \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \dots$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \dots \neq |z_1 + z_2|$

$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{[(a+ib)+(c+id)]} = \overline{\underbrace{(a+c)}_{x} + i \underbrace{(b+d)}_{y}}$

$= (a+c) - i(b+d) =$

$= (a-ib) + (c-id) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

$(A+B)(A-B) = (A^2 - B^2)$

NB

$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 214

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$x^2+y^2=0 \iff x=0 \wedge y=0$ se $x^2+y^2 \neq 0$

es

$$\frac{3+5i}{2+3i} = \frac{1}{2+3i}(3+5i) \dots$$

es

- $z=(2-i)^2 \cdot \frac{1}{i} - (\overline{1+3i}) \cdot 2i$

TROVA Re z e Im z

$4-4i+i^2 \cdot \frac{1}{i} - (1-3i)\cdot 2i =$

$4-4i-1 \cdot \frac{-i}{1} - (2i-6i^2) = (3-4i)\cdot(-i)-(2i+6) =$

$= -3i+4i^2-2i-6 = -5i-4-6 = -5i-10$

$= -10-5i$

$-10 = \text{Re}\,z$

$-5 = \text{Im}\,z$

- EQUAZIONE

$iz+2\bar{z}=9$

Determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ / valga $iz+2\bar{z}=9$

$z=x+iy$ sostituisco a z la forma algebrica e trasformo l'equazione complessa in 2 equazioni reali.

$i(x+iy)+2(x-iy)=9$

$ix+i^2y+2x-2iy=9$

$i(x-2y)-y+2x-9=0$

$2x-y-9+i(x-2y)=0 \quad (0+i0)$

$$\begin{cases} 2x-y-9=0 \\ x-2y=0 \rightarrow x=2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 2y-y-9=0 \rightarrow 3y=9;\ y=3 \\ x=2y \end{cases}$$

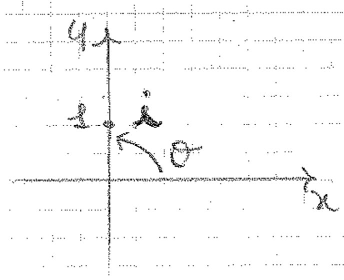
$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \qquad z=x+iy \Rightarrow z=6+i3.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 214

ES

i



$\rho = 1$

$\theta = \pi/2$

$i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\pi/2)$

PRODOTTO

$z_1 = (x_1 + iy_1) = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$

$z_2 = (x_2 + iy_2) = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\, i\,\text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)] =$$

$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho$

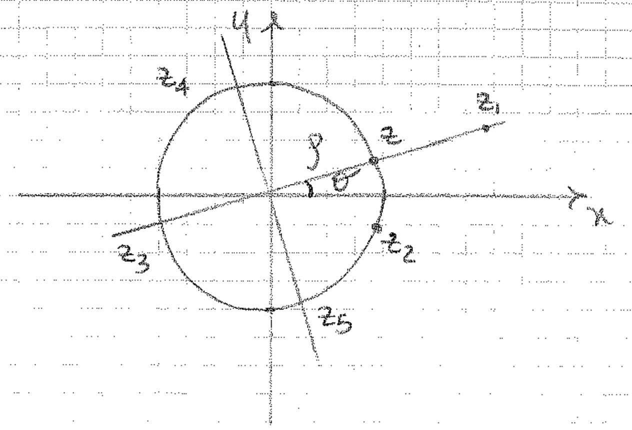
$$= \rho\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)] =$$

$\theta_1 + \theta_2 = \theta$

$$= \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 214



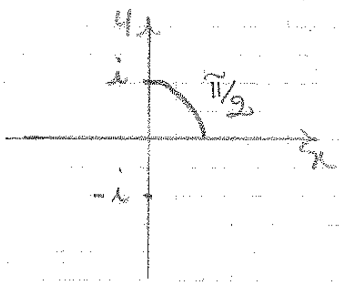
z_1 a distanza doppia da O $\Rightarrow z_1 = 2\rho e^{i\theta} = 2z = 2(x+iy) =$
$= (2x) + i(2y)$

z_2 simmetrico rispetto all'asse x $\Rightarrow z_2 = \rho e^{-i\theta}$
$z_2 = x - iy = \bar{z}$

$$z_3 = \rho e^{i(\theta+\pi)} = -(x+iy) = -x-iy = -z$$
$$z_4 = \rho e^{i(\theta+\pi/2)} = \rho e^{i\theta} e^{i\pi/2} = \rho e^{i\theta}\cdot i = z\cdot i$$
$$z_5 = \rho e^{i(\theta-\pi/2)} = \rho e^{i\theta}\cdot \underbrace{e^{-i\pi/2}}_{i^{-1}} = \rho e^{i\theta}\cdot i^{-1}$$

$$z = x+iy = \rho e^{i\theta}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$z^{-1} = (\rho e^{i\theta})^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta} \Rightarrow z^{-n} = \rho^{-n}\cdot e^{-in\theta}$$



$$i = 1\cdot e^{i\pi/2}$$
$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = -i$$
$$i^{-1} = (e^{i\pi/2})^{-1} = e^{-i\pi/2}$$

NB

Risolvere

$z^n = w$

w è dato, z è l'incognita

Se z è una soluzione dell'equazione, diremo che z è una radice n-esima del numero w.

- Scrivere z e w in forma esponenziale:

$w = \rho e^{i\theta}$

$z = re^{i\varphi}$ $\qquad$ ρ e θ noti, r e φ da trovare.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 214

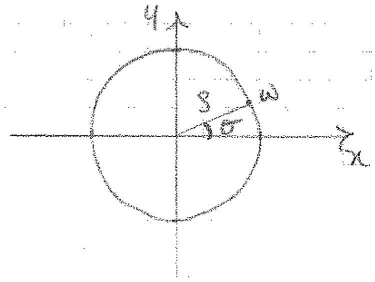
Se $m=2$

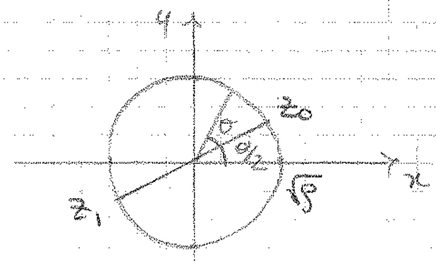
$z^2 = w$, le soluzioni sono due, dette radici quadrate di w.

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \varphi_k = \dfrac{\theta}{2} + k\dfrac{2\pi}{2} \end{cases} \qquad \forall k = 0, 1$$

$\varphi_0 = \dfrac{\theta}{2}$

$\varphi_1 = \dfrac{\theta}{2} + \pi$





$z_1 = -z_0$

$z_0 = -z_1$

$\sqrt{w} = z_0, -z_0$ Doppio segno come x i reali, poi però si deve interpretare bene geometricamente.

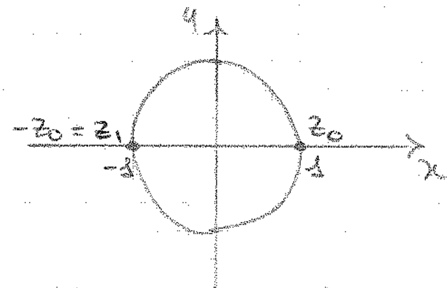
$z^m = 1$ il numero 1 che radici ha in campo complesso?

Se z è soluzione allora z è una radice m-esima di 1:

$\boxed{z^2 = 1}$

$\boxed{z^3 = 1}$

$z^4 = 1$



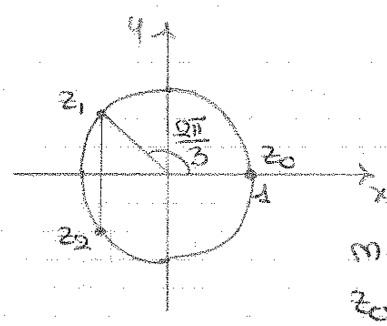
$\rho = 1$

$\theta = 0 \quad (0 + 2k\pi)$

$r = \sqrt[m]{\rho} = \sqrt[m]{1} = 1$

$m = 2$ 2 soluzioni

↳ x forza si trova in questa posizione opposta.



$m = 3$

$z_0 = 1$

$z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2 = 1 \cdot e^{i 2 \frac{2\pi}{3}}$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 214

Es

$P_5(z) = z^2 (z-i)(z+3-2i)^2$

↳ polinomio di grado 5.

