



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 523

DATA: 16/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Cappelletti

MATERIA: Aerodinamica Applicata + Eserc.

Prof. Di Cicca

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Politecnico di Torino

**Appunti ed esercizi
svolti di
AERODINAMICA
APPLICATA**

Corso tenuto dal Prof. Di Cicca,
3° anno Ing. Aerospaziale,
orientamento EASA Part 66
A.A. 2012-2013

Appunti di Cappelletto

PARTE 4 – FUNZIONI ϕ E ψ , CA,PI SEMPLICI E COMPOSTI

- Funzione potenziale ϕ
- Funzione di corrente ψ
- Campi semplici:
 - Corrente uniforme
 - Sorgente/pozzo
 - Vortice Irrotazionale
 - Doppietta
- Campi composti:
 - Doppietta + corrente uniforme
 - Vortice + doppietta + corrente uniforme: analogia del cilindro rotante
- Teorema di Kutta – Joukowski

PARTE 5 – TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

- Profilo simmetrico a incidenza nulla
- Lamina inarcata a incidenza nulla
- Equazione di tangenza e coefficiente di pressione
- Risoluzione problema 3 (profilo simmetrico incidenza nulla)
- Risoluzione problemi 1+2 (lamina inarcata con incidenza)
- Cenni sulle trasformazioni conformi
- Integrali di Glauert e coefficienti A_0, \dots, A_n
- Calcolo delle quantità integrali: c_l, c_{m_A}, c_p

PARTE 6 – DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE DI SINGOLARITA'

- Superfici di corrente e tubi di flusso
- Superfici vorticosi e tubi vorticosi
- Legge di Biot-Savart e superficie vorticosi
- Superfici vorticosi libere e aderenti

PARTE 7 – ALA DI ALLUNGAMENTO FINITO

- Teoria vorticosi dell'ala
- Calcolo della portanza dell'ala
- Schema di Prandtl
- Distribuzione di portanza ellittica
- Ala in pianta ellittica
- Ala con distribuzione di portanza qualsiasi

PARTE 8 – FLUIDO COMPRESSIBILE

- Velocità del suono
- Correzione di Prandtl – Glauert
- Numero di Mach critico di un profilo
- Numero di Mach di Drag Rise

AERODINAMICA APPLICATA 1/10/2012

Prof. Gaetano Morio Di Cicca

Libri: - F. Quori, "Aerodinamica" II Ed, Lenzotto & Bella
 - G. Iuso, F. Quori, "Gasdinamica - Problemi risolti e richiami di teoria", Lenzotto & Bella

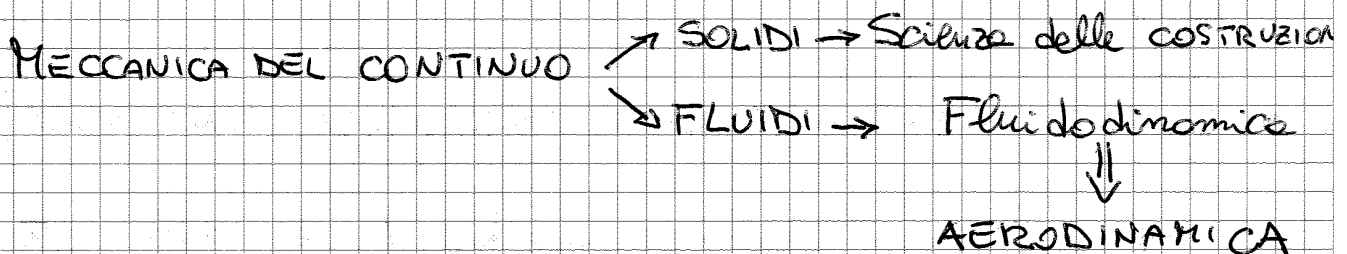
BONUS: - D.P. RAHMER, "AIRCRAFT DESIGN: A CONCEPTUAL MODEL", AIAA Educational Series
 - BARNERS W. McCORMICK, "AERODYNAMICS AND FLIGHT MECHANICS", John W. & Sons

MODALITÀ D'ESAME: 1° APPELLO SCRITTO
 Tutti gli altri solo orale

FLUIDO COME MEZZO CONTINUO (IPOTESI DEL CONTINUO)

Se il gas non è eccessivamente rarefatto noi possiamo assumo lo come un mezzo continuo

IPOTESI DEL CONTINUO → SOLIDI, LIQUIDI e GAS



• PARTICELLA FLUIDA

VOLUMETTO DEL NOSTRO FLUIDO CHE CONTIENE UN ELEVATO NUMERO DI MOLECOLE, ABBASTANZA ELEVATO DA AVER NEL VOLUMETTO LE VARIE GRANDEZZE COSTANTI (pressione, temperatura, densità)

m = massa molecola

n = n molecole

V = VOLUME

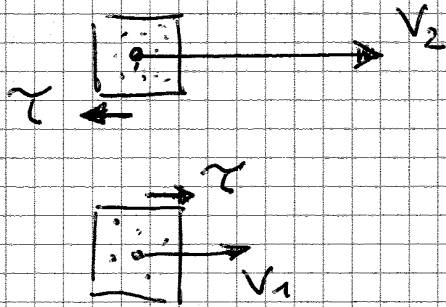
$$\rho = \frac{m \cdot n}{V}$$

Tenendo conto della natura discreta del gas si va a disprezzare la densità in funzione del volume ①

CASO B) $V \neq 0$

- $V \neq 0$ e uniforme in tutto il campo
- GRADIENTI DI VELOCITÀ NEL NOSTRO CAMPO DI MOTO

Ci sono 2 particelle che si muovono a velocità differenti

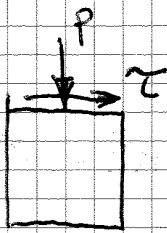


SFORZI VISCOSI TANGENZIALI

SFORZI DI TAGLIO τ

→ SCAMBIO DI QUANTITÀ DI MOTO TRA LA PARTICELLA 1 e 2

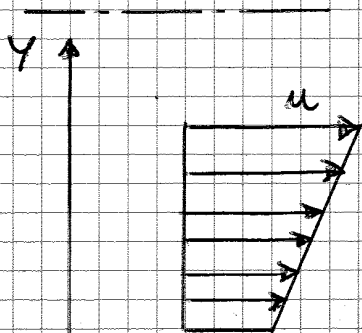
$V_2 > V_1$: τ accelera V_1 e rallenta V_2



Quali sono le nostre incognite?

ρ, V, p, τ, T e sono solitamente funzioni del punto nel campo di moto e del tempo $f(\vec{x}, t)$

\vec{q} = FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO in presenza di GRADIENTI DI TEMPERATURA



FLUSSO DI TAGLIO

Gradiente di velocità $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$

→ x

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Legge di Newton

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R^* T}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad [\gamma = \kappa, \text{ KAPPA FISICA}]$$

$$\gamma_{\text{aria}} = 1,4$$

$$R^* = c_p - c_v$$

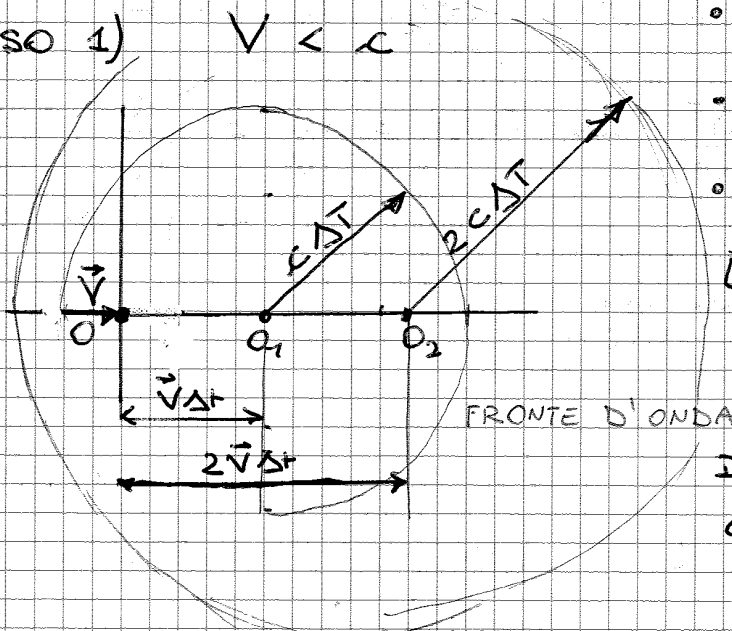
$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S = \text{cost}}$$

⚠ PROPAGAZIONE SUONO È FENOMENO ISENTROPICO

$$R^* = \frac{R}{M}, \quad R = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

◆ MOTO SUBSONICO ◆

CASO 1) $V < c$



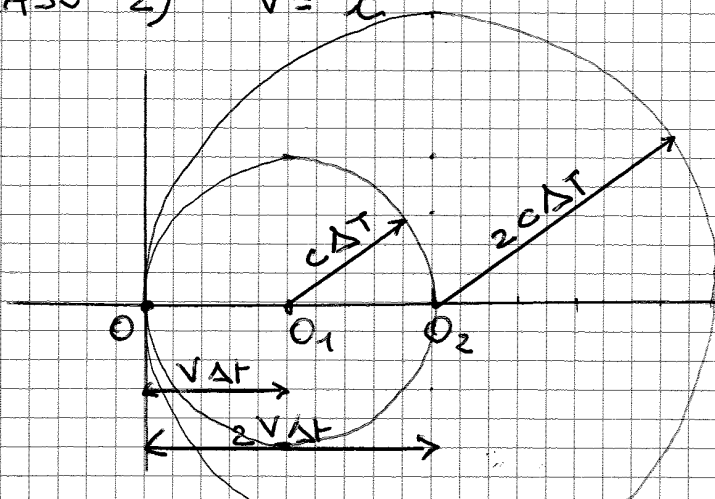
- CORRENTE FLUIDA IN MOTO A VELOCITÀ V . IN O SI ORIGINA UN DISTURBO
 - LA PARTICELLA FLUIDA CHE PASSAVA IN O A $t=0$ TRASPORTA IL DISTURBO, CHE SI PROPAGA A VELOCITÀ c
 - PROPAGAZIONE DEL DISTURBO CON ONDE SFERICHE
- [NELL'ISTANTE INIZIALE IL DISTURBO DEVE ANCORA PROPAGARSI]

IL DISTURBO PROPAGA CON VELOCITÀ c

Regime SUBSONICO: VIENE DISTURBATO ANCHE LO SPAZIO A MONTE DEL VELIVOLO

Fronte d'onda avanza con velocità $\vec{V} + \vec{c}$

CASO 2) $V = c$



$V\Delta t = c\Delta t$
REGIME SONICO

AERODINAMICA APP. 3/10/2012

APPROX. di FLUIDO IDEALE

FLUIDO
VISCOSO

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

FLUSSO TERMICO

$$\vec{q} = -K \vec{\nabla} T$$

Nell'ipotesi del FLUIDO IDEALE ci si comporta come se $\mu=0$, $K=0$

... ma anche se i gradienti di velocità sono piccoli (e $\mu \neq 0$) possiamo trascurare gli sforzi viscosi!!
Stesso discorso x il flusso di calore

CI SONO ZONE IN CUI SI PUÒ USARE L'APPROX DI FLUIDO IDEALE E ZONE IN CUI NON SI PUÒ

APPROX. FLUIDO IDEALE, condizioni:

