NUMERO: 524

DATA: 16/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Rinaldi

MATERIA: Aerodinamica Applicata

Prof.

AERODINAMICA APPLICATA

1 ATM = 101325 Pa

1 Pa = 9,86923 $\cdot 10^{-6}$ atm

1 bar = 10^5 Pa = 0,1 MPa = 10 $\frac{N}{cm^2}$

1 atm = 1,01325 bar + T = 288 K
= ARIA STANDARD

$R = 8,314472 \frac{J}{mol \cdot K} = 8314 \frac{J}{Mol \cdot K}$

$M_{aria} = 28,964 \frac{kg}{Mol}$

$R^*_{aria} = 287,04 \frac{J}{K \cdot kg}$

$R^* = c_p - c_v \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$

DOMANDE SCRITTO

1) EQ. EULERO → PAG 59

2) EQ. PRANDTL NEL CASO 2D STAZIONARIO E INCOMPRIMIBILE PARTENDO DALLE EQ. NAVIER STOKES MEDIATE ALLA REYNOLDS

3) FATTORI CHE INFLUENZANO LA TRANSIZIONE DELLO S.L OLTRE AL Re

4) EQ. INTEGRO DIFFERENZIALE DI PRANDTL → 200

5) SOTTO QUALI IPOTESI POSSIAMO USARE LA CORREZIONE DI PRANDTL-GLAUERT

6) DISEGNARE LA CURVA Cd - MACH

7) DEFINIRE IL COEFF. DI RESISTENZA PARASSITA

ORALE

1) EQ. INTG - DIFF x che lato se ho campi discontinui?

2) ALA FINITA

3) TRANSIZ. TURBOLENTO

4) $C_p' = f(M)$

5) S.L. TURBOLENTO EQ. PRANT.

6) EQ INTEGRALE

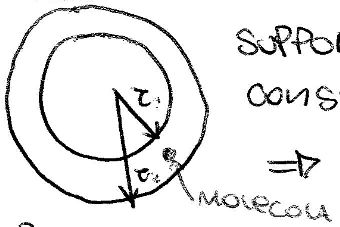
7) $M_{CRITICO}$

8)

LA DENSITÀ DI PARTICELLE È $\boxed{\rho = \frac{m \cdot n}{V}}$

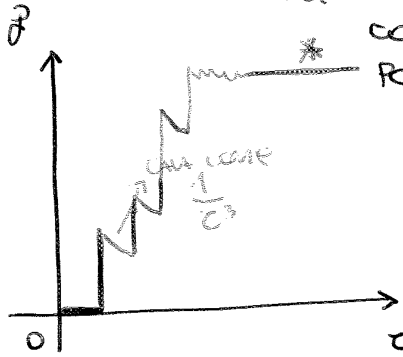
TENENDO CONTO DELLA NATURA DISCRETA DEL NOSTRO GAS INIZIO A CONSIDERARE PARAMETRI "CONCRETI".

$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$ (VOLUME SFERA DELLA PARTICELLA FLUIDA)



SUPPONGO CHE r SIA COSÌ PICCOLO CHE NEL VOLUME CONSIDERATO NON CI SIA NESSUNA MOLECOLA

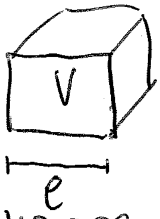
$\Rightarrow \rho = 0$ MA ρ DIPENDE PROPRIO DA r



CON L'AUMENTO DI r PRIMA TROVO UNA MOLECOLA POI NON TROVO NULLA, POI NE TROVO UN'ALTRA

QUESTO VA AVANTI FINO A UN CERTO r IN CUI IL VALORE ρ SI STABILIZZA. *

ARRIVO A UN PUNTO IN CUI LA MIA PARTICELLA È DIVENTATA UN CUBETTO DI LATO ℓ E VOLUME V.



SUPPONGO CHE ALL'INTERNO DEL VOLUMETTO LE QUANTITÀ TEMPERATURA PRESSIONE DENSITÀ, ECC... RIMANGANO COSTANTI.

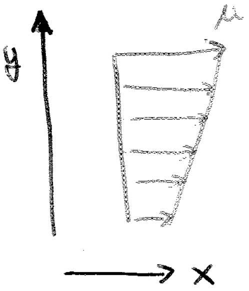
L'IPOTESI DEL CONTINUO CADE SE:

- SE IL L = LIBERO CAMMINO MEDIO $\sim \ell$ = LUNGHEZZA CARATTERISTICA
- SE LE DIMENSIONI TIPICHE DELLA PARTICELLA SONO $\sim$ QUELLE DEL FENOMENO ANALIZZATO.

NOI LAVORIAMO CON PARTICELLE MOLTO PICCOLE IN SCALA AL NOSTRO FENOMENO E $\nexists$ QUINDI VALE L'IPOTESI DEL CONTINUO.

- TRASCURIAMO IL PESO PROPRIO DELL'ARIA O DEL GENERICO gas rispetto alle forze di pressione

$\vec{q}$ = FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO → SE SONO PRESENTI GRADIENTI DI TEMPERATURA OTTENGO UN FENOMENO SIMILE MA TERMICO.



SE HO FLUSSO DI TAGLIO _ COME QUESTO HO GRADIENTI DI VELOCITÀ $\frac{\partial u}{\partial y}$

⇓

HO SFORZI VISCOSI E QUINDI τ

⇓

$$\boxed{\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}}$$

CHE SONO PROPORZIONALI A $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\boxed{\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}}$$ ← LEGGE DI NEWTON

DERIVATA PARZIALE!!

VISCOSITÀ DINAMICA → CHE DIPENDE FORTEMENTE DALLA TEMPERATURA

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ← DENSITÀ

= VISCOSITÀ CINEMATICA

$[\mu] = \frac{kg}{m\,s} = Pa \cdot s$ $\quad [\nu] = \frac{m^2}{s}$ $\quad [\rho] = \frac{kg}{m^3}$

ARIA IN CONDIZIONI STANDARD ⇒ $\begin{cases} T = 15° = 288\,K \\ p = 760\,mmHg = 101\,325\,Pa \end{cases}$

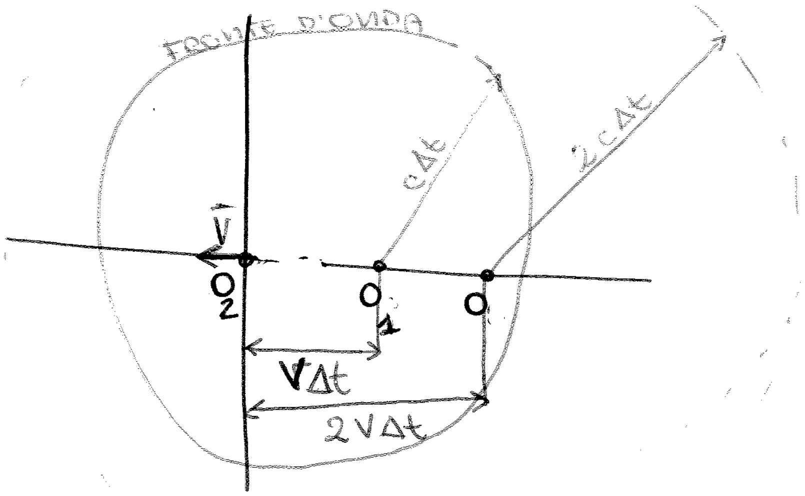
⇓

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= 1{,}781 \cdot 10^{-5}\ Pa \cdot s \\ \nu &= 1{,}454 \cdot 10^{-5}\ m^2/s \\ \rho &= 1{,}225\ \frac{kg}{m^3} \end{aligned}}$$

← MEMORIA!!

*** MOTO SUBSONICO** $M<1$

IL NOSTRO VELIVOLO PUNTIFORME VOLA ALLA VELOCITÀ $V<c$ DELLA VELOCITÀ DEL SUONO.

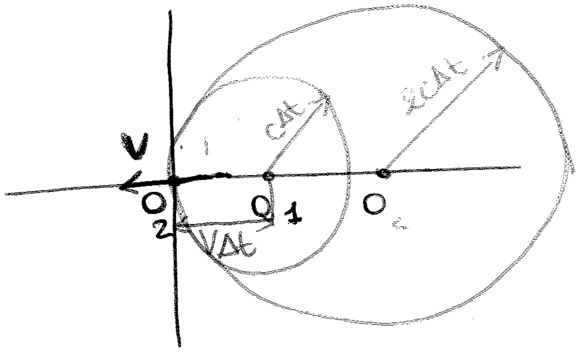


MUOVENDOSI IL VELIVOLO DISTURBA IL CAMPO DI MOTO. SUPPONGO CHE LE PERTURBAZIONI SI SPOSTANO CON FRONTE D'ONDA SFERICO.

SE $V<c$ ⇒ IL DISTURBO PRIMA O POI PROPAGA IN OGNI ZONA DEL CAMPO E VIENE DISTURBATO ANCHE LO SPAZIO A MONTE DEL VELIVOLO

*** MOTO SONICO** $M=1$

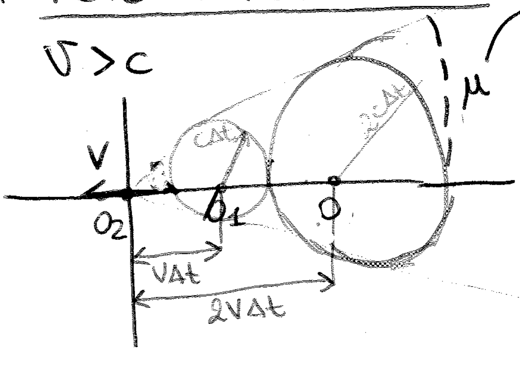
$V=c$ $\qquad V\Delta t = c\Delta t$



IL FRONTE D'ONDA NON RIESCE A RIMONTARE VERSO SINISTRA

*** MOTO SUPERSONICO** $M>1$

$V>c$



ANGOLO SEMI APERTURA DEL CONO DI MACH

IL FRONTE D'ONDA NON RIESCE A RIMONTARE FINO A O. ECCO CHE IL DISTURBO PUÒ PROPAGARE SOLO NEL "CONO DI MACH" E AL DIFUORI DI ESSO NON SI RISENTE DI NESSUN DISTURBO.

Nel fluido ideale il fluido scorre non in aderenza con la parete ma tangentemente ad essa.

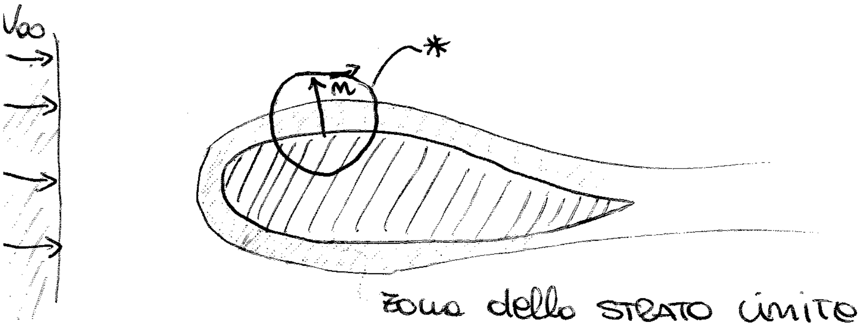
1) la $\boxed{\text{CONDIZIONE DI ADERENZA}}$ è SOSTITUITA DA QUELLA DI $\boxed{\text{TANGENZA}}$

la seconda conseguenza è che a causa di $K \simeq 0$

2) Non ho scambio di calore tra filetti fluidi né tra filetti fluidi e parete.

$$\boxed{\begin{aligned} \mu = 0 &\Rightarrow \tau \simeq 0 \\ K = 0 &\Rightarrow \tilde{q} \simeq 0 \end{aligned}}$$

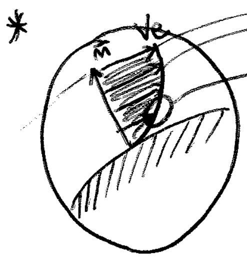
L'aria non ha μ molto alta ma non sono nulle però esistono zone in cui il gradiente $\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0$.



zona dello STRATO LIMITE

NELLA ZONA DELLO STRATO LIMITE NON POSSO TRASCURARE GLI EFFETTI VISCOSI COME INVECE POSSO FARE NEL RESTO DELLA FIGURA.