$K=3$ $\quad z_1 = 0 \quad m_1 = 2$ xkè z è alla potenza 2

$z_2 = i \quad m_2 = 1$ xkè compare una volta solo il fattore $z-1$ alla I

$z_3 = -3+2i \quad m_3 = 2$ xkè compare una volta solo questo fattore con potenza II.

Caso particolare...

se $P_n(z)$ ha tutti i coefficienti reali $(a_n, a_{n-1} \dots a_0 \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \forall z_0$ radice di $P_n(z) \Rightarrow \overline{z_0}$ è ancora radice.

$P_n(z_0) = 0$

Che succede se metto il CONIUGATO?

$$\begin{aligned} P_n(\overline{z_0}) &= a_n (\overline{z_0})^n + \dots \\ &= a_n (\overline{z_0^n}) + \dots \\ &= \overline{a_n z_0^n} + \dots = \overline{P_n(z_0)} = 0 \end{aligned}$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE
didattica online 6-9

EQUAZIONI di 2° GRADO in $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightsquigarrow \text{in } \mathbb{R}$$

Formalmente vale anche in campo complesso.

se $\Delta < 0$ questa formula è valida.

es

$z^2 + 3iz - (2+i) = 0$

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 4(2+i)}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+8+4i}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-1+4i}}{2}$$

$\boxed{w = -1 + 4i}$

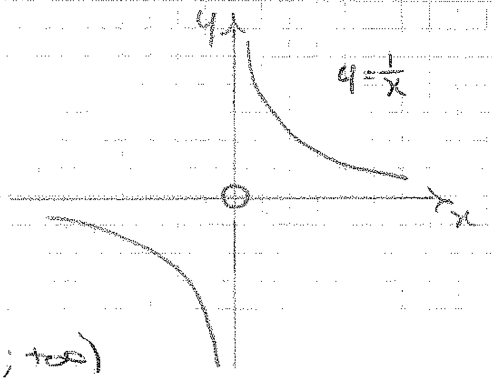
Devo trovare le sue due radici quadrate
sto cercando dei numeri complessi il cui quadrato è questo numero qui. Perchè adesso non so riconoscere l'angolo e seno e coseno non sono noti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 214

Es

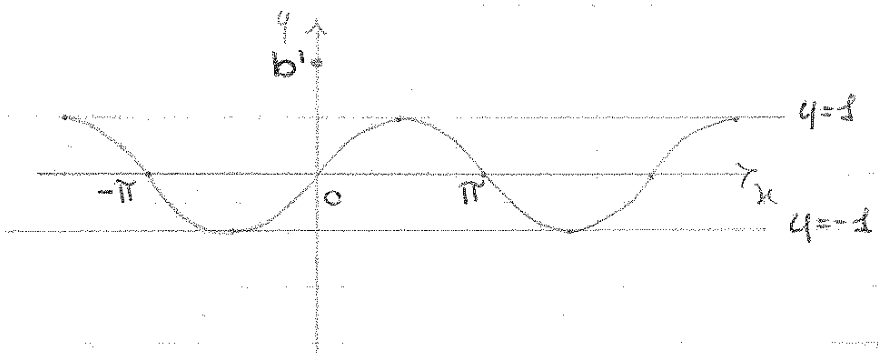
- $g(x) = \frac{1}{x}$



$\text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$
$= (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

- $y = \text{sen}\, x$



$\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$
$\text{Im}\, g = [-1, 1]$

$b' = 2$ le controimmagini di 2 sono le $x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 2$

$\underline{\text{sen}\, x = 2}$ soluzione dell'equazione

↳ Questa equazione non ha soluzione ⇒ NON ci sono CONTROIMMAGINI

$g^{-1}(2) = \{\text{controimmagini di } 2\}$

↳ $g^{-1}(\{2\})$

$g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \text{sen}\, x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

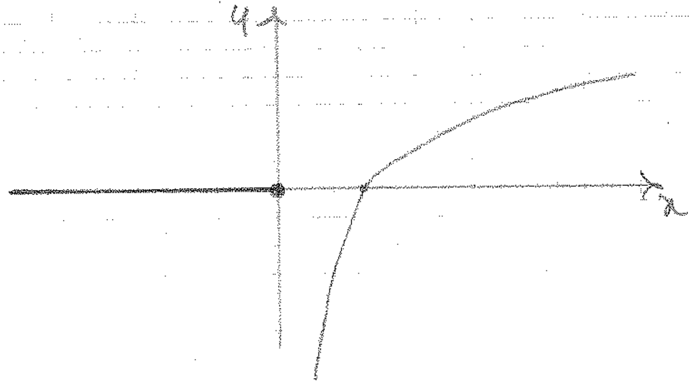
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 214

Es

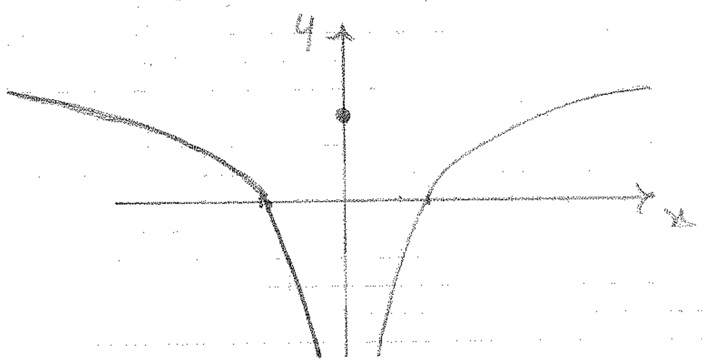
Definisco una **ESTENSIONE** di $y = f(x) = \log x$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \text{dom} f(x) \Rightarrow x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Se volessi un'estensione PARI

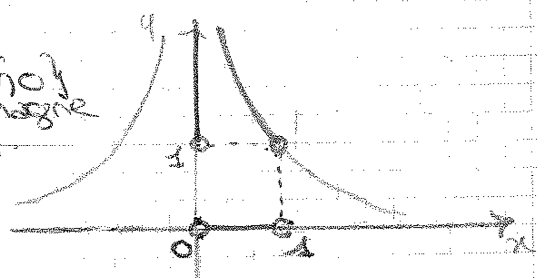
$$h(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



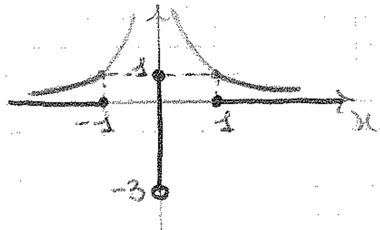
Es

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$
0 non ha immagine xké ∉ dom f



- $f([0,1)) = (1, +\infty)$



- $f^{-1}((-3, 1])$

$-3 < \frac{1}{x^2} \leq 1$

$$\begin{cases} -3 < \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}((-3, +1]) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 214

Es

1. $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

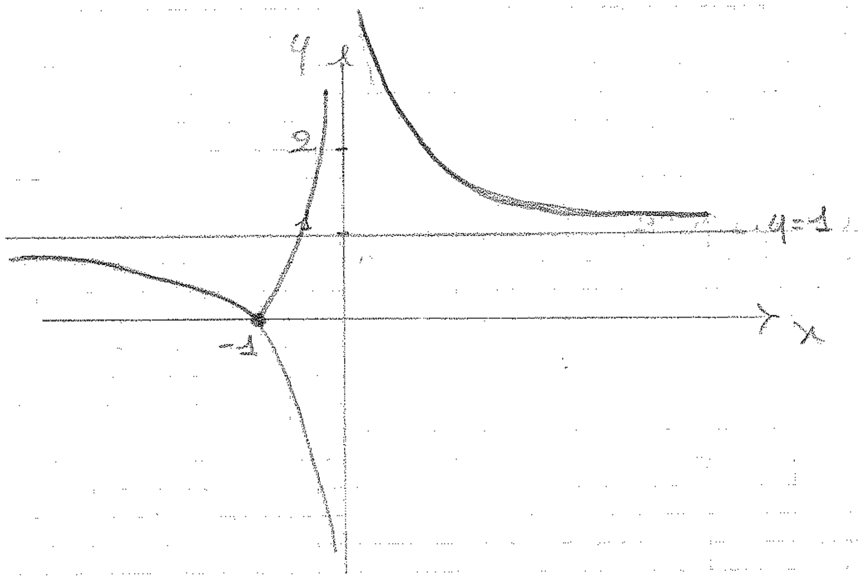
- Determina la controimmagine dell'intervallo $(-1, 8)$

