NUMERO: 518

DATA: 10/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Morellina

MATERIA: Analisi Matematica I
Prof. Camporesi

ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA

PROPOSIZIONE LOGICA: ENUNCIATO DEL QUALE SI PUÒ INEQUIVOCABILMENTE DIRE, IN UN CERTO CONTESTO, SE È VERO O FALSO.

es. "7 è un numero dispari" —> VERO

"10 è un numero dispari" —> FALSO

CONNETTIVI LOGICI:

- NEGAZIONE LOGICA (SIMBOLO $\neg$ "NON")

  se $\neg P$ è VERA —> P è FALSA

  se $\neg P$ è FALSA —> P è VERA

- CONGIUNZIONE LOGICA (simbolo $\wedge$) "et"

  $P \wedge q$ è VERA SE SONO ENTRAMBE VERE ed è falsa in tutti gli altri casi.

- DISGIUNZIONE LOGICA (SIMBOLO $\vee$) "or"

  $P \vee q$ è FALSA SE SONO ENTRAMBE FALSE ed è vera in tutti gli altri casi

- IMPLICAZIONE LOGICA (simbolo $\Rightarrow$)

  $P \Rightarrow q$ è falsa se p è vera e q è falsa, ed è vera in tutti gli altri casi.

L'implicazione logica esclude che da una premessa vera si possa dedurre una conclusione falsa, ma non esclude che la conclusione sia vera anche se la premessa è falsa. "La veridicità dell'ipotesi p è la $\boxed{\text{condizione sufficiente}}$ affinché sia vera la tesi q".
"La veridicità della tesi q è la $\boxed{\text{condizione necessaria}}$ affinché sia vera l'ipotesi P." $\boxed{(P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg P)}$

QUANTIFICATORI

DATO UN PREDICATO $P(x)$, CON x VARIABILE IN UN CERTO INSIEME X, È NATURALE CHIEDERSI SE L'ENUNCIATO $P(x)$ SIA VERO PER TUTTI GLI ELEMENTI x, OPPURE SE ESISTA ALMENO UN x PER CUI $P(x)$ SIA VERO

PER QUESTO SI DEFINISCONO LE PROPOSIZIONI LOGICHE: $\forall$, $\exists$, $\exists!$

$\forall x, P(x) \rightarrow$ $P(x)$ È VERO PER TUTTI GLI ELEMENTI X.

$\exists x, P(x) \rightarrow$ ESISTE <u>ALMENO</u> UN x PER CUI $P(x)$ È VERO.

$\exists! x, P(x) \rightarrow$ ESISTE <u>SOLO</u> UN x PER CUI $P(x)$ È VERO.

$\forall$: <u>QUANTIFICATORE UNIVERSALE</u>

$\exists$: <u>QUANTIFICATORE ESISTENZIALE</u>

N.B.
L'APPLICAZIONE DI UN QUANTIFICATORE A UN PREDICATO LO TRASFORMA IN UNA PROPOSIZIONE LOGICA, DELLA QUALE SI PUÒ STABILIRE IL VALORE DI VERITÀ.

ES. $P(x) = x \leq 7 \rightarrow$ APPLICANDO I QUANTIFICATORI

$\forall x \in N, x \leq 7 \rightarrow$ FALSO

$\exists x \in N, x \leq 7 \rightarrow$ VERO

$\exists! x \in N, x \leq 7 \rightarrow$ FALSO

$$\boxed{\neg(\forall x, P(x)) \iff \exists x, \neg P(x)}$$

$$\boxed{\neg(\exists x, P(x)) \iff \forall x, \neg P(x)}$$

SE SI TRATTA DI PIÙ VARIABIL[I] BISOGNA STARE ATTENTI ALL'ORDI[NE] DI ELENCAZIONE DEI QUANTIFICATORI

$\forall x \forall y, P(x,y) \iff \forall y \forall x, P(x,$

$\exists x \exists y, P(x,y) \iff \exists y \exists x, P(x,$

INSIEMI

UN INSIEME È COSTITUITO DA CERTI ELEMENTI E SI DICE CHE APPARTENGONO ALL'INSIEME

PER DEFINIRE UN INSIEME BISOGNA ELENCARE I SUOI ELEMENTI (O ELENCARE LA PROPRIETÀ DEI SUOI ELEMENTI)

GLI ELEMENTI DI UN INSIEME POSSONO ESSERE DI NATURA QUALSIASI (OGGETTI, NUMERI, FUNZIONI ECC...)

INSIEMI NUMERICI (SONO TUTTI INFINITI, CIOÈ CON INFINITI ELEMENTI)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ INVENTATI X CONTARE

$\mathbb{Z} = \{\ldots -1, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$ NUMERI RAZIONALI INVENTATI PER CONTARE

$\mathbb{R} = \{ x \mid x \text{ ha un allineamento decimale qualsiasi (non periodico)} \}$ NUMERI REALI

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} = \text{unità immaginaria} \}$ NUMERI COMPLESSI

PRINCIPIO DI INDUZIONE (UTILIZZATO X LE DIMOSTRAZIONI)

SIA $Q(n)$ UNA PROPOSIZIONE LOGICA (FORMULA, TEOREMA ... CHE DIPENDE DA n)

TALE CHE 1) $Q(1)$ è VERA;

2) se $Q(n)$ è VERA PER UN CERTO n fissato ma generico ALLORA $Q(n+1)$ è VERA.

CIOÈ 2) $\forall n \in \mathbb{N}^+, \left(\underset{\text{VERA}}{Q(n)}\right) \Rightarrow \left(\underset{\text{VERA}}{Q(n+1)}\right)$

ALLORA $Q(n)$ è VERA $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

NEL NOSTRO CASO $Q(n)$ è la seguente proposizione:

$$Q(n) \mid \ |P(A_n)| = 2^n \quad \forall n$$

1) $Q(1)$: $P(A_1) = \{\emptyset ; \{1\}\} = 2 = 2^1$

2) SUPPONIAMO CHE SIA VERA PER $Q(n)$ FISSATO $n-1$. DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE è VERA $Q(n+1)$

$$|P(A_{n+1})| = 2^{n+1}$$

I SOTTOINSIEMI DI A_{n+1} SONO I "VECCHI" SOTTOINSIEMI, CIOÈ QUELLI DI A_n (SONO UGUALI A 2^n)

+

I NUOVI, CIOÈ QUELLI DI A_{n+1})

PER COSTRUIRE I NUOVI BASTA PRENDERNE UNO VECCHIO E AGGIUNGERGLI "$n+1$"

$\emptyset \longrightarrow \{n+1\}$ $\qquad$ $\{n\} \longrightarrow \{n, n+1\}$

$\{1\} \longrightarrow \{1, n+1\}$ $\qquad$ $\{1,2\} \longrightarrow \{1,2,n+1\}$

VERIFICHE CON IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

VERIFICARE CHE $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \geq 1$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

IPOTESI (i) $P(1)$ è vero ← L'HO PROVATO 1°

IPOTESI INDUTTIVA (ii) $P(n)$ n FISSATO (GENERICO è VERO) ← LO SUPPONGO 2°

SI DEVE DIMOSTRARE → $P(n)$ VERO IMPLICA ⇒ $P(n+1)$ $\forall n$ ← LO DIMOSTRO 3°

ALLORA POSSIAMO CONCLUDERE CHE $P(n)$ è VERO $\forall n$.

PER $n = 1$

← QUESTA L'HO DIMOSTRATA

(1) $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$

$1 = 1$ [V]

← QUESTA SUPPONGO CHE SIA VERA

suppongo che P(n) sia vera per un generico $n \in \mathbb{N}^+$

(2) $P(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

← QUESTO È CIÒ CHE SI DEVE DIMOSTRARE

DIMOSTRIAMO CHE È VERO PER $(n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \boxed{((n+1)+1)! - 1}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \overbrace{\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!}^{\text{ipotesi}} + (n+1)(n+1)!$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!\,[1 + (n+1)] - 1 =$$

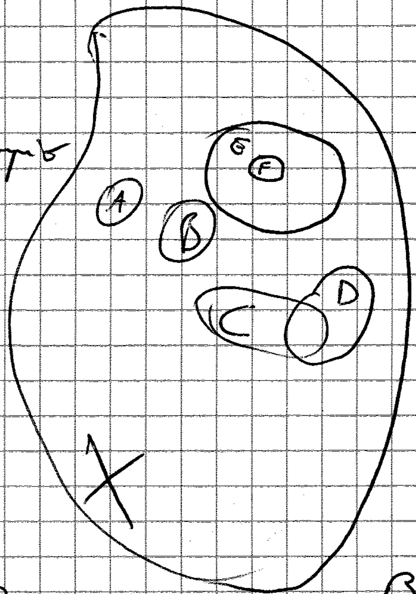
$$= (n+1)!\,(n+2) - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

OPERAZIONI SU INSIEMI

X = INSIEME AMBIENTE

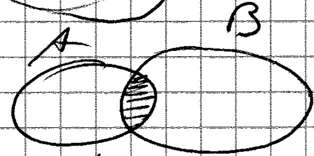
$A, B, C, \dots \subseteq X$

ESEMPIO

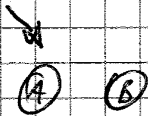


1) INTERSEZIONE

$$A \cap B = \{ x \in X : x \in A \land x \in B \}$$



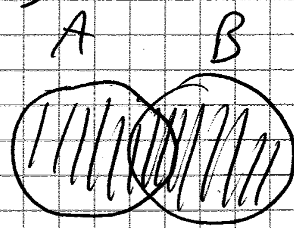
A e B SI DICONO DISGIUNTI SE $A \cap B = \emptyset$



SI NOTI LA SOMIGLIANZA TRA $A \cap B$ E LA CONGIUNZIONE LOGICA TRA 2 PROPOSIZIONI $P, Q \rightarrow P \land Q$. (VERA SE SONO ENTRAMBE VERE)

2) UNIONE

$$A \cup B = \{ x \in X : x \in A \lor x \in B \}$$



SE A e B SONO DISGIUNTI ALLORA $A \cup B$ SI CHIAMA UNIONE DISGIUNTA.

