



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 521

DATA: 16/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Scanu

MATERIA: Dispositivi e Sistemi Robotici

Prof. Pastorelli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

DISPOSITIVI E SISTEMI ROBOTICI

STEFANO PASTORELLI



PIETRO SCANU

ROBOTICA INDUSTRIALE

ROBOT: MANIPOLATORE MULTIFUNZIONALE PROGRAMMABILE PROGETTATO
PER MUOVERE MATERIALI, OGGETTI, UTENSILI O DISPOSITIVI
SPECIALIZZATI, PER MEZZO DI MOVIMENTI VARIABILI, PROGRAMMATI
PER L'ESECUZIONE DI UNA VARIETÀ DI COMPITI.

MANIPOLATORE → MECCANISMO CHE MOVIMENTO UN OGGETTO NELLO SPAZIO
E SECONDO DELLE VOLUTE DEI COMPITI.

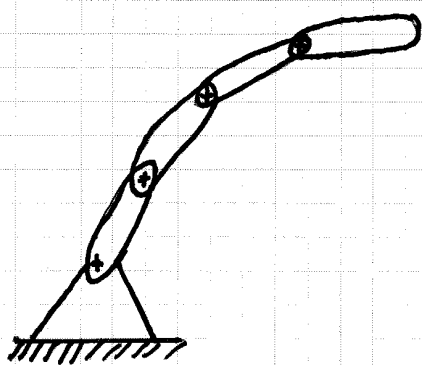
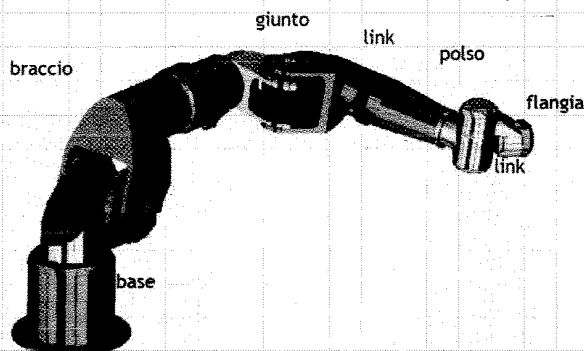
MULTIFUNZIONALE → GLI OGGETTI CHE POSSONO ESSERE MOVIMENTATI
SONO DIVERSI E SECONDO DELLE ESIGENZE

IL ROBOT DI PIÙ SE È UNO MECCANISMO LA CUI FUNZIONE È QUELLA
DI MUOVERE QUALCOSA.

LA MOVIMENTAZIONE È FATTA UN ROBOT PROGRAMMABILE, CON
MOVIMENTI VARIABILI, CON IL ROBOT CHE È IN GRADO DI PERCEPERE
CIÒ CHE ACCADE INTORNO A SE STESSO, CON CAPACITÀ DI
APPROSSIMARSI.

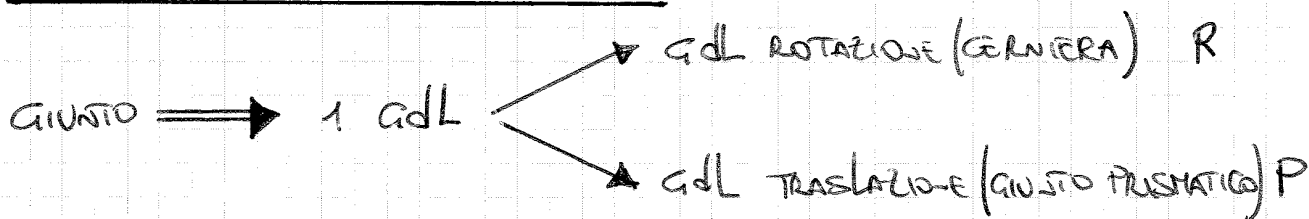
ROBOT - SISTEMA MECCANICO

il robot industriale è normalmente un braccio (manipolatore) costituito da una serie di corpi rigidi, connessi da giunti. Un'estremità della catena (primo link), è costituita da una BASE, di norma fissata a terra (interfaccia tra robot ed elemento di supporto)



All'ultimo link è presente una FLANGIA TERMINALE cui si collega il cosiddetto END EFFECTOR (organo terminale del braccio)

la capacità di movimento è legata alla presenza dei giunti: OGNI GIUNTO È UN GrL del robot

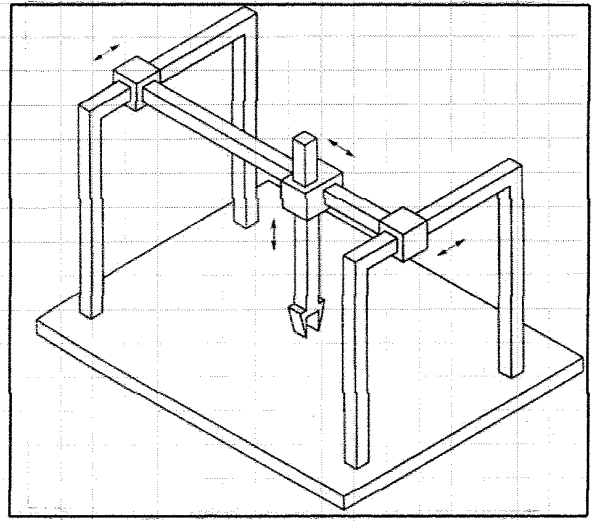


il numero di giunti ne dice il numero di GrL dell'intero

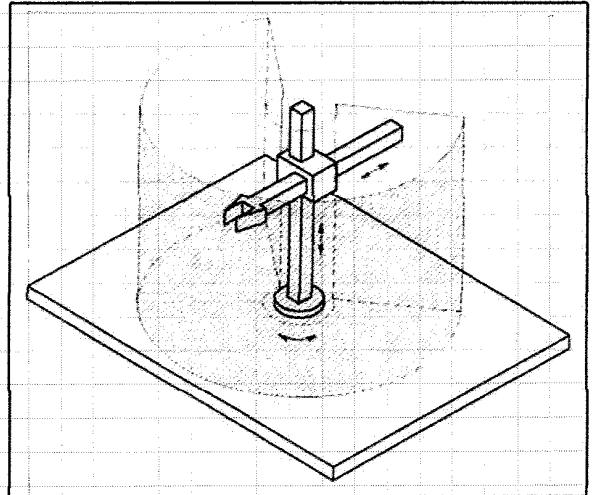
SISTEMA MECCANICO

lo spostamento di un qualunque oggetto nello spazio richiede 6 GrL (3 GrL POSIZIONE, 3 GrL ORIENTAZIONE): normalmente si posiziona separando le porte di posizionamento da quelle di orientamento

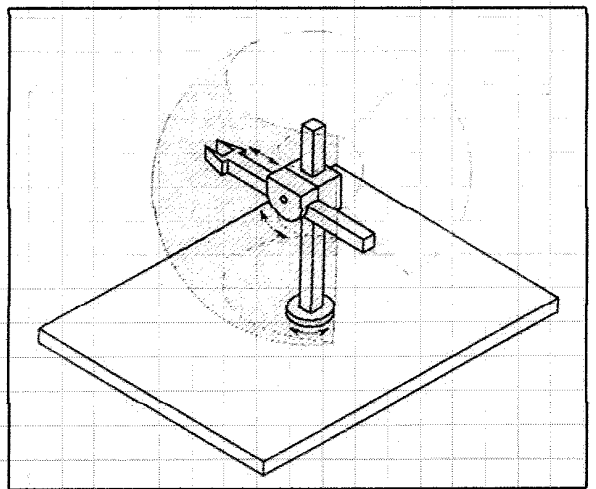
ROBOT CARTESIANO A PORTALE (PPP)
3 GdL pneumatica
In questo caso l'accesso è dall'alto.



Robot cilindrico
il primo giunto pneumatico è sostituito da un giunto robotico



Robot (RPP)
lo spazio di lavoro è una porzione di cilindro
facile controllo della posizione dell'ens effettore del braccio
in coordinate cilindriche



Robot Sferico o Polare
È un robot di tipo RPP: due giunti di rotazione con 2 assi ortogonali Tra loro più giunto pneumatico.

il volume di lavoro è una porzione di sfera.

Robot tipo n.c.d.s.

3-10-2012

Riprendendo, il robot è una serie di corpi rigidi, collegati fra loro da un certo numero di giunti, caratterizzati ciascuno da 1 gdl, al fine di muovere il cosiddetto END EFFECTOR.

Si distinguono

- ROBOT CARTESIANO RETTANGOLARE
- ROBOT CARTESIANO A PORTALE
- ROBOT CILINDRICO
- ROBOT SFERICO
- ROBOT SCARA
- ROBOT ARTICOLATO

Applicazioni industriali:

- MANIPOLAZIONE
- PALETTIZZAZIONE
- ASSEMBLAGGIO
- SALDATURA
- RETTIFICA (AUSILIO ALLE MACCHINE)
- VERNICIATURA

In operazioni, per esempio di rettifica, si presentano due problemi nel controllo della posizione e della trazione, ma soprattutto problemi legati allo scambio di forze.

Tipicamente, come già detto, i robot vanno a lavorare in zone isolate, in gabbie, in celle isolate da protezione sensorizzate, in modo che non si abbia un'interazione fra robot e uomo.

Nei processi di verniciatura il robot segue una traiettoria con configurazioni differenti al fine di depositare le

la stessa teleoperazione può essere fatta, nelle operazioni più evolute, sfruttando due macchine che possono avere strutture diverse (joystick + robot).

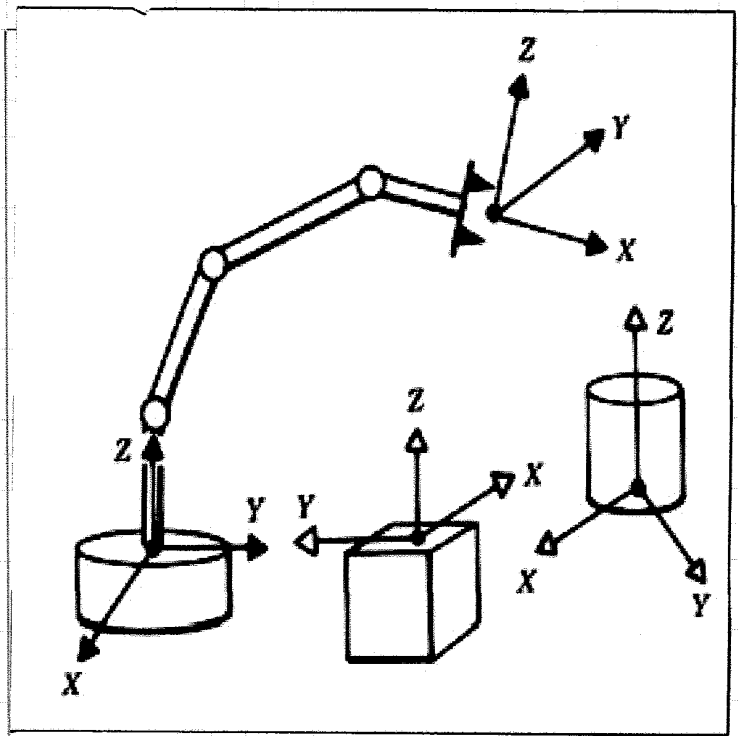
SISTEMI DI RIFERIMENTO

Considerando un robot seriale, occorre far riferimento ad una serie di strumenti. Attualmente, i robot sono controllati da hardware non proprio recenti rispetto agli ultimi processori.

Tutti gli strumenti di analisi sono legati ad un'implementazione numerica.

Tutti gli oggetti sono caratterizzati da un sistema di riferimento e da un'origine, in modo da poter descrivere posizione e orientazione dell'oggetto.

Segue quindi lo studio cinematico della struttura. Quindi come cambiano posizione e orientazione, indipendentemente dalle cause mettendo a confronto sia il punto di vista dello stesso robot, sia il punto di vista dell'end effector.