$\{x \in \mathbb{R} \ / -1 < f(x) < 8\}$

$$\begin{cases} f(x) < 8 \\ f(x) > -1 \end{cases}$$

2. $f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|$

- Disegna il grafico della funzione
- Determina l'immagine degli insiemi $(-\infty; -1]$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$
e la controimmagine degli insiemi $\{1\}$, $[1, 2]$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$



$f((-\infty, -1]) = [0, 1)$
$f((-1, 1)) = (0, +\infty)$

$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} = 1 + \frac{1}{x} = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 214

FUNZIONE SURIETTIVA

- Una funzione si dice suriettiva se ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine
- (=) $\forall y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ / $f(x) = y$
- (=) $\forall b \in B$ l'equazione $f(x) = b$ ha almeno una soluzione

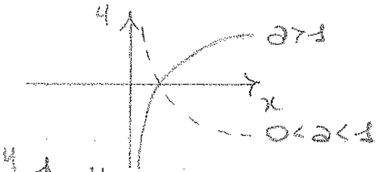
Se scelgo come codominio $B = \text{Im} f$, allora f è certamente suriettiva

↳ La SURIETTIVITÀ è una proprietà che si può avere scegliendo il codominio giusto.

→ QUALI FUNZIONI SONO SURIETTIVE IN TUTTO $\mathbb{R}$?

$f(x) = x^{2n+1}$

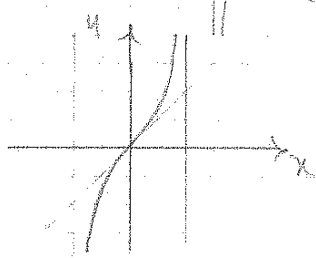
$f(x) = \log_a x$



$f(x) = \text{Tg}\, x$

$\text{Tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

↳ periodo π



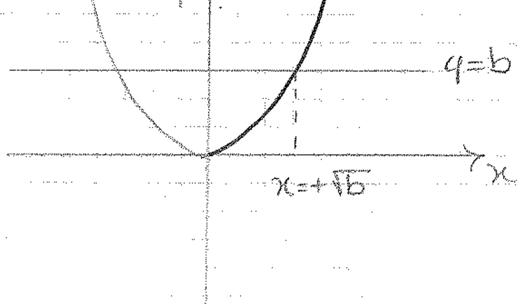
$\frac{\pi}{2} + k\pi \notin$ dominio

FUNZIONE BIETTIVA

Una funzione si dice BIETTIVA se è sia iniettiva, sia suriettiva.

es $f(x) = x^2$ Ha restrizioni iniettive?

Si



$A = [0, +\infty)$

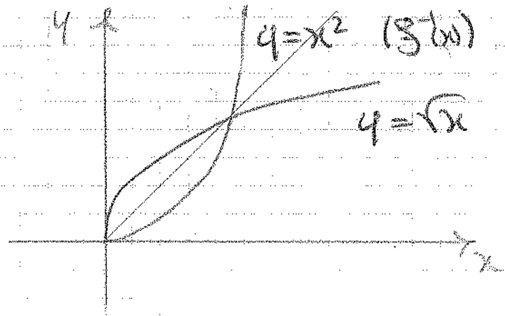
$B = (-\infty, 0\,]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 214

$y = f(x) = \sqrt{x} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$y = f^{-1}(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



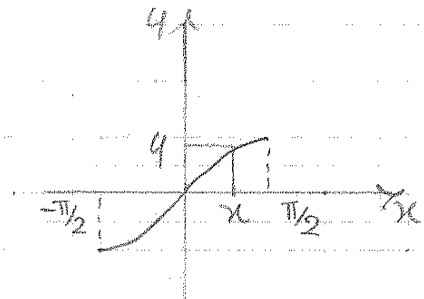
(a,b) sta nel grafico di $f \Leftrightarrow (b,a)$ sta nel grafico di f^{-1}

Coppie di funzioni inverse

- $f(x) = y = x^3$ $\quad f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = y = x^{2n+1}$ $\quad f^{-1}(x) = y = \sqrt[2n+1]{x}$
- $f(x) = x^n$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

  ↳ con la giusta restrizione.

- $f(x) = \text{sen}\,x$ $\quad x \in [-\pi/2; \pi/2]$



$f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ è BIETTIVA

$x \longmapsto y = \text{sen}\,x$

$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$

$\forall x \in [-1, 1] \rightarrow f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \text{sen}\,y = x$

y si chiama arcoseno di x

$y = \text{arcsen}\,x$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 214

- FUNZIONE CRESCENTE
  $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE
  $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \;/\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- FUNZIONE DECRESCENTE
  $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \;/\; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- FUNZIONE STRETTAMENTE DECRESCENTE
  $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f \;/\; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ES

$f(x) = x^2$

$I = [0, +\infty)$

su I è monotona

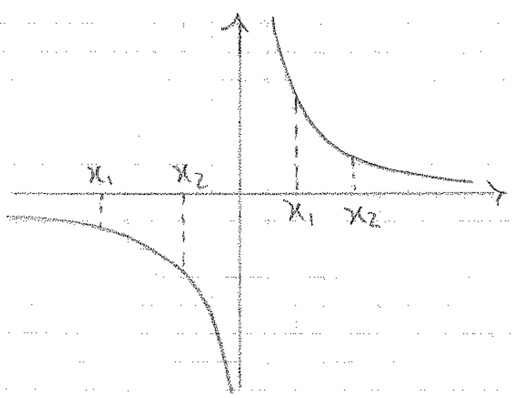
è strettamente crescente

$J = (-\infty; 0]$

su J è monotona

è strettamente decrescente.

$f(x) = \frac{1}{x}$



Non è monotona GLOBALMENTE

Ha restrizioni strettamente decrescenti

$(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$

$\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 < 0$

$f(x_1) > f(x_2)$

$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

INIETTIVA	$\overset{?}{\longleftrightarrow}$	STRETTAMENTE MONOTONA
	$\not\Rightarrow$	
	$\Leftarrow$	

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 214

<u>Es</u>

① $f(x) = x+1$ $\quad A=\mathbb{R} \quad B=\mathbb{R}$
$g(x) = x^2$ $\quad C=\mathbb{R} \quad D=[0,+\infty)$

$B=C \Rightarrow$ Posso fare la composizione senza preoccuparmi

$x \xmapsto{f} f(x) = (x+1) = y \xmapsto{g} y^2 = (x+1)^2$

$\rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \rightsquigarrow g(x+1) = (x+1)^2$
$\rightsquigarrow (f(x))^2 = (x+1)^2$

② $f(x) = x^2$ $\quad A=\mathbb{R} \quad B=[0,+\infty)$
$g(x) = x+1$ $\quad C=\mathbb{R} \quad D=\mathbb{R}$

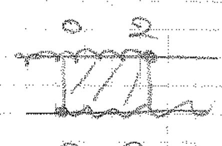
$B \subseteq C \Rightarrow$ Posso fare la composizione

$\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$

$\rightarrow g(f(x)) = \rightsquigarrow g(x^2) = x^2+1$
$\rightsquigarrow f(x)+1 = x^2+1$

$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$ la composizione di funzioni <u>non</u> è commutativa.