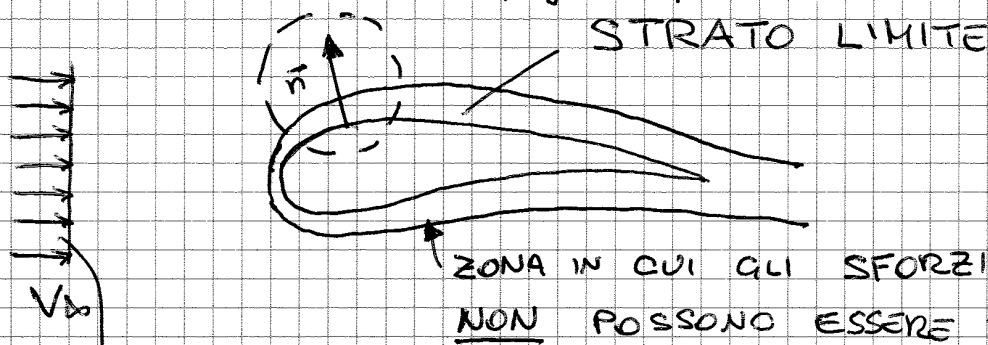
1) ~~CONDIZIONE DI ADERENZA A PARETE~~
→ CONDIZIONE DI TANGENZA ←

2) NO SCAMBIO CALORE TRA FILETTI FLUIDI e TRA FILETTI e PARETE

$$\mu=0 \rightarrow \tau=0$$

$$K=0 \rightarrow \vec{q}=0$$

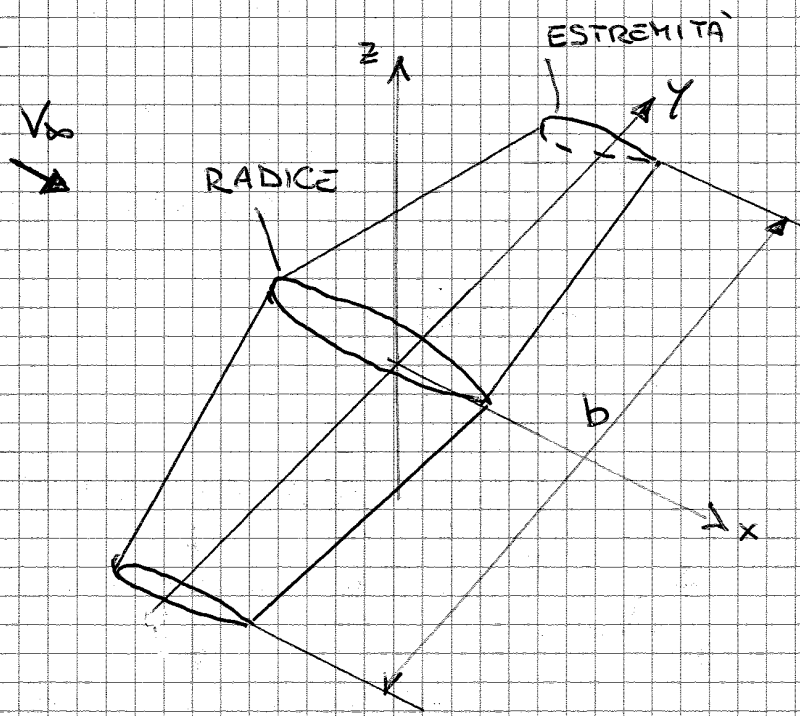
Esempio



$\mu \neq 0$
per V è uniforme
↓
GRADIENTI DI VELOCITÀ
MODESTI O NULLI

Al di fuori della zona rossa si può usare l'approx. di fluido ideale.

ALI e PROFILI ALARI



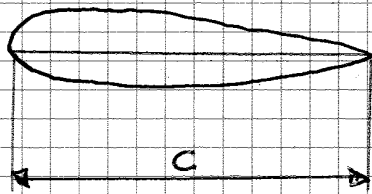
b = APERTURA ALARE

S = SUPERFICIE IN PIANA DELL'ALA (proiezione su piano xy)

λ = ALLUNGAMENTO ALARE

$$\lambda = \frac{b^2}{S}$$

SEZIONE SU PIANO XZ
→ PROFILO ←



C = CORDA

• ALA A PIANTA RETTANGOLARE

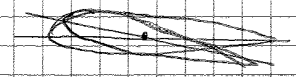
$$\lambda = \frac{b^2}{b \cdot c} = \frac{b}{c}$$

• ALA RASTREMATTA : muovendosi lungo asse y la corda DIMINUISCE

• ALA SVERGOLATA

1) SVERGOLAMENTO GEOMETRICO

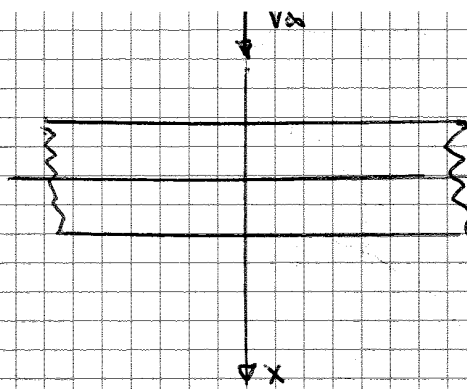
- Il tipo di profilo sulle varie sezioni // piano xz è lo stesso, ma le sezioni lungo y sono RUOTATE



2) SVERGOLAMENTO AERODINAMICO

- Tutte le corde giacciono sullo stesso piano ma da sezione a sezione cambia il profilo

SI PUÒ AVERE SIA SVERG. GEOMETRICO SIA AERODINAMICO



con $o.c.a.$ di allungamento INFINITO

CAMPO DI MOTO BIDIMENSIONALE

$\rightarrow y$ [NO GRADIENTI DI PRESSIONE LUNGO y]

da con allungamento FINITO

CAMPO MOTO 3D

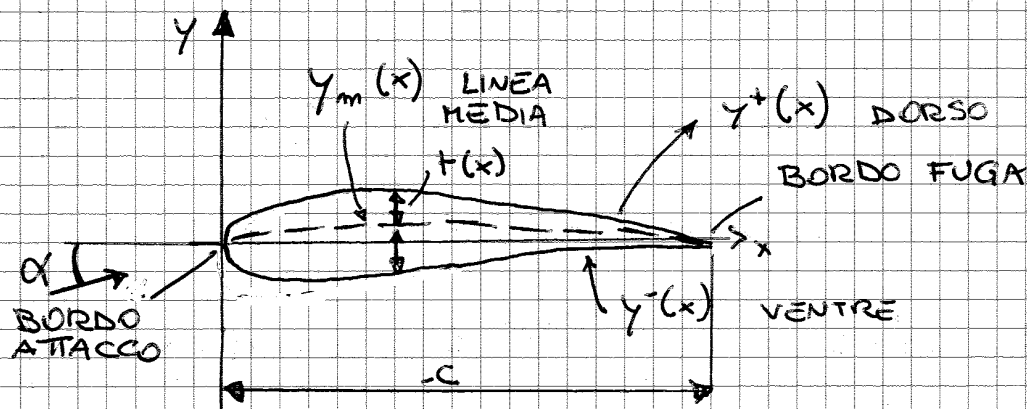
Famiglie di profili $\left\{ \begin{array}{l} \text{NACA} \\ \text{LIEBECK} \\ \text{EPPLER} \end{array} \right.$

PROFILO ALARE [SISTEMA RIFERIMENTO x-y]

- **SIMMETRICO** : le linee di dorso e ventre sono speculari rispetto alla corda

$y^+(x)$ DORSO
 $y^-(x)$ VENTRE
 } FUNZIONI CARATTERIZZANTI

- **NON SIMMETRICO** : dorso e ventre non speculari



$$y_m(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2} \quad \text{EQ. LINEA MEDIA}$$

$$\begin{cases} y^+(x) = -y^-(x) \\ y_m(x) = 0 \end{cases} \quad \text{LINEA MEDIA PROFILO SIMMETRICO}$$

SPESORE $t(x) = \frac{y^+(x) - y^-(x)}{2}$

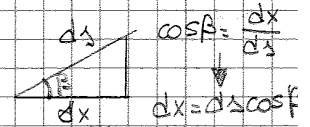
α = INCIDENZA GEOMETRICA $\left\{ \begin{array}{l} \text{POSITIVA SE ARRIVA DAL BASSO} \\ \text{NEGATIVA SE ARRIVA DA ALTO} \end{array} \right.$

$$\begin{cases} dF_x^- = dF^- \cos \beta \\ dF_y^- = dF^- \sin \beta \end{cases} \quad \text{VENTRE}$$

Andiamo a sostituire le espressioni di dF^+/dF^- nelle eq. di $dF_x^+/dF_y^+/dF_x^-/dF_y^-$

$$\begin{cases} dF_x^+ = (p^+ - p_\infty) ds^+ \sin \beta \\ dF_y^+ = -(p^+ - p_\infty) ds^+ \cos \beta \end{cases} \quad \text{DORSO} \quad * \begin{matrix} dx = ds^+ \cos \beta \\ dx = ds \cos \beta \end{matrix}$$

$$\begin{cases} dF_x^- = (p^- - p_\infty) ds^- \sin \beta \\ dF_y^- = (p^- - p_\infty) ds^- \cos \beta \end{cases} \quad \text{VENTRE}$$



Avendo a che fare con un corpo affusolato β è molto piccolo

$$\begin{aligned} \beta \ll 1 \text{ rad} &\Rightarrow \sin \beta \approx \beta \\ &\cos \beta \approx 1 \end{aligned} \quad \rightarrow *$$

→ CONFRONTANDO I MODULI

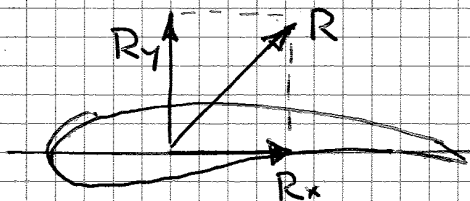
$$|dF_x^+| \ll |dF_y^+|$$

$$|dF_x^-| \ll |dF_y^-|$$



$$|dF_x| \ll |dF_y|$$

Calcoliamo ora la RISULTANTE delle forze aerodinamiche sul profilo



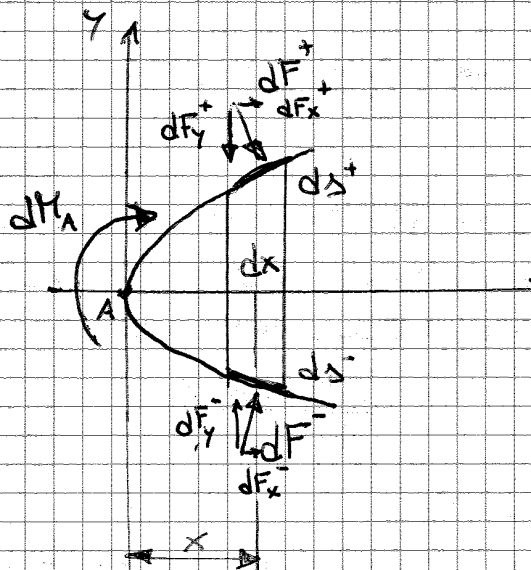
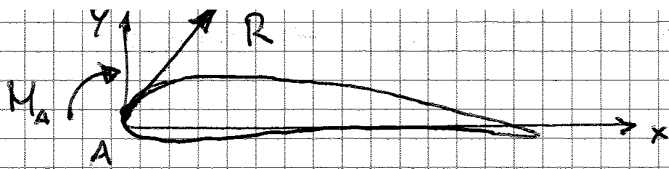
$$R_x = \int_0^c dF_x^+ + \int_0^c dF_x^-$$

$$R_y = \int_0^c dF_y^- + \int_0^c dF_y^+ =$$

poiché $|dF_x| \ll |dF_y| \Rightarrow |R_x| \ll |R_y| \Rightarrow$ CONCENTRIAMO QUINDI L'ATTENZIONE SU R_y

$$= \int_0^c [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] dx \quad *$$

$$\rightarrow R_y = \int_0^c [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] dx$$



$$|dF_x| \ll |dF_y|$$

• CONTRIBUTO DELLE dF_x È TRASCURABILE

□ EQUILIBRIO MOMENTI AL PUNTO A

$$\hat{A}: dM_A + dF_y^+ \cdot x - dF_y^- \cdot x = 0$$

$$\rightarrow dM_A = -dF_y^+ \cdot x + dF_y^- \cdot x$$

~~NON È UN EQUILIBRIO~~

È UN'EQUAZIONE DI RISULTANTE !!