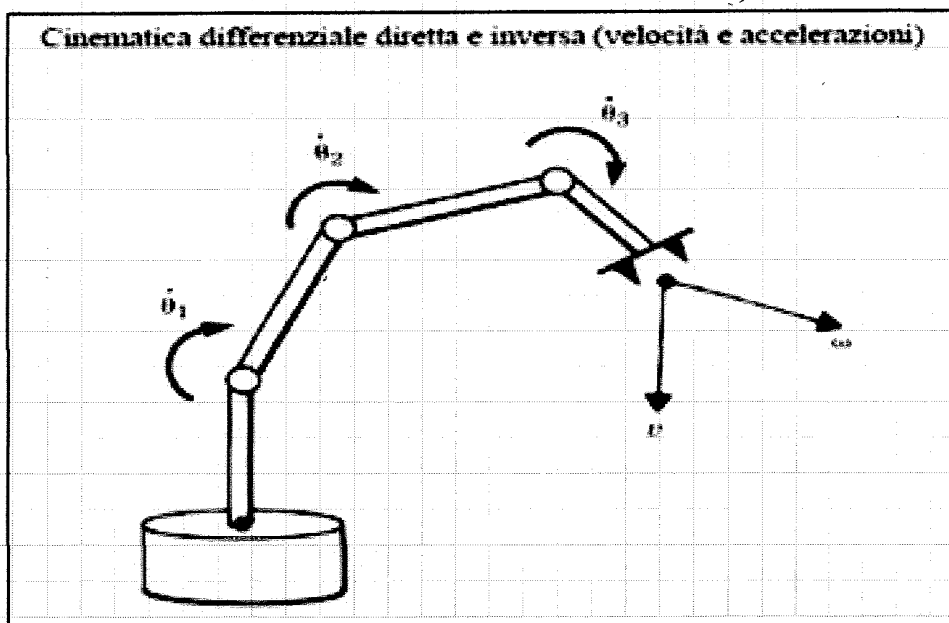
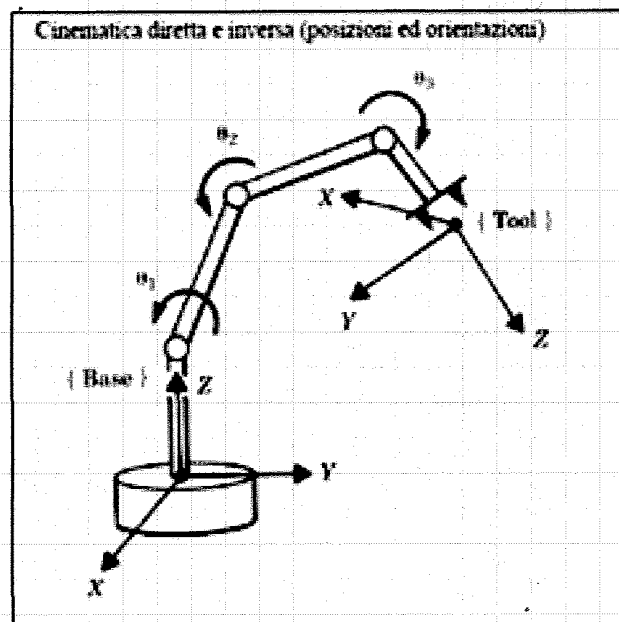
INDIVIDUO QUINDI

- SPAZIO GIUNTI

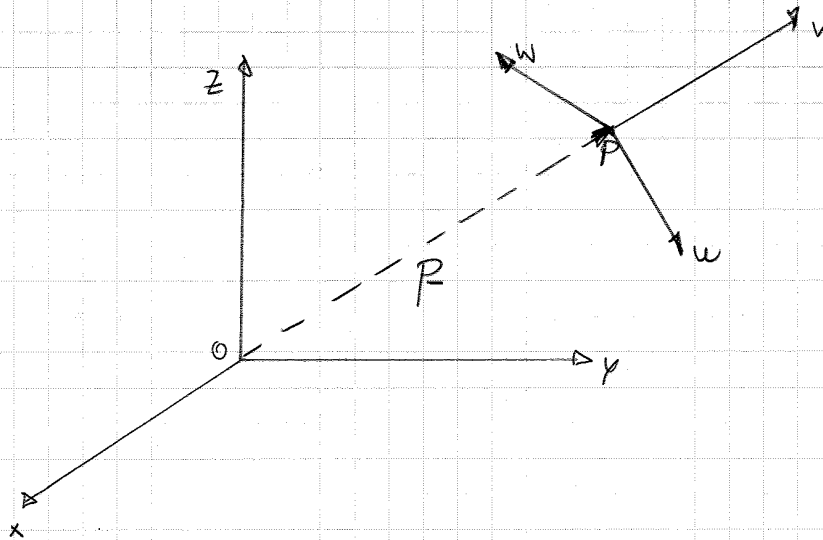
lo spazio i cui elementi contiene informazioni di giunto - è lo spazio in cui ci sono gli n gradi di libertà in base alla struttura.

Segue quindi l'EQUILIBRIO DINAMICO, tenendo in considerazione però anche l'EQUILIBRIO STATICO, analizzando quindi le COPPIE CHE AGISCONO SUI GIUNTI ROTANTI.

Altra informazione consiste nel PIANIFICARE LA TRAIETTORIA CHE IL ROBOT DEVE COMPIERE, considerando sempre la dualità spazio giunti - spazio operativo, definendo quindi delle leggi nel tempo di come vengono i qdL nello spazio operativo



SISTEMI DI RIFERIMENTO



Qualunque sia il corpo posso considerarlo su di esso un'origine e un sistema cartesiano per poter definire la sua posizione/orientazione rispetto a un qualcosa

Distinguiamo

<u>Sdf 0 (zero)</u>	→	ORIGINE	O
(Sdf fisso)		ASSI	x y z
		VERSORE	<u>i</u> <u>j</u> <u>k</u>

<u>Sdf i</u>	→	ORIGINE	P
		ASSI	u v w
		VERSORE	<u>i</u> <u>u</u> <u>v</u>

■ POSIZIONE

la posizione del punto P rispetto a xyz sarà

$$P = P_x \underline{i} + P_y \underline{j} + P_z \underline{k}$$

vettore posizione

$${}^0_P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

→ APICE CHE ESPRIME la posizione del punto P NEL SDF 0

Sdf 0 \longrightarrow Sdf i

ORIENTAZIONE

L'orientazione di Sdf 0 rispetto a Sdf i è fatta come in precedenza

$$\underline{i} = C_{xu} \underline{u} + C_{xv} \underline{v} + C_{xw} \underline{w}$$

$$\underline{j} = C_{yu} \underline{u} + C_{yv} \underline{v} + C_{yw} \underline{w}$$

$$\underline{k} = C_{zu} \underline{u} + C_{zv} \underline{v} + C_{zw} \underline{w}$$

considerando che il coseno compreso tra $X \in U$ è lo stesso compreso tra $U \in X$ allora $C_{ux} = C_{xu}$ si determina così la matrice di rotazioni del Sdf 0 rispetto al Sdf i:

$${}^i A_0 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}^T \\ \underline{v}^T \\ \underline{w}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ux} & C_{uy} & C_{uz} \\ C_{vx} & C_{vy} & C_{vz} \\ C_{wx} & C_{wy} & C_{wz} \end{bmatrix} = {}^0 A_i^T = {}^0 A_i^{-1}$$

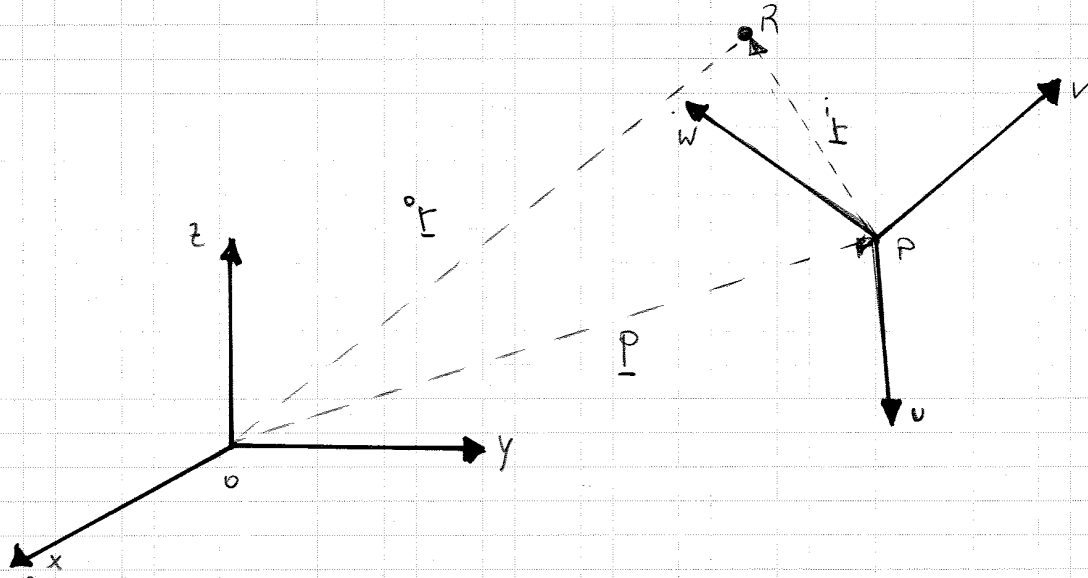
risulta che ${}^i A_0$ è trasposta rispetto a ${}^0 A_i$: questo aspetto è legato alle orot.

Essendo la matrice ${}^0 A_i$ ortogonale, la sua trasposta è anche la sua inversa

$$\boxed{{}^i A_0 = {}^0 A_i^T = {}^0 A_i^{-1}}$$

8-10-2012

nel caso di sistemi distanti nello spazio si usano
termini di posizioni che di orientazioni chiamano
e definire le cos. delle NOTAZIONE DI COORDINATE OMOGENEA



il punto R avrà una posizione differente rispetto al Sdf 0
e rispetto al Sdf i

I due vettori posizione sono chiaramente distinti

$${}^0 \underline{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$$

$${}^i \underline{r} = [r_u \ r_v \ r_w]^T \quad \text{vettore definito rispetto al Sdf i}$$

vale

$$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR}$$



SOMME DI TRE FLECCHE NELLO
SPAZIO CHE NON SI UFFERISCONO
A NESSUN SDF

POSSO QUINDI SCRIVERE, SCEGLIENDO DI LEVARE NEL Sdf 0

$$\boxed{{}^0 \underline{r} = {}^0 \underline{p} + A_i \cdot {}^i \underline{r}}$$

A partire dalla matrice ortogonale cerco di scrivere il vettore unitario
 noto \hat{F} , voglio conoscere \hat{F}

$$\hat{F} = \hat{A}_0 \cdot \hat{F}$$

Devo quindi determinare \hat{A}_0 , nota \hat{A}_i

Moltiplicando l'espressione iniziale $\hat{F} = \hat{A}_i \cdot \hat{F}$
 per l'inversa \hat{A}_i^{-1}

$$\hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{F} = \hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{A}_i \cdot \hat{F} \rightarrow \hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{F} = \hat{I} \cdot \hat{F}$$

trovando quindi

$$\hat{F} = \hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{F} \rightarrow \hat{F} = \hat{A}_0 \cdot \hat{F} \quad \hat{A}_i^{-1} = \hat{A}_0$$

In questo caso però \hat{A}_i non è una matrice ortogonale
 tale per cui $\hat{A}_i^{-1} \neq \hat{A}_i^T$

$$\hat{A}_0 = \hat{A}_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_i^T & -\hat{A}_i^T \cdot \hat{F} \\ \hline \underline{0^T} & 1 \end{array} \right] \quad \text{vado a dimostrarlo!}$$

per trovare la matrice inversa, ricordando $A \cdot A^{-1} = [I]$
 (matrice identità), posso scrivere

$$\hat{A}_i \cdot \hat{A}_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_i & \hat{F} \\ \hline \underline{0^T} & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline \underline{0^T} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & \underline{0} \\ \hline \underline{0^T} & 1 \end{array} \right]$$

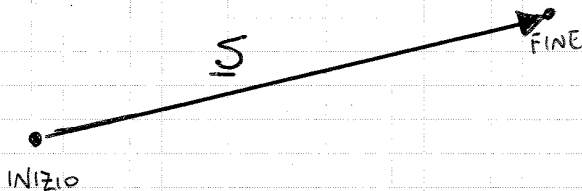
Le notazioni quindi mi permette di scrivere

$$\begin{aligned} \hat{r}^1 = \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2 \cdot \dots \cdot \hat{A}_n \cdot \hat{r}^n \\ \hat{A}_n = \prod_{i=1}^{i=n} \hat{A}_i \end{aligned}$$

OPERATORI DI TRASLAZIONE E ROTAZIONE

Uno qualunque cambiamento di posizioni/orientazioni può essere espresso attraverso una ROTOTRASLAZIONE CHE VIENE ESPRESSO attraverso una COMBINAZIONE DI MATRICI

TRASLAZIONE → CAMBIAMENTO di posizioni del Sdf
con l'orientazione degli assi che
PERÒ non vanno