$\Rightarrow \mu \neq 0$ ma sono gradienti di velocità trascurabili $\Rightarrow \tau = 0$

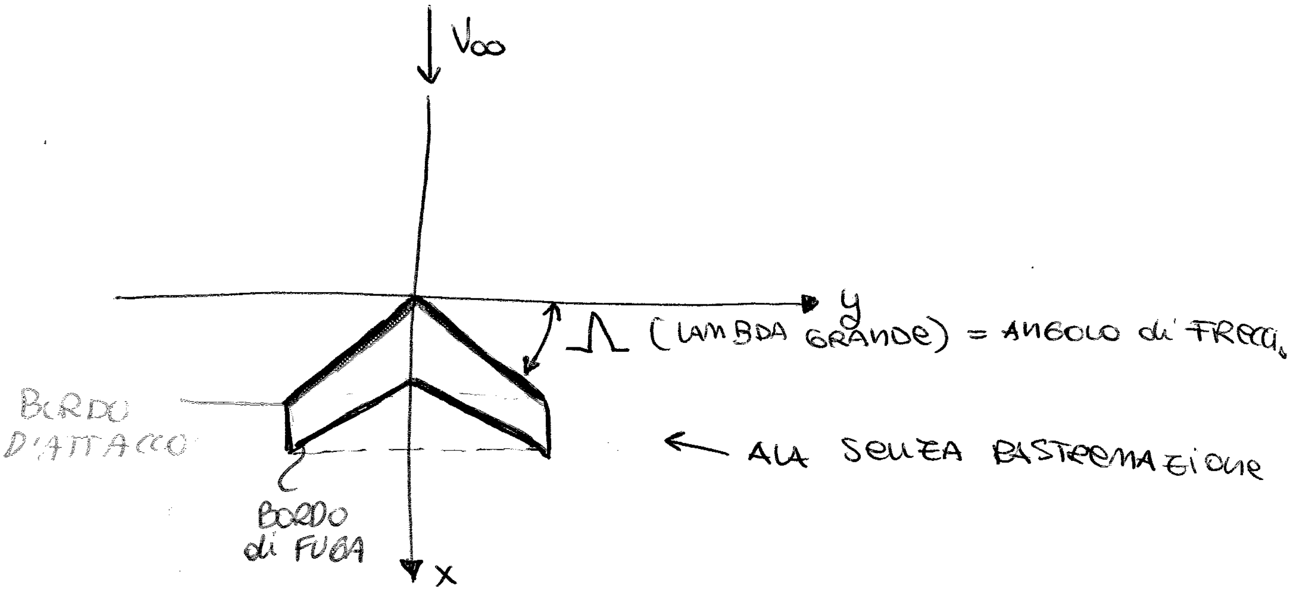


Per capire se devo o meno trascurare τ come faccio? Introduco un parametro che è il numero di REYNOLDS.

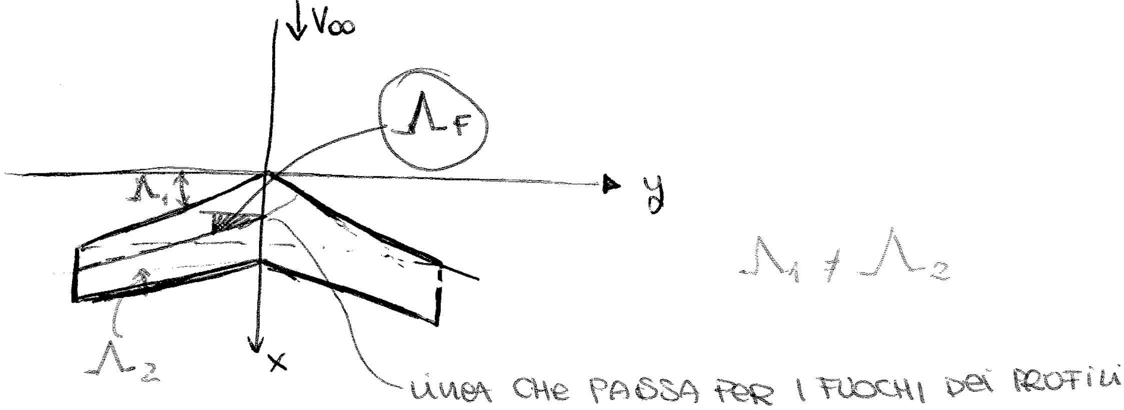
$$\boxed{Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}}$$

V: VELOCITÀ di RIFERIMENTO
L: LUNGHEZZA CARATTERISTICA di RIFERIMENTO

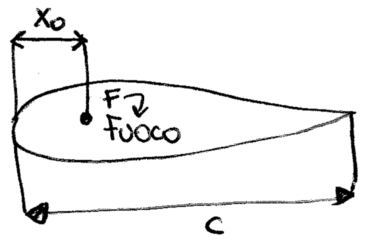
UN ALA PUÒ PRESENTARE UN ANGOLO DI FRECCIA.



IN UN'ALA CON RASTREMAZIONE...

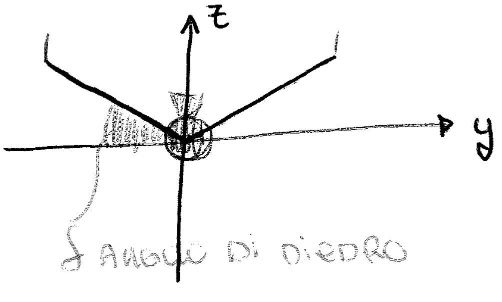


NEI PROFILI SUBSONICI



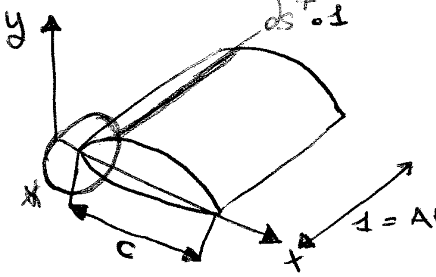
$\boxed{X_0 = 0{,}25c}$ AL QUARTO ANTERIORE DEL PROFILO.

NELL'ALA POSSO IDENTIFICARE UN ANGOLO DI DIEDRO = δ. IN QSTO CASO SI PARLA DI DIEDRO ALARE

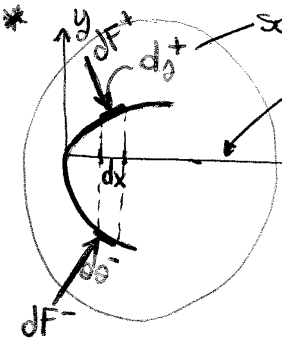


AZIONI AERODINAMICHE SUI PROFILI ALARI

Prendo in considerazione un profilo alare cioè uno spezzone di lunghezza unitaria dell'ala di allungamento infinito



NEL CASO DI <u>FLUIDO IDEALE</u> ⇒ { SUL PROFILO AGISCONO SOLO PRESSIONI MA NON FORZE TANGENZIALI. ($\tau = 0$)



sono superfici!! ($\cdot 1$)

lungo la corda prendo il tratto infinitesimo dx

dF^+ e dF^- sono FORZE di PRESSIONE → ASSOLUTE $\boxed{p > 0}$

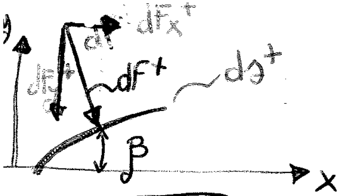
→ RELATIVE $\boxed{p \gtrless 0}$ $\quad p^+ - p_\infty$, $\quad p^- - p_\infty$

che insistono su dorso o ventre ma relative a quelle a monte

CALCOLO dF^+ e dF^-

$$\begin{cases} dF^+ = (p^+ - p_\infty)\, ds^+ \cdot 1 \\ dF^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- \cdot 1 \end{cases}$$

INTEGRANDO SUL PROFILO OTTENGO LE RISULTANTI DELLE FORZE DI PRESSIONE SUL DORSO E SUL VENTRE.



β su dorso è $\neq$ β ventre se il profilo non è simmetrico

$\boxed{\text{DORSO}}$

$$\begin{cases} dF_x^+ = dF^+ \operatorname{sen}\beta \\ dF_y^+ = \ominus\, dF^+ \cos\beta \end{cases}$$

$p^+ - p_\infty > 0$ ⇒ LA FORZA È AGENTE VERSO IL BASSO

analogamente

$\boxed{\text{VENTRE}}$ ≠ DORSO

$$\begin{cases} dF_x^- = dF^- \operatorname{sen}\beta \\ dF_y^- = dF^- \cos\beta \end{cases}$$

$$\boxed{L = R_y \cos\alpha - R_x \operatorname{sen}\alpha}$$

CON RESISTENZA AERODINAMICA = DRAG = R INDICO LA COMPONENTE di R // a V_∞

$$\boxed{D = R_y \operatorname{sen}\alpha + R_x \cos\alpha}$$

SAPENDO CHE $\alpha \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha \\ \cos\alpha \simeq 1 \end{cases}$ e CHE $|R_x| \ll |R_y|$

(e QUINDI HO INCIDENZA BASSA)...

$$L \cong R_y \cdot 1 - \underbrace{\cancel{R_x \cdot \alpha}}_{\sim 0} \cong R_y$$
$$D \cong R_y \cdot \alpha + \underbrace{\cancel{R_x}}_{\sim 0} \simeq R_y \cdot \alpha \quad \Rightarrow \; *$$

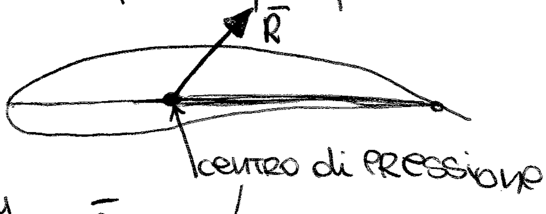
$$L \cong \int_0^c \Big[\underbrace{(p^- - p_\infty)}_{1} - \underbrace{(p^+ - p_\infty)}_{2}\Big]\,dx$$

se voglio L max devo avere max (1) pressione relativa al ventre e minima (2) pressione relativa sul dorso.

(** SIAMO RIUSCITI A CALCOLARE L NOTA LA DIST. di PRESSIONE SUL PROFILO MA NON SAPPIAMO DOVE ESSA È APPLICATA! DECIDEREMO POI DI APPLICARLA SUL B.A. CALCOLANDO M_A RISPETTO AL BA. DELLE FORZE ELEMENTARI!)

* PER INCIDENZE (α) PICCOLE $\alpha \ll 1 \Rightarrow \boxed{|D| \ll |L|}$

ORA CALCOLO IL MOMENTO delle FORZE AERODINAMICHE rispetto a un qualunque punto della corda del profilo.



$\leftarrow \bar{R}$ (RISULTANT. AERO) GENERA MOMENTO NULLO

IN QUESTO CASO $\bar{R}$ È APPLICATA SUL BORDO D'ATTACCO E GENERA UN MOMENTO M_A.

COEFFICIENTI AERODINAMICI ADIMENSIONALI

DIPENDERANNO DA:

- GEOMETRIA, VELOCITÀ, DENSITÀ, PRESSIONE, LUNGHEZZA CARATTERISTICA, VISCOSITÀ. (V, P, ρ, μ, e)

PER GEOMETRIA INTENDIAMO → FORMA, → INCIDENZA α

SUPPONIAMO di operare in condizioni di similitudine geometrica.

LA FORZA AERODINAMICA ESERCITATA SUL CORPO (F)

$$F = f(\alpha, \rho, P, e, \mu, V)$$

SUPPONIAMO CHE F sia data dal prodotto di questi parametri:

$$\boxed{F \sim e^{a} V^{b} \rho^{c} \mu^{d} P^{e}} \circledast$$

ATTRAVERSO UN'ANALISI DIMENSIONALE CALCOLIAMO I COEFFICIENTI.

$$[kg \cdot m\, s^{-2}] = [m]^{a} [m\, s^{-1}]^{b} [kg\, m^{-3}]^{c} [kg\, m^{-1} s^{-1}]^{d} [kg\, m^{-1} s^{-2}]^{e}$$

$$[kg\, m\, s^{-2}] = [m]^{a+b-3c-d-e} [kg]^{c+d+e} [s]^{-b-d-2e} \circledast$$

$$\begin{cases} 1 = c+d+e & (1) \\ 1 = a+b-3c-d-e & (2) \\ -2 = -b-d-2e & (3) \end{cases}$$

5 incognite e 3 equazioni!

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1-d-e \leftarrow \text{dalla } 1^{\circ}\text{EQ.} \\ b = 2-d-2e \leftarrow \text{dalla } 3^{\circ}\text{EQ} \\ a = 2-d \leftarrow \text{dalla } 2^{\circ}\text{EQ} \end{cases}$$

$$\circledast\ [m]^{(2-d)} [m\, s^{-1}]^{(2-d-2e)} [kg\, m^{-3}]^{1-d-e} \cdot [kg\, m^{-1} s^{-1}]^{d} [kg\, m^{-1} s^{-2}]^{e}$$

$\circledast \to \Downarrow$

$$F \sim e^{2-d} V^{2-d-2e} \rho^{1-d-e} \mu^{d} P^{e}$$

PRESSIONE DINAMICA

$$F \sim \rho V^2 e^2 \left(\underbrace{\frac{\mu}{Ve\rho}}_{\frac{1}{Re}}\right)^{d} \left(\underbrace{\frac{P}{\rho V^2}}_{\frac{1}{M^2}}\right)^{e}$$

$$F \sim e^2 \rho V^2 f(Re) \cdot g(M)$$

$$c^2 = V \frac{P}{\rho}$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho V e}{\mu} = \frac{Ve}{\nu}}$$

$$\boxed{C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = f(\alpha, Re, M)}$$

PRESSIONE DINAMICA

<u>NB.</u> PROFILI GEOMETRICAMENTE SIMILI MA CON CORDE ≠ IN DIMENSIONE

$$L = \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty) \right] dx$$

$$C_\ell = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} = \int_0^c \left[\frac{(p^- - p_\infty)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} - \frac{(p^+ - p_\infty)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} \right] dx$$

$$C_\ell = \int_0^c \left(c_p^- - c_p^+ \right) \frac{dx}{c} = \int_0^c \left(c_p^- + c_p^+ \right) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\boxed{\Delta c_p = c_p^- - c_p^+} \Rightarrow C_\ell = \int_0^c \Delta c_p \, d\left(\frac{x}{c}\right)$$

ANALOGAMENTE $\quad C_m = -\int_0^c \Delta c_p \left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right)$

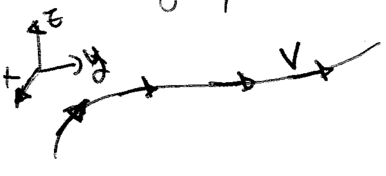
$$M = \int_0^c \left[(p^+ - p_\infty) - (p^- - p_\infty) \right] x \, dx$$

$$\boxed{M_B = M_A + L \cdot x_B}$$

$$\boxed{C_{m_B} = C_{m_A} + C_\ell \left(\frac{x_B}{c}\right)}$$

LINEE DI CORRENTE E TRAIETTORIE

- <u>linea di corrente</u> è una linea nel nostro campo di moto tale che in ogni punto è tangente al vettore di velocità.