③ $f(x) = 2-x^2$ $\quad A=\mathbb{R} \quad B=(-\infty; 2]$
$g(x) = \sqrt{x}$ $\quad C=[0,+\infty) \quad D=[0,+\infty)$



$B \cap C$

$B \cap C = [0,2] \neq \emptyset$

$g(f(x)) = \rightsquigarrow g(2-x^2) = \sqrt{2-x^2}$
$\rightsquigarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{2-x^2}$

$2-x^2 \geq 0$
$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ dominio f composta $= \{x / f(x) \in \text{dom}\, g\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 214

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \geq 1\}$

Se un punto $(x_0, y_0) \in A$

$(\frac{1}{2}, 3) \in A \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 3) \in A$

$(\frac{1}{2}, -3) \in A$

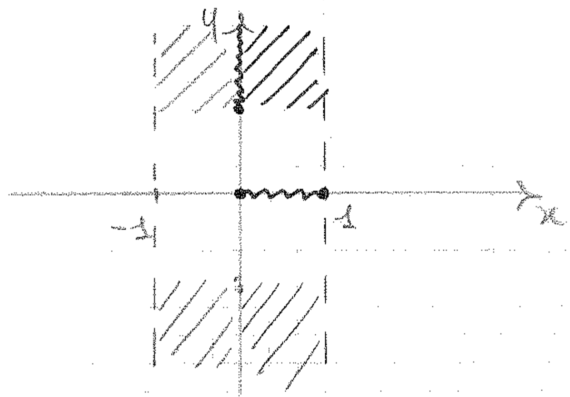
$(-\frac{1}{2}, -3) \in A$

A è simmetrico rispetto a $\vec{y}$ e anche rispetto a $\vec{x}$

$\Rightarrow$ Posso studiare $A \cap Q_1$ e poi ribaltare il risultato rispetto sia $\vec{x}$ sia $\vec{y}$

↳ I QUADRANTE

$A \cap Q_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$



ESERCIZIO X CASA

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g(x) = e^x$

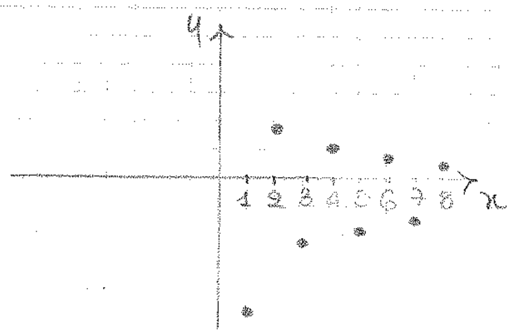
- Fai la composizione nei 2 sensi $g(f(x))$ $\quad f(g(x))$
- Determinare dom e Im, monotonia (o restrizioni monotone)
- Fare i grafici.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 214

• $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad \left(f(x) = \cancel{\frac{(-1)^x}{x} \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0} \right\}$

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è pari} \\ -a_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$b_1 = -1$

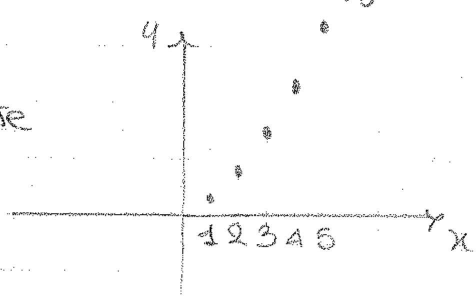
$b_2 = \frac{1}{2}$

$b_3 = -\frac{1}{3}$

$b_4 = \frac{1}{4}$

• $c_n = n^2$ $\qquad (f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R})$

È strettamente crescente.



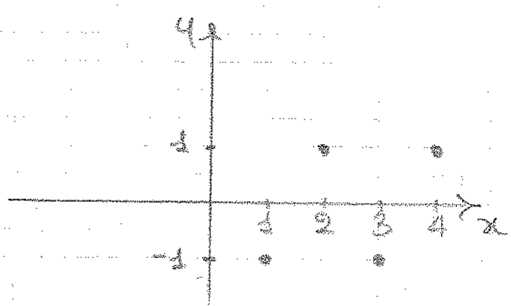
$c_0 = 0$

$c_1 = 1$

$c_2 = 4$

• $d_n = (-1)^n$

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$\rightsquigarrow$ se $n \to +\infty$

$a_n \to 0 \qquad a_n > 0 \ \forall n$

$b_n \to 0 \qquad b_n$ cambiano segno

$c_n \to +\infty$

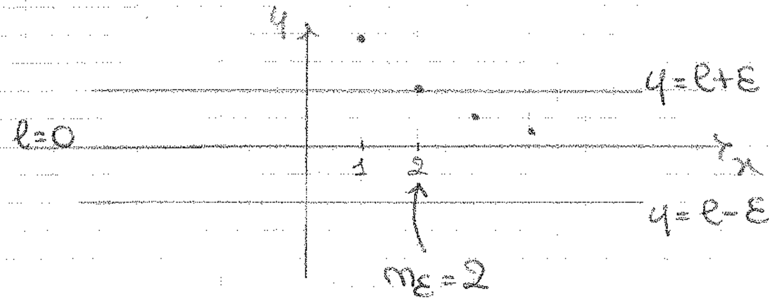
$d_n \to ?$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 214

Es

∘ $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \ell = 0$



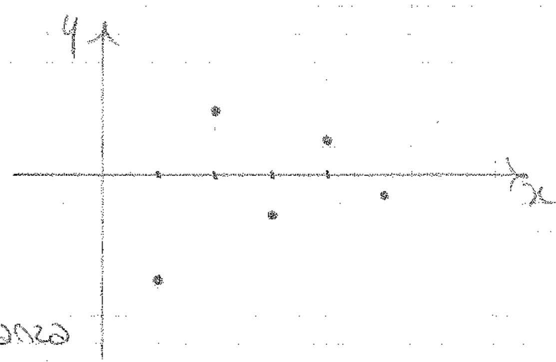
Fisso $\varepsilon>0$ $\quad \exists n_\varepsilon=2 \ / \ \forall n>n_\varepsilon \Rightarrow \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$

$0-\varepsilon < \frac{1}{n} < 0+\varepsilon$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} > -\varepsilon & \forall n \\ \frac{1}{n} < \varepsilon & \rightsquigarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \qquad \forall n > n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$$

Es

∘ $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$\ell = 0$

Verifico che la definizione sia soddisfatta.

Fisso $\varepsilon>0$; studio la disuguaglianza

$|b_n-\ell| < \varepsilon$

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{n}<\varepsilon$

↳ sarebbe $|n|$ ma $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n > n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad$ la definizione è soddisfatta.

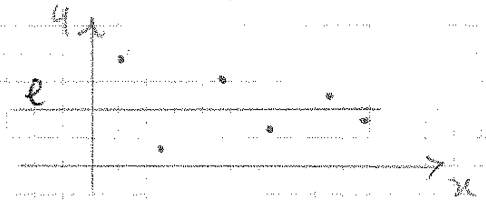
↳ intero

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 214

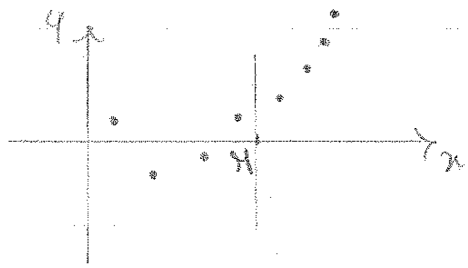
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 214

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_\varepsilon \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

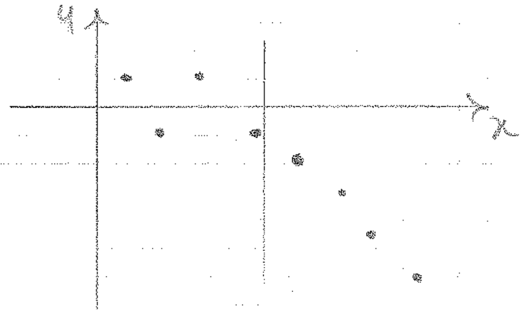
$(\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon)$



2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_M \quad a_n > M$



3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_M \quad a_n < M$

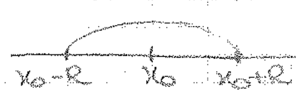


INTORNO

▶ Si dice INTORNO di $x_0 \in \mathbb{R}$ con raggio $R > 0$ l'intervallo:

$I_R(x_0) = (x_0 - R \, , \, x_0 + R)$

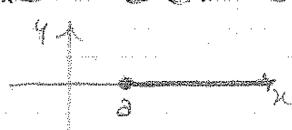
$= \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R \}$



▶ Si dice intorno di $+\infty$, con estremo $a \in \mathbb{R}$ l'intervallo

$I_a(+\infty) = (a, +\infty)$

$= \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}$



▶ Si dice INTORNO di $-\infty$, con estremo $b \in \mathbb{R}$ l'intervallo

$I_b(-\infty) = (-\infty ; b)$

$= \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$

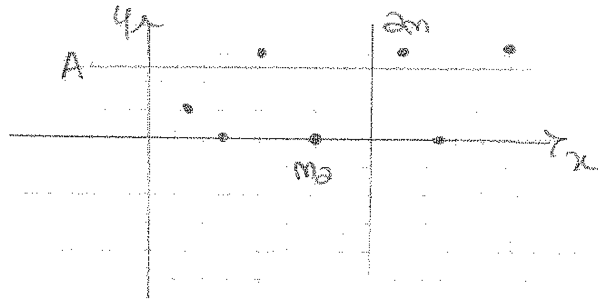
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 214

- Riconoscere
  $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \ / \ \forall n > n_M \ a_n < M$
  che definizione è?
  $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - 2| < \varepsilon$
  $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$

- $\forall A \in \mathbb{R} \ \forall n_A \in \mathbb{N} \ \exists n > n_A \ / \ a_n > A.$
  $a_n \to \pm\infty$?