L'UNIONE È ANALOGA ALLA DISGIUNZIONE LOGICA: $P \lor Q$ (FALSA SE SONO TUTTE E DUE FALSE)

$\lor$ (OR) NON È INTESO IN SENSO ESCLUSIVO

PROPRIETÀ DI $\cup$ e $\cap$

- COMMUTATIVA : $A\cup B = B\cup A \quad , \quad A\cap B = B\cap A$
- ASSOCIATIVA : $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) \; ; \; (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
- DISTRIBUTIVA : $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \; ; \; A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
- LEGGI DI DE MORGAN : $\complement(A\cup B) = \complement(A)\cap \complement(B) \; ; \; \complement(A\cap B) = \complement(A)\cup \complement(B)$

INOLTRE $A\subseteq B \iff \complement(A) \underset{\text{contiene}}{\supseteq} \complement(B)$

Esempio di dimostrazione (diretta) delle leggi di DE MORGAN

$$\complement(A\cup B) = \{x\in X : x\notin A\cup B\} =$$
$$= \{x\in X : x\notin A \wedge x\notin B\} =$$
$$= \{x\in X : x\in \complement(A) \wedge x\in \complement(B)\} = \complement(A)\cap \complement(B)$$

c.v.d.

DIVISIONE TRA POLINOMI

DATI 2 P. $A_n(x)$ e $B_m(x)$ DI GRADO n e m CON $n \geq m$

ESISTONO 2 POLINOMI $Q(x)$ e $R(x)$ TALI CHE:

QUOZIENTE RESTO

- IL GRADO DI $R(x)$ È MINORE DI m
- VALE LA RELAZIONE $A_n(x) = B_m(x) \cdot Q(x) + R(x)$

SE $R(x) = 0$ ALLORA $A_n(x)$ È DIVISIBILE PER $B_m(x)$

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B_m(x)}$$ CIOÈ $$\frac{\text{DIVIDENDO}}{\text{DIVISORE}} = \text{QUOZIENTE} + \frac{\text{RESTO}}{\text{DIVISORE}}$$

IL METODO DI CALCOLO DEL POLINOMIO QUOZIENTE DI 2 POLINOMI CONSISTE NELLA DIVISIONE SECONDO LE POTENZE DECRESCENTI

es. DATI

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - x + 2$$

$$B(x) = x^2 + 3$$

1) ORDINIAMO I P. PER POTENZE DECRESCENTI

2) • CALCOLIAMO IL QUOZIENTE TRA I MONOMI DI GRADO MAX DI $A(x)$ e $B(x)$, OTTENENDO $\boxed{2x^2}$

$$\begin{array}{r|l} A(x) \to \quad 2x^4 + x^3 + 0x^2 - x + 2 & x^2 \quad + 3 \quad \leftarrow B(x) \\ \hline 2x^2 B(x) \to \quad 2x^4 \qquad\quad + 6x^2 & 2x^2 \\ \hline R_3(x) \to \quad = \quad x^3 - 6x^2 - x + 2 & \end{array}$$

3) CALCOLIAMO IL PRODOTTO $2x^2 \cdot B(x)$ E SOTTRAIAMOLO DA $A(x)$.

OTTENIAMO IN QUESTO MODO UN POLINOMIO DI GRADO 3, INDICATO CON $R_3(x)$

FATTORIZZAZIONE

FATTORIZZARE UN POLINOMIO SIGNIFICA TRASFORMARLO IN UN'ESPRESSIONE EQUIVALENTE. SE UN POLINOMIO NON PUÒ ESSERE FATTORIZZATO SI DICE IRRIDUCIBILE. SE SI CONSIDERANO POLINOMI A COEFFICIENTI REALI, I POLINOMI IRRIDUCIBILI SONO I POLINOMI DI 1° GRADO E I POLINOMI DI 2° GRADO A DISCRIMINANTE NEGATIVO. $(\Delta < 0)$.

es. $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

METODI X LA FATTORIZZAZIONE

RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE es. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x^2(x^2 - 3x + 5)$

RACCOGLIMENTO A FATTOR PARZIALE es. $x^4 + a^2x^2 + b^2x^2 + a^2b^2 = x^2(x^2+a^2) + b^2(x^2+a^2) =$
$(x^2+b^2)(x^2+a^2)$

TEOREMA. CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN POLINOMIO $A_n(x)$ SIA DIVISIBILE PER $(x-c)$ È CHE $A_n(c) = 0$

CIOÈ SOSTITUENDO C AD X NELL'ESPRESSIONE, QUESTA SI ANNULLA

- QUINDI LA RADICE (c) È QUEL VALORE REALE CHE SOSTITUITO IN X NEL POLINOMIO, LO ANNULLA.

- $x^n - a^n$ È ~~SEMPRE~~ DIVISIBILE PER $x - a$; SE n è PARI ANCHE PER $x+a$

- $x^n + a^n$ È DIVISIBILE PER $x+a$ SE n È DISPARI; SE n È PARI NON È DIVISIBILE NÉ PER $x+a$, NÉ PER $x-a$.

OSSERVAZIONE: PER I POLINOMI A COEFFICIENTI INTERI:

- LE EVENTUALI RADICI INTERE SONO DA CERCARE TRA I SOTTOMULTIPLI DEL TERMINE NOTO COMPRESA L'UNITÀ, PRESI SIA CON IL SEGNO +, CHE −.
- LE EVENTUALI RADICI RAZIONALI SONO DA CERCARE TRA I RAZIONALI DELLA FORMA $\pm \frac{p}{q}$, DOVE P È UN SOTTOMULTIPLO DEL TERMINE NOTO, MENTRE q È UN SOTTOMULTIPLO DEL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO, COMPRESA L'UNITÀ

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

n DISPARI

$$\sqrt[n]{P(x)} \ \overset{\geq}{\leq}\ Q(x) \xrightarrow{\text{SOLUZIONI}} P(x) \ \overset{\geq}{\leq}\ [Q(x)]^n$$

n PARI

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \xrightarrow{\text{SOLUZIONI}} \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < [Q(x)]^n \end{cases}$$

n PARI

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \xrightarrow{\text{SOLUZIONI}} \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \end{cases}$$

$f : \mathbb{Q} \to$ RETTA euclidea orientata con unità di misura

$f\left(\frac{m}{n}\right) =$ PUNTO SULLA RETTA CHE DISTA $\left|\frac{m}{n}\right|$ DALL'ORIGINE, A DESTRA DELL'ORIGINE SE $\frac{m}{n} > 0$, A SINISTRA SE $\frac{m}{n} < 0$

f È INIETTIVA MA

DOMANDA: f è suriettiva? NO! PERCHÉ NON A TUTTI I PUNTI DELLA RETTA CORRISPONDONO NUMERI $\in \mathbb{Q}$.

DUNQUE

DATO $B_1 \subseteq B$ la CONTROIMMAGINE di B_1 è f^{-1} ← NON f INVERSA

$$f^{-1}(B_1) = \{ x \in A \mid f(x) \in B_1 \} \subseteq A$$

f SI DICE INIETTIVA o $1-1$ e SI SCRIVE

$$f : A \xrightarrow{1-1} B$$

SE AD ELEMENTI DISTINTI DI A CORRISPONDONO ELEMENTI DISTINTI DI B E VICEVERSA.

Cioè

f è $1-1 \iff \forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

RICORDIAMO $\quad P \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg P$

ALLORA

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ una $f: A \to B$ si dice

funzione reale (perché definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$) di

variabile reale (perché ha immagine in un s. di $\mathbb{R}$)

IL GRAFICO DI UNA $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$ È IL SEGUENTE

SOTTOINSIEME DEL PIANO CARTESIANO $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

GRAFICO $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\} =$

$= \{(x, f(x)) : x \in A\}$

REGOLA: UN SOTTOINSIEME $G \subset \mathbb{R}^2$ È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SE E SOLO SE OGNI RETTA VERTICALE INTERSECA L'INSIEME G AL PIÙ IN UN PUNTO.