$\neq$

- La <u>traiettoria</u> di una particella fluida, di cui descrive il percorso in istanti differenti. (TRAGITTO)

<u>Linee di corrente</u> = <u>TRAIETTORIE</u> <u>SOLO SE</u> IL MOTO È <u>STAZIONARIO</u>!!

Se $\boxed{\nabla \times \bar{q} = 0}$ in tutto il campo allora il campo è irrotazionale

$\rightarrow$ esiste una funzione potenziale ϕ tale che $\bar{q} = \nabla \phi$

$\nabla \times \bar{q} = \nabla \times (\nabla \phi)$ ma il rotore di un gradiente è sempre nullo.

Se $\bar{q}$ è il vettore velocità: $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{V} = 0$

$$\bar{V} = \nabla \phi$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\Downarrow$$

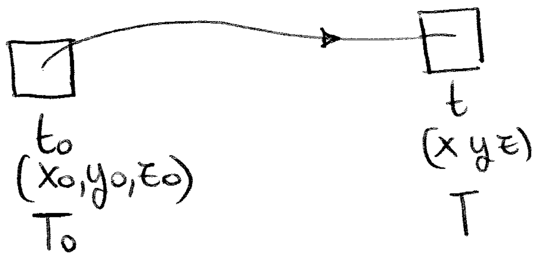
campo è irrotazionale

ϕ è scalare!
$\bar{V}$ è vettore!

$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho (\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{V} \cdot (\nabla \rho)$ } proprietà

METODI DI RAPPRESENTAZIONE DELL'EVOLVERE DEL CAMPO

① METODO LAGRANGIANO



$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = x(x_0\ y_0\ z_0\ t_0) \\ y_0 = y(x_0\ y_0\ z_0\ t_0) \\ z_0 = z(x_0\ y_0\ z_0\ t_0) \end{cases}$$

se $t = t_0$ ricavo (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{cases} u = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0} \rightarrow \text{velocità della particella} \\ v = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{x_0, y_0, z_0} \\ w = \left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)_{x_0 y_0 z_0} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} a_x = \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_{x_0 y_0 z_0} \\ a_y = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x_0 y_0 z_0} \\ a_z = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{x_0 y_0 z_0} \end{cases}$$

$$T = T(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$T_0 = T(x_0\ y_0\ z_0\ t_0)$$

SE IL MOTO È STAZIONARIO $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

GLI ALTRI TERMINI (I CONVETTIVI) SONO NULLI QUANDO I GRADIENTI DI f SONO NULLI (correnti uniformi)

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f}$$

$\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$

SE f È PROPRIO LA VELOCITÀ

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla u \\ \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla v \\ \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla w \end{cases}$$

SCALARE

TALVOLTA SI USA SFORZARE QUESTA SCRITTURA USANDOLA ANCHE NEL CASO DI VETTORI.
INVECE DI SCRIVERE LE 3 ESPRESSIONI DI PRIMA SCRIVO:

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}}$$

SCORRETTO MA SI USA

ORA CERCO di PASSARE ALLE EQ. di EULERO IN FORMA DIFFERENZIALE!

EQ. BILANCIO di EULERO IN FORMA DIFFERENZIALE

RICHIAMO dei TEOREMI CHE MI SERVIRANNO:

● TEOREMA di GAUSS

$$\int_\sigma \vec{F_q} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\tau \underbrace{\nabla \cdot}_{\text{DIVERGENZA}} \vec{F_q}\, d\tau$$

$\overline{F_q} \rightarrow q$ (SCALARE)

$\overline{\overline{F_q}} \rightarrow \overline{q}$ (VETTORE)

$$\int_\sigma \overline{\overline{F_q}} \cdot \overline{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \overline{\overline{F_q}}\, d\tau$$

TENSORE

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{F_q} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad F_1, F_2, F_3 \leftrightarrow \overline{F_q}}$$

● TEOREMA DEL GRADIENTE

$$f = f(x,y,z,t) \Rightarrow \int_\sigma f\, \overline{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla f\, d\tau$$

GRADIENTE

BILANCIO MASSA!

✱ L'EQ. di CONTINUITÀ è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \rho\, d\tau = - \int_\sigma \rho (\overline{V} \cdot \overline{n})\, d\sigma$$

(τ è COSTANTE NEL CAMPO di MOTO QUINDI $\frac{\partial}{\partial t}$ LO PORTO DENTRO L'INTEGRALE)

TEO. GAUSS

$$- \int_\tau \nabla \cdot (\rho \overline{V})\, d\tau$$

$$\Rightarrow \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = - \int_\tau \nabla \cdot (\rho \overline{V})\, d\tau$$

$$\Rightarrow \int_\tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overline{V}) \right] d\tau = 0$$

SIGNIFICA CHE PER OGNI τ LA FUNZIONE INTEGRALE SIA NULLA

① $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \overline{V}) = 0} \rightarrow$ EQ. CONTINUITÀ IN FORMA DIFFERENZIALE!

* EQ. QUANTITÀ di MOTO: $\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \bar{V}\, d\tau = -\int_\sigma \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot\bar{n})\, d\sigma - \int_\sigma p\bar{n}\, d\sigma + \int_\tau \rho \bar{g}\, d\tau$

GAUSS

$-\int_\tau \nabla\cdot(\rho \bar{V}\bar{V}\, dt)$

GRADIENTE

$-\int_\tau \nabla p\, d\tau$

$$\Rightarrow \int_\tau \left[\frac{\partial(\rho\bar{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{V}\bar{V})\right] d\tau = -\int_\tau \nabla p\, d\tau + \int_\tau \rho\bar{g}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho\bar{V})}{\partial t} + \nabla(\rho\bar{V}\bar{V}) = -\nabla p + \rho\bar{g}$$

$$\rho\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{V}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\bar{V}\cdot\underbrace{\nabla\vec{V}}_{\text{GRAD}} + \bar{V}\,\underbrace{\nabla\cdot(\rho\bar{V})}_{\text{DIVER.}} = -\nabla p + \rho\bar{g}$$

SCRITTURA FORZATA!!

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{V}\cdot\nabla\bar{V}\right) + \bar{V}\underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{V})\right]}}_{=0} = -\nabla p + \rho\bar{g}$$

EQ. CONTINUITÀ (1)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{V}\cdot\nabla\bar{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}} \quad (2)$$

→ EQ. QUANTITÀ di MOTO IN FORMA DIFFERENZIALE

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

$\boxed{e = c_v \cdot T}$ → EQ n° 6

$\boxed{\frac{p}{\rho} = R^* T}$ → EQ n° 7

con (1) (2) (3) (6) e (7) RICAVO LE 6 INCOGNITE!!

(2) → (3 EQ. !!)

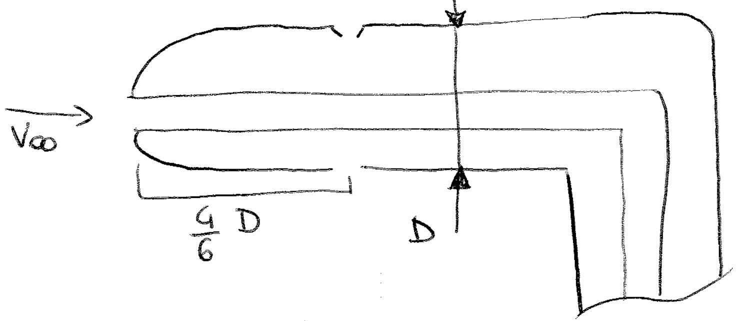
TUBO di PITOT

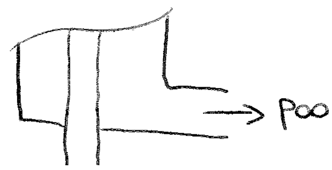
10-10-2012

- VIENE USATO PER MISURARE LA VELOCITÀ DEL VENTO
- NON È UN BUCO MA UN ANELLO DI PRESA DI PRESSIONE STATICA TUTTO INTORNO ALLA CIRCONFERENZA

p^o = PRESSIONE TOTALE DI ARRESTO

p_∞ = PRESSIONE STATICA





VOGLIO MISURARE V_∞

- CON LE PRESE LATERALI MISURO LA PRESSIONE STATICA p_∞
- CON LA PRESA FRONTALE MISURO P_{TOT} $P_{ARRESTO}$ (p^o)
- LE PARTICELLE SI ARRESTANO ISENTROPICAMENTE MENTRE QUELLE PIÙ LATERALI DEVIANO $(V = 0 \ , \ P = P_0)$

NEL CASO PIÙ SEMPLICE HO FLUIDO INCOMPRIMIBILE E STAZIONARIO

$\Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ e $\rho = cost$ ⊛

Se non ho vento $p^o = p^\infty$. In caso di corrente ISTAZIONARIA e INCOMPRIMIBILE posso sfruttare il Tubo di Pitot per calcolare V_∞.

$$\rho_{aria} = \frac{p_{amb}}{\frac{R}{M} T_{amb}} = \frac{101\,320{,}3 \text{ Pa}}{\frac{8314}{29} \cdot 289{,}15 \text{ K}} = 1{,}225 \frac{kg}{m^3}$$

$$p^o - p_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \gamma_{H_2O} \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \Delta h_1 \longrightarrow p^o - p_\infty = 981 \text{ Pa}$$

$$\Delta h = \Delta h_2 \longrightarrow p^o - p_\infty = 1962 \text{ Pa}$$

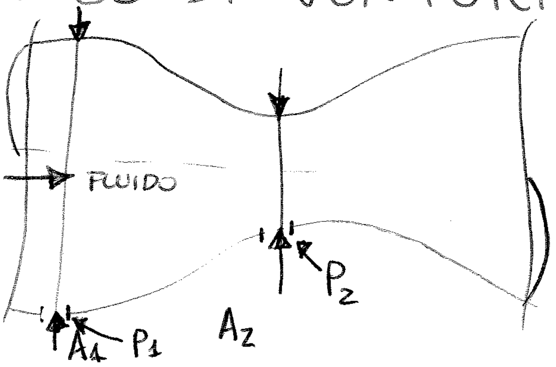
$$(V_\infty)_1 = \sqrt{\frac{2(p^o - p_\infty)}{\rho}} = 40{,}06 \text{ m/s}$$

$$(V_\infty)_2 = 56{,}67 \text{ m/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\Delta h_1 = \Delta h_2 \\ 2\Delta p_1 = \Delta p_2 \\ 2V_{\infty 1} \neq V_{\infty 2} \end{array}\right\}$$

OSSERVAZIONE: A causa della RADICE non è vero che se Δp raddoppia, raddoppia la velocità!

TUBO DI VENTURI



A_2 = SEZIONE di GOLA
A_1 = SEZIONE di INGRESSO

p_1 e p_2 sono due prese di pressione!

$p_2 < p_1$

È un tubo con una RESTRIZIONE → RESTRIZIONE di GOLA.