$$dM_A = -dF_y^+ \cdot x - dF_y^- \cdot x =$$

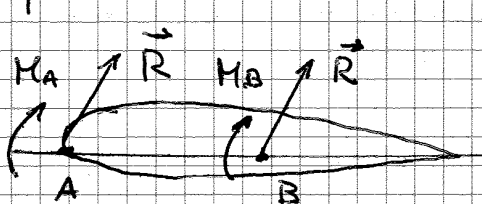
$$= -(p^+ - p_\infty) \cdot dx - (p^- - p_\infty) \cdot dx$$

⚠ NON È UN EQUILIBRIO PERÒ! dM_A NON È UNA REAZIONE AL MOMENTO DI dF_y^+ e dF_y^- !!!

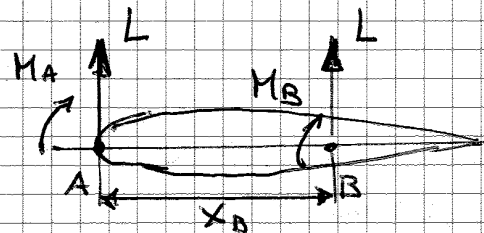
È PROPRIO QUEL MOMENTO!
(vedi nota + avanti)

$$M_A = \int_0^c dM_A = \int_0^c [(p^+ - p_\infty) - (p^- - p_\infty)] x dx$$

Collochiamo ora il momento rispetto a un altro punto qualsiasi B.



APPROX



$$M_B = M_A + L \cdot X_B$$

Se le forze di pressione sono esercitate nel centro di pressione non si ha momento

$$M_A + L \cdot X_{cp} = 0 \rightarrow X_{cp} = -\frac{M_A}{L} \quad \text{ma } M_A < 0$$

IL CENTRO DI PRESSIONE NON È UN PUNTO FISSO, MA VARIA LA SUA POSIZIONE A SECONDA DELLA PORTANZA

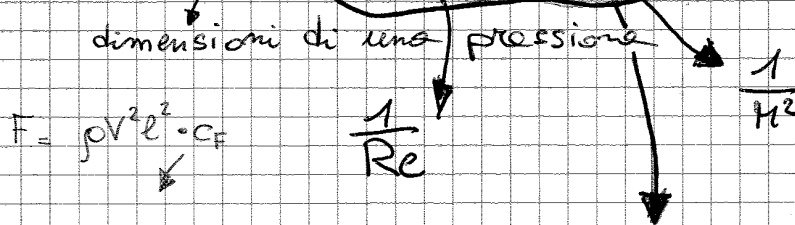
e considero $p^+ - p_\infty < 0$ e $p^- - p_\infty > 0$

$$[kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [m]^{a+b-3c-d-e} [kg]^{c+d+e} [s]^{-b-d-2e}$$

CONFRONTIAMO ORA GLI ESPONENTI eq. in 5 incognite

$$\begin{aligned}
 & \text{kg)} \left\{ \begin{aligned} 1 &= c+d+e & \rightarrow c &= 1-d-e \\ -2 &= -b-d-2e & \rightarrow 1 &= a+2-d-2e-3+3d+3e-d-e \\ 1 &= a+b-3c-d-e & \rightarrow b &= 2-d-2e \end{aligned} \right. \\
 & \text{s)} \\
 & \text{m)} \\
 & 2 = a+d \rightarrow a = 2-d
 \end{aligned}$$

$$F \sim \rho^{2-d} V^{2-d-2e} \mu^{1-d-e} d^d \frac{\rho}{\mu} \frac{\rho}{\rho V^2} e$$



$$\begin{aligned}
 c^2 &= \gamma \frac{\rho}{\mu} \\
 Re &= \frac{\rho V l}{\mu}
 \end{aligned}$$

$$c_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = c_F(\alpha, Re, M)$$

PRESSIONE DINAMICA

COEFFICIENTE della FORZA AERODINAMICA

ALA

$$C_L = \text{COEFF. PORTANZA} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

$$C_D = \text{COEFF. RESISTENZA} = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

$$C_M = \text{COEFF. MOMENTO} = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S c}$$

PROFILO

$$C_e = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c \cdot 1}$$

$\Delta c \cdot 1 =$ superficie in pianta dell'ala di apertura UNITARIA

$$L = \int_0^c [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] dx$$

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} = \int_0^c \left[\frac{p^- - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} - \frac{p^+ - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} \right] dx =$$

$$\Rightarrow C_l = \int_0^c (c_p^- - c_p^+) \frac{dx}{c} = \int_0^1 (c_p^- - c_p^+) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

↓
POSIZIONE % LUNGO LA
CORDA
(va da 0 a 1)

$$\Delta c_p = c_p^- - c_p^+$$

$$\rightarrow \boxed{C_l = \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{c}\right)}$$

ANALOGAMENTE

$$C_m = - \int_0^1 \Delta c_p \cdot \left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

"-" perché $C_m = \int_0^1 (c_p^+ - c_p^-) \frac{x}{c} d\left(\frac{x}{c}\right)$

$$M = \int_0^c [(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)] x dx, \text{ si divide per } \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c^2$$

$$M_B = M_A + L \cdot x_B$$

$$C_{mB} = C_{mA} + C_l \left(\frac{x_B}{c}\right)$$

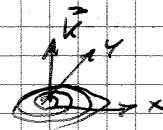
dai momenti si può passare ai coefficienti → UTILI x SIMILITUDINI!

$$\vec{\nabla} \times \vec{q} = \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$


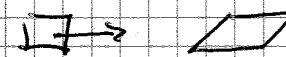
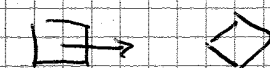
VORTICITÀ $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$

W

2D $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$



I "diritti" di una particella fluida:

- 1) TRASLARE 
- 2) DEFORMARSI 
- 3) RUOTARE 

Se $\vec{\nabla} \times \vec{q} = 0$ in tutto il campo \Rightarrow CAMPO IRROTAZIONALE

allora esiste una funzione $\phi \rightarrow$ FUNZIONE POTENZIALE tale che $\vec{q} = \vec{\nabla} \phi$

\rightarrow CAMPO IRROTAZIONALE AMMETTE POTENZIALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{q} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \quad \text{IL ROTORE DEL GRADIENTE E' ZERO}$$

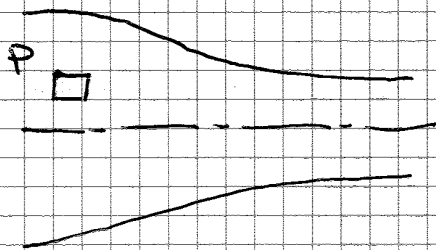
$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad \vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

MISTO

$$\vec{\nabla} \cdot (p \vec{V}) = p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p$$

ESEMPIO: TUBO CONVERGENTE, MOTO STAZIONARIO



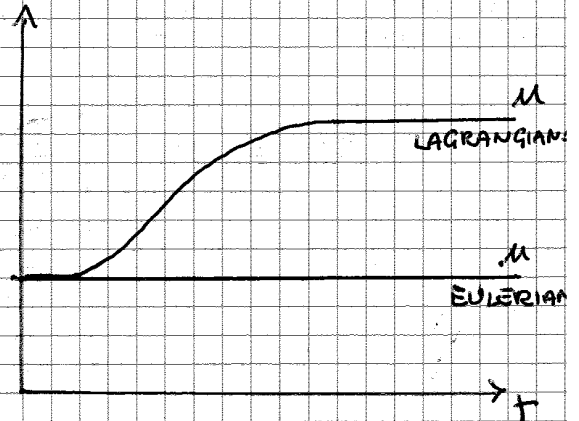
OSSERVIAMO LA PARTICELLA CON I DUE DIVERSI METODI

❖ EULERIANO

↓
OSSERVAZIONE A PUNTO FISSO NEL PUNTO P
→ VEDE LA STESSA VELOCITA'

❖ LAGRANGIANO

↓
SEGUIAMO LA PARTICELLA.
L'OSSERVATORE (SOLIDALE CON LA PARTICELLA) VEDE LA VELOCITA' AUMENTARE



perché questa entra nella parte convergente del condotto

... tornando all'euleriano:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{MOTO STAZIONARIO}$$

$f(x, y, z, t)$ Ora vogliamo la derivata TOTALE (→ SOSTANZIALE o LAGRANGIANA)

Calcoliamo il differenziale della funzione f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz =$$

$$\begin{aligned} dx &= u dt \\ dy &= v dt \\ dz &= w dt \end{aligned}$$

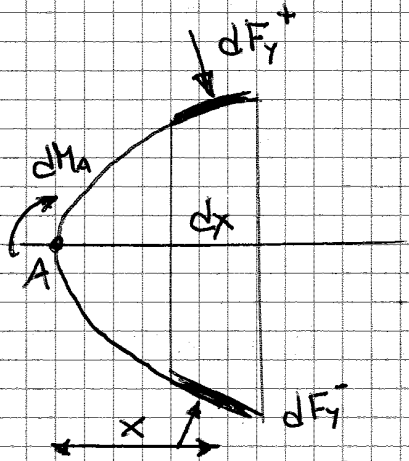
$$= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} u dt + \frac{\partial f}{\partial y} v dt + \frac{\partial f}{\partial z} w dt$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) dt$$

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{Df}{Dt}$	<p>DERIVATA LAGRANGIANA</p> <p>↓</p> <p>MI DICE COME SI ENOLVE LA FUNZIONE DELLA PARTICELLA NEL TEMPO E NELLO SPAZIO</p>
<p>↓</p> <p>DERIVATA EULERIANA</p>	<p>TERMINI CONVETTIVI</p>

AERODINAMICA APP. 8/10/2012

NOTA sul momento M_A



È UN'EQUAZIONE DI RISULTANTE
NON DI EQUILIBRIO!!!

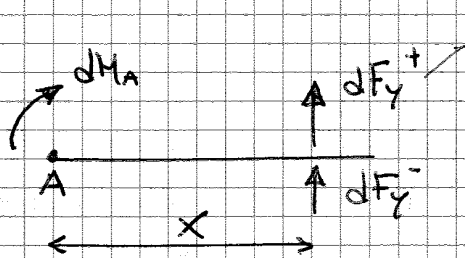
FANNO GIRARE VERSO DESTRA
(COME M_A)

$$dM_A = (\ominus dF_y^+ - \ominus dF_y^-) \cdot x \cdot dx$$

dF_y^+ in realtà è verso l'alto

IL SEGNO INCRIMINATO

Assimilando il tutto a un equilibrio alla trave



è già disegnato giusto

$$dM_A - dF_y^+ \cdot x - dF_y^- \cdot x = 0$$

NON VA LETTO COSÌ!

dM_A NON È UNA REAZIONE VINCOLARE!

dM_A È PROPRIO IL MOMENTO GENERATO DA dF_y^+ e dF_y^- !!