SUCCESSIONE INDETERMINATA
(o oscillante)
$\Rightarrow$ non ha limite!

SUCCESSIONI MONOTONE

- a_n è monotona crescente (strettamente) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \underset{(<)}{\leq} a_{n+1}$

OSSERVAZIONI: se la proprietà vale tra n e $n+1$ $\forall n$ allora vale anche tra n e m (con n m)

$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \dots \quad m = n+k$ $\qquad k = m - n \in \mathbb{N}$

$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \ \dots \ \leq a_{n+k} = a_m.$

- a_n è monotona decrescente (strettamente) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \underset{(>)}{\geq} a_{n+1}$

Teorema

1. Se a_n è monotona $\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$
2. Se a_n è (strettamente) crescente $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = S$

$S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\quad \to \exists M \in \mathbb{R} \ / \ a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
Se $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato $\Rightarrow S \in \mathbb{R}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 214

a_n è SUPERIORMENTE LIMITATA perché esiste (almeno) un maggiorante $M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$M = ?$ $M = 2$ verifico $\rightsquigarrow$ $a_n \leq 2$ $\forall n$?

$\frac{2n}{n+1} \leq 2$; $2n \leq 2n+2$; $0 \leq 2$ V $\forall n$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2$ è un MAGGIORANTE.

La successione è superiormente limitata $\rightsquigarrow$ il limite è finito.

Per calcolare il limite basta sapere qual è l'estremo superiore, è la stessa cosa!

Estremo sup = il + piccolo dei maggioranti.

$M_T = \{$maggioranti di $a_n\} = [2, +\infty)$

$2 = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2 è il minimo dei maggioranti.

Per dimostrare che $2 = \sup a_n$ posso o calcolare l'insieme dei maggioranti quindi $[2, +\infty)$, oppure faccio vedere che se prendo un numero minore di 2 non è più maggiorante

$2-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ allora $2-\varepsilon$ non è + un maggiorante di A

Dimostro che $2-\varepsilon$ non è + maggiorante di A,

con $\varepsilon > 0$

Vado a vedere se esiste un a_n che supera $2-\varepsilon$

$a_n > 2-\varepsilon$

$$\frac{2n}{n+1} > 2-\varepsilon$$

$\hookrightarrow$ non so se è un numero >0 o <0, dipende da ε.

Se $2-\varepsilon < 0$ la disuguaglianza è verificata per TUTTI gli n $(\forall n)$

Se $2-\varepsilon = 0$ la disuguaglianza è soddisfatta per $\forall n > 0$

Se $2-\varepsilon > 0$

$2n > (n+1)(2-\varepsilon)$

$2n > 2n + 2 - \varepsilon n - \varepsilon$

$\varepsilon n > 2-\varepsilon$ sono 2 numeri >0 $\Rightarrow$ posso dividere ambo i membri.

$n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} - 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $2-\varepsilon$ non è + maggiorante di A

$\Rightarrow 2 = \sup A \Rightarrow 2 = \lim_{n \to +\infty} a_n$.

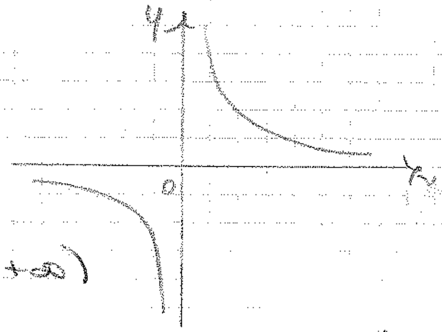
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 214

LIMITI DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$



$\text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$

Quali limiti è interessante studiare per $f(x) = \frac{1}{x}$?

Interessa studiare il comportamento di $\frac{1}{x}$ quando $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ purché vicino a x_0 ci siano infiniti punti del dominio di f.

Se "vicino a" x_0 c'è solo un n°. finito di punti del dominio di f non è necessario ricorrere al concetto di limite. (basta calcolare i valori di $f(x)$).

Es

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x_0$? quando è interessante studiarlo?

$x_0 = 0 \quad x_0 = -\infty \quad x_0 = +\infty$

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \to +\infty$

Se $x_0 \in \text{dom} f$ (f funzione qualsiasi) non sempre accade che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \leadsto$ FUNZIONE CONTINUA

Questo però accade sempre per le funzioni elementari.

FUNZIONI ELEMENTARI:

- x^n, x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R}$. POTENZE
  $n \in \mathbb{N} \to \left(\frac{1}{x^n}, \sqrt[n]{x}, x^{m/n}, x^{\pi}\right)$
- polinomi
- funzioni razionali = quozienti di polinomi = $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\text{sen}x$, $\cos x$, $\text{Tg}x$, $\text{senh}x$, $\cosh x$.
- a^x
- $\log_a x$

$\hookrightarrow$ x i punti del dominio posso calcolare i limiti solo sostituendo i valori.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 214

Es

- $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$

$\ell=5$, $x_0=1$

$f(x)=2x+3$

- $I_\varepsilon(\ell)=(\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon)$ ⇝ sulle ordinate del grafico
- $I_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ ⇝ sulle ascisse del grafico.

⇝ $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, \forall x\in I_\delta(1)$ con $x\neq 1$ $(1-\delta,\ 1+\delta)$

$\implies (2x+3)\in I_\varepsilon(5)$

$(5-\varepsilon,\ 5+\varepsilon)$

⇝ $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, \forall x\in\mathbb{R}$ e $0<|x-1|<\delta$

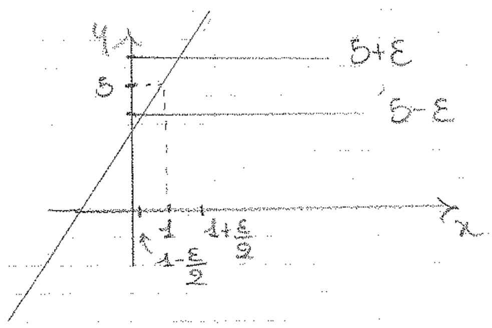
$\implies |(2x+3)-5|<\varepsilon$

Fare la verifica

Fisso $\varepsilon>0$, devo cercare $\delta>0$ tale che valga quello che è specificato sopra

$|2x+3-5|<\varepsilon$; $|2x-2|<\varepsilon$; $2|x-1|<\varepsilon$; $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

⇝ $I_{\varepsilon/2}(1)$ $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ Qualunque sia ε corrisponde un numero δ per cui la disuguaglianza è soddisfatta.

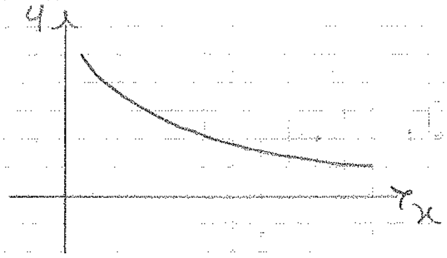


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 214

Es

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = +\infty$, $\ell = 0$



$x_n \to x_0 = +\infty$ per esempio: $x_n = n$

$x_n = n!$ ....

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \ell$

$\leadsto$ In particolare $\frac{1}{n} \to 0$; $\frac{1}{n!} \to 0$; $\frac{1}{n^2} \to 0$.

$\Rightarrow$ Posso sfruttare tutti e 2 i sensi del Teorema $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ si può sfruttare in negativo, per dimostrare che il limite di una funzione non esiste.