Siamo SEMPRE IN REGIME STAZIONARIO E INCOMPRIMIBILE

$$p^o = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right)} \quad (*)$$

Voglio calcolare la velocità in $A_1 \rightarrow V_1$

Sfruttando l'equazione di continuità ⇒ ρ costante

$$\cancel{\rho_1} A_1 V_1 = A_2 V_2 \cancel{\rho_2}$$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

EQ. CHE DESCRIVONO IL MODO EULERIANO: 11-10-2012

① $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0$

TERMINE CONVETTIVO ⇒ NON LINEARE

② $\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$

③ $\dfrac{\partial E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla E = -\dfrac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) + \bar{g} \cdot \vec{V}$

EQ. DI BILANCIO RIFERITE AL MOTO DELLE PARTICELLE FLUIDE

$$\underbrace{\frac{D(\cdot)}{Dt}}_{\text{DERIVATA SOSTANZIALE}} = \underbrace{\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}}_{\text{DERIVATA LOCALE}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla(\cdot)}_{\text{TERMINE CONVETTIVO}}$$ } FORMA COMPATTA

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + w \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$$ } FORMA ESTESA

① $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0$

$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{V}) + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}} \quad 1^*$$

② $\dfrac{D\bar{V}}{\partial t} = \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}} \quad 2^*$$

③ $\dfrac{DE}{Dt} = \dfrac{\partial E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla E$

$$\boxed{\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) + \vec{g} \cdot \vec{V}} \quad 3^*$$

$$\nabla \cdot (p \bar{V}) = \underbrace{p (\nabla \cdot \vec{V})}_{\text{LAVORO TERMODINAMICO}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla p}_{\text{LAVORO MECCANICO}}$$

Sapendo che $E = e + \frac{V^2}{2}$

derivando ottengo $\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{De}{Dt} + \frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)$

$**$ lo sostituisco in $(**)$

$$\frac{De}{Dt} + \cancel{\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)} = \cancel{\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)} - \frac{1}{\rho} p \cdot \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{V}} \quad (4^*)$$

SFRUTTIAMO LA $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$ EQ. di CONTINUITÀ LAGRANGIANA

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2 \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$-\cancel{\rho}\nabla \cdot \vec{V} = -\rho^{\cancel{2}} \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$+\nabla \cdot \vec{V} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

LA 4^* $\Rightarrow$ $\frac{De}{Dt} = -p \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0}$$

(FLUIDO IN MOTO) $\rightarrow$ 1° Principio della Termodinamica a cui manca 1 pezzo

$(5)^*$ $de + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T dS$

(FLUIDO FERMO)

LA 5^* $\Rightarrow$ POSSO SCRIVERLA COME:

$$\frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = T \cancel{\frac{DS}{Dt}} \rightarrow \text{VALE AERODINAMICA}$$

$=0$ XCHÉ SIAMO NELL'IPOTESI DI FLUIDO IDEALE NON VARIAMO Q $\Rightarrow \frac{DS}{Dt} = 0$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{COST}$$ lungo la linea di corrente (xchè ho proiettato i gradienti lungo la linea di corrente!)

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho V^2=\text{COSTANTE}}$$

PRESSIONE TOTALE o di ARRESTO

$p^\circ = p+\frac{1}{2}\rho V^2 =$ COST. LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE (non necessariamente ovunque!!)

PRESSIONE STATICA

P. DINAMICA

CASO PARTICOLARE: FLUSSO STAZIONARIO, INCOMPRIMIBILE e IRROTAZIONALE ($\bar{\omega}=0$)

$\bar{\omega}=0 \Leftrightarrow \nabla\times\vec{V}=0$

ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE POTENZIALE ϕ ~~tale~~ che $\bar{V}=\nabla\phi$

$\rho=\text{cost} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{V}=0$ } dalla eq. di continuità

ma $\nabla\cdot\bar{V}=\nabla\cdot(\nabla\phi)=0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi=0}$ EQ. di LAPLACE → laplaciano di ϕ è nullo.

{ $\nabla\cdot(\nabla(\cdot))=\nabla^2$ è DETTO LAPLACIANO }

ORA VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI ⇒ STUDIO TANTI CAMPI SEMPLICI e SOMMO GLI EFFETTI OTTENENDO UN CAMPO COMPLESSO e <u>LINEARE</u>!

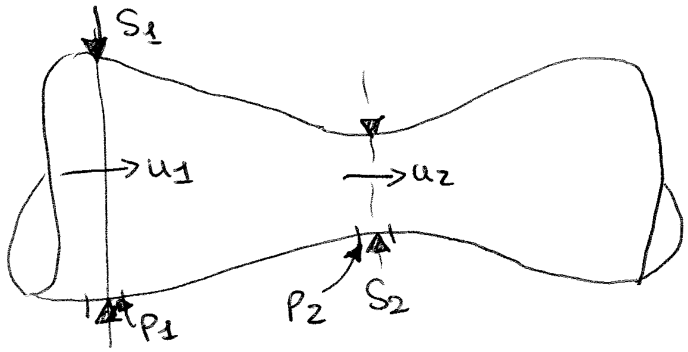
↳ NON POTREI USARE IL P.D.S.E se non lo fosse!!

$(u,v,w)=\bar{V}$ se il campo è irrotazionale posso usare come incognita lo scalare ϕ [3 incognite $u,v,w \to$ 1 INCOGNITA ϕ]

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=u\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=v\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=w\end{cases}$$

⇒ IMPONENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO DELL'EQ. DI LAPLACE LO RICAVO!!

Nel tubo di venturi quindi...

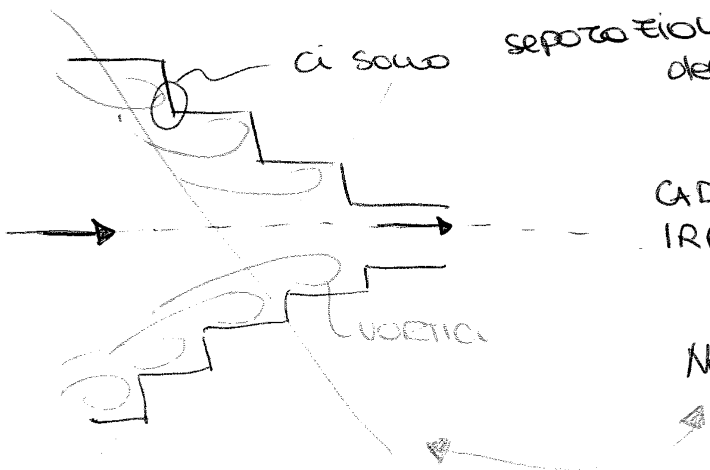


dall'eq. di continuità in condizioni stazionarie: $S_1 u_1 = S_2 u_2$

da Bernoulli $\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 = \text{COSTANTE}$

se P aumenta u deve diminuire!

Quindi attenzione a usare Bernoulli in questo caso:



separazioni $\rightarrow$ FORTE ROTAZIONALITÀ del FLUIDO

$\Downarrow$

CADONO LE IPOTESI DI IRROTAZIONALITÀ!!

$\Downarrow$

NO BERNOULLI!!

- EQ. DELL'ENERGIA IN UN'ALTRA FORMA
- FLUIDO STAZIONARIO e COMPRIMIBILE $\rho \neq cost$

So che $\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\vec{V}) + \cancel{\vec{g}\cdot\vec{V}}$ $\cong 0$ FLUIDO ARIA!!

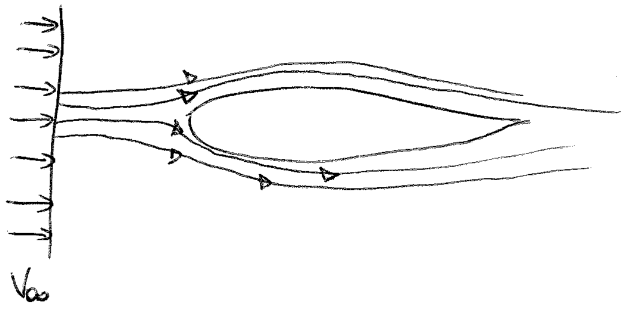
$$\nabla\cdot(p\vec{V}) = \vec{V}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\vec{V}$$

eq. energ. $\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\left(\vec{V}\cdot\nabla p + p\,\nabla\cdot\vec{V}\right)$

eq. conti. $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\nabla\cdot\vec{V}$ Poiché $\Rightarrow \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$

$$\frac{D(\rho)}{Dt} = -\rho^2\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

SUPPONIAMO che tutte linee di campo provengono dalla stessa zona ad uguale entalpia totale (SERBATOIO)



$\Downarrow$

$\nabla H = 0$

H = COST. IN TUTTO IL CAMPO

IN QSTO CASO IL CAMPO È OMOTOTAENTALPICO cioè TUTTE LE LINEE di CORRENTE VENGONO DA ZONE CON H COSTANTE E IL CAMPO È STAZIONARIO.
SE A CIÒ AGGIUNGIAMO L'IRROTAZIONALITÀ del CAMPO $\nabla S = 0$
$\Rightarrow$ HO UN CAMPO ISENTROPICO.

PER UN GAS PERFETTO $h = c_p T$ nel CASO di ENTALPIA TOTALE $H = c_p \cdot T^0$ dove T^0 è LA TEMPERATURA TOTALE, o TEMPERATURA di ARRESTO. SAPENDO CHE $H = h + \frac{V^2}{2}$

$$c_p T^0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$$c_p T^0 = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

$$T^0 = T + \frac{1}{c_p}\frac{V^2}{2} = T\left(1 + \frac{V^2}{c_p T\, 2}\right)$$

$$T^0 = T\left(1 + \frac{c_s^2}{c_p T} \cdot \underbrace{\frac{1}{c_s^2}\frac{V^2}{2}}_{M^2\,(MACH)}\right)$$

c_s = VELOCITÀ del SUONO

$$T^0 = T\left(1 + \frac{\gamma R^* \cancel{T}}{c_p \cancel{T}} \cdot \frac{M^2}{2}\right)$$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ $\quad R^* = c_p - c_v$

$$\frac{\gamma R^*}{c_p} = \frac{\cancel{c_p}}{c_v}\frac{c_p - c_v}{\cancel{c_p}} = \gamma - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T^0 = \overbrace{T}^{\text{TEMP. STATICA}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}$$

VALE ANCHE SE IL FLUSSO non è ISENTROPICO!
ANCHE SE SONO PRESENTI DISCONTINUITÀ

$$\Rightarrow -\nabla \times (\vec{V} \times \bar{\omega}) = \bar{V} \cdot \nabla\bar{\omega} - \vec{V} \cdot \nabla\bar{\omega} + \bar{\omega}(\nabla \cdot \bar{V})$$

$$\Rightarrow -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\cancel{\nabla \times \nabla p}}_{=0} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p$$

SOSTITUENDO...

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla\vec{\omega} = \bar{\omega} \cdot \nabla\vec{V} - \bar{\omega}(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \bar{f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \bar{\omega} \cdot \nabla\bar{V} - \bar{\omega}(\nabla \cdot \bar{V}) - \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \bar{f}}$$

SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE $\Rightarrow$ $\rho = cost$ e $\nabla \cdot \bar{V} = 0$, I TERMINI SOTTOLINEATI SONO NULLI $\Rightarrow$ L'EQ. DIVENTA:

$$\boxed{\frac{D\bar{\omega}}{Dt} = \bar{\omega} \cdot \nabla\bar{V} + \nabla \times \bar{f}}$$

SE $\bar{f} = \vec{g}$ $\Rightarrow$ $\nabla \times \bar{g} = 0$ IL TERMINE $\nabla \times \bar{f} \to 0$

· SE IL CAMPO DI MOTO È BIDIMENSIONALE $\bar{V}$ È SEMPRE $\perp$ a $\bar{\omega}$

$\Rightarrow$ $\bar{\omega} \cdot \nabla\bar{V} = 0$!!

$\Rightarrow$ SE HO CAMPO 2D, CAMPO DI FORZE ESTERNE IRROTAZIONALE E FLUIDO INCOMPRIMIBILE $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{D\bar{\omega}}{Dt} = 0}$ $\rightsquigarrow$ COME EVOLVE $\bar{\omega}$ NEL TEMPO

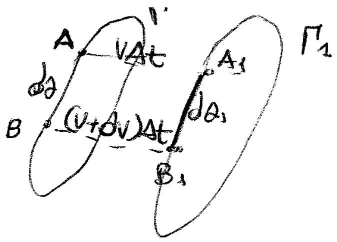
$$\Downarrow$$

PER UNA PARTICELLA FLUIDA $\bar{\omega}$ È COSTANTE SULLA SUA TRAIETTORIA INOLTRE SE IL CAMPO DI MOTO È IRROTAZIONALE LO RIMANE.

CHE SUCCEDE SE HO CAMPO DI MOTO 3D?

DEVO INTRODURRE UN'ALTRA QUANTITÀ!

$$\frac{D}{Dt}\left(d\bar{a}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\bar{a}_1 - d\bar{a}}{\Delta t}$$



Per andare $A_1 \to B_1$

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{AA_1} + d\vec{a}_1 = \overline{BB_1} + d\bar{a}$$
$$\Downarrow$$
$$d\bar{a}_1 - d\bar{a} = \overline{BB_1} - \overline{AA_1} = \left(\bar{V} + d\bar{V}\right)\Delta t - \bar{V}\Delta t$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{d\bar{a}_1 - d\bar{a} = d\bar{V}\,\Delta t}$$

$$\frac{ds}{\Delta t} = \bar{V} \,!$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_\ell \frac{D\bar{V}}{Dt} \cdot d\bar{a} + \underbrace{\cancel{\oint_\ell \bar{V} \cdot d\bar{V}}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \bar{V} \cdot d\bar{V} = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

MA L'INTEGRALE LUNGO UNA LINEA CHIUSA DI UN DIFFERENZIALE ESATTO È NULLO!

$$\frac{D\bar{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad \Rightarrow \quad \frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_\ell \frac{1}{\rho}\nabla p \, d\bar{a}$$

$\frac{dp}{da} = \nabla p \cdot \bar{t}$ = GRADIENTE DI P PROIETTATO NELLA DIREZIONE TANGENTE ALLA LINEA CHIUSA ℓ $\Rightarrow dp = \nabla p \cdot d\bar{a}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_\ell \frac{1}{\rho}\, dp$$

TEOREMA LAGRANGE - THOMSON

In un campo di moto tale che ρ sia costante o funzione della sola pressione, la circuitazione Γ della velocità lungo la linea fluida è costante, comunque e dovunque si sposti o si deformi la linea fluida stessa.

① SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE $\rho = cost$ $\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\oint_\ell dp}_{=0} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0} \quad \Rightarrow \boxed{\Gamma \text{ È COSTANTE}}$$

② $\rho \neq$ costante ma $\rho = f(P)$ — È FUNZIONE SOLO DI P

X ESEMPIO UN CAMPO ISENTROPICO $\frac{P}{\rho^\gamma} = cost$

ANCHE IN QSTO CASO $\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$

$$c_{p1} = \frac{p_1 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p^0 - p^{\infty}}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = 1$$ nel PUNTO DI ARRESTO IL c_p VALE 1

$$c_{p2} = \frac{p_2 - p_\infty}{+\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p_\infty - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = 0$$ dove $V = V_\infty$ $c_p = 0$

$$c_{p3} = \frac{p_3 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{98326 - 100'000}{\frac{1}{2}\cdot 1,189\,(80)^2} = -0,44$$ DOVE HO DEPRESSIONE c_p è NEGATIVO

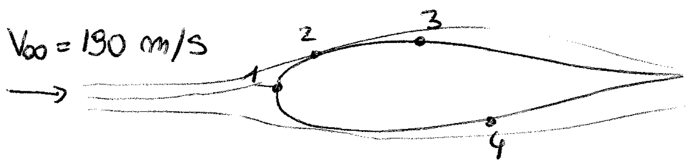
$$c_{p4} = \frac{p_4 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = 0,13$$ DOVE HO $\Delta p > 0$ c_p è POSITIVO

nel caso invece volessi considerare il fluido incomprimibile dovrei usare le eq:

$$\begin{cases} p^0 = p_\infty + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \quad = 100'000 + \left(1 + \frac{0,4}{2}(0,23)^2\right)^{\frac{1,4}{0,4}} = 103857\,Pa \end{cases}$$

$\approx$ al p^0 di prima xché avevo $M < 0,3$

ESERCIZIO 2



$V_1 = 0$
$V_2 = V_\infty = 190\,m/s$
$V_3 = 1,2 \cdot 190\ m/s = 228\,m/s$
$V_4 = 0,9 \cdot 190\ m/s = 171\,m/s$

$T_\infty = 293\,K$ $\quad p_\infty = 100'000\,Pa$

calcolare $c_{p1,2,3,4}$, $T_{1,2,3,4}$, $p_{1,2,3,4}$

$$M_{max} = \frac{228\,m/s}{343,114\,m/s} = 0,6645 > 0,3 \rightarrow \text{IL FLUIDO è COMPRIMIBILE!!}$$

M_3

$$c_{s\infty} = \sqrt{R^* \gamma T_\infty} = 343,114\,m/s$$

$M_\infty = 0,5537$ $\quad$ ~~$M_1 = 0$ $\quad M_2 = 0,554$ $\quad M_3 = 0,6645$ $\quad M_4 = 0,498$~~

$$p^0 = p_\infty \cdot \left(1 + 0,2\,M_\infty^2\right)^{\frac{1,4}{0,4}} = 122825\,Pa \quad \frac{1,4}{0,4} \sim 3,5$$

$$T^0 = T_\infty \cdot \left(1 + 0,2\,M_\infty^2\right) \doteq 310,97\,K$$

ci serve calcolare prima le temperature per calcolare le velocità locali c_s e poi i numeri di M corretti! nelle pressioni

18-10-2012

FLUIDO BIDIMENSIONALE, INCOMPRIMIBILE

$$\Downarrow$$

$$\frac{D\bar{\omega}}{Dt} = 0 \Rightarrow$$ LA VORTICITÀ SI MANTIENE COSTANTE NEL TEMPO

$$(\bar{\omega} = cost)$$

CAMPO 3D

$$\Gamma = \oint_e \bar{V} \cdot d\bar{s} = \int_\sigma (\underbrace{\nabla \times \bar{V}}_{\bar{\omega}}) \cdot n \, d\sigma$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_e \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\bar{s} = -\oint_e \frac{1}{\rho} dp$$

· SE IL CAMPO DI MOTO È incomprimibile $\rho = cost$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\cancel{\oint_e dp}}_{\substack{=0 \text{ XCHÈ} \\ \text{È UN DIFF. ESATTO}}} \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \Gamma = costante$$

· SE ρ NON È COSTANTE $\Rightarrow$ CAMPO COMPRIMIBILE

SE $\rho = f(p)$ (È FUNZIONE SOLO DELLA PRESSIONE) $\Rightarrow \boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$

$\downarrow$ COME NEL CASO ISENTROPICO

$\Downarrow$ Γ è costante

VERIFICO QSTO: $\frac{p}{\rho^\gamma} = cost \Rightarrow \rho = \left(\frac{p}{cost}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_e \left(\frac{p}{cost}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dp$$

$$dQ(p) = \left(\frac{p}{cost}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dp \quad \Big\} \text{ è un diff. esatto}$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\underbrace{\cancel{\oint_e dQ(p)}}_{=0} = 0 \quad \text{cvd}$$

EQUAZIONI di NAVIER - STOKES

- Sono più complete delle eq. di Eulero.
- NON TRASCURO GLI EFFETTI VISCOSI

① EQ. BILANCIO MASSA (3.1) $\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}}$

② EQ. BILANCIO QUANTITÀ DI MOTO (3.2)

$$\boxed{\frac{D\bar{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3}\nabla(\nabla \cdot \bar{V})}$$

VISCOSITÀ CINEMATICA

③ EQ. BILANCIO ENERGIA

(3.3) $$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = K\nabla^2 T - p\nabla \cdot \vec{V} + D}$$

LEGATO ALLA CONDUCIBILITÀ TERMICA

DISSIPAZIONE È LEGATO AI GRADIENTI DI VELOCITÀ E ALLA VISCOSITÀ DEL FLUIDO

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$ o in forma compatta $$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}$$

D è sempre >0 $\Rightarrow$ C'È SEMPRE TRASFERIMENTO DI ENERGIA VERSO SCALE PIÙ PICCOLE

CORRENTI TURBOLENTE ← (NO ESAME)

Sono fenomeni che coinvolgono molteplici scale.

I vortici di grossa scala perdevano "ordine" → diminuzione di scala

Il sistema varia con il tempo in modo imprevedibile, o quasi.

Abbiamo a che fare con sistemi dinamici altamente non lineare.

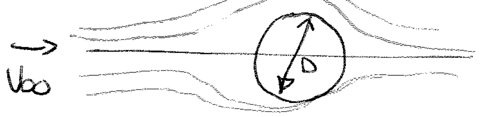
SAPERE DETTAGLIATAMENTE DELLE INFORMAZIONI SU UNA STRUTTURA VORTICOSA NON MI INTERESSA → È UTILE SAPERE UN COMPORTAMENTO MEDIO GENERICO. ⇒ APPROCCIO STATISTICO

- MANCA UNA NETTA SEPARAZIONE DI SCALE → c'è una variazione continua
- IL CAMPO TURBOLENTO HA STRUTTURA E ORIENTAMENTO CHE MOLTE VOLTE CON METODI PARTICOLARI POSSONO ESSERE PREVISTE

NEL CASO DI CAMPI LAMINARE I FENOMENI DI TRASPORTO SONO solo legati alla viscosità del fluido. Nel campo TURBOLENTO la diffusione avviene anche a causa di agitazione termica provando con ≠ fluidi e ≠ misure geometriche del condotto scoprì che per flussi interni $Re = \frac{UD}{\nu} = 2300$ è il momento in cui il fluido compie la transizione. (in un condotto cilindrico)

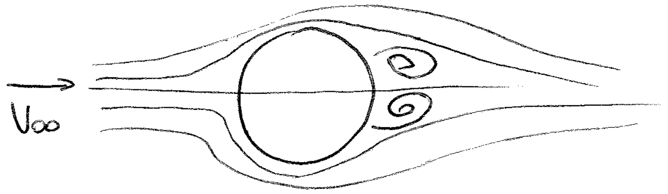
$Re < 2300 \Rightarrow$ laminare $Re > 2300 \Rightarrow$ TURBOLENTO

(LAMINARE)



SUPPONGO CHE $Re_D < 4$

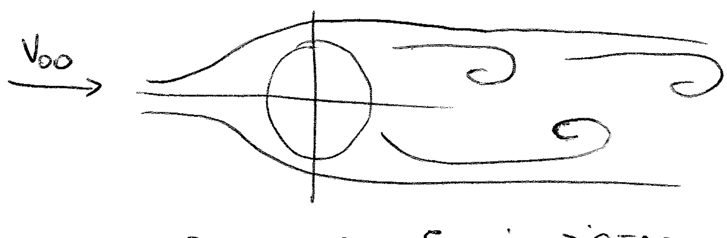
se aumento solo la velocità $4 < Re_D < 40$



VORTICI CONTROROTANTI e SCIA STAZIONARIA

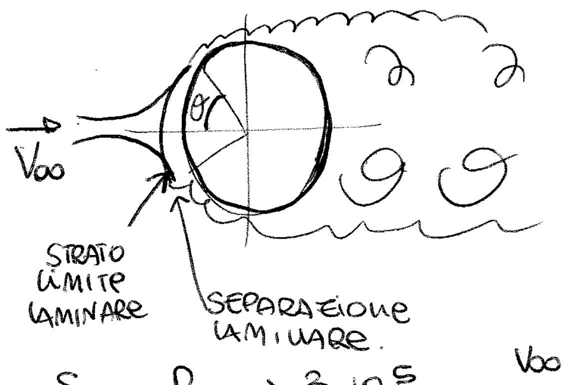
Se aumento la velocità $40 < Re_D < 90$
nel campo di moto si osservano oscillazioni e fluttuazioni

se $90 < Re_D < 400$ si osserva un distacco alternato di strutture vorticose in modo ordinato



SCIA di VON-KARMAN
(SCHIERE VORTICOSE // CREANO UNA SCIA INSTAZIONARIA)

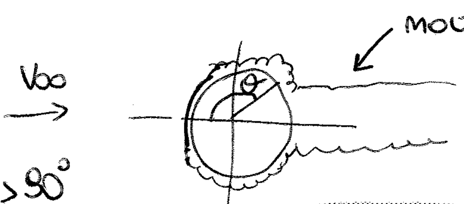
$400 < Re_D < 3\cdot10^5$ il distacco dei vortici non è più regolare $\Rightarrow$ si ha la transizione a turbolento



$\theta < 90°$

SI HA SCIA TURBOLENTA!

Se $Re_D > 3\cdot10^5$



MOLTO PIÙ CHIUSA
⇓
MAGGIOR RECUPERO DI PRESSIONE E MINORE RESISTENZA.

$\theta > 90°$

IN QUESTO CASO HO SEPARAZIONE E SCIA TURBOLENTE.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \overset{=\nu\rho}{\mu} \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \underset{\text{P. media}}{\bar{p}} + p' \quad \text{fluttuazione attorno al valore medio} \\ \vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}' \\ T = \bar{T} + T' \quad \leftarrow \text{ORA NON CI SERVE!} \end{cases}$$

POSSO SCRIVERE LE MIE GRANDEZZE IN QSTO MODO!

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad ① \ * \\ \rho \left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

SOSTITUIAMO ...

$$② \quad \rho \left[\overline{\frac{\partial (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')}{\partial t}} + \overline{(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} \right] = -\overline{\nabla (\bar{p} + p')} + \rho \bar{g} + \overline{\mu \nabla^2 (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')}$$

$\overline{}$ = FARE LA MEDIA

$$① \quad \overline{\nabla \cdot (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} = 0$$

(μ la supponiamo costante)

ANDIAMO A MEDIARE...

$$\overline{\vec{V}'} = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} ① \ \overline{\nabla \cdot (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} = 0 \\ \boxed{\nabla \cdot \bar{\vec{V}} = 0} \\ ② \ \rho \left[\dfrac{\partial \bar{\vec{V}}}{\partial t} + \overline{(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} \right] = -\nabla \bar{p} + \rho \bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{\vec{V}} \\ ⊛ \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) = \vec{V} \nabla \vec{V} + \vec{V} \underbrace{\cancel{(\nabla \cdot \vec{V})}}_{=0} {}^{*}$$

$$\overline{(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} = \overline{\nabla \left[(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \right]}$$

DI EQUAZIONI E RISOLVO LE EQ. DI PRIMA.
Businesq lega gli sforzi di REYNOLDS ai gradienti delle velocità.

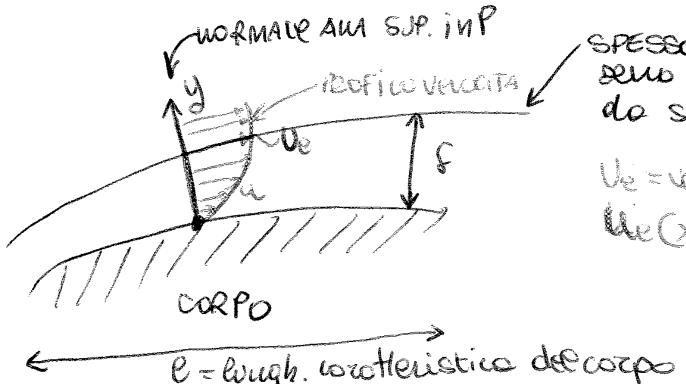
22-10-2012

RISCRIVIAMO LE EQ. DI NAVIER-STOKES IN FORMA GENERALE

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \\ \dfrac{D\bar{V}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \bar{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \dfrac{\nu}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \\ \rho \dfrac{De}{Dt} = K\nabla^2 T - p(\nabla \cdot \vec{V}) + D \end{cases}$$

- STRATO LIMITE BIDIMENSIONALE, STAZIONARIO E INCOMPRIMIBILE

ABBIAMO UN CORPO SU CUI SI SVILUPPA LO STRATO LIMITE.