→ GIRA VERSO DESTRA, NON È UN DISCORSO DI EQUILIBRI!

→ per dare momento che gira verso dx si mettono i segni "-" alle 2 forze.

EQUAZIONI DEL MOTO

- ▶ EQ. BILANCIO DELLA MASSA → scalare
- ▶ EQ. BILANCIO QUANTITÀ DI MOTO → VETTORIALE
- ▶ EQ. BILANCIO DELL'ENERGIA → scalare

Ipotesi di fluido "INVISCIDO" → NON VISCOSO

→ EQUAZIONI DI EULERO

Ipotesi di fluido reale

→ EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

\bar{E} = ENERGIA TOTALE PER UNITÀ DI MASSA

$\int_{\sigma} p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma \rightarrow$ LAVORO PER UNITÀ DI TEMPO COMPIUTO DA FORZE DI PRESSIONE sul fluido

$\int_{\tau} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} d\tau \rightarrow$ LAVORO FORZE GRAVITAZIONALI

$$\bar{E} = e + \frac{v^2}{2}, \quad e = c_v T$$

TERMINE
MICROSCOPICO

TERMINE
MACROSCOPICO

MANCA TERMINE LEGATO AL CALORE POICHÉ FLUIDO IDEALE NON TRASMETTE CALORE

⚠ L'INCREMENTO DELL'ENERGIA POSSEDUTA DA UNA MASSA DI FLUIDO (GAS) È DATO DA 2 SOLI FATTORI

- 1) LAVORO MECCANICO COMPIUTO DA ESTERNO
- 2) CALORE FORNITO DA ESTERNO

FORME DIFFERENZIALI

Richiami:

• TEOREMA di GAUSS (della DIVERGENZA)

$$\int_{\sigma} \vec{F}_q \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F}_q d\tau$$

\vec{F}_q , FLUSSO DELLA QUANTITÀ q

se q è scalare $\Rightarrow \vec{F}_q$ VETTORE

se q è vettore $\Rightarrow \vec{F}_q$ TENSORE

$$\int_{\sigma} \vec{F}_q \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F}_q d\tau$$

$$\nabla \cdot \vec{F}_q = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \vec{F}_q = (F_1, F_2, F_3)$$

• TEOREMA del GRADIENTE

$f = f(x, y, z, t)$ scalare

$$\int_{\sigma} f \vec{n} d\sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} f d\tau$$

$$\rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \right|$$

LA DEFORMAZIONE DELLA PARTICELLA AVIENE A VOLUME COSTANTE

N.B. LA SOMMA È UGUALE A 0!



$\rho = \text{cost}$, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

→ PORTATA IN VOLUME COSTANTE in un condotto ←

• Supponiamo ora campo COMPRESSIBILE e STAZIONARIO

ρ varia nello spazio ma non nel tempo ← $\rho \neq \text{cost}$

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$

(1a) diventa $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

→ LA PORTATA IN MASSA SI CONSERVA ←

2) EQ. BILANCIO QUANTITÀ DI MOTO - differenziale

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = - \int_{\sigma} \rho \vec{V} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\sigma} p \vec{n} d\sigma + \int_{\tau} \rho \vec{g} d\tau$$

- I: PORTO DENTRO σ
- II: TRASFORMO TUTTI IN INTEGRALI DI VOLUME
- III: TOLGO L'INTEGRALE E CONFRONTO SOLO LE FUNZIONI INTEGRANDE

↓ GAUSS

↓ GRAD.

$$- \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) d\tau - \int_{\tau} \nabla p d\tau$$

$$\rightarrow \int_{\tau} \left[\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) \right] d\tau = - \int_{\tau} \nabla p d\tau + \int_{\tau} \rho \vec{g} d\tau$$

$$\Rightarrow (2) \quad \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = - \nabla p + \rho \vec{g}$$

questa forma non è più ce ancora!

$$\rightarrow \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}}_{\substack{\text{GRAD. } \vec{V} \\ \text{FORZATURA}}} + \vec{V} \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{V})}_{\text{div}(\rho \vec{V})} = - \nabla p + \rho \vec{g}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] = - \nabla p + \rho \vec{g}$$

EQ. CONTINUITÀ " 0

RILATIUNANDU

$$(1^*) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$(2^*) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

$$(3^*) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla E = - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \vec{g} \cdot \vec{V}$$

5 EQUAZIONI (la 2* conta $\times 3$ $\times k$ e vettoriale)

INCOGNITE: $\rho, p, \vec{V}, E \rightarrow 6$
 \downarrow
 u, v, w

Il sistema non è ben posto! \rightarrow servono altre eq.
 Considerando un gas perfetto

$$E = e + \frac{V^2}{2} = C_v T + \frac{V^2}{2}$$

All'incognita "E" si è sostituita "T" ...

PERÒ C'È L'EQUAZIONE DEL GAS PERFETTO!!!

$$\rightarrow p = \rho R T \rightarrow T = \frac{p}{\rho R} \text{ e siamo a posto!}$$

Memò della prossima volta: descrizione LAGRANGIANA

AERODINAMICA APP. 11/10/2012

Solviamo ora tutto il set di equazioni di bilancio riferendole al moto delle particelle fluide

\rightarrow MODIFICHIAMO LE EQUAZIONI IN FORMA DIFFERENZIALE PER FAR COMPARE LA DERIVATA SOSTANZIALE (o Lagrangiana)

$$\begin{aligned} \frac{D(\cdot)}{Dt} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\cdot) \\ &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + w \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \end{aligned}$$

INIZIA UNA SERIE DI RIMANEGGIAMENTI

$$(2^*) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \underbrace{\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})}_{\text{VORTICITÀ } \vec{\omega}}$$

$$(4) \quad \boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{g}}$$

EQUAZIONE QUANTITÀ DI MOTO CON VORTICITÀ ESPLICATA

RIMANEGGIAAMO ANCHE L'EQUAZIONE NELL'ENERGIA per far saltare fuori qualcosa d'altro (→ ENERGIA INTERNA)

$$(3^{**}) \quad \frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\vec{V}) + \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{V}}$$

$$(2^{**}) \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

Moltiplichiamo tutto scalarmente per \vec{V}

$$\vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p + \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{g}}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p + \vec{g} \cdot \vec{V} \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p}_{\text{...}} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{g} \cdot \vec{V}$$

Ampliamo a scomporre $\nabla \cdot (p\vec{V})$ in (3^{**})

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{p(\nabla \cdot \vec{V})} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla p} + \vec{g} \cdot \vec{V}$$

e quindi sostituiamo qui dentro

$$\rightarrow \left(\frac{DE}{Dt} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p(\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{g} \cdot \vec{V} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right)$$

$$\vec{E} = e + \frac{V^2}{2}$$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{De}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

se $\nabla s = 0 \Rightarrow s = \text{cost}$ in TUTTO il campo
 FLUSSO OMOENTROPICO

se $\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla s = 0$ FLUSSO ISENTROPICO

→ Ogni particella mantiene la sua entropia lungo tutto il moto (ma le altre particelle hanno entropie diverse)

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

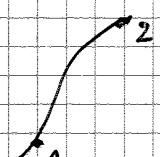
$$e = c_v T \Rightarrow de = c_v dT$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

FLUSSO ISENTROPICO

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

Consideriamo una particella fluida che va da 1 a 2



$$\int_1^2 ds = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R \int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

EVOLUZIONE ISENTROPICA

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{c_v} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$R = c_p - c_v$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$$

$$0 = \ln \frac{T_2}{T_1} + (\gamma - 1) \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_1^{\gamma-1}}{\rho_2^{\gamma-1}} \right) = 0$$

se il log è 0 allora x=1

$$\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_1^{\gamma-1}}{\rho_2^{\gamma-1}} = 1 \rightarrow \frac{T_2}{\rho_2^{\gamma-1}} = \frac{T_1}{\rho_1^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

ISENTROPICA

$$(4) \rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\omega} = T \nabla S - \nabla h - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

$$T \nabla S = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla h + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega} = \nabla H$$

$$(8) \quad \boxed{T \nabla S = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla H - \vec{V} \times \vec{\omega}} \quad \text{EQUAZIONI DI CROCCO}$$

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

Quando è OMOENTROPICO il flusso?

- 1) STAZIONARIO
- 2) $H = \text{cost} \rightarrow$ OMOTALENTALPICO
- 3) $\vec{V} \times \vec{\omega} = 0$

Se il campo è IRROTAZIONALE sicuramente $\vec{V} \times \vec{\omega} = 0$

Se sono verificate queste condizioni allora $\nabla S = 0$

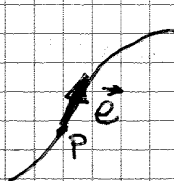
CASO PARTICOLARE

● STAZIONARIO e INCOMPRESSIBILE ●

$$(4) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{g}$$

Eq. QUANTITÀ MOTO

Consideriamo una linea di corrente e un punto P



$\vec{V} = V \vec{e} \quad \vec{e} = \text{versore tangente}$

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \cdot \vec{e} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \vec{e} + (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{e} = 0$$

perché $\vec{V} \times \vec{\omega} \perp \vec{V}$ e $\vec{e} \parallel \vec{V}$
 \rightarrow PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI $\perp = 0$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

QUI PORTO p DA FUORI A DENTRO COSÌ SOLO XX È UNA COSTANTE!
 Se no NON POSSO PORTARLO DENTRO COSÌ!!

Curve di livello:

p^0 PUÒ ESSERE COSTANTE IN TUTTO IL CAMPO?

$$(4) \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \cancel{\vec{v} \times \vec{\omega}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{g}$$

IRROTAZIONALE

INTRODUCIAMO LE IPOTESI DI

- IRROTAZIONALITÀ
- INCOMPRESSIBILITÀ
- STAZIONARIETÀ

DURANTE IL PROCEDIMENTO, NON DA SUBITO, COSÌ DA GIUNGERE PRIMA A UN CASO GENERALE E POI PARTICOLARE.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{g} = 0$$

Moltiplichiamo tutto per ρ .

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \rho \frac{1}{\rho} \nabla p + \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{g} = 0$$

introduciamo \mathcal{H}

$$\vec{g} = \nabla \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H} = -gz$$

$$-\rho \nabla \mathcal{H} = -\rho \nabla (-gz) = \rho \nabla gz$$

* USO L'INCOMPRESSIBILITÀ

→ METTO ρ (costante) dentro le derivate spaziali

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla p + \nabla \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \nabla (\rho gz) = 0$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz \right) = 0$$

derivata nello spazio = 0.

Però la funzione può variare nel tempo.