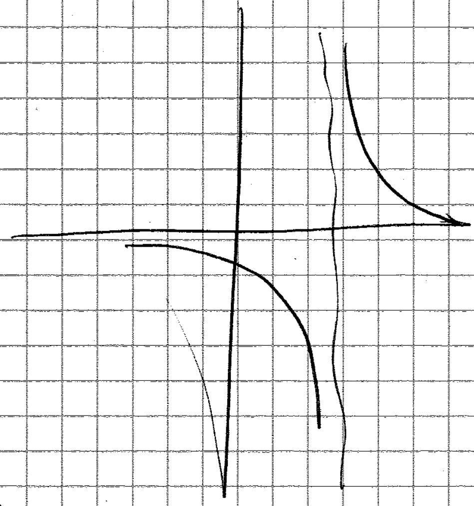
CONSIDERIAMO $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

SI DEFINISCE IL GRAFICO DI f

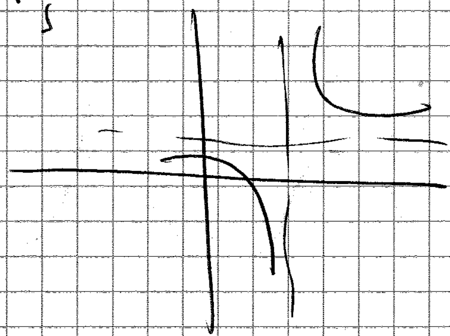
$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(x,y) : x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$$

PROPRIETÀ CHE DEFINISCE UNA FUNZIONE: $\forall x \in A$ FISSATO, $\exists!\, y \in B \mid (x; y) \in G_f$

$$\frac{1}{x-p} \quad (p>0) \rightarrow$$



$$\frac{1}{x-p}+q$$



NOTIAMO

$$\frac{1}{x-p}+q = \frac{qx-pq+1}{x-p} \leftarrow$$ RAPPORTO TRA 2 POLINOMI

~~CI SI CHIEDE SE~~

VICEVERSA, la funzione $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

CASI DEGENERI

con $c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$

RAPPRESENTA una iperbole con assi // a gli assi coordinati,

che si ottiene da $y = \frac{1}{x}$ con traslazioni, simmetrie, dilatazioni.

Per rappresentare $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{A}{x-p}+q$ e si rappresenta facilmente

LO SI SCRIVE NELLA FORMA (facendo la divisione tra N e D se necessario)

FUNZIONE

MANTISSA DI X

$$M(x) = x - [x]$$

X MENO LA SUA PARTE INTERA, DUNQUE LA MANTISSA È LA PARTE DECIMALE

PROPRIETÀ

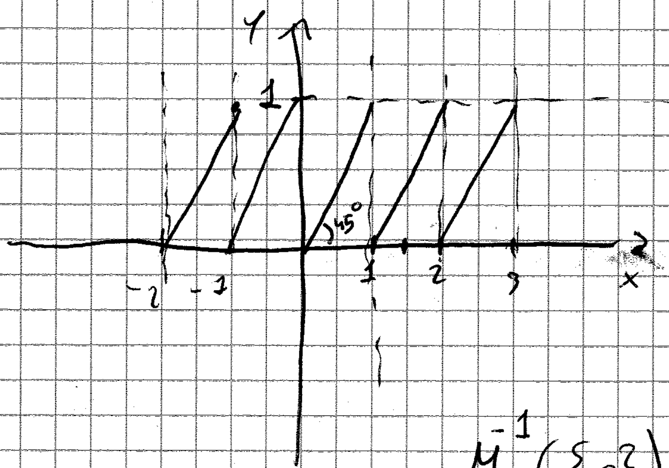
$$0 \le M(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$M(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$$

es

$M(1,5) = 0,5$ $\qquad M(-1,5) = 0,5$

$M(\pi) = 0,14\ldots$ $\qquad M(0,5) = 0,5$



$$M^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 477

FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONI POLINOMIALI

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

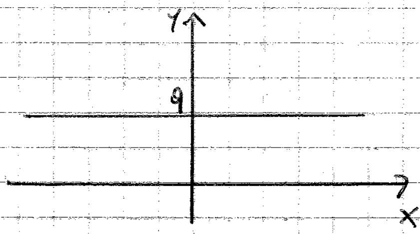
$DOM(f) = \mathbb{R}$

- SE $n = 0$ -> FUNZIONE COSTANTE
- SE $n = 1$ -> FUNZIONE LINEARE O AFFINE
- SE $n = 2$ -> PARABOLA
- SE $a_n = 1$ e $a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$ -> FUNZIONI POTENZA $(f\,x = x^n)$

FUNZIONI COSTANTI

$f(x) = q \quad q \in \mathbb{R}$

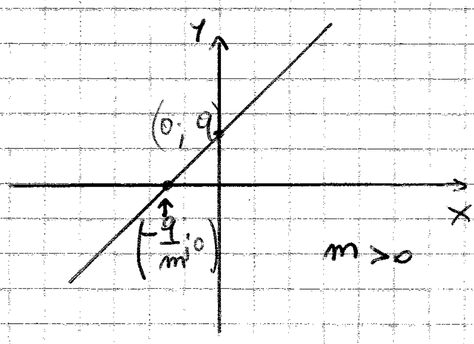
$dom(f) = \mathbb{R} \quad cod(f) = \{q\}$



$m = 0$

FUNZIONI LINEARI E AFFINI

$f(x) = mx + q \quad m, q \in \mathbb{R}$

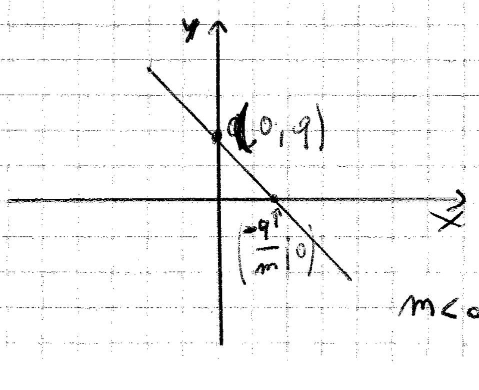


$m > 0$

m -> COEFF. ANGOLARE

q -> TERMINE NOTO O INTERCETTA

SE $m \neq 0 \Rightarrow$ CODOMINIO $= \mathbb{R}$



$m < 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 477

FUNZIONI POTENZA

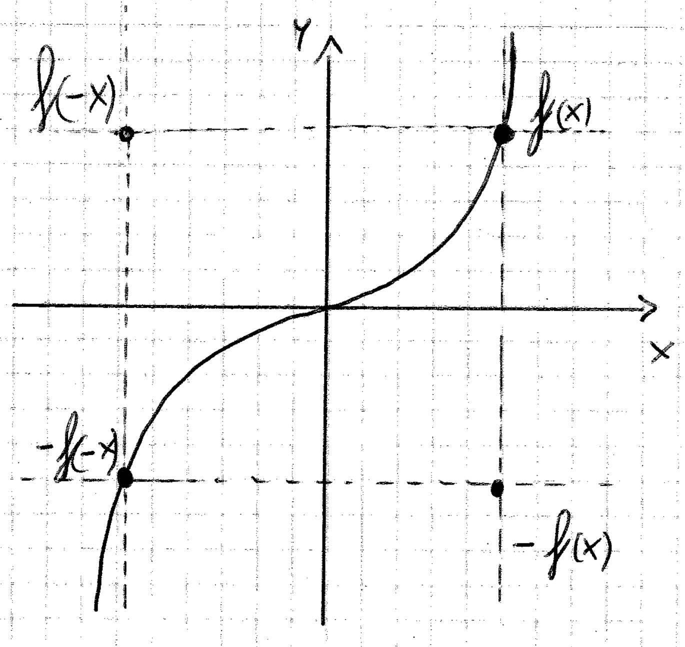
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