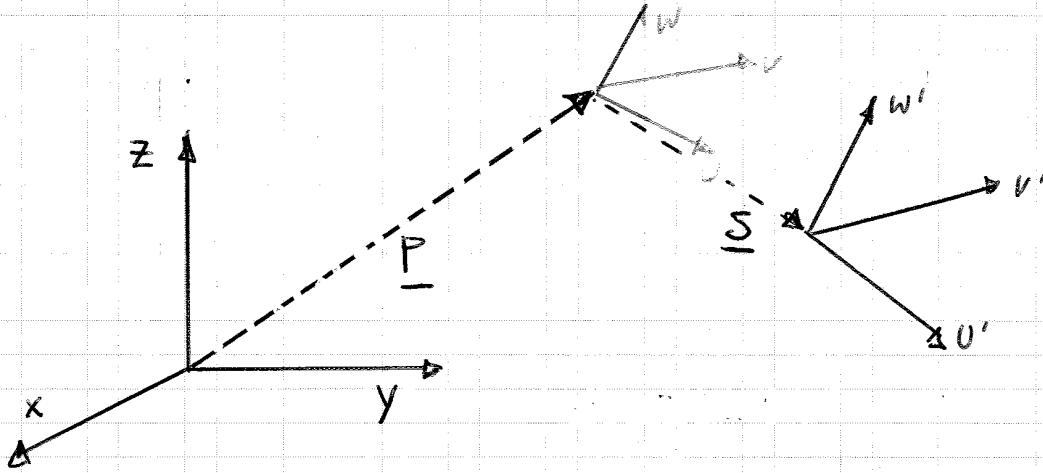
l'informazione di regolazione è legata ad un vettore \underline{S} di componenti $S_x S_y S_z$

$$\underline{S} = [S_x S_y S_z]^T$$

DEFINISCO quindi l'operatore di traslazione rappresentato dalla matrice $Tr\hat{o}s(S)$

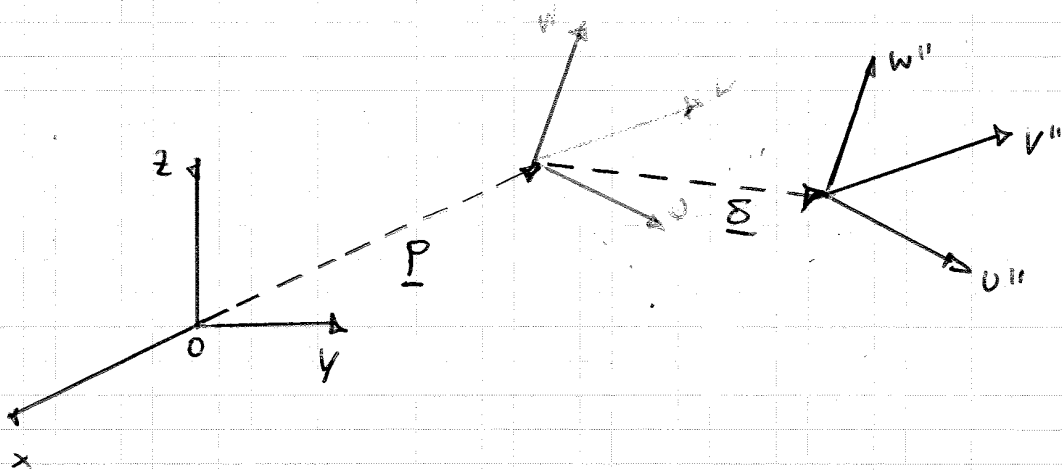
confrontando ${}^0\hat{A}_i$ e ${}^0\hat{B}_i$, l'orientazione è invariata, come la posizione dell'origine

$\underline{P} + \underline{S}$ rappresenta la nuova posizione del sdt i, con \underline{S} interpretato nel sdt 0.



POSTMOLTIPLICAZIONE

$${}^0\hat{B}_i = {}^0\hat{A}_i \cdot \hat{T} = \begin{bmatrix} {}^0\hat{A}_i & \underline{P} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{S} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\hat{A}_i & \underline{A}_i \underline{S} + \underline{P} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

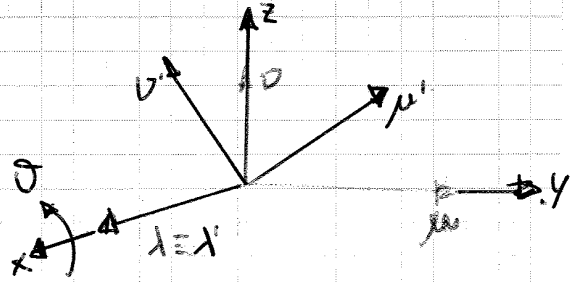


a \underline{P} si va ad aggiungere ${}^0\hat{A}_i \underline{S}$ che ~~è interpretato~~ sono interpretati nel sdt i e ipotizzati nel sdt 0

ROTAZIONE

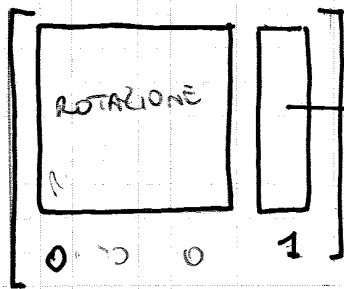
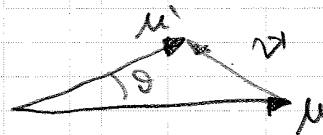
ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE COINCIDENTE CON UN ASSE DEL SDR.

DEFINISCO 3 OPERATORI di base riferiti alla rotazione rispetto ad un asse del sdr



$$\hat{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu' \\ \nu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$



SPOSTAMENTO RISPETTO ALL'ORIGINE

$$\hat{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

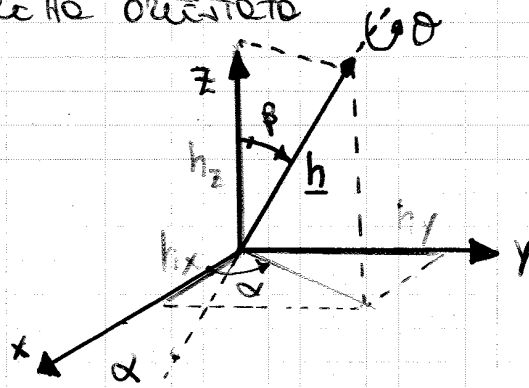
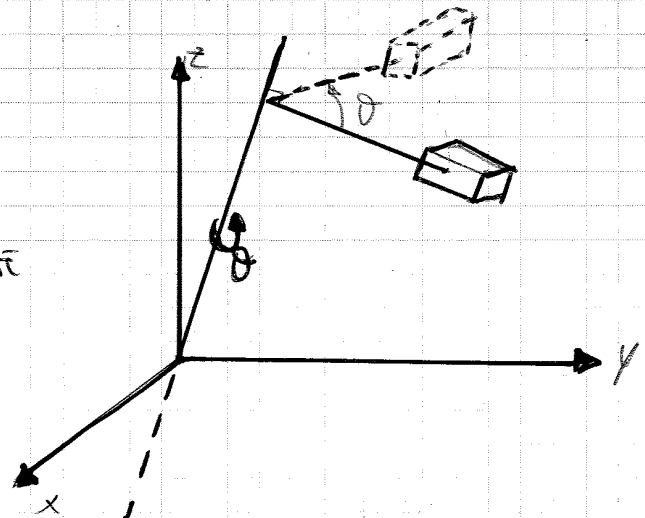
ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE GENERICO
 CONDIZIONE DI ROTAZIONE
 ATTORNO AD UN ASSE GENERICO
 CHE PASSA PER L'ORIGINE DEL SRT

VEDO QUINDI E DEFINIRE L'OPERATORE

$$\hat{R}_{ot}(\underline{h}, \theta)$$

$$\text{con } \underline{h} = [h_x \ h_y \ h_z]^T$$

VECTORE DELLA ZELLA ORIENTATA



SOSTANZIALMENTE, CONDIZIONE CHE LE ROTAZIONI
 ATTORNO AD UN ASSE DEL SRT È NOTA, LA PRIMA
 OPERAZIONE È QUELLA DI RIPORRE L'ASSE GENERICO SULL'ASSE
DEL SRT, ESEGUIRE QUINDI LE ROTAZIONI RISPETTO ALL'ASSE
DEL SRT DI UN ANGOLO θ , E ULTIME RIPORRE
L'OPERAZIONE INVERSA L'ASSE GENERICO NELLE SUE POSIZIONI
INIZIALI

$${}^0\hat{B}_i = \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \text{Rot}(z, \theta) \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \cdot {}^0\hat{A}_i$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Rot}(\underline{h}, \theta)}$$

15-10-2012

In alcuni casi, ci sono in una situazione in cui sono conosciute la struttura iniziale e la struttura finale e all'inverso la rotazione di rotazione dobbiamo spostarci dall'inizio alla fine.

Supponiamo che sia nota la rotazione di rotazione: da questo si vogliono conoscere il vettore h e l'angolo θ .

PROBLEMA INVERSO

$$\hat{A}(\theta, h)$$



$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} \right) \quad (\theta_1, \theta_2 = -\theta_1)$$

$$\sin \theta \neq 0 \rightarrow h = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix} \quad (h_1, h_2 = -h_1)$$

NUMERICAMENTE QUINDI SI HA UNA MOLTIPLICITÀ DI SOLUZIONI.

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ \rightarrow \text{NON SI HA NESSUNA ROTAZIONE}$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$h_x = \pm \sqrt{\frac{R_{11} + 1}{2}}$$

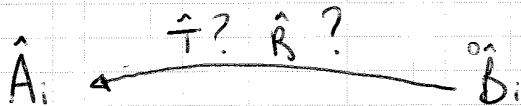
SI PARLA DI SINCOLARITÀ IN CUI LA SOLUZIONE GENERICA NON È

$\hat{R} \hat{T} \hat{A}_i = \hat{B}_i$ \longrightarrow MOVIMENTI RISPETTO AL SRT 0

$\hat{R} \hat{A}_i \hat{T} = \hat{B}_i$ \longrightarrow \hat{T} ESPRESSO RISPETTO AL SRT LOCALE
 \hat{R} ESPRESSO RISPETTO AL SRT FISSO

la configurazione finale sarà differente nei 2 casi.

Con il riferimento invertito, nota la configurazione iniziale \hat{A}_i e la configurazione finale \hat{B}_i , queste sono legate da una determinata rototraslazione: l'obbiettivo è quindi quello di determinare $\hat{T} \hat{R}$.



analogamente al sistema precedente, a seconda del SRT che si sceglie rispetto al quale esprimere \hat{T} e \hat{R} andrò ad individuare differenti configurazioni.

Fondamentale è ricordare che le matrici sono matrici omogenee, caratterizzate da blocchi 3×3 e 3×1 .

Le generiche rotazioni del sdT corpo è ottenute applicando una successione di rotazioni:

- rotazione al terzo asse del corpo - DEFINISCO un primo angolo ψ
- rotazione di primo asse del corpo conseguente alla prima rotazione di un angolo di ampiezza θ .
- rotazione attorno al terzo asse del corpo conseguente alle prime due rotazioni, di un'ampiezza φ

Imponendo (φ, θ, ψ) posso ottenere una qualunque orientazione del sistema corpo rispetto allo spazio, con φ, θ, ψ indipendenti.

in TERMINI MATRICIALI

$${}^0R_{\text{Body}}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \varphi) \cdot \text{Rot}(x, \theta) \cdot \text{Rot}(z, \psi)$$

$${}^0R_{\text{Body}} = \begin{bmatrix} c\varphi \cdot c\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta \\ s\varphi \cdot c\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -s\varphi \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & -c\varphi \cdot s\theta \\ s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

Le angoli di eulero sono rappresentati sotto forma di funzioni trigonometriche

Combinando i valori di (φ, θ, ψ) posso ottenere una qualunque rotazione del sistema corpo rispetto al sistema fisso.