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz = \underline{\underline{F(t)}}$$

SE IL FLUSSO È STAZIONARIO → $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = \text{cost}$$

Se gli effetti gravitazionali sono costanti

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

BERNOULLI

• p^0 COSTANTE IN TUTTO IL CAMPO

SE FLUSSO È:

- ▶ STAZIONARIO
- ▶ INCOMPRESSIBILE
- ▶ IRROTAZIONALE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Usando la def. di derivata lagrangiana

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla p = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

$$= -\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad H = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (9)$$

AERODINAMICA APP. 15/10/2012

... Continua:

$$(9) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10)$$

$= 0$ $= 0$

INTRODUCENDO LA STAZIONARIETA'

$$(10) \rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

$$T^0 = T \left(1 + \frac{c^2}{c_p T} \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) = M^2$$

$$= T \left(1 + \frac{\gamma R^* \gamma}{c_p} \frac{M^2}{2} \right)$$

Velocità del suono
 $c = \sqrt{\gamma R^* T}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$R^* = c_p - c_v$$

$$\frac{\gamma R^*}{c_p} = \frac{\cancel{c_p} (c_p - c_v)}{\cancel{c_p} c_p}$$

$$= \frac{c_p}{c_v} - \frac{\cancel{c_p}}{\cancel{c_p}} = \underline{\underline{\gamma - 1}}$$

$$T^0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

TEMPERATURA TOTALE

⚠ **ESPRESSIONE VALIDA ANCHE PER FLUSSO VISENTROPICO.**
 Anche in presenza di forti discontinuità (URTI)
 l'espressione continua a valere.

• Se invece il flusso è ISENTROPICO

$$\frac{T}{p^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

$$\rightarrow \frac{T^0}{p^0 \gamma - 1} = \frac{T}{p^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

$$\frac{T^0}{T} = \left(\frac{p^0}{p} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$p^0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

VALIDA SOLO
 SE CAMPO è
ISENTROPICO

$$\frac{p}{p^{\gamma}} = \text{cost} \rightarrow \frac{p^0}{p^0 \gamma} = \frac{p}{p^{\gamma}} = \text{cost}$$

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{p^0}{p} \right)^{\gamma}$$

$$p^0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/\gamma-1}$$

SOLO IN CASO
ISENTROPICO

COMPRESSIBILE } EQUAZIONE
 + INCOMPRESSIBILE } GENERALE 43

Se INCOMPRESSIBILE:

$$\rho = \text{cost} \rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1^*)$$

$$(13) \quad \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla \times \vec{f}$$

EQ. VORTICITÀ
 ► INCOMPRESSIBILE

I) Se $\vec{f} = \vec{g}$ → funzione che non ammette ROTORE
 $\nabla \times \vec{g} = 0$

II) CAMPO DI MOTO 2D
 \vec{V} sempre $\perp \vec{\omega}$

Se valide I) e II)

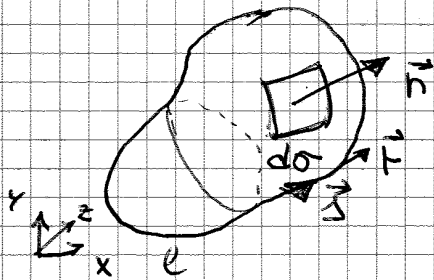
$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$$

$\vec{\omega} = \text{costante}$
 lungo la sua
 traiettoria

→ SE IL CAMPO DI MOTO ALL'INIZIO
 È IRROTAZIONALE ALLORA
 RIMANE IRROTAZIONALE

... e se il campo è 3D??? È un casino!

Compo di moto 3D



Volume di controllo

Superficie che lo racchiude: σ

Linea attorno al volume: l

\vec{F} : vettore tangente a l

CIRCUITAZIONE Γ

$$d\vec{s} = ds\vec{F}$$

$$\Gamma = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Teorema di STOKES

$$\Gamma = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} \underbrace{(\nabla \times \vec{V})}_{\vec{\omega}} \cdot \vec{n} d\sigma \rightarrow \text{FLUSSO DI } \vec{\omega} \text{ ATTRAVERSO } \sigma$$

Come evolve Γ nel tempo ???

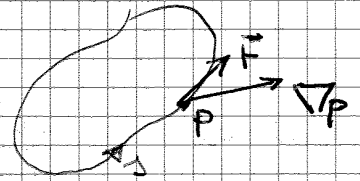
Analizzando \sim :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2^{**}) \quad \text{trascurando } \vec{g}$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{dp}{ds} = \nabla p \cdot \vec{T} \quad \text{derivata direzionale}$$

$$\rightarrow dp = \nabla p \cdot d\vec{s}$$



$$(14) \quad \frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} dp$$

I) INCOMPRESSIBILE $\rho = \text{cost} \rightarrow$ punto fuori

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \oint_C dp = 0$$

INTEGRALE DI DIFFERENZIALE ESATTO SU LINEA CHIUSA $\Rightarrow 0!$

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$$

II) $\rho \neq \text{cost}$ - $\rho = \rho(p) \rightarrow$ CAMPO DI VELOCEZZA ISENTROPICO

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante}$$

\Rightarrow Si dimostra che anche in questo caso

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

AERODINAMICA APP. 18/10/2012

... e allora andiamo a dimostrarlo!

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \rightarrow \rho = \left(\frac{p}{\text{cost}}\right)^{1/\gamma}$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \left(\frac{p}{\text{cost}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dp \quad (\text{usa } \rho^{-1} \text{ nell'integrale (14)})$$

$$\frac{DT}{Dt} \neq 0 \quad \text{se } p = p(p, S) \rightarrow \text{se l'evoluzione NON è ISENTROPICA.}$$

Tutto ciò era il teorema di LAGRANGE - THOMSON

FLUIDO VISCOSO : le equazioni di Eulero risultano incomplete, xk non trattano la viscosità e gli scambi termici.

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

$$(2.1) \quad \frac{Dp}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$

$$(2.2) \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V})$$

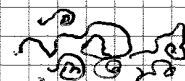
$$(2.3) \quad \rho \frac{De}{Dt} = K \nabla^2 T - p \nabla \cdot \vec{V} + D \quad \begin{matrix} e = \text{energia} \\ \text{interna} \end{matrix}$$

D = funzione di DISSIPAZIONE, legata a gradienti di velocità e alla viscosità nel fluido

$$\nabla^2 T \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

D è sempre > 0 → c'è sempre un trasferimento di energia verso la scala MICROSCOPICA
 ↳ DA ENERGIA CINETICA A AGITAZIONE MOLECOLARE

CORRENTI TURBOLENTE



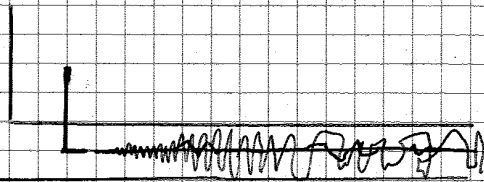
- Vortici di scale diverse
- Perdita di "ordine/categoria" dei vortici
- Fenomeni IMPREVEDIBILI

APPROCCIO STATISTICO

→ SISTEMA DINAMICO NON LINEARE

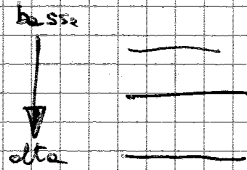
◆ SCOMPOSIZIONE DI QUALSIASI VARIABILE / $\left. \begin{matrix} \text{PARTE MEDIA} \\ + \\ \text{TERMINE FLUTTUANTE} \end{matrix} \right\}$

L'Esperimento di Reynolds (1883)



- SERBATOIO COLLEGATO A UN CONDOTTO
- INIETTORE DI COLORANTE

AUMENTANDO GRADUALMENTE LA PORTATA



LAMINARE
TRANSIZIONALE
TURBOLENTO

↓
DIFFUSIONE DOVUTA A FLUTTUAZIONI DI VELOCITÀ

Reynolds fece diverse prove, cambiando

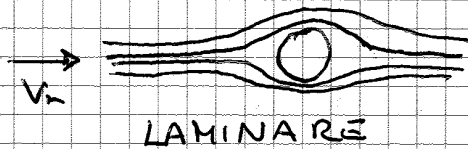
- VELOCITÀ U
- DIAMETRO CONDOTTO D
- FLUIDO \rightarrow viscosità ν

La transizione NEL CONDOTTO avviene sempre intorno a

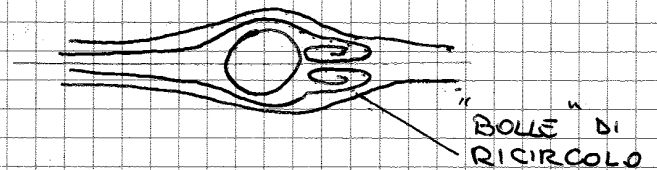
$$\frac{UD}{\nu} \approx 2300$$

CILINDRO INDEFINITO

$$Re_D < 4$$



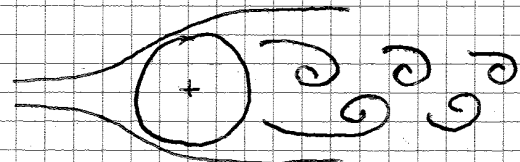
$$4 < Re < 40$$



$$40 < Re < 90$$

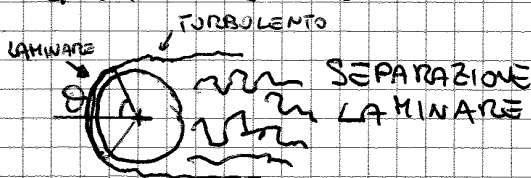
Oscillazioni dovute a bolle di ricircolo

$$90 < Re < 400$$



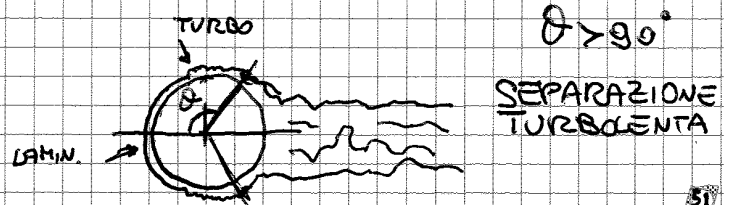
DISTACCO REGOLARE DI STRUTTURE VORTICOSE \rightarrow scia di Von Karman

$$400 < Re < 3 \cdot 10^5$$



TRANSIZIONE A TURBOLENTO

$$Re > 3 \cdot 10^5$$



EQUAZIONI di BILANCIO MEDIANE ALLA REYNOLDS

(RANS - Reynolds Average Navier Stokes equations)

Per comodità: INCOMPRESSIBILE

$$(2.1) \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \rightarrow \begin{cases} \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

TRALASCIAMO L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA, SUPPONIAMO CHE NON CI SIANO SCAMBI TERMICI

$$* \begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

"DECOMPOSIZIONE" di Reynolds:
OGNI VARIABILE È VISTA COME
PARTE MEDIA +
TERMINE FLUTTUANTE

$$p = \bar{p} + p' \quad \vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'$$

↑ MEDIO ↑ FLUTTUANTE

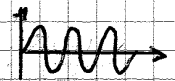
$$* \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

ESPLICITIAMO LA DERIVATA SOSTANZIALE E SOSTITUIAMO p c v.