PASSANO SEMPRE TUTTE PER $\rightarrow$ $P = (0,0)$ e $Q = (1;1)$

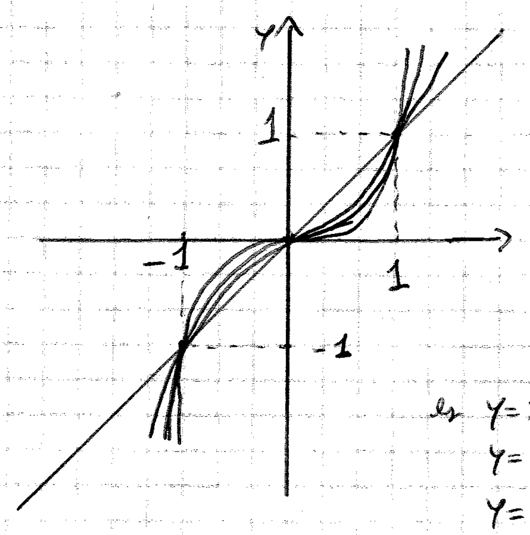
	DOM(f)	COD(f)	SIMMETRIE
n DISPARI	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(-x) = -f(x)$
n PARI	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$f(-x) = f(x)$

n DISPARI $\rightarrow$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE

n PARI $\rightarrow$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE Y



es. $Y = X^n$ DISPARI



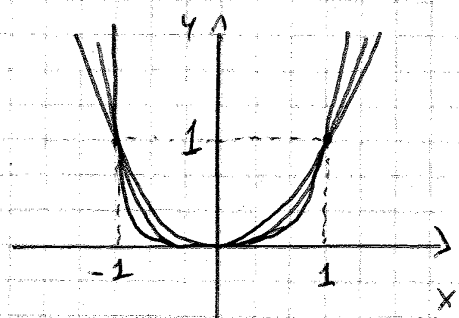
es $Y = x$

$Y = x^3$

$Y = x^5$

$Y = x^{233}$

es $Y = X^n$ PARI



es $Y = x^2$

$Y = x^4$

$Y = x^6$

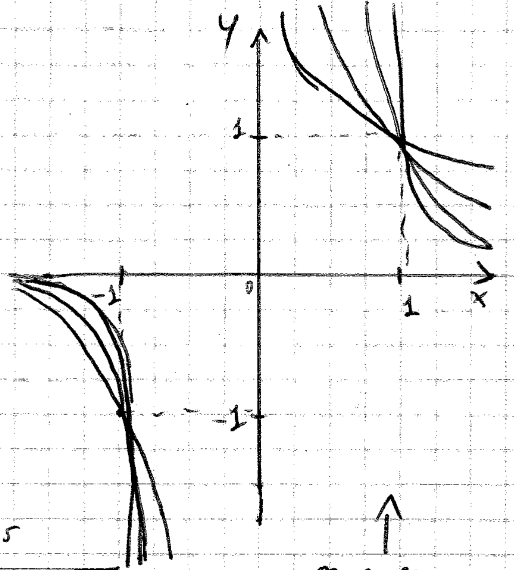
$Y = x^{100}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 477

ESEMPIO DI FUNZIONI RAZIONALI

FUNZIONI DI PROPORZIONALITÀ INVERSA

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}} \quad n \in N$$



DOMINIO f = $\mathbb{R} - \{0\}$

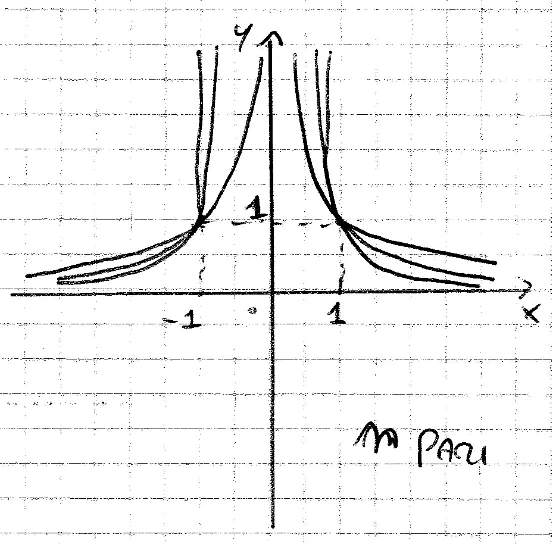
LE f DI PROPORZIONALITÀ INV. PASSANO SEMPRE PER $Q = (1;1)$

m DISPARI

PROPRIETÀ

	CODOMINIO	SIMMETRIE
m DISPARI ->	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f(-x) = -f(x)$
m PARI ->	$\mathbb{R}^+$	$f(-x) = f(x)$

• SE m = 1 LA FUNZIONE È UN'IPERBOLE



m PARI

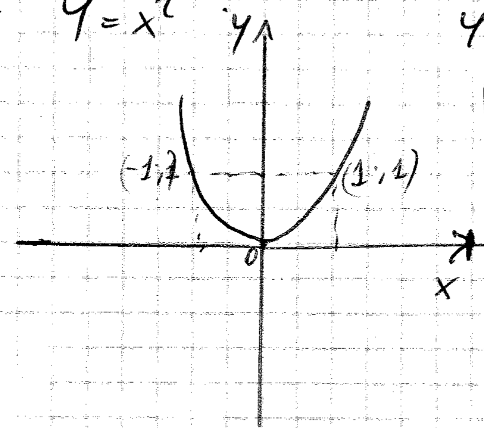
TRASFORMAZIONI DEL PIANO E GRAFICO DI FUNZIONI