SPESSORE CHE INDIVIDUA IL CONFINE DELLO STRATO LIMITE CHE AUMENTA da sx a dx.

V_e = VELOCITÀ ESTERNA (è funzione di x) $U_e(x)$

δ = DELTA PICCOLO è LO SPESSORE DELLO STRATO LIMITE $\Rightarrow$ è funzione di x

IPOTIZZO CHE $\delta \ll \ell$ e che le cose cambiano molto + velocemente in direzione y (gradienti lungo y sono molto maggiori di quelli lungo x $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$!!)

Non avendo scambi termici la 3 eq. dell'energia non ci interessa.
l'eq. della massa scritta per componenti $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

l'eq. lungo l'asse x della 2° è: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
(abbiamo ipotizzato un fluido leggero $\Rightarrow$ trascuro $\bar{g}$)

Riscrivendola per l'asse y: $u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

prevalenti (di ordine superiore) ai termini diffusivi e convettivi.

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0} \Longrightarrow$ p COSTANTE lungo y !!

Riassumendo con le ipotesi di potenza ho:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (4.1) \\ \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (4.2) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & (4.3) \end{cases}$$

EQ. DI PRANDTL PER LO STRATO LIMITE $\Longleftarrow$

AVREI POTUTO SCRIVERE invece di $\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{dp}{dx}$ xché p è funzione solo di x e si mantiene costante lungo y. $p = p(x)$

$\Rightarrow p_e = p_e(x)$

RISCRIVIAMO LA (4.2) MODIFICANDO IL TERMINE DI PRESSIONE all'esterno dello STRATO LIMITE DIVENTA:

$$U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + V_e \underbrace{\frac{\partial U_e}{\partial y}}_{=0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_e}{\partial x} + \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{=0}$$

— SOLO ALL'ESTERNO

=0 xché ALL'ESTERNO LA VELOCITà è COSTANTE LUNGO y

$$\Rightarrow U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4.1) \rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_e \underbrace{\frac{dU_e}{dx}}_{=0} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ (4.2) \quad U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + V_e \cancel{\frac{\partial U_e}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_e}{\partial x} \end{cases}$$

SE IL FLUIDO ACCELERA IO HO GRADIENTI di PRESSIONE NEGATIVI

$$U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho U^2 C_D S = \overline{\tau_P} S$$

S: SUPERFICIE BAGNATA DAL FLUSSO

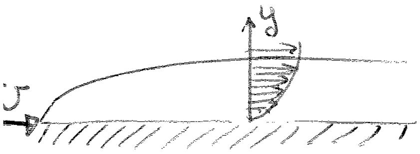
RESISTENZA di ATTRITO

Per caratterizzare lo S.L. dello strato limite possiamo usare Re locale.

Re_x = dipende dalla posizione x sul nostro corpo. $Re_x = \boxed{\frac{Ux}{\nu}}$

Re TOTALE $= \boxed{\frac{UL}{\nu}} = Re_L$. Esiste anche $Re_\theta = \boxed{\frac{U \cdot \theta}{\nu}}$.

Vediamo come diventano le eq. di PRANDTL se investo con un fluido privo di incidenza una lastra piana.



L PLACCA

le eq erano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\underbrace{\cancel{\dfrac{dp}{dx}}}_{=0} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

SE NON HO INCIDENZA NON GENERO GRADIENTI DI PRESSIONE

$\Rightarrow u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\Rightarrow$ TERMINI CONVETTIVI e diffusivi si BILANCIAN

$\boxed{\tau = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y}}$ $\Rightarrow \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial \tau}{\partial y}$ → LA SOLUZIONE esatta a questa eq. è stata ricavata da BLASIUS.

24/10/2012

AVEVAMO VISTO CHE PER UNA PLACCA PIANA IN ASSENZA DI GRADIENTI DI PRESSIONE:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\underbrace{\cancel{\dfrac{dp}{dx}}}_{=0} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

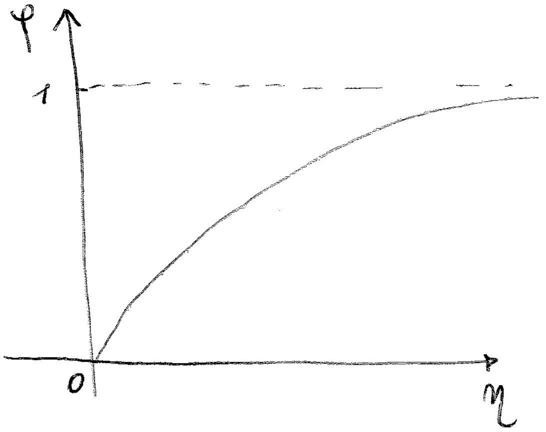
• ESERCIZIO S.L.L. SU PLACCA PIANA A INCIDENZA NULLA (SOLUZ. BLASIUS)
ESERCITAZIONE 3
Stampe [illegible] excell

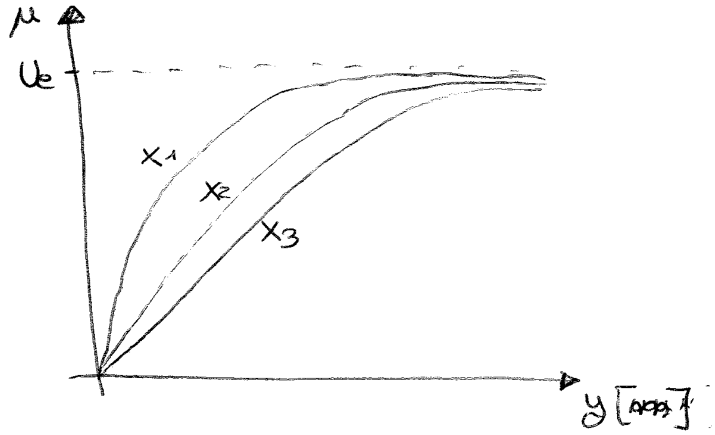
$L = 2m$ (LUNGHEZZA LAMINA)

$\nu = 1,454 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$

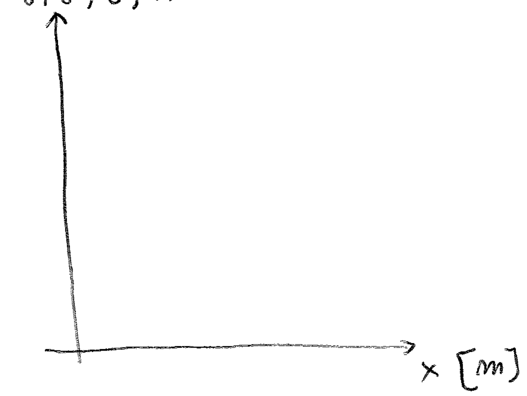
$\rho = 1,225\ Kg/m^3$

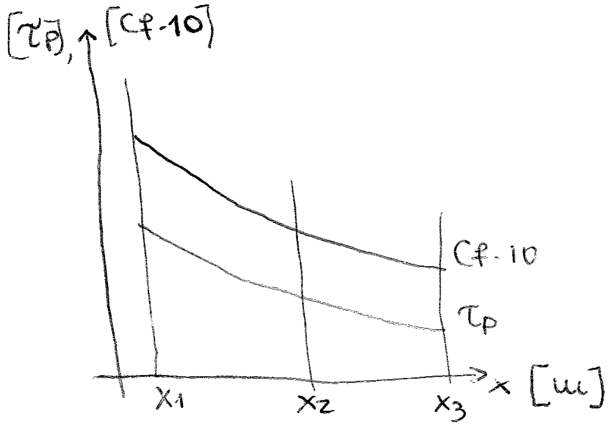
$Re_L = 500'000$





CALCOLARE LE VELOCITA' a $X_1 = 0,25\ m$ $X_2 = 0,65\ m$ $X_3 = 1,55\ m$





$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$ viene dalla soluzione di BLASIUS

		X1		X2		X3	
η	μ/U_∞	y	u	y	u	y	u

$\delta(x) \rightarrow y \rightarrow \frac{u}{U_\infty} = 0,99$

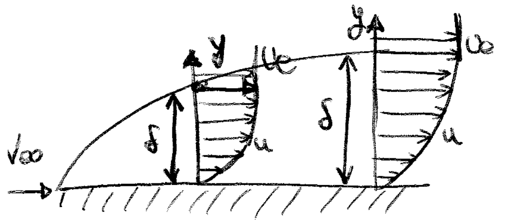
$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$

$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$

$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$

29-10-2012

S.L.L. SU PLACCA PIANA IN ASSENZA DI GRADIENTI DI PRESSIONE

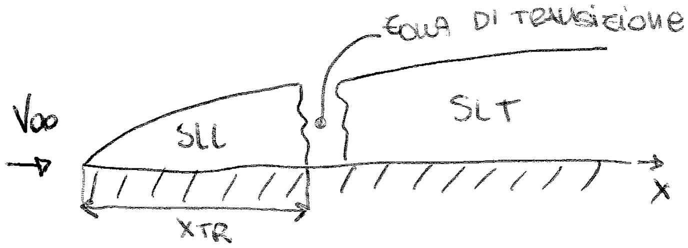


PROFILI DI VELOCITÀ A ≠ DISTANZA SONO SIMILI MA NON UGUALI XCHÈ δ AUMENTA.

SE VADO A SCALARE $\varphi = \frac{u}{U_e}$ e $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$ ABBIAMO VISTO CHE RISOLVENDO IL SIST. DI EQ.* DELLO STRATO LIMITE, OTTENIAMO LA SOLUZIONE ESATTA DI BLASIUS $\varphi = \varphi(\eta)$.

$$EQ^* \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

LA TRANSIZIONE DA STRATO LIMITE LAMINARE A TURBOLENTO SI HA PER $Re = 500'000$. (È UNA TRANSIZIONE LAMINARE-TURB. NATURALE)



$$Re_{x_{TR}} = \frac{V_\infty \cdot x_{TR}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$$

POTREI ANCHE FORZARE LA TRANSIZIONE ANTICIPANDOLA O RITARDANDOLA.

ESISTONO CASI IN CUI NON RIESCO A INDIVIDUARE LA x_{TR} XCHÈ MAGARI È TURBOLENTO OVUNQUE.

FATTORI CHE INFLUENZANO LA TRANSIZIONE NELLO S.L.

- Re
- RUGOSITÀ
- GRADIENTI DI PRESSIONE
- TEMPERATURA DELLA PARETE
- ASPIRAZIONE O SOFFIATURA
- LIVELLO DI TURBOLENZA DELLA CORRENTE

EQUAZIONI di REYNOLDS x LO S.L.T.

RIPRENDIAMO LE EQ. DI REYNOLDS E LE MODIFICHIAMO x LO S.L.T.

$$\begin{cases} \text{①} \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \text{②} \quad \mu \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx} + \nu \nabla^2_{\mu} \end{cases}$$

$u = \bar{u} + u'$

VALORE MEDIO — V. FLUTTUANTE ATTORNO A $\bar{\mu}$

$v = \bar{v} + v'$

$p = \bar{p} + p'$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{p'} = 0}$$

$\Downarrow$

IL VALORE MEDIO DEL VALORE FLUTTUANTE È NULLO

② PRENDO E LA MODIFICO:

$$\rho\left[\mu\left(\frac{du}{dx} + \underbrace{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}}\right) + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

DALLA ① sono $=0$ quindi se lo aggiungo non cambio nulla!