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')}{\partial t} + (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \right] &= -\nabla (\bar{p} + p') + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \\ \nabla \cdot (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') &= 0 \end{aligned} \right.$$

• LA MEDIA DI UN TERMINE FLUTTUANTE È ZERO

$$\bar{\vec{V}'} = 0$$



$$(2.4) \nabla \cdot \bar{\vec{V}} = 0$$

$$(2.5) \rho \left[\frac{\partial \bar{\vec{V}}}{\partial t} + \underbrace{(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')}_{\text{DIFFICILE DA MEDIARE}} \right] = -\nabla \bar{p} + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \bar{\vec{V}}$$

DIFFICILE DA MEDIARE

↓ È IN QUESTA FORMA QUI.

$$\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}} + \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad \left. \vphantom{\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V})} \right\} \text{RICHIAMO MATEMATICO}$$

$$\overline{(\bar{\vec{V}} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} = \nabla \cdot [(\bar{\vec{V}} + \vec{V}')(\bar{\vec{V}} + \vec{V}')] = 0$$

Cambio di notazioni

$$\nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_i \nu_j)$$

$$\mu_i = \bar{\mu}_i + \mu'_i \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

AERODINAMICA APP. 22/10/2012 IL GIORNO DOPO LEIPZIG

RISCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI N.S. in FORMA GENERALE

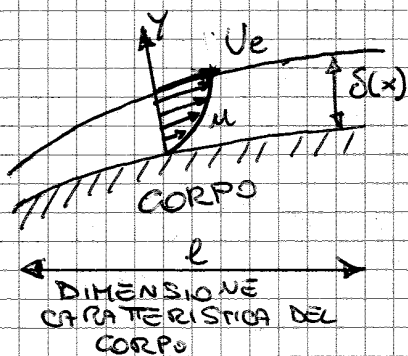
$$(2.1) \quad \frac{Dp}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$(2.2) \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$(2.3) \quad \rho \frac{De}{Dt} = K \nabla^2 T - p (\nabla \cdot \vec{v}) + D$$

STRATO LIMITE

BIDIMENSIONALE, STAZIONARIO, INCOMPRESSIBILE



u : velocità generica nello strato limite
 U_e : velocità esterna
 $\delta(x)$: spessore dello strato limite;
 [distanza a cui $u(x,y) = 0,99 U_e$]

Ipotesi che $\delta \ll l$ e che le cose cambiano molto + rapidamente lungo la direzione y . $v \ll u$

→ GRADIENTI lungo $y \gg$ GRADIENTI LUNGO $x \Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \gg \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$

• NO SCAMBI TERMICI, QUINDI LA 2.3 NON CI SERVE •

(2.1) in componenti

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

(2.2) lungo asse x • trascuriamo $\vec{g} \times K$ abbiamo un fluido leggero •

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ STAZIONARIO

(2.2) lungo asse y

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

Non abbiamo ancora usato le ipotesi $\delta \ll l$, $\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}$, $v \ll u$

$$\frac{U_e^2}{L} \sim \nu \left(\frac{U_e}{\delta^2} + \dots \right) \rightarrow \nu \approx \frac{U_e \cdot \delta^2}{L}$$

$$\nu \left(\frac{U_e \delta}{L^3} + \frac{U_e}{L \delta} \right) = \frac{U_e \delta^2}{L} \left(\frac{U_e \delta}{L^3} + \frac{U_e}{L \delta} \right) = \frac{U_e^2 \delta^3}{L^4} + \frac{U_e^2 \delta}{L^2}$$

TRASC.
 * MOLTO GRANDE
 STESSO ORDINE DEI TERMINI CONVETTIVI

→ FORZE VISCOSE

NOTA

LUNGO LA DIREZIONE $y \rightarrow$ 3.3 I TERMINI DI PRESSIONE SONO DI ORDINE SUPERIORE AI TERMINI CONVETTIVI e DIFFUSIVI

$$\frac{U_e^2 \delta}{L^2}, \quad \frac{U_e^2 \delta}{L^2} \ll \frac{U_e^2}{\delta}$$

QUINDI

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0} \quad \text{LA PRESSIONE NELLO STRATO LIMITE E' COSTANTE LUNGO } y$$

RIASSUMENDO :

$$\begin{cases} (3.1) & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ (3.2) & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ (3.3) & \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{EQUAZIONI} \\ \text{DI PRANDTL} \\ \text{PER LO} \\ \text{STRATO LIMITE} \end{array}$$

OSS Nella 3.2 si è scritto $\frac{dp}{dx}$ perché tanto nello strato limite la pressione è solo funzione di x

RISCRIVIAMO LA 3.2 ALL'ESTERNO DELLO STRATO LIMITE

$$U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2} \right)$$

$= 0 \rightarrow$ ALL'ESTERNO LA VELOCITA' E' COSTANTE LUNGO y

$$\rightarrow U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} \quad (3.4)$$

LA PRESSIONE NELLO STRATO LIMITE E' UGUALE A QUELLA ALL'ESTERNO DELLO STRATO LIMITE

Perciò la 3.2 si può riscrivere così: (per x fissata)

$$(3.5) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

SFORZO DI ATTRITO LOCALE A PARETE $\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ (τ_p) $w = \text{wall}$

SFORZO DI ATTRITO LOCALE MEDIO $\bar{\tau}_p = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_p(x) dx$

COEFFICIENTE DI ATTRITO LOCALE $C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ $f = \text{friction}$

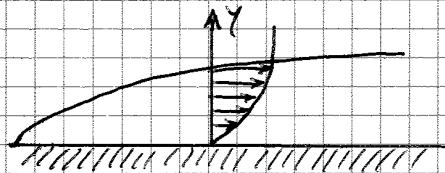
COEFF. DI ATTRITO MEDIO $C_D = \frac{\bar{\tau}_p}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx$
 = COEFF. DI RESISTENZA SE LA CORRENTE INVESTE UNA LAMINA PIANA A INCIDENZA ZERO E GRADIENTI DI PRESSIONE NULLI

RESISTENZA DI ATTRITO TOTALE sulla lamina $D = \frac{1}{2} \rho U^2 C_D S = \bar{\tau}_p S$
 $S = \text{superficie bagnata da flusso}$

REYNOLDS LOCALE $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ → dipende dal punto che consideriamo sul corpo

REYNOLDS TOTALE $Re_L = \frac{UL}{\nu}$
 c'è pure $Re_\theta = \frac{U \cdot \theta}{\nu}$

EQUAZIONI DI PRANDTL PER LAMINA PIANA A INCIDENZA NULLA



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (3.6) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (3.7) \end{cases}$$

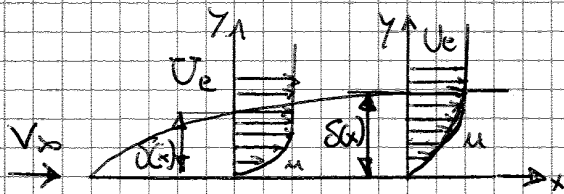
⚠ INCIDENZA NULLA NON GENERA GRADIENTI DI PRESSIONE ⚠

$$\rightarrow \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \rho \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{Soluzione by BLASIUS}$$

AERODINAMICA APP. 25/10/2012

Strato limite LAMINARE su PLACCA PIANA, ASSENZA DI GRADIENTI DI PRESSIONE (\rightarrow INCIDENZA ZERO)



$\delta(x)$ cresce verso valle

• I PROFILI DI VELOCITÀ PER OGNI x SONO SIMILI MA NON UGUALI

Andando a scolorire u con U_e e y con $\delta(x)$:

$$\psi = \frac{u}{U_e} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

(3.6) $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right.$

(3.7) $\left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \rightarrow$

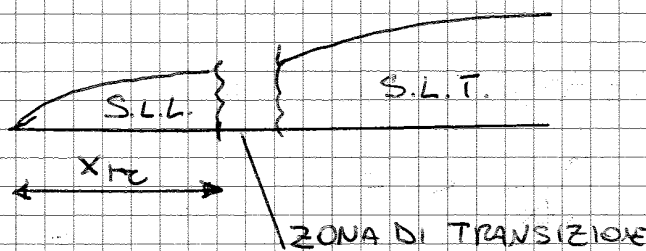
SOLUZIONE ESATA by BLASIUS

$\psi = \psi(\eta)$

TRANSIZIONE sulla lamina e incidenza zero:

$Re = 5 \cdot 10^5$

TRANSIZIONE NATURALE



$$Re_{x_{tr}} = \frac{V_{\infty} \cdot x_{tr}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$$

... ma LA TRANSIZIONE SI PUÒ FORZARE $\left\{ \begin{aligned} &ANTICIPARE \\ &RITARDARE \end{aligned} \right.$

Per Re molto alta non si nota quasi il campo di STRATO LIMITE LAMINARE

FATTORI CHE INFLUENZANO LA TRANSIZIONE

- 1) RUGOSITÀ
- 2) GRADIENTI DI PRESSIONE (incidenza $\neq 0$)
- 3) TEMPERATURA PARETE
- 4) ASPIRAZIONE e SOFFIATURA

EQUAZIONI di PRANDTL S.L. TURBOLENTO

$$(3.8) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \right.$$

$$(3.9) \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \nabla^2 u \right.$$

Quando avevamo fatto le RANS avevamo detto che

$$u = \bar{u} + u' \quad p = \bar{p} + p' \quad v = \bar{v} + v'$$

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{p}' = 0$$

Andiamo ora a trovare le eq. di Prandtl mediate dalle Reynolds → PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO

USANDO (3.9)

LO AGGIUNGIAMO
KINTANTO FA ZERO

$$\rho \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

⚠ NOI SAPPIAMO GIÀ CHE
POTREMMO TRASCURARLO
MA LO LASCIAMO X FARE
COME IL LIBRO

$$\rho \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (uv)}{\partial y}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

INTRODUCIAMO I TERMINI DECOMPOSTI DA REYNOLDS

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')] \right] = -\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \right]$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v') \right] = -\frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \right] \quad (3.10)$$

FACCIAMO ORA LA MEDIA IN TUTTO

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

$$\rightarrow \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}}_{\tau} \right)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

↓
CONTRIBUTO
MICROSCOPICO

↓
CONTRIBUTO DELLE FLUTTUAZIONI
DI VELOCITÀ DEL REGIME TURBOLENTO

$$3.13 \rightarrow \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (3.14)$$

Come succedeva per le R.A.N.S. il problema non è ancora ben posto → serve ancora una relazione per gli sforzi di Reynolds

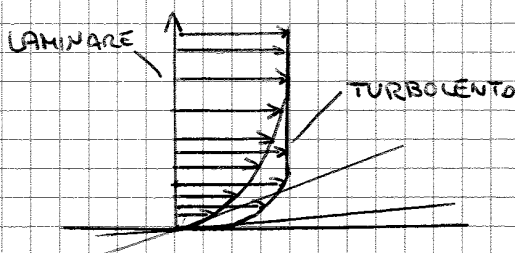
→ DI NUOVO BOUSSEMESQ

$$(3.15) \quad -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \mu_T = \text{VISCOSITÀ TURBOLENTE (eddy viscosity)}$$

È come se la viscosità fosse + grande rispetto al caso di flusso laminare

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \underline{\underline{(\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}} \quad (3.16)$$

PROFILO DI VELOCITÀ IN STRATO LIMITE TURBO

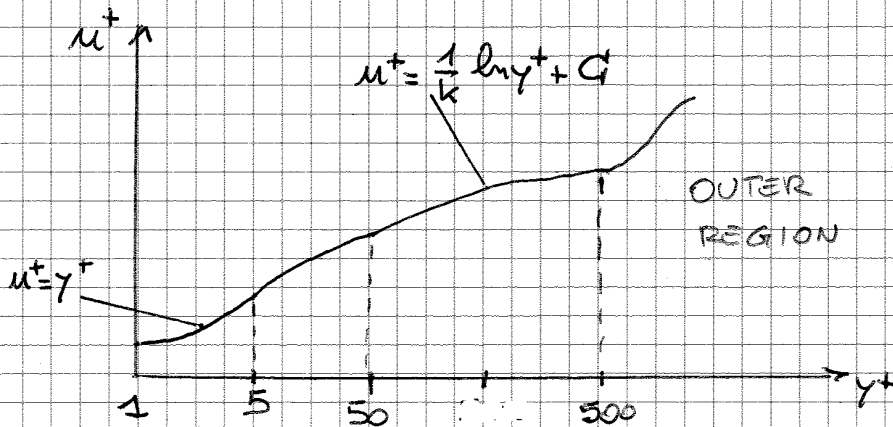


$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

IL GRADIENTE DI VELOCITÀ A PARETE È MOLTO + ELEVATO NELLO STRATO LIMITE TURBOLENTO
→ PIÙ RESISTENZA D'ATTRITO

■ $y^+ > 500 \div 1000 \rightarrow$ OUTER REGION

Ripartiamo le varie regioni su un grafico in scala SEMI-LOGARITMICA



SI OSSERVA SELF-SIMILARITY sulla curva a Re fissato.