TRASLAZIONE ORIZZONTALE

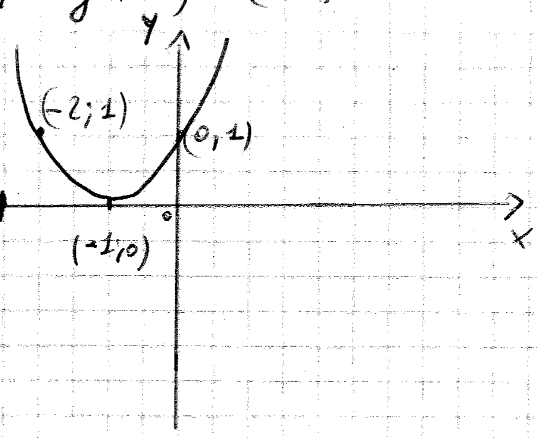
$$y = f(x) \Rightarrow y = f(x-p)$$

	DIREZIONE
$p>0$	VERSO DESTRA
$p<0$	VERSO SINISTRA

es $y = x^2$



$y = f(x+1) = (x+1)^2$

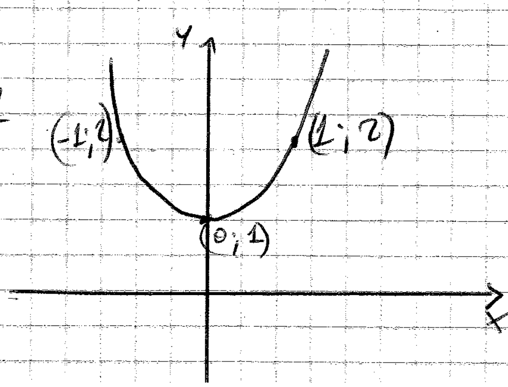


TRASLAZIONE VERTICALE

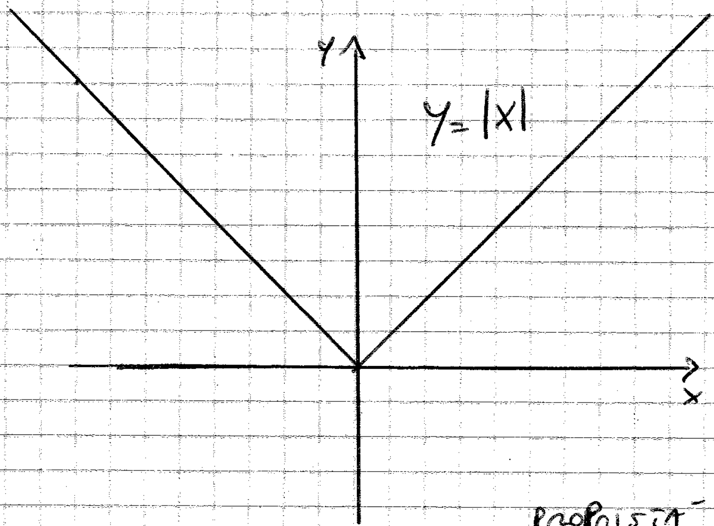
$$y = f(x) \Rightarrow y = f(x) + q$$

	DIREZIONE
$q>0$	VERSO L'ALTO
$q<0$	VERSO IL BASSO

es $y = x^2 + 1$



FUNZIONE VALORE ASSOLUTO



PROPRIETÀ

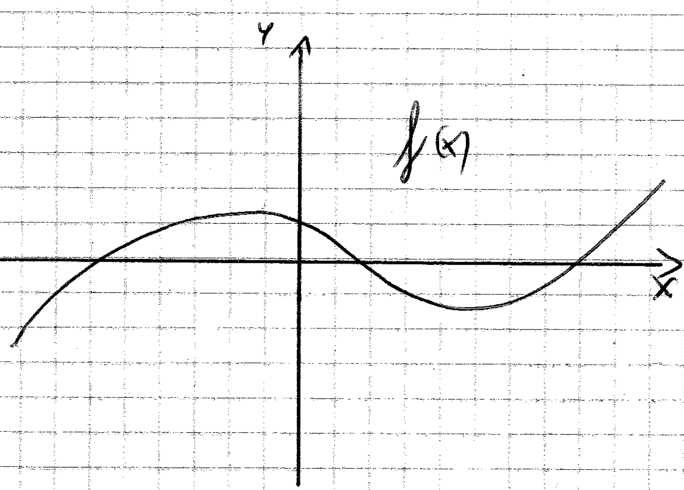
VALORE ASSOLUTO

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

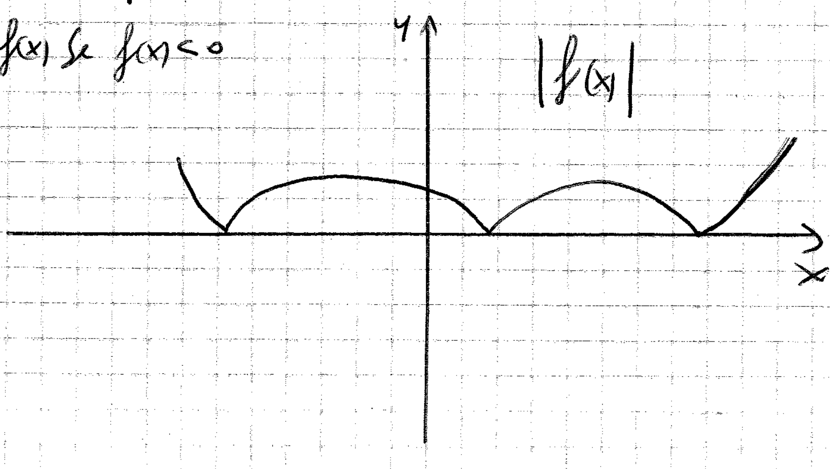
DOMINIO : $\mathbb{R}$

CODOMINIO: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

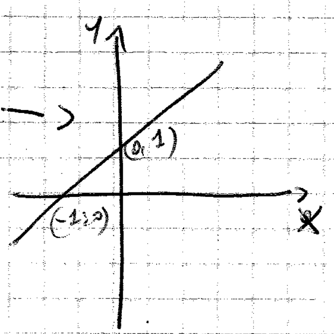
SIMMETRIE : $f(x) = f(-x)$



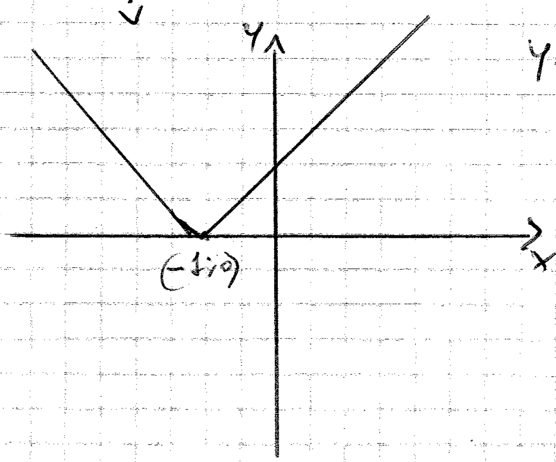
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



Es DATA LA funz: $y = x+1$ →



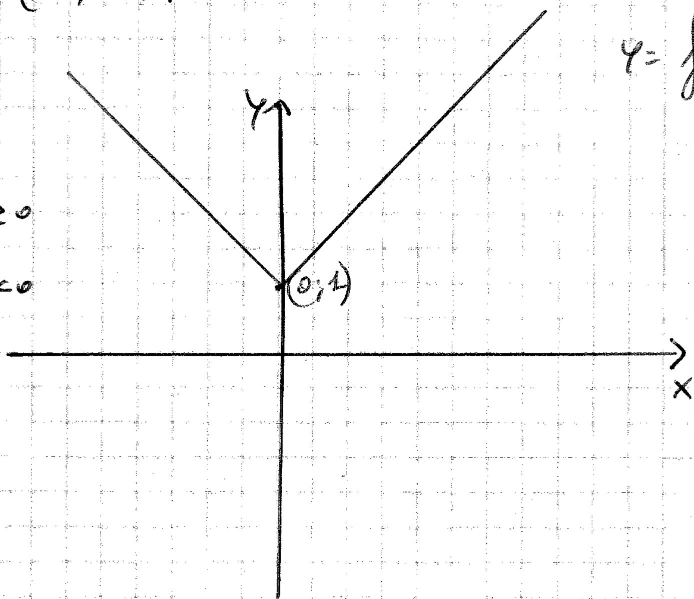
DISEGNARE $y = |f(x)| = |x+1|$



$y:|f(x)|$

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

DISEGNARE $y = f(|x|) = |x| + 1$



$y = f(|x|)$

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

FUNZIONI PARI E DISPARI

SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE A VALORI REALI DI VARIABILI REALI.

$f(x)$ È PARI SE $\forall x \in \mathbb{R}$ VALE L'EQUAZIONE:

PARI $\rightarrow$ $$f(x) = f(-x)$$

es.

RICORDIAMO CHE DATA UNA $f(x) = y \rightarrow f(-x) = (-y)$

$\searrow -f(x) = -(y)$

VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $y = x^2$ SIA PARI:

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(-x) = (-x)^2 \rightarrow \boxed{f(-x) = x^2} \rightarrow \overset{x^2}{f(-x)} = \overset{x^2}{f(x)}$$

$f(x)$ È DISPARI SE $\forall x \in \mathbb{R}$ VALE L'EQUAZIONE:

DISPARI $\rightarrow$ $$f(x) = -f(-x)$$

OPPURE

$$\left(f(-x) = -f(x) \right)$$

es. VERIFICARE CHE LA $f: y = x^3$ SIA DISPARI:

$$f(x) = x^3 \rightarrow f(x) = -f(-x) \rightarrow \boxed{x^3 = -\left(-x^3\right)} \rightarrow x^3 = x^3 \rightarrow f \text{ È DISPARI}$$

VERIFICARE CHE $y = x^3$ NON SIA PARI:

$$f(x) = x^3 \rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow x^3 = (-x)^3 \rightarrow x^3 = -x^3 \rightarrow \text{FALSO} \rightarrow f \text{ NON È PARI}^{*}$$

UNA f PUÒ ESSERE PARI, DISPARI O NÈ PARI NÈ DISPARI

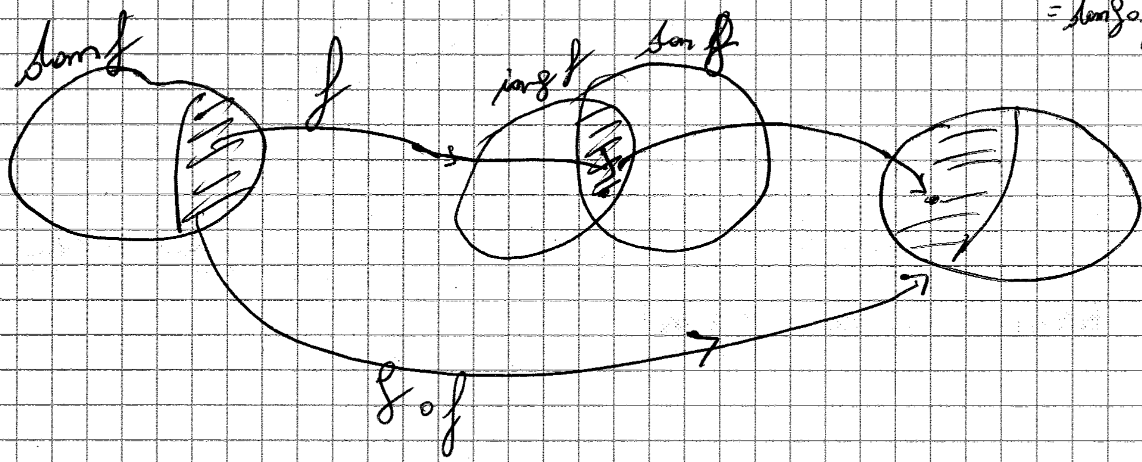
* MA NON È DETTO CHE SIA DISPARI (BISOGNA DIMOSTRARLO)

es $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = |x|$

$$g \circ f = g(f(x)) = |x^2 - x - 2|$$

$$f \circ g = f(g x) = |x|^2 - |x| - 2 = x^2 - |x| - 2$$

più in generale, siano f, g tali che l'img di f intersecata con il dominio di $g \neq \emptyset$, si può definire dunque la $g \circ f = g(f(x))$ $\forall x \in$ img $\cap$ dom g cioè $\forall x \in f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom}\, g) = \text{dom}\, g\circ f$



$$\text{dom}\, g \circ f = f^{-1}(\text{im} f \cap \text{dom}\, g)$$

$$\text{im}\, g \circ f = g(\text{im} f \cap \text{dom}\, g)$$

CALCOLARE im $f \circ g$

dom $f \circ g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 3$$

$$\text{im } f \circ g = f(\text{im } g \cap \text{dom } f)$$

$$(\mathbb{R} - \{0\}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{0\} \qquad f(\mathbb{R} - \{0\}) = [-1; +\infty)$$