Es

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ $\nexists$

Cercare $x_n = \dots \to +\infty$

$x'_n = \dots \to +\infty$ Tali che $f(x_n) = \operatorname{sen} x_n \to \ell$

$f(x'_n) = \operatorname{sen} x'_n \to \ell' \neq$

$x_n = n\pi \to +\infty$ $\leadsto \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ $\leadsto \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 214

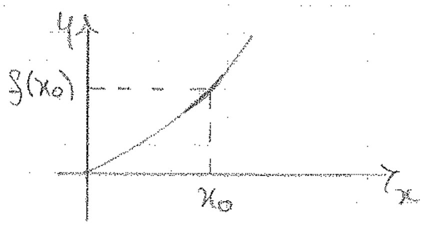
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 214

TEOREMA

a) se $x_0 \in$ dom$f$ ed è isolato $\Rightarrow$ f è continua in x_0

b) se x_0 non è isolato allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



il grafico è "continuo" nel punto x_0.

• ESEMPI NON CONTINUI

Ci sono esempi di funzioni elementari non continue in qualche punto del dominio?

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \mathbb{R} - \{0\}$] Questa f nel suo dominio è continua.

Def: f è continua in $A \subseteq$ dom$f \Leftrightarrow f$ è continua in ogni $x_0 \in A$.
$\hookrightarrow f \in \mathcal{C}(A)$

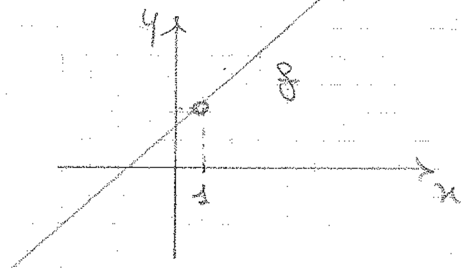
Es

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

dom$f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

f è continua in dom$f$.
$f \in \mathcal{C}((-\infty; 1) \cup (1; +\infty))$

$f(x) = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x + 1$
$\Uparrow$
$x \neq 1$



$1 \notin$ dom$f$. discontinuità eliminabile.

Posso prolungare f in $x_0 = 1$ in modo da ottenere una funzione continua anche lì, in $x_0 = 1$.

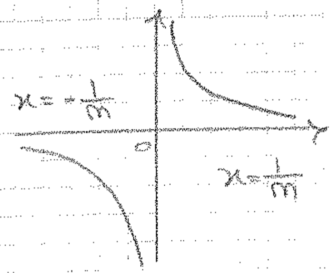
$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ dom$F = \mathbb{R}$

$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 1 \\ 2 & \text{per } x = 1 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to 1} F(x) = F(1)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 214

GENERALIZZARE LA DEFINIZIONE DI LIMITE



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ perché se scelgo:

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

$x'_n = -\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

$$f(x_n) = \frac{1}{1/n} = n \to +\infty$$

$$f(x'_n) = \frac{1}{-1/n} = -n \to -\infty$$

LIMITI LATERALI

Intorni laterali di $x_0 \in \mathbb{R}$.

$I_R^+(x_0) = [x_0, x_0 + R)$ INTORNO DESTRO

$I_R^-(x_0) = (x_0 - R, x_0]$ INTORNO SINISTRO

Def $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall I(\ell) \; \exists I^+(x_0) / \left.\begin{array}{l} \forall x \in I^+(x_0) \\ x \in \text{dom} f \\ x \neq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$.

In modo analogo si definisce.

Def $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall I(\ell) \; \exists I^-(x_0) / \left.\begin{array}{l} \forall x \in I^-(x_0) \\ x \in \text{dom} f \\ x \neq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

ES

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

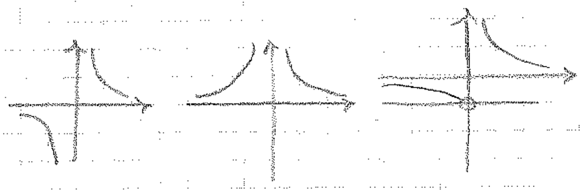
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 214

DISCONTINUITÀ DI II SPECIE

Tutte le altre.



$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\rightsquigarrow$ basta dimostrare che il limite non esiste da un lato.

$\nexists \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Non esistono né il limite intero né quelli laterali.

TEOREMA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_-$ e $l_+ = l_- = l$

Studiare continuità e discontinuità di:

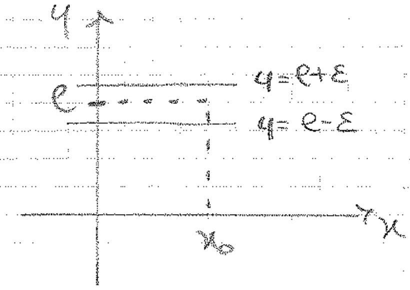
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ 5 & x = -1 \end{cases}$
- $g(x) = \left[\frac{1}{1+x^2} \right]$
- $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- $l(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 214

Es

Caso $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$.



Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0)$ /

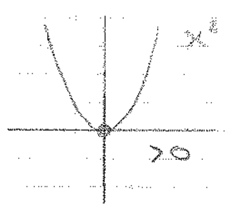
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I(x_0) \\ x \neq x_0 \\ x \in \operatorname{dom} f \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

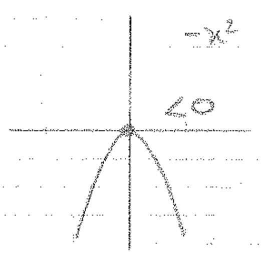
Se scelgo ε in modo che $\ell - \varepsilon > 0$ ottengo che anche $f(x) > 0$ in $I(x_0)$.

OSSERVAZIONI

- Se f è continua in x_0 e se $f(x_0) \neq 0$ allora
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$ $\nearrow > 0$ $\searrow < 0$ $\Rightarrow$ f conserva il segno di $f(x_0)$ in tutto un intorno di x_0.

- Il teorema non vale per il caso $\ell = 0$
  Se $\ell = 0$ non ho informazioni sul segno di f vicino a x_0.





- Dal segno di $f(x)$ posso dedurre il segno di ℓ?
  se $f(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow \lim f(x) > 0$? $\rightsquigarrow$ es. $e^x = f(x) > 0 \ \forall x$
  NO $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

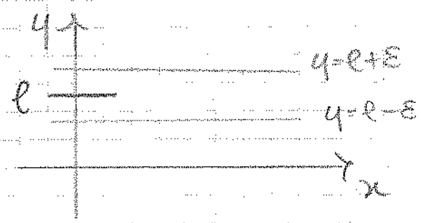
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 214

DIMOSTRAZIONE

Caso $\ell \in \mathbb{R}$

Voglio dimostrare che $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$



Fisso $\varepsilon > 0$, cerco $J(x_0)$ tale che se $x \neq x_0$, $x \in \mathrm{dom}\, g$, e $x \in J(x_0)$ $\Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

cioè

$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$.

PER f: $\exists I^1(x_0) \,/\, \forall x \neq x_0 \in \mathrm{dom} f$ e $x \in I^1(x_0) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

PER h: $\exists I^2(x_0) \,/\, \forall x \neq x_0 \in \mathrm{dom}\, h$ e $x \in I^2(x_0) \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

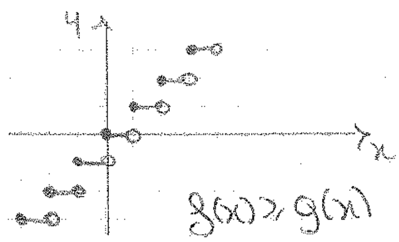
Se considero $x \in I^1(x_0) \cap I^2(x_0) \cap I(x_0)$

$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$

$\boxed{\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon}$ C.V.D.

ES

$f(x) = [x]$ $\quad \lim_{x \to +\infty} [x] =$



$\underbrace{x-1}_{g} < [x] \leq x$

$f(x) \geq g(x)$

$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} [x] = +\infty$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 214

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos 0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

ALGEBRA DEI LIMITI

Teorema (caso finito)

Supponiamo

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Allora

(1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$

(2) Se $\boxed{m \neq 0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$

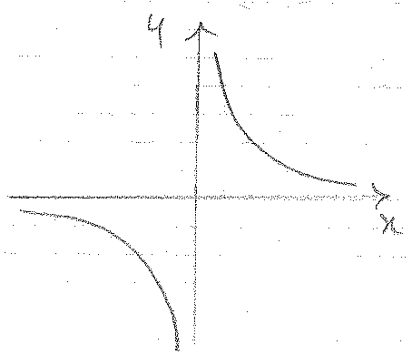
OSSERVAZIONI

$\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x_0 = 0$

$f(x) \equiv 1 \longrightarrow 1 = \ell$

$g(x) = x \longrightarrow 0 = m$

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$



$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\exists \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 214

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo f, g definite in $I(x_0)$

Per definizione di continuità $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

$\Rightarrow$ Per il Teorema $\exists \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$

$\Rightarrow$ $(f+g)$ è continua in x_0.