NOTO QUINDI L'angolo θ si ottengono un modo unico

$$\theta_2 \rightarrow \begin{cases} \varphi_2 = \text{Atan2}(R_{13}/s\theta_2, -R_{23}/s\theta_2) \\ \psi_2 = \text{Atan2}(R_{31}/s\theta_2, R_{32}/s\theta_2) \end{cases}$$

$$\theta_2 = -\theta_2 \rightarrow \begin{cases} \varphi_2 = \text{Atan2}(R_{13}/s\theta_2, -R_{23}/s\theta_2) \\ \psi_2 = \text{Atan2}(R_{31}/s\theta_2, R_{32}/s\theta_2) \end{cases}$$

QUESTO SE $\sin \theta \neq 0 \quad (R_{33} \neq \pm 1)$

SI AVRE QUINDI UNA MOLTEPLICITÀ 2

- SITUAZIONE SINGOLARE $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, 180^\circ$
 $\cos \theta = 1$

$$\varphi + \psi = \text{Atan2}(R_{21}, R_{11}) \quad \text{PER } \theta = 0$$

$$\varphi - \psi = \text{Atan2}(R_{21}, R_{11}) \quad \text{PER } \theta = 180^\circ$$

SI HANNO infiniti valori per i 2 angoli φ, ψ , PUNTCHÈ
 IPOTESI θ , SIANO RISPETTO LE SOMME/DIFFERENZA

VELOCITÀ ANGOLARE $\underline{\omega}$

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}_0 + \dot{\theta} \underline{i}_2 + \dot{\psi} \underline{k}_2$$

$\underline{\omega}$ rappresenta le variazioni di orientazioni del corpo nel tempo rispetto al sdt cui ci si riferisce (può essere sia fisso ($\underline{\omega}$ assoluta) o mobili ($\underline{\omega}$ relativa))

Considerata un $\underline{\omega}$ assoluta, riferita quindi rispetto a un sdt fisso $[xyz]$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T \quad \text{velocità angolare assoluta}$$

Altrimenti gli angoli di Euler, le stesse variazioni di orientazioni sono rappresentate come le derivazioni degli angoli (φ, θ, ψ) nel tempo, almeno per le assi differenti rispetto a $[xyz]$

Espressione $\underline{\omega}$ rispetto al sdt fisso k_0 od n_1, o_2 $\underline{\omega} = {}^0\underline{\omega}$ Esplicito quindi i k_2 $\underline{\omega}$ nel sdt o

$$\underline{k}_0 \quad \underline{i}_2 \quad \underline{k}_2 \quad \longrightarrow \quad \text{sdt } o$$

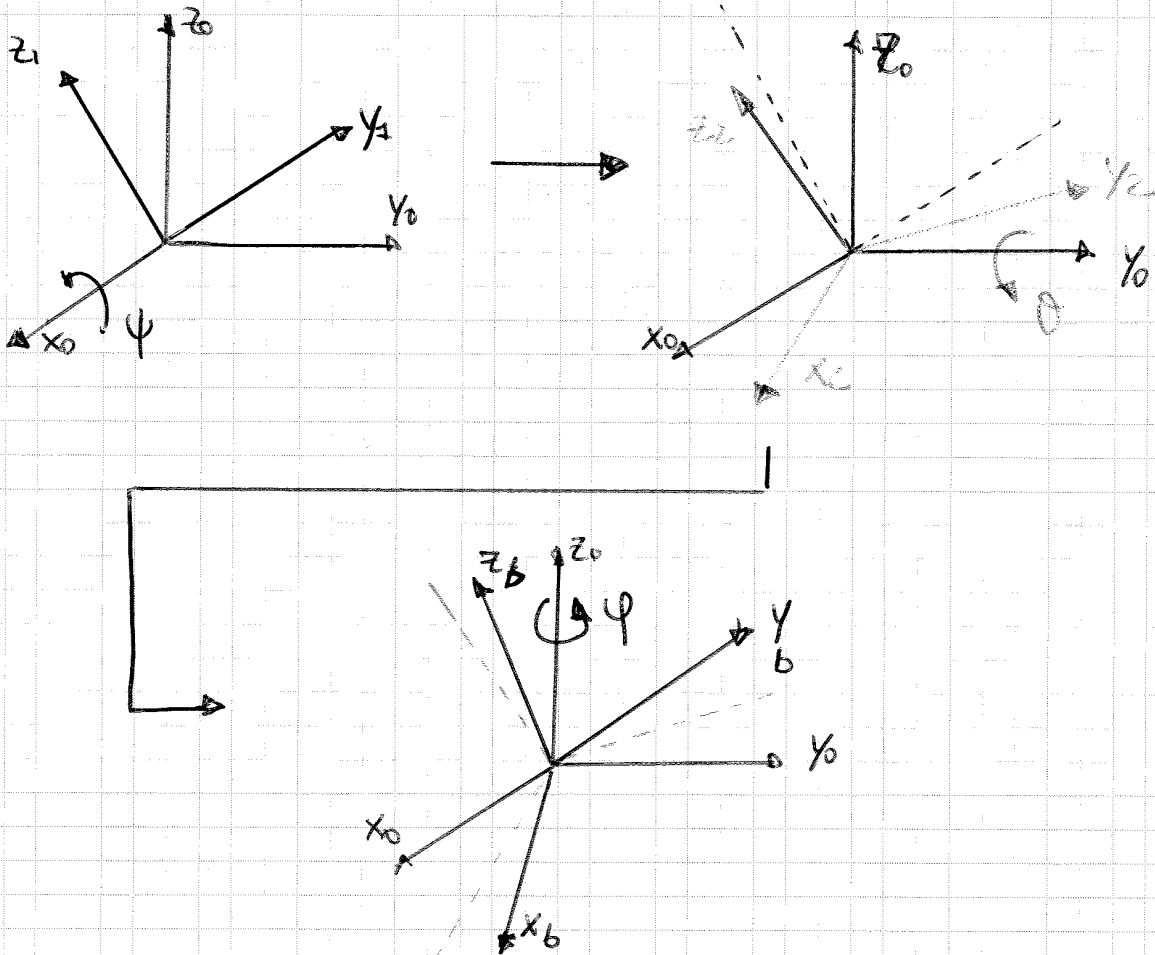
$${}^0\underline{k}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0\underline{i}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0\underline{k}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi \cos\theta & -\cos\varphi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T$$

2 RAPPRESENTAZIONE - Roll-Pitch-Yaw

ORIENTAZIONE SECONDO UNA LOGICA X Y Z : le rotazioni del corpo non è intorno ad assi solidale al corpo ma diforno al sde fisso



- 1 - rotazione intorno a X_0 di ψ
- 2 - rotazione intorno a Y_0 di θ
- 3 - rotazione intorno a Z_0 di φ

Considerate le rotazioni intorno agli assi fissi, e che ad applicare le 3 rotazioni secondo il concetto di PERMUTAZIONE



VELOCITÀ ANGOLARE

► **Angular velocity** of the body in terms of fixed-axes XYZ Euler Angles ψ ϑ ϕ :

Angular velocity of the body in terms of rotations sequence:

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{i}_0 + \dot{\vartheta} \underline{j}_0 + \dot{\phi} \underline{k}_0$$

• Units vectors along the axes of the rotations sequence resolved in fixed frame:

$$\begin{aligned} {}^0 \underline{i}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the first axis of rotation (rotation by } \psi) \\ {}^0 \underline{j}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the second axis of rotation (rotation by } \vartheta) \\ {}^0 \underline{k}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the third axis of rotation (rotation by } \phi) \end{aligned}$$

Angular velocity of the body resolved in fixed frame:

$$\begin{aligned} {}^0 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}; && \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^0 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Units vectors along the axes of the rotations sequence resolved in body frame:

$$\begin{aligned} {}^{body} \underline{i}_0 &= {}^0 R_{body}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the first axis of rotation (rotation by } \psi) \\ {}^{body} \underline{j}_0 &= {}^0 R_{body}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the second axis of rotation (rotation by } \vartheta) \\ {}^{body} \underline{k}_0 &= {}^0 R_{body}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T && \text{unit vector along the third axis of rotation (rotation by } \phi) \end{aligned}$$

Angular velocity of the body resolved in body frame:

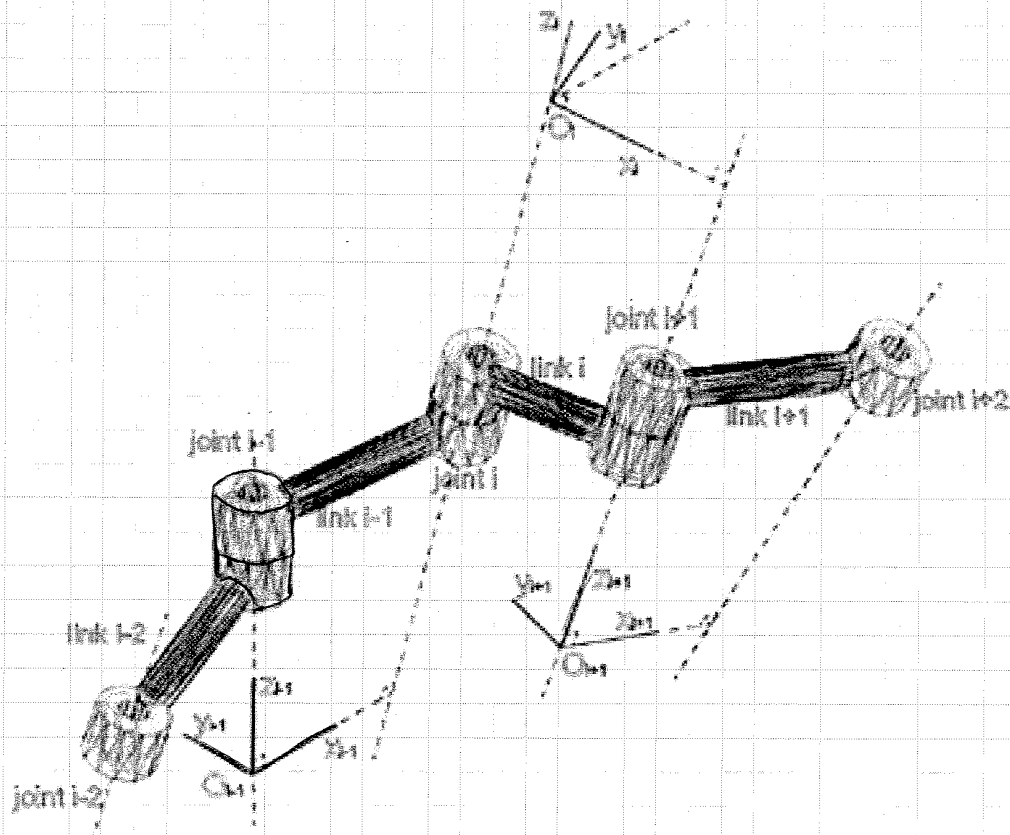
$$\begin{aligned} {}^{body} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= {}^0 R_{body}^T \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}; && \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = {}^0 R_{body} {}^{body} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

CONVENZIONE DI DENAVIT AND HARTENBERG

CONVENZIONI PER LA SCELTA DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO
 solidali e consecutivi link, basate sull'osservazione
 su come sono disposti i giunti che collegano tra loro
 i corpi.

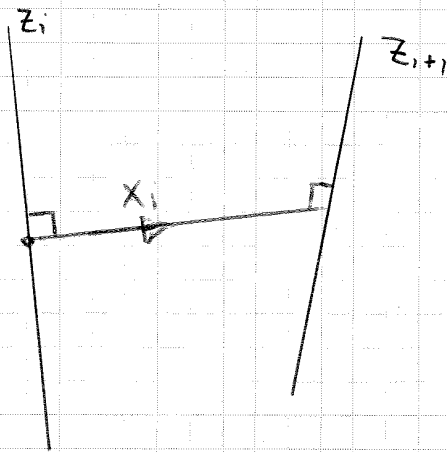
Questo approccio serve per semplificare il lavoro di
 descrizione di come un corpo (un sdt) si muove
 rispetto a quello adiacente, ometto per semplificare la
 matrice che lega il sdt_i al sdt_{i+1}.