MONOTONIA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

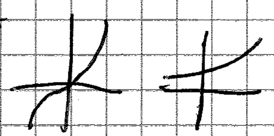
Se f e g sono monotone anche $g \circ f$ lo è e precisamente:

f e g entrambe crescenti
f e g entrambe decrescenti
$\Rightarrow g \circ f$ è crescente

f crescente g decrescente
f decrescente g crescente
$\Rightarrow g \circ f$ decrescente

inoltre $g \circ f$ è strettamente monotona se g e f sono entrambe strett. monotone

es. $f(x) = x^3 \qquad g(x) = 2^x$ SONO STRETTAMENTE CRESCENTI



$g \circ f(x) = 2^{x^3}$ è strett. crescente

anche $f \circ g(x) = (2^x)^3 = 2^{3x}$ è strett. crescente

LA REGOLA SI PUÒ ENUNCIARE ANCHE PER f e g RISTRETTE AD INTERVALLI DEL LORO DOMINIO

$f \circ g(x) = sen(x^2)$

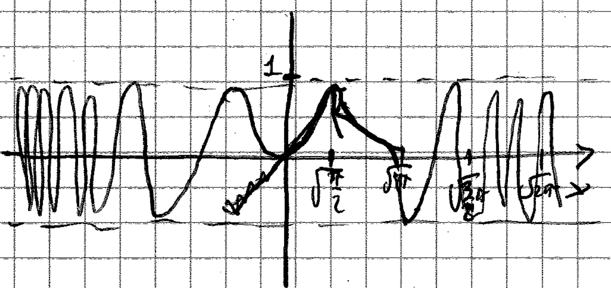
NON È PERIODICA
È PARI

$I = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$, $g|_I$ è CRESCENTE
$J = g(I) = [0; \frac{\pi}{2}]$, $f|_J$ è CRESCENTE

$\Rightarrow sen(x^2)|_{[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]}$ è CRESCENTE

$I = [\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}]$, $g|_I$ è CRESCENTE
$J = g(I) = [\frac{\pi}{2}; \pi]$, $f|_J$ è DECRESCENTE

$\Rightarrow sen(x^2)|_{[\frac{\pi}{2}; \pi]}$ è DECRESCENTE



la frequenza aumenta sempre di più.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 477

• SIA $f: A \to B$ $\quad A,B \subseteq \mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA SU A

f è iniettiva e quindi invertibile. La sua f^{-1} è strettam. monotona e ha la stessa monotonia

• COME SI OTTIENE IL GRAFICO DELLA f^{-1} A PARTIRE dal grafico di f?

IL G DELLA f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice $y=x$

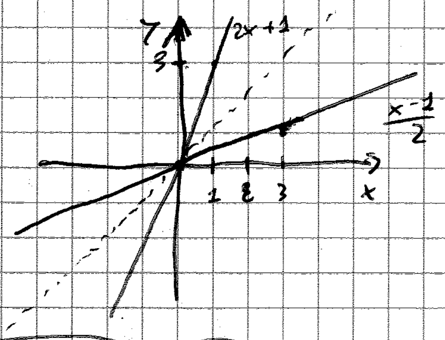
TALE SIMMETRIA È DETTA ASSIALE $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$

È SIMMETRICO PROPRIO PERCHÉ IL DOMINIO DI f^{-1} NON È ALTRO CHE L'IMMAGINE DI f. $\quad (a;b) \in G_f \iff (b;a) \in G_{f^{-1}}$

• COME SI CALCOLA LA f^{-1} DI f? SI DEVE RISOLVERE ESPLICITAMENTE L'EQUAZIONE $f(x)=y$ CON x IN FUNZIONE DI y CIOÈ $x = f^{-1}(y)$

es ① $f(x) = 2x+1 \qquad y = 2x+1 \implies x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = f^{-1}(y)$

DISEGNIAMO LE FUNZIONI



② $f(x) = x + \log x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente perché è la somma di 2 funzioni strettamente crescenti quindi è iniettiva e invertibile.

$x + \log x = y$

$x = ?$ NON SI RIESCE A RISOLVERE PERCHÉ È UN'EQUAZ. TRASCENDENTE

③ $y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = \left[\text{SI SA CHE } \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\right] =$$

$$\cancel{2}\,n\cdot\frac{(n+1)}{\cancel{2}} - n = n^2$$

DIMOSTRAZIONE
- PER INDUZIONE

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

PROVO PER UN NUMERO

0) $P(2) = \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 1+3=4 = 2^2$ [VERO]

1) SUPPONGO SIA VERO ANCHE PER UN GENERICO n, CIOÈ

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$ ALLORA DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE

2) $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \left[2(n+1)-1\right] = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

È USCITO PROPRIO IL RISULTATO PRESUNTO

c.v.d.

SOMMATORIA DEI CUBI DI n

$$\sum_{K=1}^{n} K^3 = 1+8+27+64+125 \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

1) $P(1) = \sum_{K=1}^{1} K^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1 \quad [V]$

2) $P(n) = \sum_{K=1}^{n} K^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Se [V] ⇓

3) $P(n+1) = \sum_{K=1}^{n+1} K^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$

$$\text{MA} \sum_{K=1}^{n+1} K^3 = \sum_{K=1}^{n} K^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \quad z = (n+1)$$

$$= \frac{n^2 z^2 + 4z^3}{4} = \frac{z^2(n^2+4z)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

C.V.D.

FATTORIALE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad (n \geq 1)$

$0! = 1$

PROPRIETÀ:

• RICORSIVA $\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$

$n! = n(n-1)(n-2)!$

FISSATI n e $k \in \mathbb{N}$ CON $0 \leq k \leq n$ SI DEFINISCE IL COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

PROPRIETÀ

• $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$; $f(n) = a_n$

es. LA PERMUTAZ. $(2, 3, 1)$ DI $A_3 \longleftrightarrow f : A_3 \to A_3$

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

e VICEVERSA DATA UNA $f : A_n \xrightarrow{1-1} A_n$ BIJ. SI ASSOCIA LA PERMUTAZIONE $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di A_n con $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$ ... $a_n = f(n)$

LE PERMUTAZIONI DI A_n COINCIDONO CON LE f BIUNIVOCHE DI A_n IN SE.

QUANTE SONO LE PERMUTAZIONI DI UN INSIEME DI n ELEMENTI? $n!$

DIMOSTRAZIONE 1^a estrazione 2^a 3^a 4^a ... $n-1^a$ n^a

$$\boxed{n \mid n-1 \mid n-2 \mid n-3 \mid n-k \mid 2 \mid 1} = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

SI USA LA LEGGE DEL PRODOTTO: DATI 2 INSIEMI A, B DI n, m elementi, il PRODOTTO CARTESIANO $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi.

es ho 5 PANTALONI E 3 CAMICIE = 15 modi per vestirmi.

FISSATI k, n CON $0 < k \leq n$ CONSIDERIAMO LE DISPOSIZIONI DEGLI ELEMENTI DI A_n IN SEQUENZE ORDINATE DEL TIPO:

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ SEMPRE CON RIPETIZIONI NON CONSENTITE $(a_i \neq a_j \mid i \neq j)$

es $n = 4$, $k = 2 \to 12$ DISPOSIZIONI

$d_{n,k}$ = N° DI k-UPLE ORDINATE DI A_n SENZA RIPETIZIONI.

$$d_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

es $d_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$ (Disposizioni)

COROLLARIO IL NUMERO TOTALE DI SOTTOINSIEMI DI A_n è 2^n

DIMOSTR. $n°$ TOTALE = ($N°$ INSIEMI DI 0 elementi) + ($n°$ di sottoinsiemi di 1 elem.) + (2 elementi) + ... + (n elementi) =

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{se } a=b=1$$

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

---

k, n qualsiasi QUANTE sono le k-UPLE ORDINATE DI n ELEMENTI CON RIPETIZIONE? SONO $= n^k$

esempio QUANTE SCHEDINE AL TOTOCALCIO?

$n=3 \quad k=13$

$$3^{13}=1.594.323$$

PROBABILITÀ

LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO E, INDICATA CON $P(E)$, È IL RAPPORTO TRA IL NUMERO DEI CASI FAVOREVOLI AL MANIFESTARSI DI E, E IL NUMERO DEI CASI POSSIBILI, GIUDICATI UGUALMENTE PROBABILI.

UN EVENTO E PUÒ ESSERE:
- CERTO, SE $P(E) = 1$
- IMPOSSIBILE, SE $P(E) = 0$
- POSSIBILE, SE $0 < P(E) < 1$

ES. NEL CASO DEL LANCIO DI UN DADO L'EVENTO "FACCIA 5" HA UNA PROBABILITÀ PARI AD $\frac{1}{6}$, DAL MOMENTO CHE I CASI POSSIBILI SONO SEI, E IL CASO FAVOREVOLE È 1.

ES. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LA SOMMA DEI RISULTATI DEL LANCIO DI DUE DADI SIA UGUALE A 4?

	PRIMO DADO	SECONDO DADO
1° CASO FAVOREVOLE	1	3
2° CASO FAVOREVOLE	3	1
3° CASO FAVOREVOLE	2	2

→ 3 CASI FAVOREVOLI

NUMERO DEI CASI POSSIBILI = PRODOTTO DEI CASI POSSIBILI DI OGNI DADO:

$$6 \times 6 = 36$$

$$P = \frac{3}{36} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

NUMERI REALI

$\mathbb{R}$ = INSIEME DI TUTTI GLI ALLINEAMENTI DECIMALI CON SEGNO

CIOÈ LE ESPRESSIONI DEL TIPO $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

DOVE $a_0 \in \mathbb{Z}$ e

a_j SONO LE CIFRE DECIMALI CHE $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

DOMANDE

1) COME SI IDENTIFICA $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$?

2) COME SI DEFINISCE L'ORDINAMENTO SU $\mathbb{R}$?