Es

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x (x+1)}{e^x}$$

Dominio $D_{h(x)} \equiv \mathbb{R}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow h$ è continua in x_0 (perchè ottenuta con operazioni algebriche tra funzioni continue)

Teorema (caso non finito)

$l, m \in \overline{\mathbb{R}}$

$f+g$ $\qquad l+m$

$$\boxed{\begin{array}{ll} s + \infty = +\infty & (s \in \mathbb{R}) \\ s - \infty = -\infty & (s \in \mathbb{R}) \\ +\infty + \infty = +\infty & \\ -\infty - \infty = -\infty & \end{array}}$$

$\left.\begin{array}{l} +\infty - \infty \\ -\infty + \infty \end{array}\right\}$ sono forme INDETERMINATE.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \pm\infty \cdot s = \pm\infty & (\text{se } s > 0 \text{ o } s = +\infty) \\ \pm\infty \cdot s = \mp\infty & (\text{se } s < 0 \text{ o } s = -\infty) \end{array}}$$

$0 \cdot \infty$ forma INDETERMINATA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 214

Conclusione

Se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

e $f(x)$ ha segno costante in $I^+(x_0) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Es

$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3$

$f_2(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = 2^{-x}$

- $x \to +\infty$

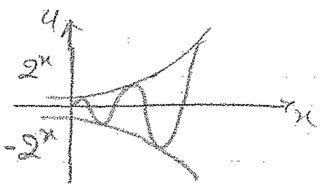
$$\frac{f_1}{g} = \frac{\operatorname{sen} x + 3}{2^{-x}}$$

$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3 \to \nexists$ il limite per $x \to +\infty$.

$\frac{S}{0} \rightsquigarrow S = 2 > 0$ il num non ha limite ma si mantiene sopra un numero positivo.

$$\underbrace{2^x (\operatorname{sen} x + 3)}_{\geq 2} \geq 2^x \cdot 2 \to +\infty$$

$$\frac{f_2}{g} = \frac{\operatorname{sen} x}{2^{-x}} = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{2^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \nexists}}{\operatorname{sen} x} \Big\} \text{ complessivamente } \nexists \lim$$



Nei punti dove il seno vale 1 il prodotto vale 2^x.
Nei punti dove il seno vale -1 il prodotto vale -2^x.
Nei punti dove il seno vale 0 il prodotto vale 0.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 214

$$\frac{5}{0} \rightarrow \frac{f}{g} \rightarrow \boxed{\frac{1}{g}} \cdot f$$

$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

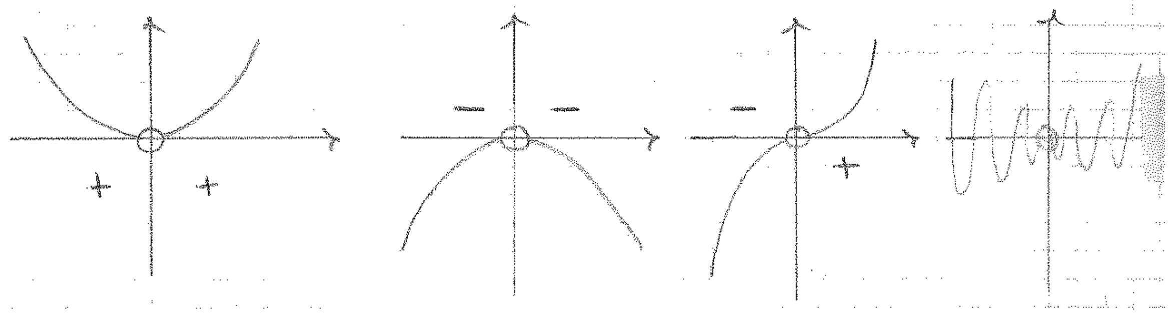
$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{1}{g} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = ?$$

Conta come $g \to 0$

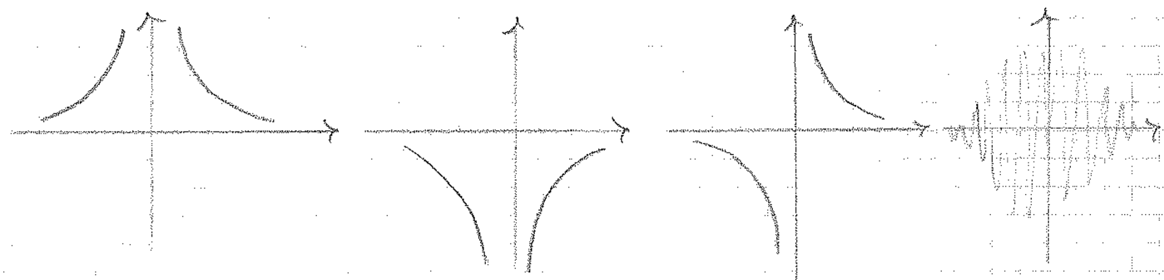
• g

$x_0 = 0$



• $\frac{1}{g}$

$x_0 = 0$



$+\infty$	$-\infty$	$-\infty \quad +\infty$	$\nexists$
$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists \lim_{x \to 0^\pm}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\exists \lim_{x \to 0^\pm}$	
		$\frac{1}{x}$	

Proprietà

Se $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ e $g(x)$ è limitata in $I(x_0) - \{x_0\}$

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0$

Es

$y = \underset{\downarrow\ 0}{x} \underbrace{\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)}$

$\nexists$ è limitato (nel suo intorno $I(x_0) - \{x_0\}$)

$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1 \qquad x > 0$

$\underset{\downarrow\ 0}{-x} \leq \underset{\downarrow\ 0}{\underbrace{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}} \leq \underset{\downarrow\ 0}{x} \qquad \forall x > 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 214

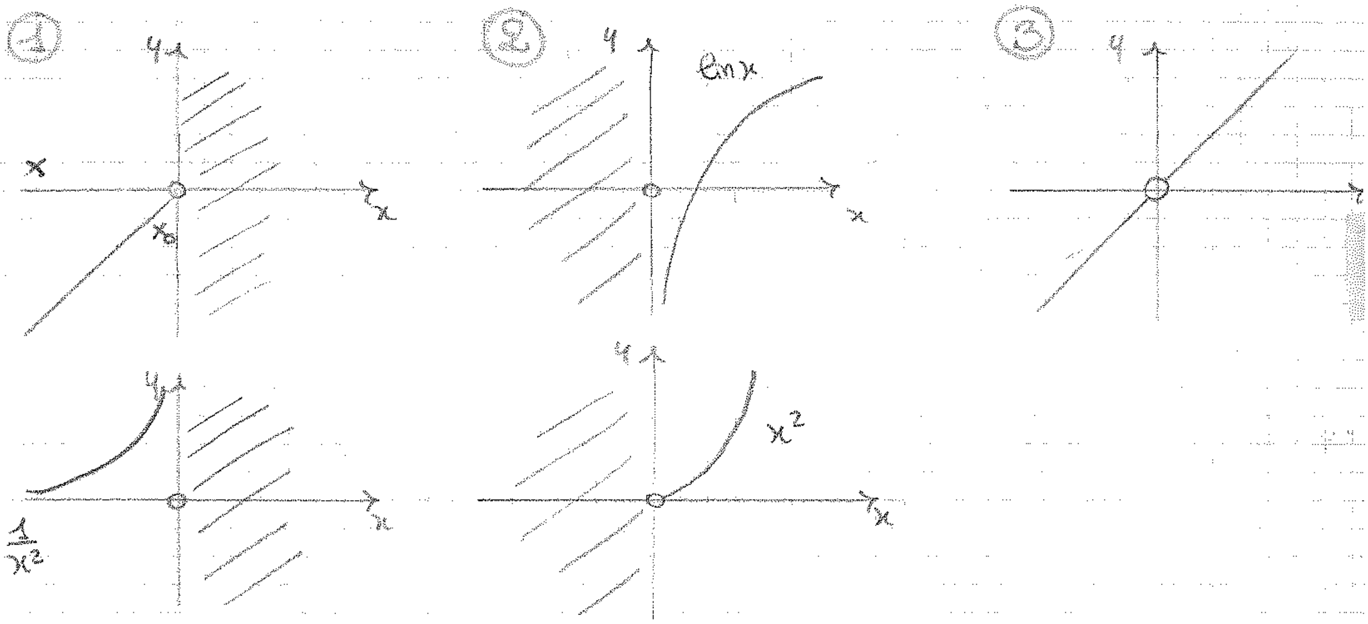
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 214