La generale ha 12 sdt si hanno 6cdl: addelevando
 la convenzione si può esprimere un sistema rispetto
 a quello adiacente attraverso solo 4 parametri e
 in particolare uno di questi parametri risulta dipendente
 dal grado di libertà nel giunto che collega i 2 corpi.



le procedure è applicate DEFINENDO, SISTEMA DI RIFERIMENTO
di tutti i corpi ad eccezione del sdt collegato alle
base ($i=0$) e del sdt collegato all'ultimo corpo collegato
all'EE ($i=N$)

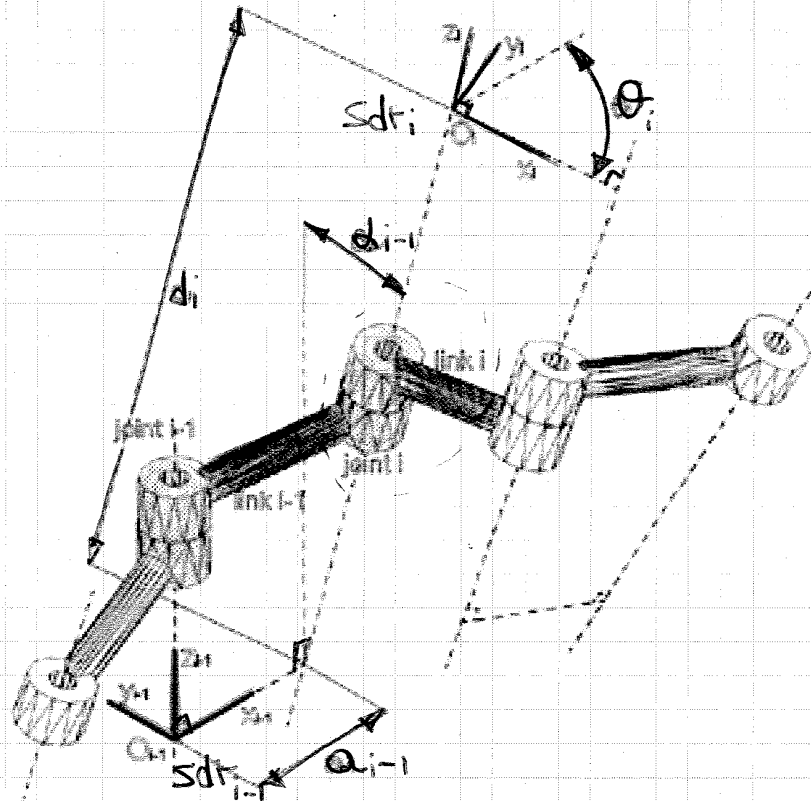
- Si sceglie l'ASSE z_i allineato con l'ASSE del GIUNTO i -ESIMO
POSITIVO NELLE DIREZIONE DEL LATO POSITIVO DEL GIUNTO STESSO.
- SCELTA dell'ORIGINE O_i del sdt
- SCELTA dell'ASSE x_i del sdt
 considerato l'ASSE z_i e z_{i+1}



considerando i due assi
SGHERBI È LA VOCA
la distanza tra i 2

si individua un punto unico sull'ASSE z_i che lo si
rappresenta l'ORIGINE O_i

individua quindi l'ASSE x_i , lungo il segmento distanza,
che parte dall'ORIGINE e sarà orientato da l'ASSE i
verso l'ASSE $i+1$



PARAMETRI

α
 a
 d
 θ

due rotazioni e due lunghezze caratterizzate
 tutte da w segno positivo

Si osserva come le grandezze siano caratterizzate da w picchi

- α_{i-1} angolo tra z_{i-1} e z_i : angolo di cui deve ruotare z_{i-1} per portarlo parallelo all'asse z_i , ruotando intorno all'asse x_{i-1} , perpendicolare ad entrambi (d_{i-1} che ha segno) angolo α_{i-1} CHIAMATO ANCHE TWIST
- a_{i-1} distanza tra z_{i-1} e z_i misurata lungo l'asse x_{i-1} nel verso positivo di x_{i-1}
 a_{i-1} NETTO OFFSET

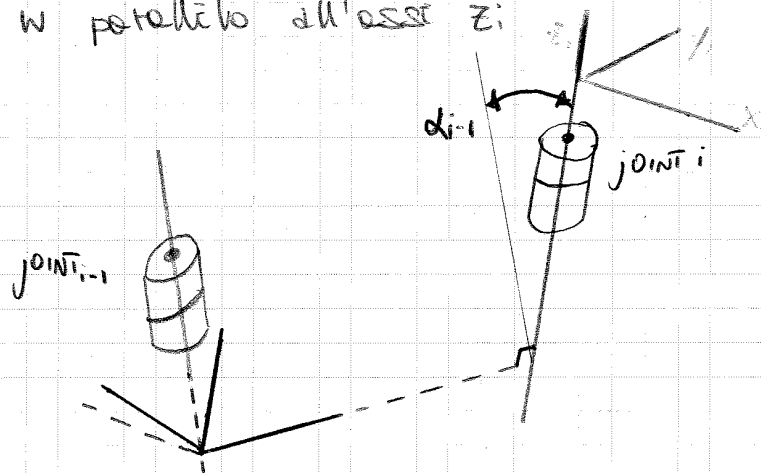
A partire dalle considerazioni fatte messo a schema le matrici di trasformazioni del Sdf_i rispetto al Sdf_{i-1} in funzione dei 4 parametri

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 parametri saranno costanti mentre 1 sarà funzione del cdl del punto

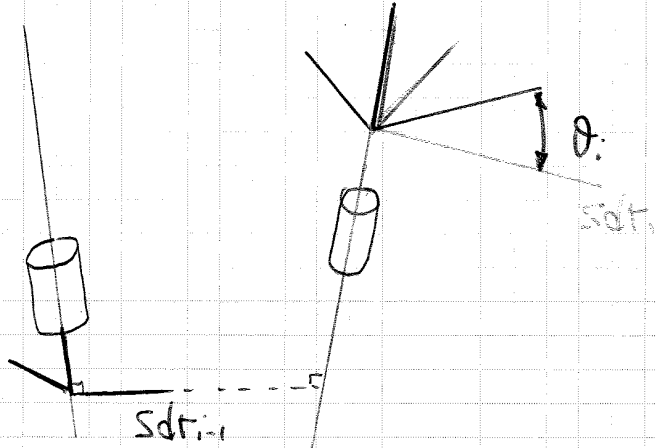
Analizzando la FKTE possiamo osservare in Sdf_{blu} e in Sdf_{verde} legati tra loro da 4 parametri: partendo dal sistema di riferimento a movimento di traslazione-rotazione, lo si sovrappone al sistema verde, determinando quindi le matrici che legano i due Sdf, facendo riferimento ad un sistema ausiliario di assi [U V W] inizialmente allineato con il Sdf_{i-1}.

- Primo movimento: rotazione del Sdf Ausiliario attorno al suo asse X (coincidente con l'asse V) di un'angolo α_{i-1} per portare l'asse W parallelo all'asse Z_i



- Quarto movimento: rotazioni del Sdf dof_i intorno all'asse w di una quantità θ_i tale da allineare l'asse w con l'asse X_i ;
il Sdf Aux va a coincidere con il Sdf;

$${}^{i-1}\hat{A}_{\text{Aux}} = {}^{i-1}\hat{A}_3 \hat{R}ot(z, \theta_i)$$



si ottiene così a determinate

$${}^{i-1}\hat{A}_{\text{Aux}} = {}^{i-1}\hat{A}_i$$

$${}^{i-1}\hat{A}_i = Rot(x, \alpha_{i-1}) \cdot Trans(x, a_{i-1}) \cdot Trans(z, d_i) \cdot Rot(z, \theta_i)$$

- Sdf 0 (base) Sdf N

Scelti i Sdf da 1 \rightarrow N, occorre determinare solo Sdf N

- **Sdf 0**: Sdf della base. la base è la struttura su cui viene applicato il robot.

Dal punto di vista del robot, conviene scegliere l'asse z_0 allineato con l'asse Z_i (o al limite sovrapposto): l'angolo

$d_{i-1} = 0$, e se sono sovrapposti $a_{i-1} = 0$.

Sempre per convenienza è opportuno scegliere l'asse $x_0 // x_1$ quando il c.d.l. nel punto giunto è nullo

ESEMPIO

SCARA Robot

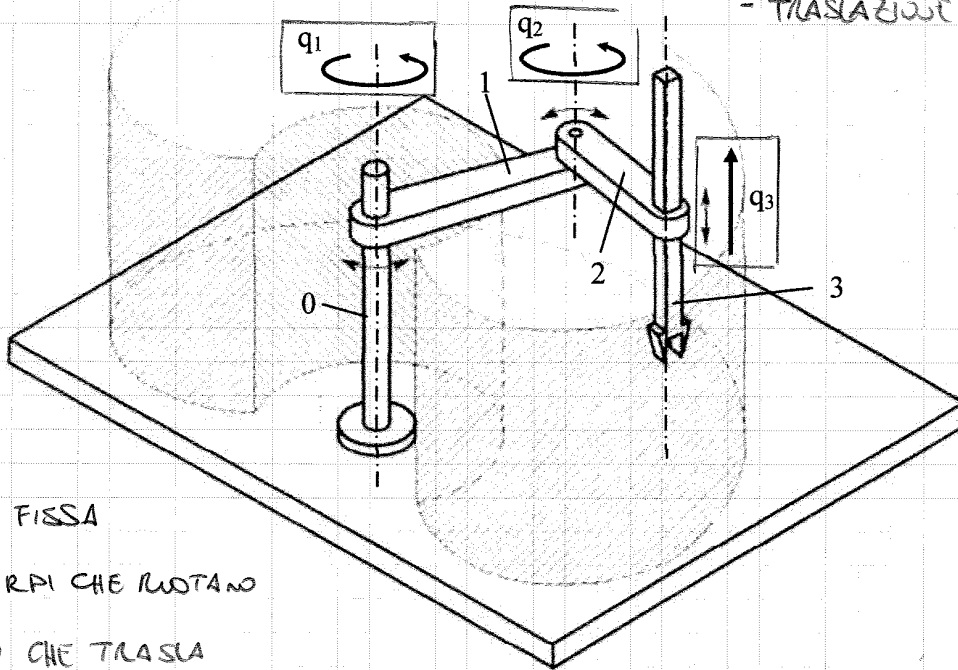
3 cdl

3 ASSI PARALLELI TRA LORO

- ROTAZIONE

- ROTAZIONE

- TRASLAZIONE

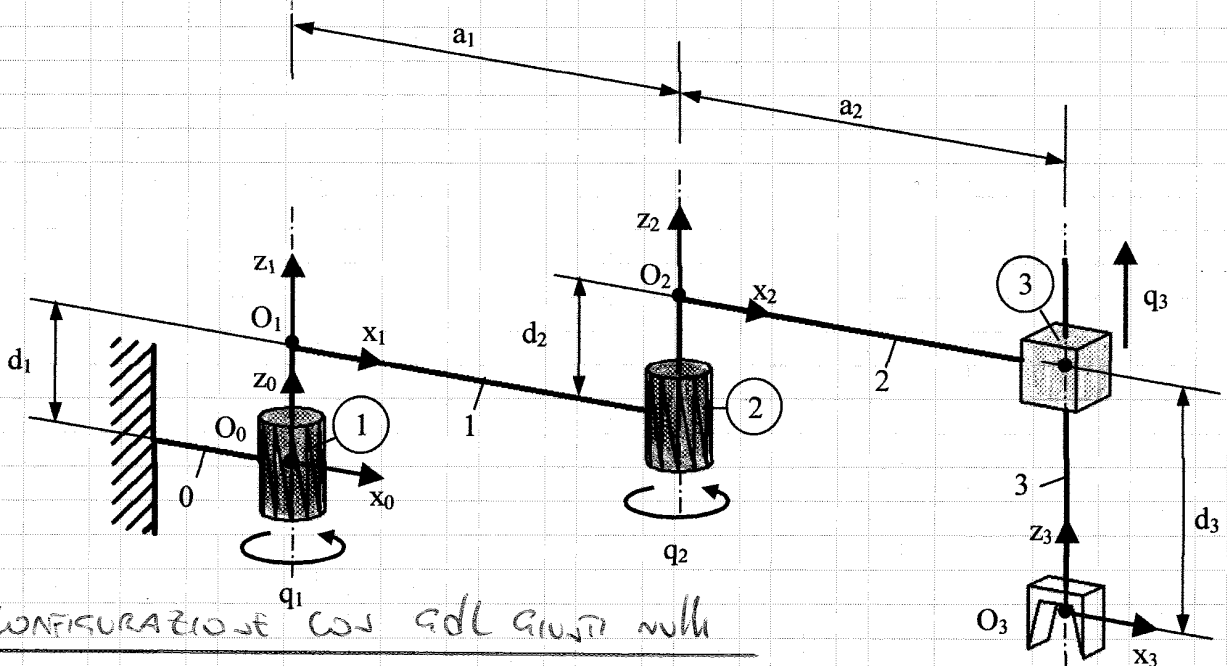


0 - BASE FISSA

1 - 2 - CORPI CHE RUOTANO

3 CORPO CHE TRASLA

DALLA FIGURA INDIVIDUO SUBITO IL VERSO POSITIVO DEI qdl q_i (cdl CHE SONO SEMPRE RELATIVI A UN GIUNTO RISPETTO AL PRECEDENTE)



CONFIGURAZIONE CON qdl giunti nulli

Sdf 0: supponso di non avere vincoli
 scelgo z_0 tale che $z_0 \parallel z_1$ (sommapposto)
 l'origine O_0 lo passo al centro del giunto, in modo da poter
 riportare anche l'altezza relativa al corpo zero.
 Considerando il cdl di rotazione nel giunto 1, è
 conveniente scegliere $x_0 \parallel x_1$ nelle configurazioni di
 cdl nullo
 in questo modo individuo il Sdf0 senza considerare
 nessun vincolo esterno, ma basandomi solo sul braccio del robot.