Ritorniamo a

S.L.L. LAMINA SENZA INCIDENZA

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

\rightarrow BLASIUS

$$\rightarrow \delta(x) \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta^*(x) = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\theta = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2,605$$

$$\tau_p(x) = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\bar{L}_p = 0,664 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{L}}$$

FORMULE VALIDE

SOLO IN QUESTO CASO!

In generale si usano le formule dell'esercitazione

$$\underline{S.L.T., \dots, Re_x > 10^4}$$

STIAMO SEMPRE PARLANDO DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE.

Queste formule NON TENGONO CONTO DELLA COMPRESSIBILITÀ!

$$\delta(x) = \frac{0,232 x}{Re_x^{1/2}}$$

$$\delta^*(x) = \frac{\delta}{12}$$

$$\theta(x) = \frac{115}{156}$$

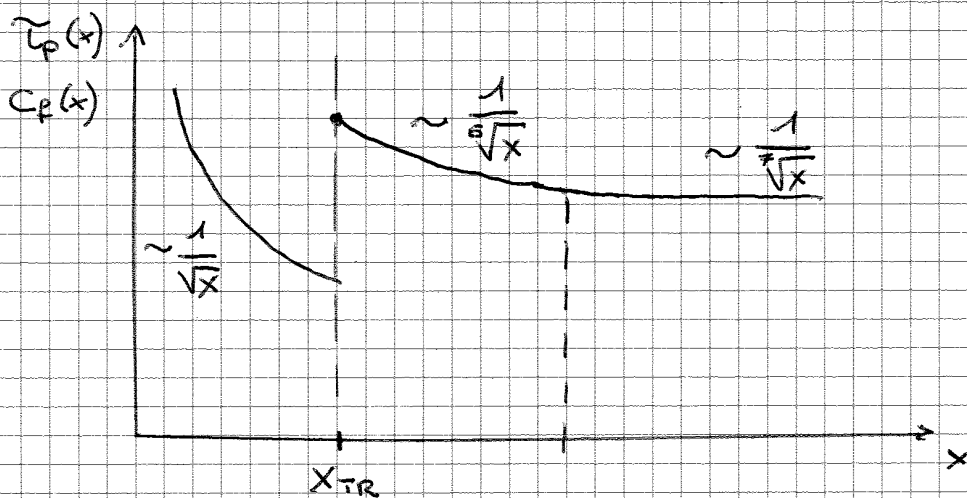
$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 1,182$$

$$\tau_p(x) = 0,0115 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{\sigma x} \right)^{1/2} = \frac{0,0115 \rho U^2}{(Re_x)^{1/2}}$$

$$C_f(x) = \frac{0,023}{(Re_x)^{1/2}}$$

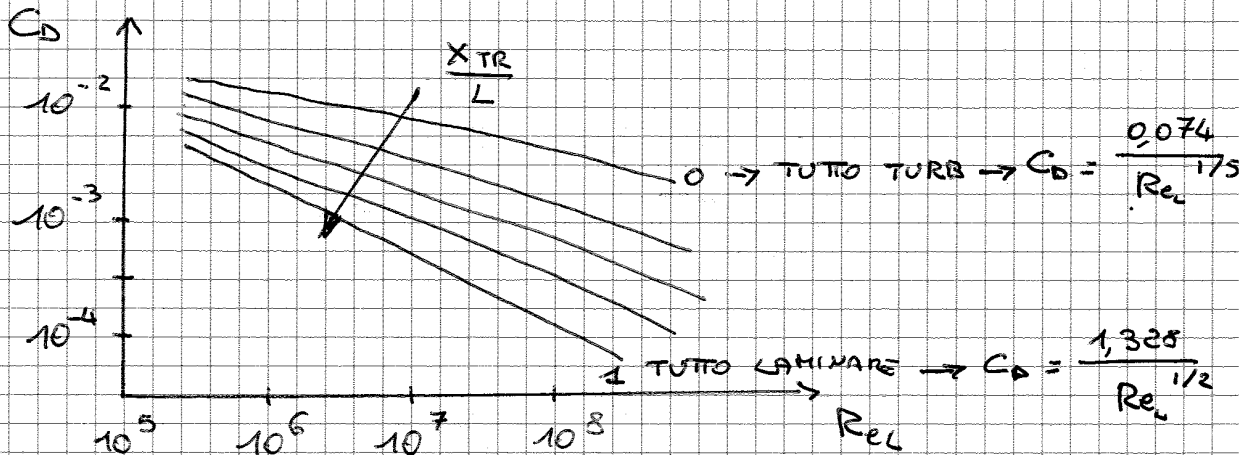
$$\overline{C_f} = 0,0134 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} = \frac{0,0134 \rho U^2}{Re_L^{1/2}}$$

$$C_D = \frac{0,0295}{Re_L^{1/2}}$$



$$\rightarrow C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{x_{TR}}{L} \left[\frac{0,074}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/5}} - \frac{1,328}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/2}} \right] \quad (3.20)$$

Andando così a imporre la x_{TR} si può ricavare il C_D della lamina (in funzione di Re_L)



AERODINAMICA APP. 29/10/2012

b) LAMINA PIANA con TRANSIZIONE NATURALE

Partiamo dal risultato ottenuto x la transizione forzata

$$(3.20) C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{x_{TR}}{L} \left[\frac{0,074}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/5}} - \frac{1,328}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/2}} \right]$$

$$\frac{x_{TR}}{L} = \frac{Re_{x_{TR}}}{Re_L}$$

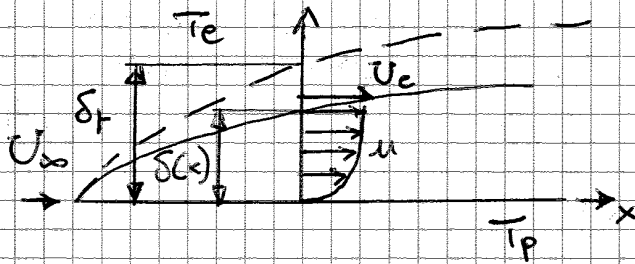
Andiamo a sostituire

$$(3.21) C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{Re_{x_{TR}}}{Re_L} \left[\frac{0,074}{(Re_{x_{TR}})^{1/5}} - \frac{1,328}{(Re_{x_{TR}})^{1/2}} \right]$$

Ma però sulla lamina piana in assenza di gradienti di pressione SAPPIAMO per quale Re_x c'è la TRANSIZIONE $\rightarrow Re_{x_{TR}} = 5 \cdot 10^5 \rightarrow$ sostituiamo

STRATO LIMITE TERMICO

Fino ad ora abbiamo trattato lo strato limite in condizioni INCOMPRESSIBILI e ISOTERMICHE → strato limite cinetico



■ Se però abbiamo una PARETE A $T_p \neq T_{ext}$ e per di più il flusso è COMPRESSIBILE le cose cambiano!

Gli spessori degli strati limite cinetico e termico sono diversi!

$\delta_T =$ SPESSORE STRATO LIMITE TERMICO

ORA: COMPRESSIBILITÀ, $T_p \neq T_\infty$

→ La batteria di equazioni x lo strato limite incompressibile e isoterma non vale più!

Come possiamo correggere quelle formule x tenere conto dei "nuovi" effetti?

→ CORREZIONE del COEFF. DI ATRITO ←

$M > 0,3 \rightarrow$ EFFETTI DI COMPRESSIBILITÀ

$T_p \neq T_\infty \rightarrow$ EFFETTI TERMICI (ANCHE per $M \rightarrow 0$!!)

↳ $\rho, \mu \neq \text{cost}$ nello S.L.

$$C_{f,inc} = C_{f,inc}(Re_{x_0})$$

$$C_{f,com} = C_{f,com}\left(Re_{x_0}, M_\infty, \frac{T_p}{T_\infty}\right) \cdot \frac{C_f \text{ COMPRESSIBILE}}{\text{è funzione di } Re_x, M_\infty, \frac{T_p}{T_\infty}}$$

$$\rightarrow C_{f,com} = C_{f,inc}(Re_{x_0}) \cdot \chi\left(M_\infty, \frac{T_p}{T_\infty}\right)$$

↓
FATTORE CORRETTIVO "chi"

quindi

$$T^0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) = \text{cost}$$

La conservazione di H e T^0 SI HA ANCORA
NELLO STRATO LIMITE SE $P_r = 1$

NELLO STRATO LIMITE:

1) $P_r = 1 \rightarrow H = \text{cost}$
 $T^0 = \text{cost}$

2) $P_r \neq 1 \quad H_{\text{rec}} = \text{ENTALPIA DI RECUPERO}$

$R = \text{fattore di recupero} \quad H_{\text{rec}} = h + R \frac{U^2}{2} = h_e + R \frac{U_e^2}{2} = \text{cost}$

$$T_{\text{rec}} = T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) = \text{cost}$$

⚠ SE $P_r \neq 1$
 NON SI CONSERVA
 L'ENTALPIA
 TOTALE
 → SI CONSERVA
 L'ENTALPIA DI
 RECUPERO
 ($< H_{\text{totale}}$)

⚠ $R_{\text{LAMINARE}} = P_r^{1/2}$
 $R_{\text{TURBOLENTO}} = P_r^{1/3}$

SI DIMOSTRA CHE:

$$X_{\text{LAM.}} = \left(\frac{T_p + T_\infty}{2 T_\infty} + R_{\text{LAM.}} \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4} \right)^{-0,125} \quad (3.24)$$

$$X_{\text{TURB}} = \left(\frac{T_p + T_\infty}{2 T_\infty} + R_{\text{TURB}} \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4} \right)^{-0,65} \quad (3.25)$$

⊥ PARETE ADIABATICA ⊥

$$T_p = T_{\text{rec}} = T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)$$

$$X_e = \left[\frac{T_p + T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)}{2 T_\infty} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4} \right]^{-0,125} =$$

Integriamo anch'è eq. di continuità:

$$dv = - \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$v = \int_0^Y dv = - \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy \rightarrow \text{LO SOSTITUIAMO IN (3.28)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_p}{\rho} \quad (3.30)$$

da (3.7)

MMV PER PARTI $\int f \cdot g = F \cdot g - \int F \cdot g'$

$$(3.31) \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = \left(u \Big|_0^{\infty} \right) \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

\downarrow
 U_e

Mettiamo i risultati della 3.31 in 3.30

$$(3.32) \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

SOMMIAMO E SOTTRAIAMO $u \frac{dU_e}{dx}$

$$(3.33) \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{dU_e}{dx} - U_e \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} + u \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