LIMITE di FUNZIONE MONOTONA

funzione crescente

f definita in un intorno laterale

f definita in tutto $I - \{x_0\}$



(1) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in I^-(x_0) - \{x_0\} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in I^+(x_0) - \{x_0\} \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(3) $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) \in \mathbb{R}$

NB Se f è definita in $I(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) \in \mathbb{R}$

Corollario:

Se f è monotona in $A \subseteq \text{dom} f \Rightarrow f$ può avere solo discontinuità eliminabili o di I^a specie (salto) $[l_+ \neq l_-]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 214

Es

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sen}(\underbrace{e^x}_{y})$$

$$\lim_{y \to +\infty} \text{sen}\, y \quad \nexists$$

Corollario (continuità di $g \circ f$)
Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$
$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$ è continua in x_0.

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} g(\underbrace{f(x)}_{y}) = \quad \uparrow \text{uso il Teorema}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{l} \in \mathbb{R} \quad , \quad g \text{ continua in } l = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ siamo nel caso a

LIMITI NOTEVOLI

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\text{sen}\, x}{x} \frac{\text{sen}\, x}{x}$$

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} \rightsquigarrow \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \text{sen}\, x \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 0$$

- $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

[uguale successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$]
$2 << a_n < 3 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{(1+\frac{1}{n})^n : n \geq 1\} = e$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 214

Es

$h(x) = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]$

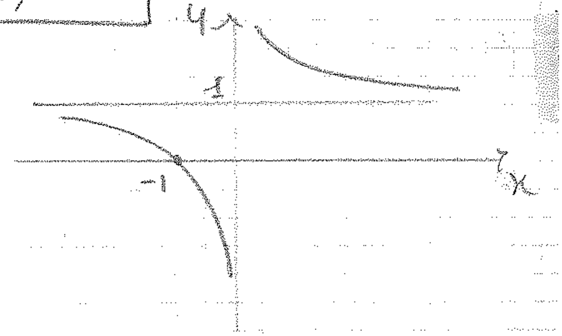
$\text{dom}\, h \overset{?}{=}$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$g(x) = x$

le dominio resta questo, non si aggiunge -1 perché in -1 $g(x)$ è negativa! Non positiva!

$f(x) > 0 \quad 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \boxed{(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$



$\left.\begin{matrix} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{matrix}\right\} \quad x = -1$

$g(-1) = -1$

↳ Non esistono punti in cui $f(x) = 0$ e $g(x) > 0$ contemporaneam.

- $\lim_{x \to 0^{\pm}} (1+x)^{1/x} = e$

$\frac{1}{x} = y \to \pm\infty$

$x = \frac{1}{y}$

$\rightsquigarrow \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2}$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{x/2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}$

$y = \frac{x}{2} \to +\infty$

$= \lim_{y \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_{\to e} = e^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 214

Es

$\alpha = \frac{1}{5}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{5}$$

se $\alpha = 18$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{18} - 1}{x} = 18.$$

DA RICORDARE

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

SIMBOLI DI LANDAU e confronto di infiniti e infinitesimi.

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad 0 \cdot \infty$

SIMBOLI DI LANDAU

f, g definite in $I(x_0) - \{x_0\}$, supponiamo che esista

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

se $\boxed{\ell = 1}$

$f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ $\quad$ f equivale a g per $x \to x_0$.

se $\boxed{\ell = 0}$

$f \underset{x \to x_0}{=} o(g)$ $\quad$ f è o piccolo di g per $x \to x_0$ o f è trascurabile per $x \to x_0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 214

$$\boxed{f \underset{x \to x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1}$$

↳ posso sostituire con gli equivalenti solo se il limite è 1
E se così non fosse?

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f}{\ell \cdot g} = 1$

PROPRIETÀ:

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \boxed{f \underset{x \to x_0}{\sim} (\ell \cdot g)}$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{1+x} - 1\right] \underset{x \to 0}{\sim} -1 \cdot x$$

$$\Rightarrow \left[(1+x)^{-1} - 1\right] \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{1+x} - 1\right] \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2} x$$

Def $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff f \underset{x \to x_0}{\asymp} g$

f è EQUIGRANDE a g per $x \to x_0$.

Def Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \ell \in \mathbb{R} \iff f = O(g)$ per $x \to x_0$

f è O GRANDE di g per $x \to x_0$
f è DOMINATA da g per $x \to x_0$

OSSERVAZIONI

Se $f \asymp g \Rightarrow f = O(g) \rightsquigarrow \frac{f}{g} \to \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

Se $f \sim g \Rightarrow f \asymp g \Rightarrow f = O(g) \rightsquigarrow \frac{f}{g} \to 1 \Rightarrow 1 = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

Se $f = o(g) \Rightarrow f = O(g) \rightsquigarrow \frac{f}{g} \to 0 \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 214

1) $\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)}{x \cdot \operatorname{sen} x}$

$f = (1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$g = x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$h = \operatorname{sen} x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$

• Cosa fare con somme e differenze?

PROPRIETÀ

$\rightsquigarrow f \sim g \iff f = g + o(g)$ $\quad x \to x_0$

Significato:

$f = g + o(g)$ $\quad x \to x_0$ vuol dire che $\underbrace{(f-g)}_{h} = o(g) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ Suppongo $f \sim g$

cioè $\frac{f}{g} \to 1$

Devo dimostrare che $\frac{f-g}{g} \to 0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g} - \frac{g}{g}\right) = 0$

Suppongo $(f-g) = o(g)$ cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} = 0$

Devo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 1$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{(f-g)+g}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} + 1 = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 214

DIMOSTRAZIONE

Chiamiamo $f_1 = f + o(f) \rightarrow f_1 \sim f$

Chiamiamo $g_1 = g + o(g) \rightarrow g_1 \sim g$

$$\lim \frac{f_1}{g_1} = \lim \frac{f}{g}$$

Es

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + \operatorname{sen}^2 x}{x - \cos x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ F.I.}$$

$$\frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = o(3x^2)$$

$$\frac{3}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$

$$3 = o(x)$$

$$\frac{-\cos x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$-\cos x = o(x)$$

$$(3 - \cos x) = o(x) \text{ ?} \quad \underline{\text{SI}}$$

→ Principio di eliminazione dei Termini Trascurabili

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$$

- $$\lim_{x \to x_0} (f + o(f))(g + o(g)) = \lim_{x \to x_0} f \cdot g.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 214

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 214

Se $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ e $f(x) \neq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

$\ln(1+f(x)) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

$(e^{f(x)} - 1) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

$[1 - \cos(f(x))] \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$ per $x \to x_0$

$[(1+f(x))^{\alpha} - 1] \sim \alpha f(x)$ per $x \to x_0$.

<u>ES</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^3 + 2x^2)}{x^4 - x^7}$$

$(1 - \cos y) \sim \frac{y^2}{2} =$

$$= \frac{(x^3 + 2x^2)^2}{2} = \frac{4x^4 + 4x^5 + x^6}{2}$$

I MODO

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^4 + 4x^5 + x^6}{2} \cdot \frac{1}{x^4 - x^7} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\cancel{x^4}(4 + 4x + x^2)}{\cancel{x^4}(1 - x^3)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{-x^3 + 1} = 2$$

II MODO

$x^4 - x^7 = x^4 + o(x^4)$

$N(x) = 2x^4 + o(x^4)$

<u>OSSERVAZIONI</u>

- $f = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ $\boxed{\text{NB}}$

  $\hookrightarrow$ f è INFINITESIMA

- $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$

$\Leftrightarrow [f(x) - f(x_0)] = o(1)$ per $x \to x_0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ [illegible]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 214