TEORICAMENTE x LE CONSIDERAZIONI FATTE L'ALTRA VOLTA $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

QUESTO TERMINE È TRASCURABILE x ORA LO LASCIO CMQ.

$$\rho\left[2u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}}\right] = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y}$$

$$\rho\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\right] = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

2A

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}+u'\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\bar{u}+u'\right)\left(\bar{v}+v'\right)\right]\right] = -\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2}\right]$$

1) DIVENTA:

1A
$$\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{(\bar{v}+v')}}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ (2.D)\ \rho\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\dfrac{d\bar{p}}{dx} + \mu\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right) \end{cases}$$

$$\mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)$$

HO OTTENUTO LE EQUAZIONI DI REYNOLDS X LO STRATO LIMITE

SE HO S.L.L.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right) = 0$$

QUINDI LA 2° EQ DIVENTA ANALOGA ALLA (2)

$$(2.D) \Rightarrow \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}\right) \quad (2.E)$$

$\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$: τ VISCOSO — EFFETTI MICROSCOPICI

$-\rho\overline{u'v'}$: EFFETTO MACROSCOPICO DOVUTO AGLI VORTICI MOLECOLARI

SCRIVO UNA NUOVA τ COMPLESSIVA $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \mu\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}}$

τ: SFORZI TANGENZIALI TOTALI

$$(2.E) \Rightarrow \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

RICORDIAMO CHE:

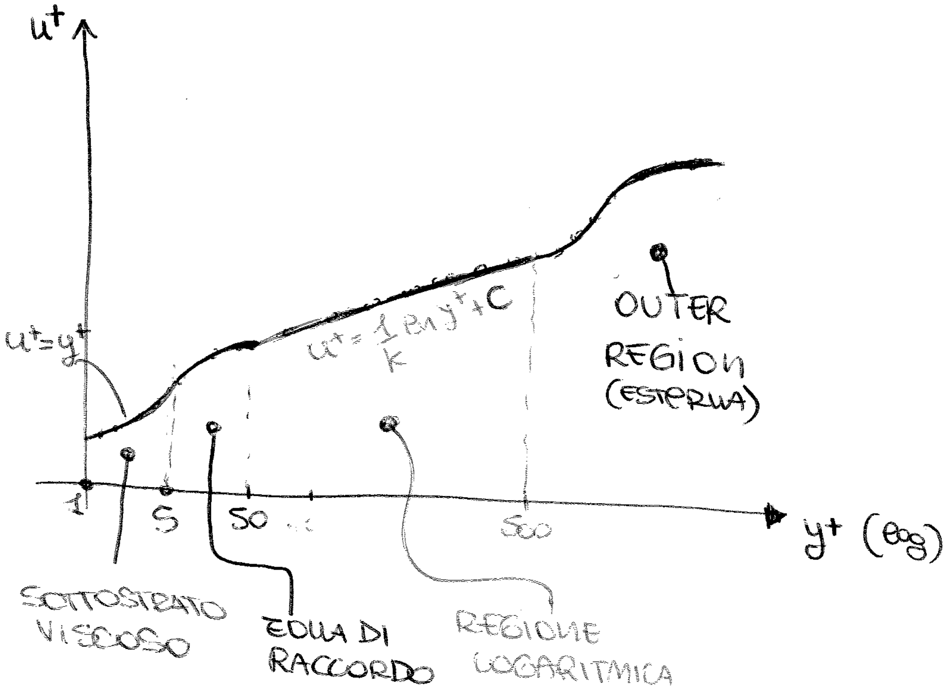
$$-\rho\overline{u'v'} = \mu_T\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \overset{*}{=} \left(\mu + \mu_T\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

μ_T → VISCOSITÀ TURBOLENTA o EDDY VISCOSITY (legata alla presenza di strutture vorticose nello S.L.T)

* È COME SE NEL FLUSSO TURBOLENTO SI AVESSE UNA VISCOSITÀ DINAMICA MAGGIORE CHE NELLO STRATO LAMINARE.

RAPPRESENTIAMO LE ≠ REGIONI SU UN GRAFICO SEMI-LOGARITMICO.



STRATO LIMITE LAMINARE SU LAMINA PIANA INVESTITA SENZA INCIDENZA

→ LAMINARE DAL BORDO D'ATTACCO

FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\delta(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\boxed{\left(\begin{matrix}\delta(x) \\ \delta^*(x)\end{matrix} \propto \sqrt{x} \quad \text{nel S.S.L.!}\right)}$$

$$\delta^*(x) = 1{,}73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\theta(x) = 0{,}664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

└ SPES. QUANTITÀ DI MOTO

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2{,}605$$

$$\tau_p(x) = 0{,}332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0{,}664 \sqrt{\frac{\nu}{U x}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\overline{\tau_p} = 0{,}664 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{L}}$$

$$C_D = \frac{\overline{\tau_p}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1{,}328 \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_L}} \qquad (5.1)$$

└ COEFF. ATTRITO MEDIO

Se HO S.L.T con $\boxed{Re_x > 10^7}$ con fluido turbolento e incompribile ovunque.

$$\delta(x) = \frac{0{,}232\,x}{(Re_x)^{\frac{1}{7}}}$$

$$\delta^*(x) = \frac{\delta}{12}$$

$$\theta(x) = \frac{11\,\delta}{156}$$

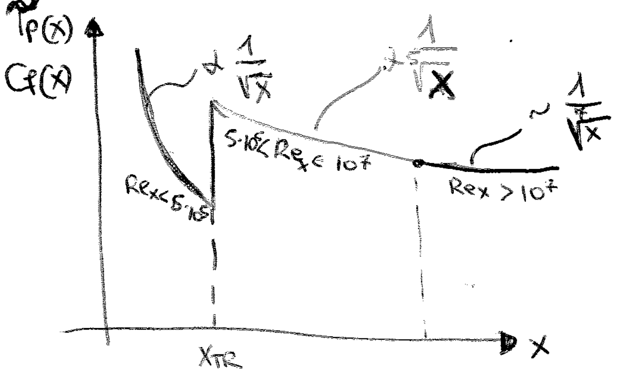
$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 1{,}182$$

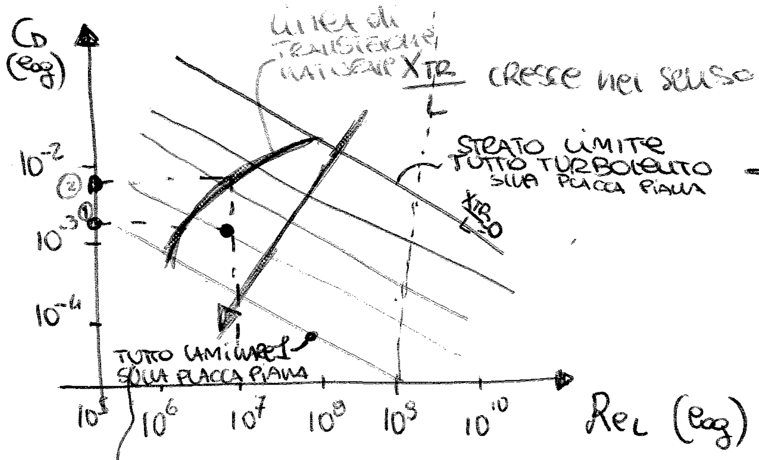
$$\tau_P(x) = 0{,}0115\,\rho U^2 \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/7} = \frac{0{,}0115\,\rho U^2}{(Re_x)^{1/7}}$$

$$C_f(x) = \frac{0{,}023}{(Re_x)^{1/7}}$$

$$\overline{\tau_P} = 0{,}0134\,\rho U^2 \left(\frac{\nu}{UL}\right)^{1/7} = \frac{0{,}0134\,\rho U^2}{(Re_L)^{1/7}}$$

$$C_D = \frac{0{,}0295}{(Re_L)^{1/7}} \qquad (5.3)$$





$\Rightarrow C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}}$

$C_D = \frac{1,328}{(Re_L)^{1/2}}$

A PARITÀ DI Re_L TROVO NEL PUNTO ① IL C_D PER TRANSIZIONE ARTIFICIALE. NEL PUNTO ② C_D PER TRANSIZIONE NATURALE.

29-10-2012

3) LAMINA PIANA CON TRANSIZIONE NATURALE

AVEVAMO CALCOLATO IL C_D COME:

$$C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{X_{TR}}{L}\left[\frac{0,074}{\left(\frac{X_{TR}}{L}Re_L\right)^{1/5}} - \frac{1,328}{\left(\frac{X_{TR}}{L}Re_L\right)^{1/2}}\right]$$

IL GRAFICO DI C_D IN FUNZIONE DI Re_L È QUELLO A INIZIO PAGINA.

AVEVAMO ANCHE NOTATO CHE: $\frac{X_{TR}}{L} = \frac{Re_{X_{TR}}}{Re_L}$

$$\Rightarrow C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{Re_{X_{TR}}}{Re_L}\left[\frac{0,074}{(Re_{X_{TR}})^{1/5}} - \frac{1,328}{(Re_{X_{TR}})^{1/2}}\right]$$

SU UNA PLACCA PIANA IN ASSENZA DI GRADIENTI DI PRESSIONE SAPPIAMO CHE LA TRANSIZIONE NATURALE AVVIENE ALLA X_{TR} TALE CUI: $Re_{X_{TR}} = 5 \cdot 10^5$

$$\Rightarrow C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{5\cdot 10^5}{Re_L}\left[\frac{0,074}{(5\cdot 10^5)^{1/5}} - \frac{1,328}{(5\cdot 10^5)^{1/2}}\right]$$

$$\boxed{C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{1,742}{Re_L}}$$

$\Rightarrow$ ECCO CHE TRACCIO SUL GRAFICO $C_D - Re_L$ LA LINEA DI TRANSIZIONE NATURALE.

DIVENTA FONDAMENTALE ORA UN NUOVO PARAMETRO: NUMERO di PRANDT

$$\boxed{P_r = \frac{\mu \cdot c_p}{K}}$$ dove K (CAPPA GRANDE) = COEFF. di CONDUCIBILITÀ TERMICA

$\frac{W}{m \cdot K} = [K]$

$$P_r = \frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}{\left(\frac{K}{\rho c_p}\right)} = \frac{\boxed{\nu}}{\boxed{\kappa}}$$

$\nu \rightarrow$ VISCOSITÀ CINEMATICA

$\kappa \rightarrow$ DIFFUSIVITÀ TERMICA (CAPPA MINUSCOLO)

$$\boxed{\kappa = \frac{K}{c_p \rho}} = \text{DIFFUSIVITÀ TERMICA} \qquad [\kappa] = [\nu] = \frac{m^2}{s}$$

ν = VISCOSITÀ CINEMATICA o DIFFUSIVITÀ VISCOSA

Se $\boxed{P_r = 1} \Rightarrow \boxed{\nu = \kappa} \Rightarrow$ GLI EFFETTI DIFFUSIVI VISCOSI AVVENGONO CON LA STESSA VELOCITÀ DEGLI EFFETTI DIFFUSIVI TERMICI

$\Downarrow$

$\boxed{\delta = \delta_T}$

nell'ARIA $\boxed{P_r = 0{,}71} \Rightarrow \boxed{\nu \neq \kappa} \Rightarrow \boxed{\delta \neq \delta_T}$

nel FLUSSO ESTERNO AVEVAMO VISTO CHE SI CONSERVAVA L'ENTALPIA TOTALE o di ARRESTO $H = h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} = h_e + \frac{U_e^2}{2} = \text{costante}$

$\Rightarrow T^0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) = \text{COSTANTE}$. (CONSERVA ANCHE LA TEMPERATURA TOTALE.) QUESTO È ANCORA VERO se $\boxed{P_r = 1}$!!

nello S.L.:

1) Se $P_r = 1 \Rightarrow \begin{cases} H = \text{cost} \\ T^0 = \text{cost} \end{cases}$

FATTORE di RECUPERO

2) Se $P_r \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} H_{rec} = \text{cost} \\ T_{rec} = \text{cost} \end{cases}$

H_{rec}: ENTALPIA di RECUPERO $\quad H_{rec} = h + R\frac{U^2}{2}$

T_{rec}: TEMPERATURA di RECUPERO $\quad T_{rec} = T_\infty\left(1 + R\frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$

$$② \Rightarrow \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{U_e \frac{dU_e}{dx}}_{= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

INTEGRO $\displaystyle\int_0^\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = \nu \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$

$$\nu \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{\mu}{\rho} \left[\underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y\to\infty}}}_{=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \right]$$

SAPENDO CHE: $\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{PARETE} \Rightarrow y=0}$ e CHE $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y\to\infty} = 0$

$$\Rightarrow \nu \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

$$dv = -\frac{du}{dx} dy \qquad v = \int_0^y dv = -\int_0^y \frac{du}{dx} dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{du}{dx} dy - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

RISOLVENDO PER PARTI

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{du}{dx} dy \right) dy = \underbrace{|u|_0^\infty}_{U_e} \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{du}{dx} + u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

ora sommo e sottraggo $u \frac{dU_e}{dx}$

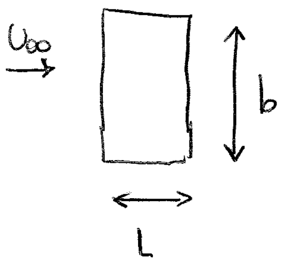
$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(\left(u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{dU_e}{dx}\right) \left(- U_e \frac{du}{dx} - u \frac{\partial u}{\partial x}\right) - U_e \frac{dU_e}{dx} + u \frac{dU_e}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left[\underbrace{u \frac{\partial}{\partial x} (U_e - u) + (U_e - u) \frac{\partial u}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x}[u(U_e - u)]} + (U_e - u) \frac{dU_e}{dx} \right] dy = +\frac{\tau_p}{\rho}$$

LEZIONE 31-10-2012 ESERCITAZIONE (4)

ES) PLACCA PIANA [es. 7.7 GASDINAMICA pag 93]

Una lamina piana di lunghezza $L = 0{,}6\,m$ e larghezza $B = 1{,}5\,m$ è lambita su entrambe le facce da una corrente d'aria in condizioni standard di velocità $U = 10\,m/s$. Calcolare la resistenza d'Attrito D e per $x = 0{,}3\,m$ i valori $\tau_p(x)$, $\delta(x)$, $\delta^*(x)$, $\theta(x)$ e $H(x)$.



$L = 0{,}6\,m$

$B = 1{,}5\,m$

ARIA STANDARD $\begin{cases} \rho = 1{,}225\ kg/m^3 \\ \mu = 1{,}781 \cdot 10^{-5}\ kg/ms \\ \nu = 1{,}454 \cdot 10^{-5}\ m^2/s \end{cases}$

1) D? (suppongo S.L.L !!)

2) $x = 0{,}3$ calcolare i parametri.