Supponiamo di aver vincoli esterni:

- origine del Sdf0 imposto in un punto differente
- $z_0 \parallel z_2 \rightarrow$ l'angolo di twist è nullo
- nella scelta di x_0 non posso considerare $x_0 \parallel x_1$
 in quanto se facessi queste scelte nella configurazione
 nulle, x_0 non andrebbe a incrociare z_2 per
 cui non riuscirei di spostarmi da $0 \rightarrow 1$ secondo
 i momenti di D-H
 in questo caso conviene prendere x_0 lungo le normali
 a $z_0 - z_2$

Supponiamo che il Sdf0 sia già imposto $Sdf_a \equiv Sdf_b$:
 in questo caso la matrice ${}^1\hat{A}_b$ non può essere scelta
 ottenendo le logice di D-H:

Costruisco una tabella

	α	a	d	θ
LINK				

Considerando che la figura si trova in una configurazione iniziale con $\alpha = 0$, la tabella viene costruita in una configurazione generica

LINK 1 $\rightarrow \hat{A}_0 \rightarrow$ sulle 1 usce complete q_1

$\alpha \rightarrow$ rotazione intorno di X per portare $Z_0 \rightarrow Z_1$
 $\hookrightarrow \alpha = 0$

$a \rightarrow$ traslazione lungo X per portare sovrapposto $Z_0 \rightarrow Z_1$
 $\hookrightarrow a = 0$

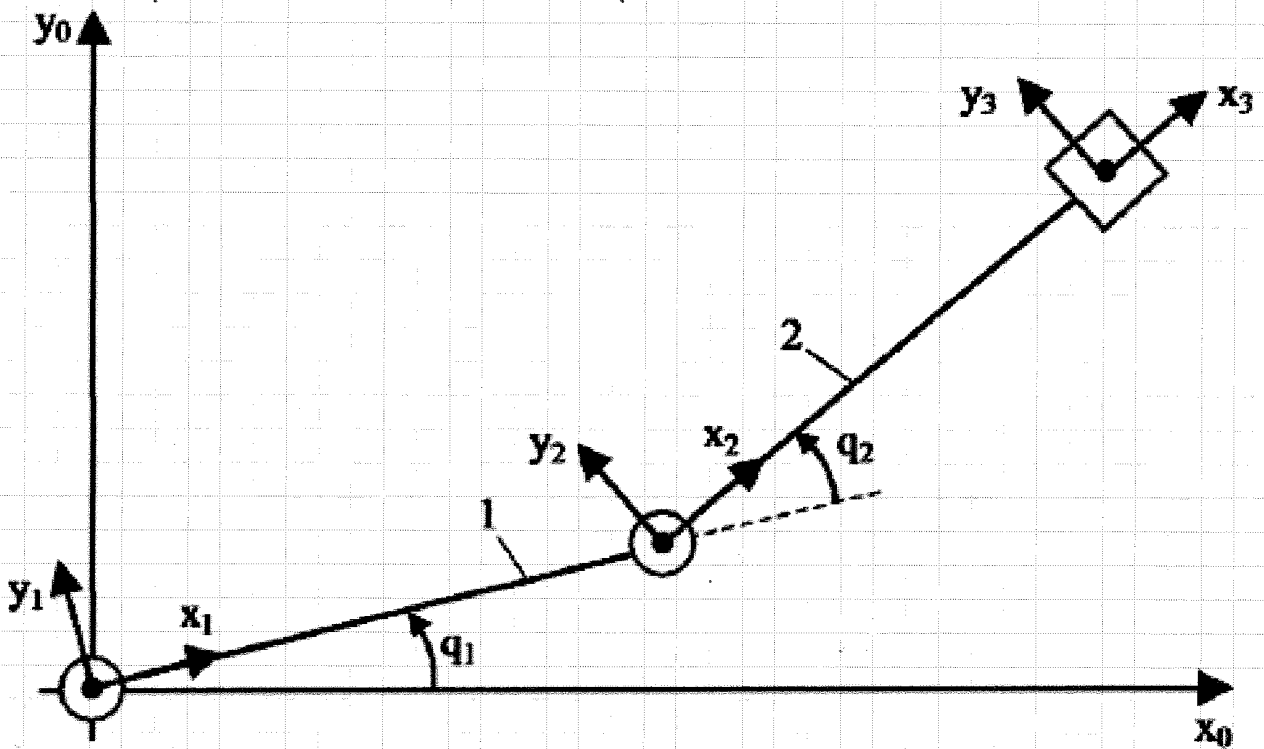
$d \rightarrow$ traslazione lungo l'asse Z_1 per portare $O_0 \rightarrow O_1$
 $d = d_1$

$\theta \rightarrow$ rotazione intorno di Z_1 per fare in modo che X_0 vada a sovrapporsi a X_1 .
 \hookrightarrow nel caso generico $\theta = q_1$

$${}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non quindi ${}^0\hat{A}_3 = {}^0\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3$ è quindi le configurazioni corse in figura.

le soluzioni è le soluzioni di cinematica DIRETTA: dallo spazio giusti si trova posizione/orientazione E.E.



la struttura delle reti è finale è un luogo. Nello problema di cinematica inversa punto dell'informazione di corse e posizionato/orientato il Sott dell'EE legando le informazioni di posizione/orientazione ai cdi dei giusti.

la posizione del centro polso è funzione solo dei giunti ① ② ③ e quindi funzione del braccio.

Complessivamente si hanno 6 gdl (tutte rotazioni):

- con i primi 3 gdl posso posizionare il centro polso
- con i secondi 3 gdl posiziono l'END EFFECTOR

SISTEMI DI RIFERIMENTO

- Individuo i corpi $0 \rightarrow 6$
- Individuo i giunti $1 \rightarrow 6$
- Individuo le rotazioni σ_i imponendo il verso positivo e, secondo il metodo della mano destra, individuo l'asse Z_i

la configurazione risolta rappresenta la configurazione di riferimento con i gdl che hanno valore nullo

- Individuo l'orientazione dell'asse X_1 che è perpendicolare agli assi Z_1 e Z_2 (che sono incidenti)
 $X_0 \equiv X_1 \equiv X_2$

- Individuo X_3 (Z_3 e Z_4 sono assi scembi) - scelta univoca
- Individuo $X_4 \equiv X_5$
- Individuo X_6

Gli spazi che rendono legati ha loro sono

vettori gdl nello spazio NEI GIUNTI

$$\underline{q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]$$

vettori di posizione generalizzata nell'E.E.

$$\underline{p}_6 = [x_6 \ y_6 \ z_6 \ \psi \ \chi \ \psi]$$

NOTE: LE MOTRICI IO POSSO CONOSCERE LA CINEMATICA DIRETTA DETERMINANDO COSÌ LA POSIZIONE DELL'END-EFFECTOR 6 ~~IN~~ RISPETTO AL SDR 0.

CINEMATICA INVERSA

A PARTIRE DALLE COORDINATE $[x_6 \ y_6 \ z_6]^T$ E $[\psi \ \chi \ \varphi]^T$ QUALI COORDINATE $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]$ DEVO ASSEGNARE?

DEVO ASSEGNARE $[x_6 \ y_6 \ z_6]^T$ COMPATIBILMENTE CON LE POSIZIONI CHE SI POSSONO RAGGIUNGERE

NELLO SPAZIO OPERATIVO, COSÌ DENOMINATO UN ROBOT ARTICOLATO, È DIFFICILE IDENTIFICARE LE POSIZIONI/ORIENTAZIONI PER LE QUALI È POSSIBILE RAGGIUNGERE.

UN ROBOT CHE HA A SEMPLIFICAZIONE L'APPROCCIO È QUELLO DI CONSIDERARE CHE SI HA A CHE FARE CON UN POLSO SFERICO:

- POSSO SEPARARE L'ORIENTAMENTO DAL POSIZIONAMENTO
- MI SPO A RISOLVERE IL PROBLEMA IN FORMA CHIUSA

SOLUZIONE

1. determinazione della matrice di posizione/orientazione dell'end effector 0A_6 (NOTO 0P_6)
2. calcolo della posizione del centro polso 0P_4 .
3. soluzione del problema di cinematica inversa del braccio articolato con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 1, 2, 3 $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$. (QUESTO PERCHÉ SI HA A CHE FARE CON UN POLSO SFERICO - $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ NON DIPENDONO DA $\theta_4, \theta_5, \theta_6$)
4. calcolo della matrice di posizione/orientazione del sistema di riferimento 3A_3 .
5. calcolo della matrice di posizione/orientazione dell'end effector rispetto al link 3 del braccio articolato 3A_6 .
6. soluzione del problema di cinematica inversa del polso con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 4, 5, 6 $[\theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]$.

3. soluzione del problema di cinematica inversa del braccio articolato con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 1, 2, 3 $[\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]$.

1° espressione del centro polso rispetto al sistema di riferimento 1: **INTERVENSONO $\vartheta_2 \vartheta_3$**

CINEMATICA
DIRETTA

$${}^1\hat{p}_4 = {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3 \cdot {}^3\hat{p}_4 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} + a_2 \cdot c_2 \\ d_3 \\ -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} - a_2 \cdot s_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

essendo ${}^3\hat{p}_4 = a_3 \cdot {}^3\hat{i}_3 - d_4 \cdot {}^3\hat{j}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

CON QUESTO APPROCCIO VOGLIO
E SEPARARE I GDL $\vartheta_2 \vartheta_3$
DEL GDL ϑ_1 - MI PREOCCUPO
DEL MOVIMENTO SUL PIANO
VERTICALE DELL'EE E
SUCCESSIVAMENTE IL POSIZIONA-
MENTO SUL PIANO ORIZZONTALE

2° espressione del centro polso rispetto al sistema di riferimento 1: **INTERVIENE ϑ_1**

$${}^1\hat{p}_4 = {}^0\hat{A}_1^{-1,0} \cdot {}^0\hat{p}_4 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4 \\ -s_1 \cdot x_4 + c_1 \cdot y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uguagliando le due espressioni del centro polso ${}^1\hat{p}_4$ rispetto al sistema di riferimento 1:

$$\begin{cases} c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4 = a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} + a_2 \cdot c_2 & (1) \\ -s_1 \cdot x_4 + c_1 \cdot y_4 = d_3 & (2) \\ z_4 = -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} - a_2 \cdot s_2 & (3) \end{cases}$$

- Calcolo del grado di libertà \mathcal{G}_1 del giunto 1.

Si consideri il vettore posizione ${}^0\hat{p}_4$ del centro polso rispetto al riferimento base 0.

Indicando con: l = lunghezza della proiezione di ${}^0\hat{p}_4$ sul piano x_0y_0

γ = angolo tra la proiezione di ${}^0\hat{p}_4$ sul piano x_0y_0 e l'asse x_0

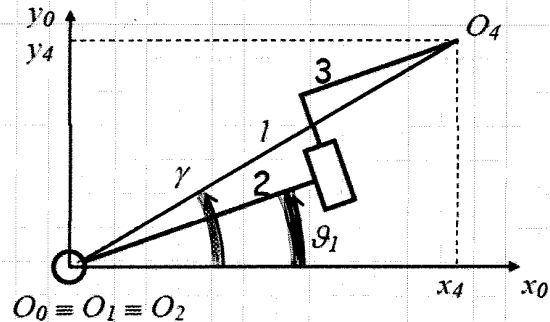
$$x_4 = l \cos \gamma$$

$$y_4 = l \sin \gamma$$

risulta:

$$\begin{cases} l = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \\ \gamma = \arctan 2(y_4, x_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = l \cdot \cos \gamma \\ y_4 = l \cdot \sin \gamma \end{cases}$$



Sostituendo nell'equazione (2) le espressioni indicate di x_4 e y_4 si ottiene:

$$d_3 = -s_1 \cdot l \cdot c_\gamma + c_1 \cdot l \cdot s_\gamma = l \cdot (s_\gamma \cdot c_1 - c_\gamma \cdot s_1) = l \cdot \sin(\gamma - \mathcal{G}_1)$$

da cui si ricavano le espressioni di $\sin(\gamma - \mathcal{G}_1)$ e $\cos(\gamma - \mathcal{G}_1)$:

$$\begin{cases} \sin(\gamma - \mathcal{G}_1) = \frac{d_3}{l} \\ \cos(\gamma - \mathcal{G}_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{l^2}} \end{cases}$$

e si calcola l'angolo $(\gamma - \mathcal{G}_1)$:

$$\gamma - \mathcal{G}_1 = \arctan 2\left(\frac{d_3}{l}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{l^2}}\right)$$

Si conclude quindi che la soluzione per il grado di libertà del giunto 1 è:

$$\mathcal{G}_1 = \arctan 2(y_4, x_4) - \arctan 2\left(d_3, \pm \sqrt{x_4^2 + y_4^2 - d_3^2}\right)$$

da cui risulta che esistono due possibili valori \mathcal{G}_1^I e \mathcal{G}_1^{II} per il grado di libertà del giunto 1, rispettivamente calcolati assumendo i segni + o - nell'argomento della funzione $\arctan 2$.

segue:
$$\begin{cases} \cos \eta = \frac{b}{h} \\ \sin \eta = \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{h^2}} \end{cases} \Rightarrow \eta = \operatorname{atan} 2 \left(\pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{h^2}}, \frac{b}{h} \right)$$

Essendo il grado di libertà ϑ_3 del giunto 3 l'angolo tra gli assi x_2 e x_3 , risulta:

$$\vartheta_3 = \xi + \eta$$

e quindi si conclude che la soluzione per il grado di libertà del giunto 3 è:

$$\vartheta_3 = \operatorname{atan} 2(d_4, a_3) + \operatorname{atan} 2 \left(\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - b^2}, b \right)$$

da cui risulta che esistono due possibili valori ϑ_3^I e ϑ_3^{II} per il grado di libertà del giunto 3, rispettivamente calcolati assumendo i segni + o - nell'argomento della funzione $\operatorname{atan} 2$. (2 valori di ϑ_3 indipendenti da ϑ_1 : 4 possibili soluzioni)

- Calcolo del grado di libertà ϑ_2 del giunto 2.