CAMBIAHO TUTTI I SEGNI

$$(3.34) \int_0^{\infty} \left[u \frac{\partial}{\partial x} (U_e - u) + (U_e - u) \frac{du}{dx} + (U_e - u) \frac{dU_e}{dx} \right] dy = + \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [u (U_e - u)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u (U_e - u) dy + \frac{dU_e}{dy} \int_0^{\infty} (U_e - u) dy = + \frac{\tau_p}{\rho} \quad (3.35)$$

PASTROCCHIANDO UN PO' FACCIAMO SALTARE FUORI δ^* e θ

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \Rightarrow U_e \delta^* = \int_0^{\infty} (U_e - u) dy$$

U_e è una costante

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \Rightarrow U_e^2 \theta = \int_0^{\infty} u (U_e - u) dy$$

$\left(\frac{u}{U_e} - \frac{u^2}{U_e^2} \right) U_e^2 = u U_e - u^2 = u (U_e - u)$

Esprimiamo l .

$$l = \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} [2 + H] \quad (3.41)$$

Altro nuovo parametro

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

Riscriviamo ^{un po' dentro la derivata}

$$\frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx}$$

$$l = \frac{1}{2} \frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} + [2 + H] \lambda \quad (3.42)$$

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 2l - 2[2 + H] \lambda \quad (3.43) \quad \underline{\text{ANALITICO}}$$

Thwaites dopo una serie di esperimenti e dati sperimentali nota che

$$(3.44) \quad \frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 - 6 \lambda \quad \underline{\text{SPERIMENTALE}}$$

$$2l - 2[2 + H] \lambda = 0,45 - 6 \lambda$$

Questo è verificato per $l = 0,225$ $\boxed{H = 1}$

Per stretto limite LAMINARE \leftarrow QUALCOSA NON QUADRA!
 H dovrebbe essere $\approx 2,6$!

In realtà poi l non è costante, ma è funzione di x
 ... questo andrebbe a compensare il fatto che
 H in realtà è 2,6...

PROSEGUIAMO USANDO IL RISULTATO SPERIMENTALE

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad (3.45)$$

PRIMO RISULTATO PER UN FLUIDO IN UN SISTEMA (NE MONDARE UNO)

$$\theta^2(x) = \frac{0,45 \nu}{U_e^5(x)} \int_0^x U_e^5(x') dx' \quad (3.51)$$

Per poter chiudere quel dannato sistema vengono inserite le

RELAZIONI di CEBECI & BRADSHAW

→ legano l, H, λ IMPOSSIBILI DA RICORDARE

a) FLUSSI ACCELERATI $\frac{dU_e}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dPe}{dx} < 0$

$$l(\lambda) = 0,22 + 1,57\lambda - 1,8\lambda^2 \quad (3.52)$$

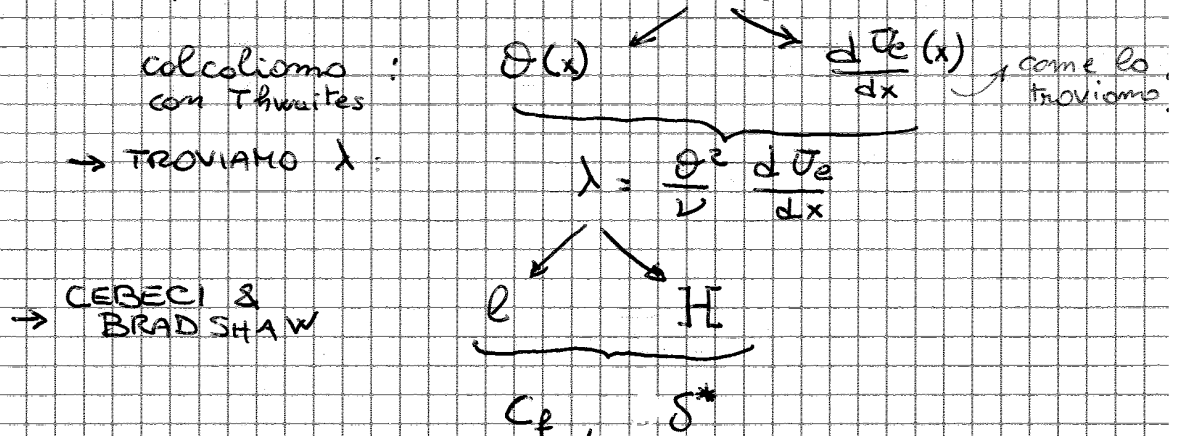
$$H(\lambda) = 2,61 - 3,75\lambda + 5,24\lambda^2 \quad (3.53)$$

b) FLUSSI DECELERATI $\frac{dU_e}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dPe}{dx} > 0$

$$l(\lambda) = 0,22 + 1,402\lambda + \frac{0,018\lambda}{0,107 + \lambda} \quad (3.54)$$

$$H(\lambda) = 2,088 + \frac{0,0731}{0,14 + \lambda} \quad (3.55)$$

Ricapitolando, noi conosciamo $U_e(x)$



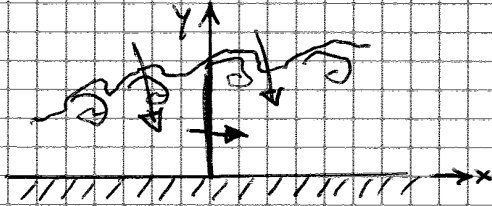
PROCEDIMENTO ANALOGO A QUELLO PER RICAVARE 3.54

$$\frac{d}{dx} [\bar{u}_e^2 \theta] + \delta^* u_e \frac{d u_e}{dx} = \frac{\Gamma_p}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{d u_e}{dx} [2 + \frac{\delta^*}{\delta}] = \frac{C_p}{2}$$

⚠ ATTENZIONE ⚠
TUTTE LE QUANTITÀ
SONO FUNZIONI DELLE
GRANDEZZE MEDIATE

TRASCINAMENTO ("ENTRAINMENT")



Le strutture vorticosi TRASCINANO del fluido della corrente esterna ALL'INTERNO dello strato limite → STRATO LIMITE CRESCE

Si può calcolare la PORTATA VOLUMETRICA attraverso una sezione

$$(3.56) \quad Q = \int_0^{\delta} \bar{u} dy = \int_0^{\delta} (u_e - u_e + \bar{u}) dy =$$

SOMMO e SOTTRAGGO, TANTO FA ZERO

TRA UNA SEZIONE + A MONTE e UNA + A VALLE LA PORTATA AUMENTA A CAUSA DELL'ENTRAINMENT!

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\delta} u_e dy - \int_0^{\delta} (u_e - \bar{u}) dy = \\ &= u_e \delta - \int_0^{\delta} u_e \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy = \\ &= u_e \delta - u_e \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy \end{aligned}$$

$$Q = u_e (\delta - \delta^*) \quad (3.57)$$

δ^* anche se a rigole
 $\delta^* = \int_0^{\infty}$ e NON \int_0^{δ}
Ma è opportuno tra δ e ∞ il minimo -

Ultima relazione * chiudere il sistema

LUDWIG & TILLMAN

$$C_f = 0,246 \cdot 10^{-0,678 H} Re_s^{-0,268} \quad (3.63)$$

(come quelle di Prandtl)

NOTA: LE EQUAZIONI INTEGRALI DELLO STRATO LIMITE
VALGONO PER QUALSIASI PROFILO!
NON SOLO PER LA LAMINA PIANA!

*** QUELLE SOLO PER LA LAMINA PIANA SONO SOLO
NEI PARAGRAFI DEDICATI ALLA LAMINA PIANA ***

Sostituendo in 3.64

$$0,664\sqrt{Re_{x_m}} = 1,147 \left(1 + \frac{22400}{Re_{x_m}} \right) Re_{x_m}^{0,46}$$

$$Re_{x_m} = \frac{2 \cdot 10^6}{5} \gg 5 \cdot 10^5$$

È SBAGLIATO!!

⊖ Abbandoniamo per ora il fluido viscoso e RITORNIAMO al fluido ideale

Lasciamo da parte le eq. di Navier-Stokes e riprendiamo quelle di Eulero.

Aggiungendo l'irrotazionalità le eq. diventano

$$\begin{aligned}
 (4.1) & \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\
 (4.2) & \quad \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \rightarrow \text{Bernoulli!} \\
 (4.3) & \quad \nabla \times \vec{V} = 0
 \end{aligned}$$

$p^0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \text{cost.}$
 COSTANTE SULLA STESSA LINEA DI CORRENTE

CAMPO 2D, STAZIONARIO, INCOMPRESSIBILE, IRROTAZIONALE

$$\begin{aligned}
 (4.4) & \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
 (4.5) & \quad p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \rightarrow p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V^2) \\
 (4.6) & \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione del C_p

$$p - p_\infty = C_p \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V^2)$$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

$$C_p = \frac{\frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V^2)}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

$$(4.5) \rightarrow C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

FUNZIONE POTENZIALE ϕ

• Se $\nabla \times \vec{V} = 0$ allora $\vec{V} = \nabla \phi$ ϕ : FUNZIONE POTENZIALE

Poi $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$

EQUAZIONE DI LAPLACE $\rightarrow \nabla^2 \phi = 0$ (4.6*)

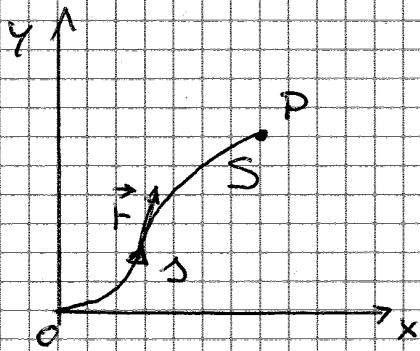
▲ L'EQUAZIONE DI LAPLACE È LINEARE ▲
 \rightarrow VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

"Spezzettiamo" il campo in dei campi + semplici

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad \vec{V} = V_1 + V_2 + V_3$$

Proprietà della funzione potenziale ϕ



Δ = ordinata curvilinea
 S = nome della linea

$\phi_P \neq \phi_O$ poiché esiste

un GRADIENTE DI $\phi \rightarrow \nabla\phi$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\Delta} = \nabla\phi \cdot \vec{F} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\Delta} = \vec{V} \cdot \vec{F}$$

$$d\phi = (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds$$

$$\int_{O,S}^P d\phi = \int_{O,S}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds \rightarrow \phi_P - \phi_O = \int_{O,S}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds$$

DIFFERENZA DI POTENZIALE

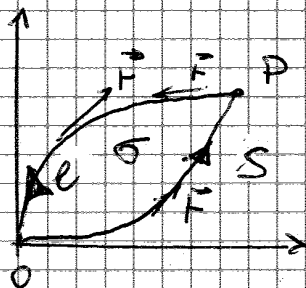
ϕ_O È UNA COSTANTE, LA IMPONIAMO = ZERO

(4.8)

$$\phi_P = \int_0^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds$$

POTENZIALE NEL PUNTO P

Supponiamo di andare da O a P lungo 2 diverse linee, l e S.



$$\phi_P = \int_{O,S}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds$$

$$\phi_P = \int_{O,l}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds$$

$$\phi_P = \phi_P \rightarrow \int_{O,S}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds - \int_{O,l}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds = 0$$

$$\int_{O,S}^P (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds + \int_{P,l}^O (\vec{V} \cdot \vec{F}) ds = 0$$

STO PERCORRENDO UNA LINEA CHIUSA

\rightarrow va da O a P e da P a O