$\boxed{P = \rho R^* T}$ $\quad T = \dfrac{101325\,Pa}{1{,}225\frac{kg}{m^3}\frac{8314}{28{,}864}} \cong 288\,K \quad R^* = 287{,}04 \dfrac{J}{K \cdot kg}$

$\boxed{c = \sqrt{\gamma R^* T}} \cong 340\ m/s$

$\boxed{M_\infty = \dfrac{\overset{10\,m/s}{U_\infty}}{c}} = 0{,}029 \rightarrow$ MOLTO BASSO $< 0{,}3 \Rightarrow$ APPROSSIMAZIONE di FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$\boxed{Re_L = \dfrac{U_\infty L}{\nu}} = 4{,}12 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5 \Big\} \Rightarrow$ NON HO TRANSIZIONE NATURALE

$\hookrightarrow$ HO VERIFICATO CHE HO S.L.L !!

$\boxed{C_D = \dfrac{\overset{S.L.L.}{1{,}328}}{\sqrt{Re_L}}} = 2{,}068 \cdot 10^{-3}$

IL FLUIDO LAMBISCE ENTRAMBE LE FACCE!!

$D = \dfrac{1}{2} \rho U_\infty^2 C_D \cdot 2 \cdot S = 0{,}2279\ N \rightarrow$ (1) OK!

Per $x = 0{,}3\,m$ $\quad Re_x = \dfrac{U_\infty \cdot x}{\nu} = 2{,}064 \cdot 10^5$ $(< 5 \cdot 10^5 \Rightarrow S.L.L.)$

$\tau_p(x) = 0{,}332 \sqrt{\dfrac{\rho \mu U^3}{x}} = 0{,}089$

$C_f(x) = 0{,}664 \sqrt{\dfrac{\nu}{Ux}} = 1{,}4618 \cdot 10^{-3}$

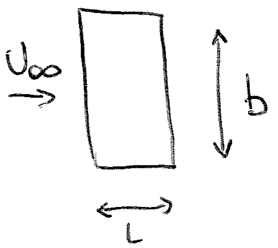
$$\theta(x) = \frac{7\,\delta(x)}{72} = 0{,}652 \cdot 10^{-3}\,m$$

$$H = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)} = 1{,}287 \quad (\simeq 1{,}3 \text{ TURBOLENTO TEORICO})$$

$$\tau_P(x) = 0{,}0288\,\rho\,U_\infty^2 \cdot \frac{1}{Re_x^{1/5}} = 7{,}68\ \frac{N}{m^2}$$

ES n°3 PAG 94 n° 7.9

Per la stessa lamina piana dei problemi precedenti calcolare con $U = 60\,m/s$ la D nell'ipotesi di transizione naturale e di transizione ritardata fino al 70% della lunghezza totale.



$L = 0{,}6\,m \qquad b = 1{,}5\,m$

ARIA STANDARD
$$\begin{cases} \rho = 1{,}225\ kg/m^3 \\ \mu = 1{,}781 \cdot 10^{-5}\ \frac{kg}{m\,s} \\ \nu = 1{,}454 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s} \end{cases}$$

$U_\infty = 60\,m/s$

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = 2{,}476 \cdot 10^6 \rightsquigarrow \text{fine lamina è turbolenta}$$

- TRANSIZIONE NATURALE

$$C_D = \frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1{,}742}{Re_L} = 3{,}19 \cdot 10^{-3}$$

$$D_{TRNAT} = \frac{1}{2}\rho\,U_\infty^2\,2\,S\,C_D = 12{,}66\,N$$ → È SCESA UN PO' RISPETTO AL CASO TUTTO TURBOLENTO XCHÉ IL PRIMO TRATTO LO CONSIDERO LAMINARE

- TRANSIZIONE FORZATA AL 70% di L ⇒ $x_{TR} = 0{,}42\,m$ $\left(\frac{x_{TR}}{L} = 0{,}7\right)$

$$C_D = \frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} - \frac{x_{TR}}{L}\left[\frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1{,}328}{\left(\frac{x_{TR}}{L}Re_L\right)^{1/2}}\right] = 0{,}0017$$

$D_{TR\,RIT} = 6{,}747\,N$!! Molto più basso di prima!! (-5,5N)

IN REALTÀ POI VEDREMO CHE ℓ <u>non</u> È COSTANTE MA È FUNZIONE DI λ ....
E QUESTO ANDREBBE A COMPENSARE IL FATTO CHE $H \simeq 2,6$ NELLA REALTÀ!

PROSEGUIAMO USANDO IL RISULTATO SPERIMENTALE:

$$\frac{U_e}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 - 6\overbrace{\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}}^{=\lambda}$$

MOLTIPLICANDO PER U_e^5 $\Rightarrow$ $$\frac{U_e^6}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx} = 0,45\,U_e^5 \underbrace{-\,6\,\frac{\theta^2}{\nu}U_e^5\frac{dU_e}{dx}}_{=\,-\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e^6}{dx}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_e^6}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e^6}{dx} = 0,45\,U_e^5$$

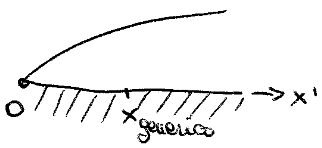
$$\Rightarrow \frac{1}{\nu}\frac{d}{dx}\left[U_e^6\theta^2\right] = 0,45\,U_e^5$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[U_e^6\theta^2\right] = 0,45\cdot\nu\cdot U_e^5$$

$$\Rightarrow d\left[U_e^6\theta^2\right] = 0,45\cdot\nu\cdot U_e^5\,dx$$

xché poi devo sostituire da 0 a x

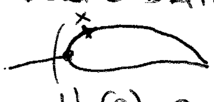
INTEGRANDO da 0 a x $\Rightarrow$ $$\int_0^x d\left[U_e^6(x')\,\theta^2(x')\right]dx' = 0,45\,\nu\int_0^x U_e^5(x')\,dx'$$



$$\Rightarrow U_e^6(x)\,\theta^2(x) - \underbrace{\cancel{U_e^6(0)\,\theta^2(0)}}_{=0} = 0,45\,\nu\int_0^x U_e^5(x')\,dx'$$

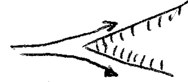
SUL BORDO D'ATTACCO

BORDO D'ATTACCO ARROTONDATO



$U_e(0)=0$ ARRESTO
$\theta(0)\neq 0$

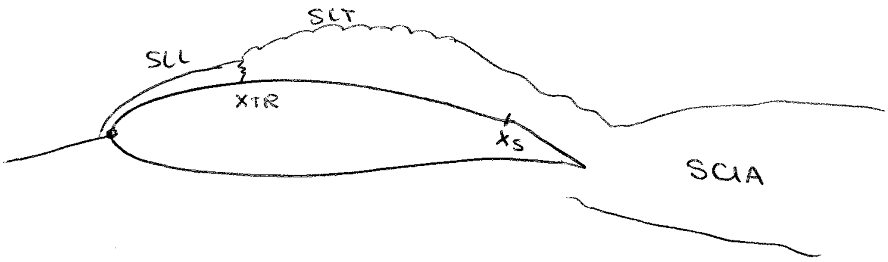
BORDO D'ATTACCO APPUNTITO



$U_e(0)\neq 0$ non ho ARRESTO
$\theta(0)=0$

Ora posso calcolare θ in funzione di $U_e(x)$!

È IMPORTANTE NOTARE CHE PRIMA DI GIUNGERE ALLA TRANSIZIONE POTREBBE ESSERCI UN ALTRO PROBLEMA:



SEPARAZIONE → LO SFORZO di ATTRITO A PARETE VA A ZERO

$$\tau_p = 0 \Rightarrow C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\ell = 0}$$

↓

CONDIZIONE di STOP AL CALCOLO CON METODO TWAITES

⚠ TUTTO QSTO DISCORSO VALE SOLO SE HO STRATO L. LAMINARE!!

METODO di HEAD → S.L. TURBOLENTO

PUNTO DI PARTENZA: eq. di PRANDTL MEDIATE ALLA REYNOLDS

ORA STIAMO CERCANDO DI RISOLVERE L'EQ. INTEGRALE PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO, E QUINDI UN METODO PER CHIUDERE E RISOLVERE IL SISTEMA.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\dfrac{d\bar{P}}{dx} + \dfrac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

dove $\tau = (\mu + \mu_T)\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_e}\right) dy \qquad \theta = \int_0^\infty \frac{\bar{u}}{U_e}\left(1 - \frac{\bar{u}}{U_e}\right) dy$$

FACCIAMO UN PROCEDIMENTO ANALOGO A QUANTO FATTO NEL CASO LAMINARE

$$\frac{d}{dx}\left[U_e^2\theta\right] + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left[2 + H\right] = \frac{C_f}{2}$$

⚠ ATTENZIONE → TUTTE LE QUANTITÀ SONO FUNZIONE DELLE GRANDEZZE MEDIATE!!

$$v_T = U_e \cdot 0{,}0306\,(H_1 - 3)^{-0{,}6169}$$ → con METODO SPERIMENTALE

imponendo l'uguaglianza ottengo:

$$\frac{d}{dx}\left[U_e H_1 \theta\right] = U_e \cdot 0{,}0306\,(H_1 - 3)^{-0{,}6169}$$

RICAVO LE RELAZIONI TRA H e H_1 SPERIMENTALMENTE.

FATTORI di FORMA CHE SONO ≠ DA PRIMA XCHÉ ORA HO GRADIENTI DI PRESSIONE

?

$$\begin{cases} H_1 = 3{,}3 + 0{,}8234\,(H - 1{,}1)^{-1{,}287} & \text{per } H \le 1{,}6 \\ H_1 = 3{,}3 + 1{,}5501\,(H - 0{,}6778)^{-3{,}064} & \text{per } H > 1{,}6 \end{cases}$$

RICAVO LE RELAZIONI INVERSE:

$$\begin{cases} H = 1{,}1 + 0{,}8604\,(H_1 - 3{,}3)^{-0{,}7770} & \text{per } H_1 \ge 5{,}3 \\ H = 0{,}6778 + 1{,}1538\,(H_1 - 3{,}3)^{-0{,}3264} & \text{per } H_1 < 5{,}3 \end{cases}$$

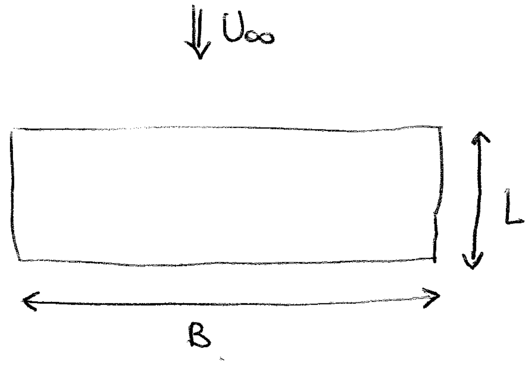
L'ULTIMA RELAZIONE CHE MI SERVE PER CHIUDERE IL SISTEMA È:
LA RELAZIONE DI LUDWIG & TILLMAN

$$C_f = 0{,}246 \cdot 10^{-0{,}678\,H}\, Re_\theta^{-0{,}268}$$

NOTA: le equazioni integrali, come quella di Prandtl, dello strato limite VALGONO X QUALSIASI PROFILO!!
E quindi non valgono solo x la lamina PIANA!

ES 11.16 PAG 214

HO UN'ALA A PIANTA RETTANGOLARE ASSIMILABILE A UNA PIASTRA PIANA. LA LAMINA È CONSIDERATA ADIABATICA, IN CONDIZIONI DI ATMOSFERA STANDARD A 11000 METRI. CALCOLARE LA RESISTENZA di ATTRITO!



$L = 2 m$

$B = 10 m$

$p_0 = 341000 \ Pa$

$$z = 11000 m \Rightarrow \begin{cases} T_\infty = 216,8 \ K \\ p_\infty = 22616 \ Pa \\ \nu_\infty = 3,886 \cdot 10^{-5} \ \frac{m^2}{s} \end{cases}$$

$$p_0 = p_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{3,5}} = 1 + 0,2 \ M_\infty^2$$

$$M_\infty^2 = \frac{\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{3,5}} - 1}{0,2}$$

$$c_{suono} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 216,8}$$

$$\boxed{M_\infty = 2,41} \longrightarrow M_\infty = \frac{U_\infty}{c_{suono}} = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R^* T_\infty}} = \frac{U_\infty}{295 \ m/s} \Rightarrow U_\infty = 710,5 \ m/s$$

$\gg 0,3 \Rightarrow$ considero la comprimibilità!

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty} = \frac{710,5 \frac{m}{s} \cdot 2 \ m}{3,886 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 3,67 \cdot 10^7$$

$\gg 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$ S.L. TUTTO T.

RECUPERO

$$X_T = \left(\frac{T_P + T_\infty}{2 T_\infty} + R \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{4}\right)^{-0,65}$$

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{R^* T} = 0,3638$$

$$D = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 C_D \cdot L \cdot B \ X_T$$

$$R = Pr^{1/3} = 0,71^{1/3} = 0,892$$

$$C_D = \frac{0,0295}{Re^{1/7}} = 2,45 \cdot 10^{-3}$$

RECUPERO

$$T_P = T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) = 441,44 \ K$$

SE HO PARETE ADIABATICA

$X_T = 0,6889$ $D = 6234 \ N$