Ricavando le espressioni di $\sin \vartheta_2$ e $\cos \vartheta_2$ dalle equazioni (1) e (2):

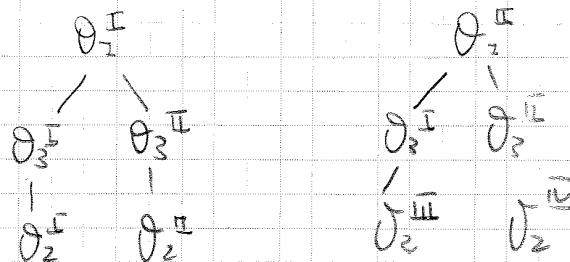
$$\begin{cases} c_2 = \frac{(b+a_2) \cdot (c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4) + (d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b+a_2)^2} \\ s_2 = \frac{(c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4)(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) - (b+a_2) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b+a_2)^2} \end{cases} \quad (5)$$

si conclude che la soluzione per il grado di libertà del giunto 2 è:

$$\vartheta_2 = \operatorname{atan} 2(s_2, c_2) \rightarrow \text{FUNZIONI } \vartheta_1, \vartheta_2$$

da cui risulta che esistono quattro possibili valori $\vartheta_2^I, \vartheta_2^{II}, \vartheta_2^{III}$ e ϑ_2^{IV} per il grado di libertà del giunto 2, rispettivamente calcolati assumendo nelle espressioni (5) le quattro possibili coppie di valori per gli angoli ϑ_1 e ϑ_3 .

42



Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

Problema di CINEMATICA INVERSA (7)

Prospetto riassuntivo delle soluzioni del problema di cinematica inversa del braccio articolato:

$$\text{vettore posizione del centro polso } {}^0 \underline{p}_4 = [x_4 \quad y_4 \quad z_4]^T$$

↓

$$\mathcal{G}_1 = a \tan 2(y_4, x_4) - a \tan 2(d_3, \pm \sqrt{x_4^2 + y_4^2 - d_3^2}) \quad (6)$$

$$\mathcal{G}_3 = a \tan 2(d_4, a_3) + a \tan 2(\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - b^2}, b) \quad (7)$$

$$\mathcal{G}_2 = a \tan 2(s_2, c_2) \quad (8)$$

essendo:
$$b = \frac{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2 \cdot a_2}$$

$$s_2 = \frac{(c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4)(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) - (b + a_2) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b + a_2)^2}$$

$$c_2 = \frac{(b + a_2) \cdot (c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4) + (d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b + a_2)^2}$$

► In conclusione esistono 4 teme di soluzione: $\begin{bmatrix} \mathcal{G}_1^I & \mathcal{G}_2^I & \mathcal{G}_3^I \\ \mathcal{G}_1^{II} & \mathcal{G}_2^{III} & \mathcal{G}_3^I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1^I & \mathcal{G}_2^{II} & \mathcal{G}_3^{II} \\ \mathcal{G}_1^{II} & \mathcal{G}_2^{IV} & \mathcal{G}_3^{II} \end{bmatrix}$

Nota: Configurazioni singolari:

Per particolari valori dei parametri geometrici caratteristici del braccio articolato, esistono posizioni del centro polso per le quali le espressioni di soluzione della cinematica inversa (6), (7), (8) sopra indicate non sono applicabili.

Tali configurazioni devono essere studiate singolarmente.

Ad esempio, assumendo $d_3 = 0$, un posizionamento del centro polso su un punto dell'asse z_0 richiede $x_4 = y_4 = 0$ e la soluzione (6) per \mathcal{G}_1 è indeterminata

In tale caso, da considerazioni grafiche segue:

$$\begin{cases} d_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{G}_1 = \text{qualsiasi} \\ \mathcal{G}_3 = a \tan 2(d_4, a_3) + a \tan 2(\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - b^2}, b) \\ \mathcal{G}_2 = a \tan 2(s_2, c_2) \end{cases}$$

6. soluzione del problema di cinematica inversa del polso con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 4, 5, 6 $[\vartheta_4 \ \vartheta_5 \ \vartheta_6]$.

I termini della matrice ${}^3\hat{A}_6$ sono funzione dei gradi di libertà incogniti del polso secondo le espressioni:

$${}^3\hat{A}_6 = {}^3\hat{A}_4 \cdot {}^4\hat{A}_5 \cdot {}^5\hat{A}_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & -d_6c_4s_5 + a_3 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & -c_5 & -d_6c_5 - d_4 \\ s_4s_5s_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & -s_4s_5 & -d_6s_4s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si conclude che le soluzioni per i gradi di libertà dei giunti 4, 5, 6 sono:

$$\vartheta_4 = a \tan 2(-A_{33}, -A_{13}) + n\pi \quad n = 0, 1 \quad (9)$$

$$\vartheta_5 = a \tan 2(-A_{13}c_4 - A_{33}s_4, -A_{23}) \quad (10)$$

$$\vartheta_6 = a \tan 2(A_{22}/s_5, -A_{21}/s_5) \quad (11)$$

con configurazione singolare:

$$s_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vartheta_5 = 0; & \quad \vartheta_4 + \vartheta_6 = a \tan 2(-A_{12}, A_{32}) \\ \vartheta_5 = \pi; & \quad \vartheta_4 - \vartheta_6 = a \tan 2(-A_{12}, A_{32}) \end{aligned}$$

da cui risulta che in generale esistono due possibili soluzioni $[\vartheta_4^I \ \vartheta_5^I \ \vartheta_6^I]$ e $[\vartheta_4^{II} \ \vartheta_5^{II} \ \vartheta_6^{II}]$, ottenute al variare di n nell'espressione (9), per i gradi di libertà dei giunti del polso per ogni matrice di posizione/orientazione dell'end effector rispetto al link 3 del braccio articolato ${}^3\hat{A}_6$.

\underline{v}_P CHE PUÒ ESSERE PROIETTATA SU NEL SRT FISSO

$$\underline{v}_P = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \underline{v}_P$$

lo STESSO VETTORE PUÒ ESSERE PROIETTATO SU W SRT;
MENTRE NESSO SEMPRE IL SUO SIGNIFICATO FISICO DI VELOCITÀ ASSOLUTA

vedo quindi a considerare il vettore \underline{v}_P tale da poter scrivere

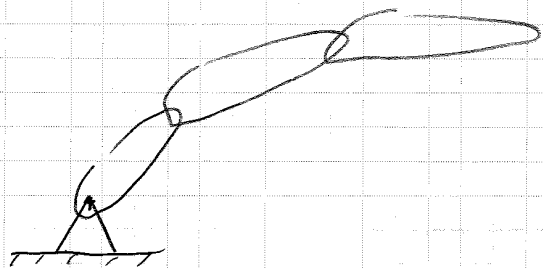
$$\boxed{\underline{v}_P = \dot{A}; \underline{v}_P} \quad (\text{CAMBIO DI COORDINATE})$$

ANALOGAMENTE POSSO HANNO:

- VELOCITÀ ASSOLUTA
- ACCELERAZIONE
- ACCELERAZIONE ANGOLARE

vedo quindi opportuno ad applicare QUESTE considerazioni a una struttura costituita da un certo numero di corpi collegati tra loro da giunti caratterizzati ognuno da 1 c.d.l., distinguendo GIUNTI PNEUMATICI/ROTOIDALI DEFINISCO UNA VARIABILE δ TALI CHE

$\delta = 1$	GIUNTO PNEUMATICO
$\delta = 0$	GIUNTO ROTOIDALE



vedo così a leggere il moto relativo, con il moto nello spazio giunti.

velocità che posso esprimere come

$$\underline{w}_i = \sum_{j=1}^i \left[\dot{q}_j (1 - \delta_j) \underline{k}_j \right]$$

il moto nello spazio relativo è dato dalle composizioni di tutti i moti nello spazio giunti

velocità dell'origine O_i del Sdt del link:

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{i,i-1,D} + \underline{v}_{i,i-1,R}$$

\underline{v}_i velocità assoluta

$\underline{v}_{i,i-1,D}$ velocità che il punto O_i ha di assoluta rispetto al Sdt fisso nel momento in cui si ha di annullare il moto relativo tra i 2 corpi.

posso scrivere

$$\underline{v}_{i,i-1,D} = \underline{v}_{i-1} + \underline{w}_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})$$

$$\underline{v}_{i,i-1,R} = \dot{q}_i \delta_i \underline{k}_i$$

$\delta_i = 1$ prismatico: la velocità $\underline{v}_{i,i-1,R}$ esiste se il giunto è prismatico (posso considerare lungo l'asse: la distanza tra le due origine cambia di un certo)

vale

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{i-1} + \underline{w}_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) + \dot{q}_i \delta_i \underline{k}_i$$

$$\underline{v}_i = \sum_{j=1}^i \left[\underline{w}_{j-1} \times (\underline{p}_j - \underline{p}_{j-1}) + \dot{q}_j \delta_j \underline{k}_j \right]$$

$$\frac{d\underline{k}_i}{dt} = \underline{w}_i \times \underline{k}_i$$

In questo caso però, con \underline{k}_i scelto ~~come~~ lungo l'asse del giunto i , il moto del corpo i rispetto al corpo $i-1$ non influenza l'orientazione di \underline{k}_i , proprio perché il moto del giunto avviene proprio intorno a \underline{k}_i . ~~però~~ posso pensare di sostituire sostanzialmente la definizione di \underline{w}_i all'interno dell'espressioni di

$$\frac{d\underline{k}_i}{dt} = \underline{w}_i \times \underline{k}_i = (\underline{w}_{i-1} + \dot{q}_i (1 - s_i) \underline{k}_i) \times \underline{k}_i = \underline{w}_{i-1} \times \underline{k}_i$$

determino quindi, passando da w corpo all'altro

$$\underline{w}_i = \sum_{j=1}^i [\ddot{q}_j (1 - s_j) \underline{k}_j + \dot{q}_j (1 - s_j) \underline{w}_{j-1} \times \underline{k}_j]$$

a partire dall'espressione delle velocità dell'origine O_i

$$\frac{d\underline{v}_i}{dt} = \frac{d\underline{v}_{i-1}}{dt} + \frac{d\underline{w}_{i-1}}{dt} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) + \underline{w}_{i-1} \times \frac{d(\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})}{dt} + \ddot{q}_i s_i \underline{k}_i + \dot{q}_i s_i \frac{d\underline{k}_i}{dt}$$

$$\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1} = a_{i-1} \underline{i}_{i-1} + d_i \underline{k}_i$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) = \begin{cases} = a_{i-1} \underline{w}_{i-1} \times \underline{i}_{i-1} + d_i \underline{w}_{i-1} \times \underline{k}_i & \delta_i = 0 \\ = a_{i-1} \underline{w}_{i-1} \times \underline{i}_{i-1} + \dot{d}_i \underline{k}_i + d_i \underline{w}_{i-1} \times \underline{k}_i & \delta_i = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) = \dot{q}_i s_i \underline{k}_i + \underline{w}_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})$$