3) COME SI FANNO A DEFINIRE LE OPERAZIONI SU $\mathbb{R}$?

4) QUAL È LA RAPPRESENTAZ. GEOMETRICA DI $\mathbb{R}$?

5) QUALI PROPRIETÀ DISTINGUONO $\mathbb{R}$ DA $\mathbb{Q}$?

RISPOSTE

1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ DATA UNA FRAZIONE $\frac{p}{q}$ SI OTTIENE LA FORMA DECIMALE DI $\frac{p}{q}$ CON L'ALGORITMO DELLA DIVISIONE

es.° $\frac{10}{7} = 1,\overline{428571}$

TUTTI I RESTI (PARZIALI) SONO < 7 DA CIÒ SEGUE CHE

IN BASE A VARIE TRONCATE $1 < \frac{10}{7} < 2$ $\quad 1,4 < \frac{10}{7} < 1,5$

$1,42 < \frac{10}{7} < 1,43$ $\quad 1,428 < \frac{10}{7} < 1,429$

IN GENERALE DATO UN ALLINEAMENTO $(*)$

$$(*) = \frac{a_0 a_1 \dots a_{k+n} - a_0 a_1 \dots a_k}{\underbrace{99\dots9}_{n}\underbrace{00\dots0}_{k}}$$

ES $3,14\overline{9}$

SI SCRIVE TUTTO SENZA LA VIRGOLA

$3,14\overline{9} = 3149 - 314$

SI SOTTRAE TUTTO QUELLO CHE STA PRIMA DEL PERIODO.

SI DIVIDE PER 900 $\rightarrow \frac{3149-314}{900}$ TANTI 9 QUANTI SONO LE CIFRE DEL PERIODO, TANTI ZERI QUANTI SONO I... ANTI...

L'UNICO CASO IN CUI A DUE ALLINEAM. DISTINTI CORRISPONDE LO STESSO $\frac{p}{q}$ È quello IN CUI 1 DEI 2 ALLINEAM. HA PERIODO 9

TALE PROBLEMA VIENE PERÒ RISOLTO AUTOMATICAMENTE DALLA REGOLA VISTA SOPRA:

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

QUINDI $0,\overline{9} = 1$ $\qquad 0,1\overline{9} = \frac{19-1}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0,2$

$$3,14\overline{9} = \frac{3149-314}{900} = \frac{315}{100} = 3,15$$

REGOLA DEL PERIODO 9:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \overline{9} = a_0, a_1 a_2 \dots (a_k + 1)$$

Esercizio per ripassare le divisioni: Calcolo l'allineamento di $\frac{100}{49}$

C'È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA $\mathbb{Q}$ e GLI ALLINEAMENTI DECIMALI FINITI O INFINITI PERIODICI

SI HA $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

GLI elementi DI $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ SI CHIAMANO <u>NUMERI IRRAZIONALI</u>

QUESTO DIMOSTRA CHE SE $\sqrt{2}$ SI PUÒ RAPPRESENTARE COME ALLINEAMENTO DECIMALE, QUESTO DEV'ESSERE INFINITO NON PERIODICO.

UNA REGOLA CHE PERMETTE DI DETERMINARE IN MODO ITERATIVO (UNA CIFRA DOPO L'ALTRA) TALE ALLINEAMENTO È:

$$1^2 = 1 < 2 \; ; \; 2^2 = 4 > 2 \implies 1$$

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2 \; , \; (1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2 \implies 1{,}4$$

$$(1{,}41)^2 < 2 \; , \; (1{,}42)^2 > 2 \implies 1{,}41$$

$$(1{,}414)^2 < 2 \; , \; (1{,}415)^2 > 2 \implies 1{,}414$$

ANCHE SE NON È POSSIBILE DETERMINARE TUTTE LE CIFRE È POSSIBILE COSTRUIRLE NUOVAMENTE

DATO UN ALLIN. $X = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \longrightarrow$ CONTINUA ALL'INFINITO

DEFINENDO LA TRONCATA n-ESIMA DI UN ALLINEAMENTO COME

TRONCATA $\longrightarrow$ $X^{(n)} = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ STOP

$$\left(X^0 = a_0 \; , \; X^{(1)} = a_0, a_1 \; ; \; X^2 = a_0, a_1 a_2 \right)$$

TRONCATA ENNESIMA DI UN ALLINEAMENTO

SI HA CHE L'ALLINEAMENTO DI $\sqrt{2}$ È QUELL'UNICO ALLINEAM. X TALE CHE

$$\text{PER } \forall n \in \mathbb{N}, \; (X^{(n)})^2 < 2 \text{ e } (X^{(n)} + 10^{-n})^2 > 2$$

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE TALE ALLINEAMENTO X SODDISFA $X^2 = 2$

QUESTO SEGUIRÀ DOPO LE OPERAZIONI SU $\mathbb{R}$.

$$X^{(n)} < \sqrt{2} < (X^{(n)} + 10^{-n})$$

2) ORDINAMENTO IN $\mathbb{R}$

ALLINEAMENTI POSITIVI SON QUELLI CON SEGNO $+$

" NEGATIVI " $-$

2 ALLINEAMENTI $X = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ $Y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$ SI DICONO UGUALI SE E SOLO SE $a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \; \forall n$

SIA $X \neq Y$ CON X E Y POSITIVI

DICIAMO CHE $X > Y$ O $Y < X$ SE $a_0 > b_0$ OPPURE $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 > b_1 \end{cases}$ OPPURE $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 > b_2 \end{cases}$

OPPURE SE $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \dots \end{cases}$ PER UN CERTO $n \in \mathbb{N}$

TALE n DEVE ESISTERE PERCHÉ SE NON esistesse $X = Y$ TUTTE LE CIFRE UGUALI ...

OPERAZIONI SU $\mathbb{R}$

COME SI SOMMANO 2 ALLINEAMENTI INFINITI ?

es.

$$x = \frac{8}{9} \quad 0,8888\ldots 8 = 0,\overline{8}$$

$$y = \sqrt{2} = 1,41421356237\ldots$$

$x + y = ?$ SOMMO LE TRONCATE, CIOÈ CALCOLO $\forall n \in \mathbb{N}$

$$C_n = x^{(n)} + y^{(n)}$$

CIOÈ $0 + 1 = 1$

$0,8 + 1,4 = 2,2$

$0,88 + 1,41 = 2,29$

2,302

2,3030

2,30309

2,303101

2,3031023

2,30310244

2,303102450

SI NOTA (E SI POTREBBE DIMOSTRARE) CHE LE COLONNE SI STABILIZZANO. DA UN CERTO PUNTO IN POI NON CAMBIA PIÙ LA CIFRA CORRISPONDENTE E RIMANE COSTANTE. DEFINIAMO ALLORA $x + y$ CIOÈ $\frac{8}{9} + \sqrt{2}$ COME

QUELL'ALLINEAMENTO OTTENUTO PRENDENDO IN OGNI COLONNA I VALORI STABILIZZATI

$$\frac{8}{9} + \sqrt{2} = 2,30310245\ldots$$

CIOÈ

$$(x+y)^{(n)} = \begin{array}{l} 2 \\ 2,3 \\ 2,30 \\ 2,302 \\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$

$$(x+y)^{(n)} \neq x^{(n)} + y^{(n)}$$

INFATTI DEVO ASPETTARE LA STABILIZZAZIONE

$X = 1,414213562 37 \ldots$

SI CALCOLI $d_n = \left(X^{(n)} \cdot X^{(n)}\right)^{(n)} =$

1
1,9
1,98
1,999
1,9999
1,99998
1,999998

SI INTUISCE (MA SI PUÒ DIMOSTRARE RIGOROSAMENTE) CHE OGNI COLONNA SI STABILIZZA A 9

E QUINDI L'ALLINEAMENTO CORRISPONDENTE A $X^2 = 1,\overline{9} = 2$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI $\mathbb{R}$

VI È UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA $\mathbb{R}$ E LA RETTA EUCLIDEA CON ORIGINE E UNITÀ DI MISURA FISSATE, CIOÈ

1) AD OGNI PUNTO X DELLA RETTA SI PUÒ ASSOCIARE UN ALLINEAMENTO DI $\mathbb{R}$ CHE VIENE DETTO L'ASCISSA DEL PUNTO.

IL PROCEDIMENTO È SIMILE A QUELLO USATO PER DEFINIRE L'ALLINEAMENTO DI $\sqrt{2}$.

2) VICEVERSA AD OGNI ALLINEAMENTO SI PUÒ ASSOCIARE UN PUNTO X DELLA RETTA, TALE CHE L'ASCISSA DI X COINCIDA CON L'ALLINEAMENTO INIZIALE. A TAL FINE È PERÒ NECESSARIO USARE LA SEGUENTE PROPRIETÀ NON ALGEBRICA: LA PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DELLA RETTA (ASSIOMA DI CONTINUITÀ DELLA RETTA). DATA UNA SEZIONE DELLA RETTA, CIOÈ UNA SUA PARTIZIONE IN DUE SOTTOINSIEMI A E B NON VUOTI, TALI CHE 1) $A \cup B =$ RETTA $\quad A \cap B = \phi$

2) $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a < b$

allora esiste un solo elemento separatore dei 2 INSIEMI A e B CIOÈ

$S \in$ RETTA TALE CHE $a \leq S \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$.