5-11-2012

ESERCITAZIONE LAIB

ROBOT ARTICOLATO CON POLSO A 2 GDL

- PROBLEMA DI CINEMATICA DIRETTA
- PROBLEMA DI CINEMATICA INVERSA

SCHEDA TECNICA

ROBOT FANUC - CONFIGURAZIONE GEOMETRICA - HERZIALE ABBASTANZA SEMPLICE

- 3 GDL sul braccio

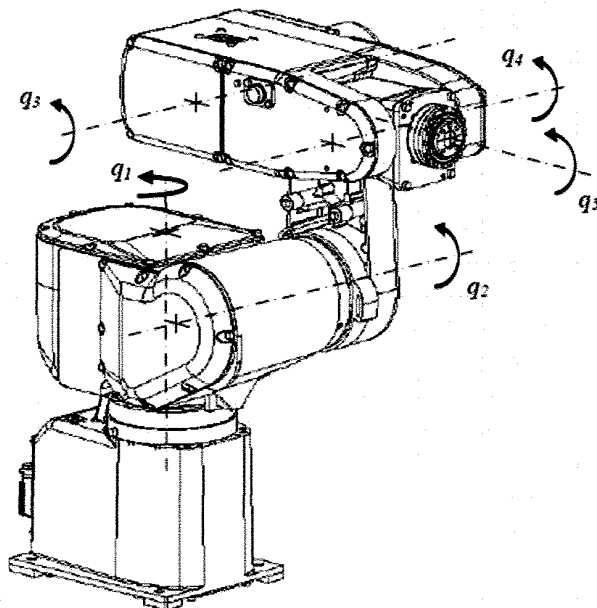
- 2 GDL polso

- BASE FISSA
- 1 GIUNTO di ROTAZIONE (ASSE VERTICALE)

- 5 GDL complessivi

- CONTROLLO POSIZIONE ATTRAVERSO ENCODER ASSOLTO

- SCHEMATIZZAZIONE STRUTTURALE (MODELLO LINK) CON GEOMETRIE SEMPLICI



VENFONO QUINDI COSTRUITO LA MATRICE ${}^0\hat{A}_1$ E ${}^1\hat{A}_2$ SOSTITUENDO LE FUNZIONI DA DENHDT_01 (ALFA, A, D, TETA) PER OGNI LINK.

Calcolo matriciale: ${}^0\hat{A}_2 = {}^0\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2$

POSIZIONE EE RISPETTO AL SALTO ${}^0\hat{P}_{EE} = {}^0\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{C}_{EE}$

Matricizzo le variabili nel vettore ${}^0\hat{P}_{EE} \text{vec}(:, i) = {}^0\hat{P}_{EE} (1:3, i)$ vedo di prendere le prime tre uscite delle prime colonne del vettore, CHE RAPPRESENTANO I VALORI DI X, Y, Z DELL'EE RISPETTO AL SALTO PER OGNI Istante di tempo.

PUNTO 1 - CODICE

```

% esempio_01.m
%
% Esempio codice di calcolo per struttura multi-body a 2 gdl
% autore: Stefano Pastorelli

close all
clear all

% dati sistema multi-body
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

alfa1=0;          %parametri di Denavit-Hartenberg costanti link 1
a1=0;
d1=1;

alfa2=0;          %parametri di Denavit-Hartenberg costanti link 2
a2=2;
d2=0.5;

P1o=[2 0 0 1]';   %posizione del punto P rispetto all'origine O1 espressa nel sistema 1 [m]
EE2o=[1.5 0 0 1]'; %posizione del punto EE rispetto all'origine O2 espressa nel sistema 2 [m]
    
```

INSERISCO I parametri di D-H COSTANTI.
 DEFINISCO QUINDI le posizioni del punto P rispetto al SOT₁ in forma ORIGINARIA E le posizioni dell' EE rispetto al SOT₂ sempre in forma ORIGINARIA.

PUNTO 2 - CODICE

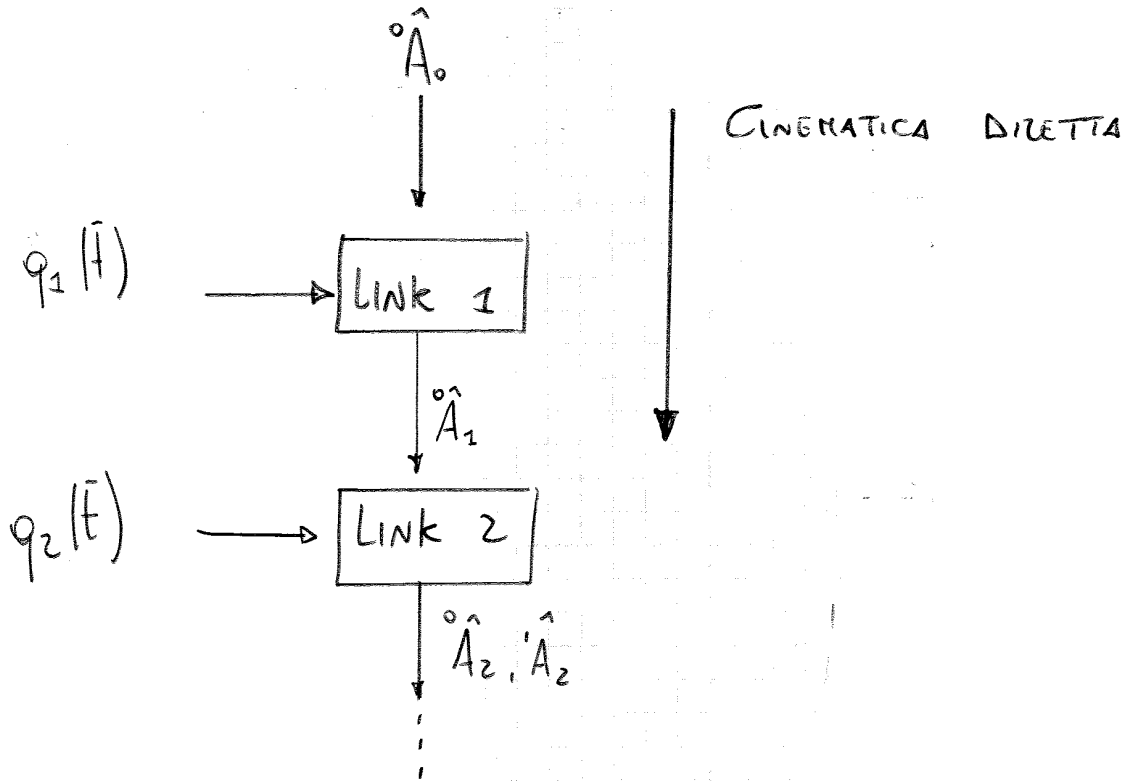
```

% dati traiettoria
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tempovet=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %vettore tempo [s]
q1vet=[0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50]; %vettore gdl giunto 1 [deg]
q2vet=[0 -6 -12 -18 -24 -30 -36 -42 -36 -30 -24]; %vettore gdl giunto 2 [deg]
    
```

sono definiti i dati traiettoria q₁vet - q₂vet, dati utilizzabili nel tempo

PER OGNI istante di tempo \bar{t} devo conoscere le posizioni del link 1 a partire dalle informazioni note per le basi



- Individuo i sdrt; secondo le convenzioni D-H
- Individuo i parametri D-H

	α	a	d	θ
LINK 1	0	0	1	q_1
LINK 2	0	2	0,5	q_2

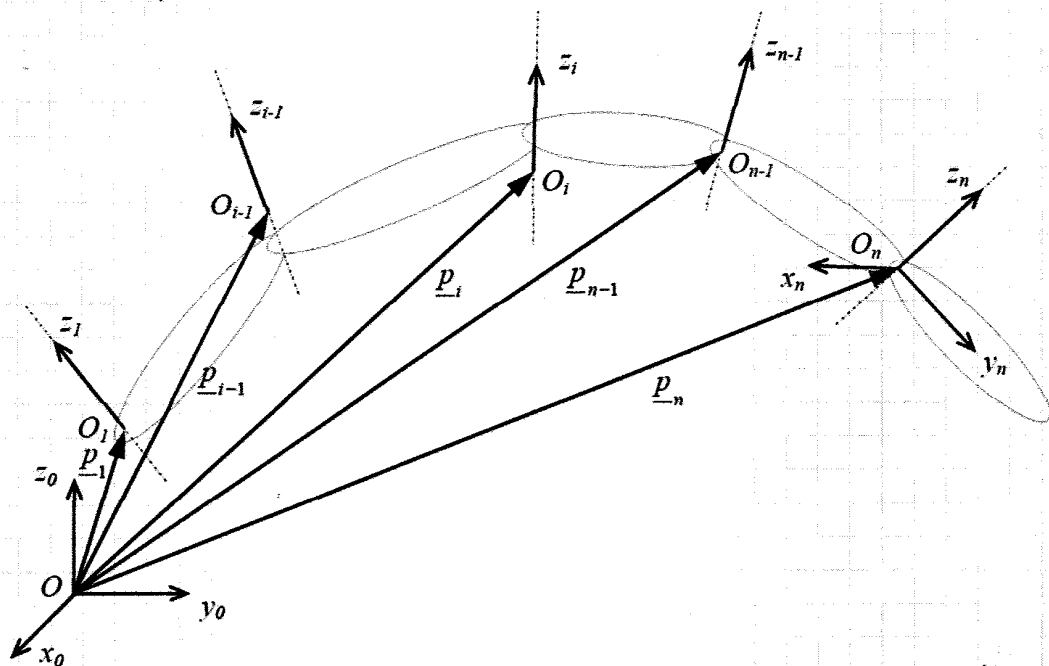
MESCO quindi a costruire le funzioni Matlab (che fornita)
 l'obiettivo è quello di determinare posizione e Rotazione dell'END-EFFECTOR

12-11-2012

MATRICE JACOBIANA - CINEMATICA DIFFERENZIALE

È una matrice che permette di legare trasformazioni tra spazio giunto e spazio operativo, in termini di CINEMATICA DIFFERENZIALE

Analizziamo il legame spazio giunto - operativo prendendo in considerazione la velocità lineare del punto in funzione dei parametri \dot{q}



Per determinare il moto del generico link, velocità e spostamenti la sovrapposizione degli effetti

I punti p_i rappresentano le posizioni delle origini O_i rispetto all'origine O . la traslazione di posizione ci permette di conoscere la velocità lineare

Analizzando le velocità angolari, questa velocità angolare che è ottenuta come sovrapposizione degli effetti, ovvero dalla somma delle velocità angolari dei vari giunti rotazionali che

posso legare \underline{w} e \underline{v} attraverso un'unica relazione
della MATRICE JACCOBIANA

$$\underline{V}_h \text{ VETTOLO VELOCITÀ GENERALIZZATO} = \begin{Bmatrix} \underline{V}_h \\ \underline{w}_h \end{Bmatrix} [6 \times 1]$$

cons. dettando i \underline{v} e \underline{w} nei giusti q posso scrivere una
relazione lineare, in termini matriciali, tra i \underline{v} e \underline{V}_h

$$\underline{V}_h = [J_1 | J_2 | \dots | J_n] \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

$$[J_1 | J_2 | \dots | J_n] = \text{MATRICE JACCOBIANA } J$$

$$J_i = \begin{bmatrix} s_i k_i + (1-s_i) \underline{k}_i \wedge (\underline{p}_n - \underline{p}_i) \\ (1-s_i) \underline{k}_i \end{bmatrix} [6 \times n]$$

la MATRICE JACCOBIANA è una matrice che dipende dalla
configurazione

Ve lo in questo modo a rappresentare una relazione in
termini di cinematica differenziale, ha spazio giusti e
spazio operativo

PER SCRIVERE le matrici jacobiane nel sotto scritto
caso c'è

- \hat{A}_1
- \hat{A}_2
- \hat{A}_3
- \hat{A}_E

A partire da queste matrici costruisco la matrice jacobiana, con i derivate

$$\underline{\dot{V}}_3 = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{V}}_3 \\ \underline{\dot{W}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times (\underline{p}_3 - \underline{A}_1) & \underline{k}_2 \times (\underline{p}_3 - \underline{A}_2) & 0 \\ \underline{k}_1 & \underline{k}_2 & \underline{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

$\underline{k}_i = \hat{A}_i [0 \ 0 \ 1]^T \Rightarrow$ il calcolo sempre così?
 $\hat{p}_i = \hat{A}_i [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

SI OTTIENE

$$\begin{Bmatrix} V_{3x} \\ V_{3y} \\ V_{3z} \\ W_{3x} \\ W_{3y} \\ W_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_2 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

SI OSSERVA come qualunque siano i valori di $q_1 \ q_2 \ q_3$
 $V_{3z} = 0 \ W_{3x} = 0 \ W_{3y} = 0$: solo $V_{3x} \ V_{3y} \ W_{3z}$ sono
linearmente indipendenti?