SI IDENTIFICA $\mathbb{R} \simeq$ RETTA TRAMITE L'APPLICAZIONE BIUNIVOCA:

$\forall X \in$ RETTA $\xrightarrow[\text{SM}]{1-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \in \mathbb{R}$

$\forall X \in$ RETTA $\exists!\ a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$

a) algebriche (OPERAZIONI)

b) ordinamento $(\leq)$

c) completezza ($\mathbb{R} \simeq$ RETTA)

a) SONO DEFINITE SU $\mathbb{R}$ 2 OPERAZIONI $+$ e $\times$ TALI CHE $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ VALGONO LE SEG. PROPRIETÀ

1) associativa $x+(y+z) = (x+y)+z$

$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)z$

2) COMMUTATIVA $x+y = y+x$ $\quad x\cdot y = y\cdot x$

3) DISTRIBUTIVA $x(y+z) = xy + xz$

4) ESISTENZA DI ELEMENTI NEUTRI: $\exists$ 2 NUMERI REALI $0, 1$ |

$x+0=x \quad x\cdot 1 = x$

5) ESISTENZA DEGLI OPPOSTI: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ -x \mid (x)+(-x) = 0$

6) ESISTENZA DEI RECIPROCI: $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0\ \exists\ x^{-1} \in \mathbb{R} \mid x \cdot x^{-1} = 1$

TUTTE LE REGOLE NOTE DELL'ALGEBRA SEGUONO DA 1 ... 6.

UN INSIEME PER CUI VALGANO DALLA 1 FINO ALLA 6 SI CHIAMA UN

CAMPO o CORPO COMMUTATIVO

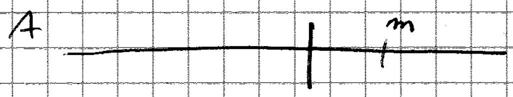
es. $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ MENTRE $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ NON SONO CAMPI

CAMPI

c) **COMPLETEZZA** DI $\mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}$ SI DICE SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists\, m \in \mathbb{R} : a \leq m \quad \forall a \in A$

TALE m SI CHIAMA maggiorante di A



ANALOGAMENTE SI DEFINISCE ~~UN~~ UN MINORANTE

$A \subset \mathbb{R}$ SI DICE LIMITATO SE È SIA LIMITATO SUP. CHE INFERIORMENTE

CIOÈ se $\exists\, c \in \mathbb{R} : |a| \leq c \quad \forall a \in A$

LIMITATO NON VUOL DIRE FINITO!

Es $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ è limitato $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

MA NON È FINITO.

Se esiste un maggiorante di A CHE APPARTIENE AD A, m SI DICE IL MASSIMO DI A $\quad m = MAX\, A$ $\quad$ CONDIZIONI 1) $m \in A$

è IL PIÙ GRANDE ELEMENTO DI A $\quad$ 2) $\forall a \in A,\ a \leq m$

e se esiste è unico

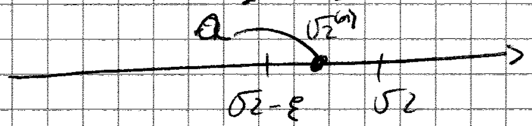
ANALOGAMENTE SI DEFINISCE IL MINIMO

$\mathbb{R}$ È $\boxed{\text{METRICAMENTE COMPLETO}}$, MA NON ALGEBRICAMENTE

PERCHÉ + esempio LE SOLUZIONI DI $x^2+1=0$ NON $\exists$ IN $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \le 2\} \subset \mathbb{R}$$
$$= \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$$
$$= \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

è evidente che $\sqrt{2}$ è un maggiorante di A. DIMOSTRIAMO CHE È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI. FISSO $\varepsilon > 0$



$\sqrt{2} - \varepsilon$ NON PUÒ ESSERE UN MAGGIORANTE DI A.

Per esempio se $\varepsilon = 10^{-N}$ prendo $a = \sqrt{2}^{(N)}$ ← TRONCATA e allora

sarà $\sqrt{2}^{(N)} \le \sqrt{2} \le \sqrt{2}^{(N)} + 10^{-N}$

e di conseguenza $\sqrt{2} - 10^{-N} < \sqrt{2}^{(N)} \in A$

POICHÉ PERÒ $\sqrt{2}$ NON APPARTIENE AD A $\Longrightarrow$ NON ESISTE IL MAX $A \in \mathbb{R}$

ANALOGAMENTE $\nexists$ MIN A

DATO $A \subset \mathbb{R}$ SI CHIAMA ESTREMO SUPERIORE DI A ($\sup A$), IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI DI A.

$s = \sup A \iff$
1) s è un maggiorante di A
2) $\forall\, l$ maggiorante di A,

$\iff$
1) $x \le s \ \forall x \in A$ $\quad s \le l$
2) $\forall \varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ non è maggiorante di A

CONSEGUENZE DELLA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

- TEOREMA ESISTENZA DELLA $\sqrt[n]{\ }$

DATO UN $y>0$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$\exists !\ l \in \mathbb{R}\ \ l>0 \mid l^n = y \rightarrow l = \sqrt[n]{y}$

DIM.

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^n \leq y\}$ A è $\neq \emptyset$ ed HA sup.

$l = \sup A \in \mathbb{R}$ (CHE ESISTE PER IL TEOREMA 9)

SI DIMOSTRA CHE NON PUÒ ESSERE $l^n > y$ e NON PUÒ ESSERE $l^n < y$

DEVE ESSERE $l^n = y$

POTENZA AD ESPONENTE REALE

$a>0,\ b>0$

$a^b = ?$ es. $\sqrt{2}^{\pi}$

$$\boxed{\text{se } b = \frac{m}{n} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^+}$$

se $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots > 0$

DEFINISCO PER $a>0$

$$A = \left\{ a^{b_0},\ a^{b_0,b_1},\ a^{b_0,b_1b_2} \ldots \right\}$$

I NUMERI DI A
: CRESCONO se $a>1$
: decrescono se $0<a<1$

ALL'AUMENTARE DELL'ORDINE DELLA TRONCATA n di $b^{(n)}$

$$a^b = \begin{cases} \sup A & \text{se } a>1 \\ \inf A & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

CIÒ EQUIVALE

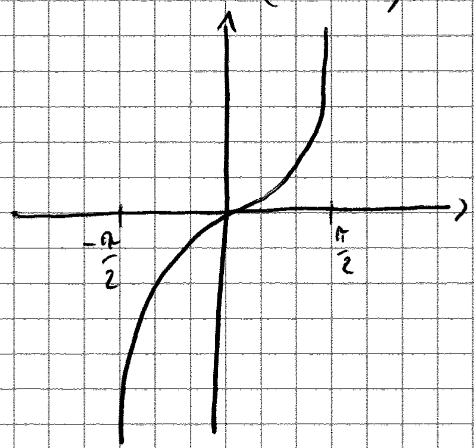
$$a^b \begin{cases} \sup \left\{ a^{\frac{p}{q}} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \frac{p}{q} \leq b \right\} & \text{se } a>1 \\ \inf \left\{ a^{\frac{p}{q}} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \frac{p}{q} \leq b \right\} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 477

esempio

2) $f(x) = tg\, x \mid \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$

UN SEGMENTO è equipotente AD UNA RETTA



$$\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[su]{1-1} \mathbb{R}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$$

SI DICE CHE UN INSIEME A è NUMERABILE SE È EQUIPOTENTE AD $\mathbb{N}$ ossia $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow[su]{1-1} A$

POSSO ENUMERARE GLI ELEMENTI DI A (TUTTI)

$a_0 = f(0)$

$a_1 = f(1)$

$a_2 = f(2)$

TEOREMA 1) $\mathbb{Q}$ è NUMERABILE

2) $\mathbb{R}$ NON è NUMERABILE

1) DIMOSTRAZIONE es. per $\mathbb{Q}^+$ $\quad \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

posso $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ SI CHIAMA <u>ALTEZZA</u> di $\frac{p}{q} = p + q$

POSSO ALLORA ENUMERARE TUTTE LE FRAZIONI PROCEDENDO PER ALTEZZE CRESCENTI:

SE $p + q = n$ QUANTE COPPIE CI SONO CHE HANNO ALTEZZA n?

$(0, n)\ (1, n-1)\ (2, n-2)$ $\ldots\ (n-1, 1)$ n frazioni di ALTEZZA n

$\rightarrow$

2) PER ASSURDO SIA $\mathbb{R}$ NUMERABILE

FACCIAMO PER $\mathbb{R}^+$

DUNQUE $\exists\ f : N \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbb{R}^+$

ENUMERIAMO GLI ALLINEAMENTI DI $\mathbb{R}^+$ COME $C_0 = f(0)$

$C_1 = f(1)$

$C_2 = f(2)$

...

PER IPOTESI QUESTO MI DA TUTTI GLI ALLINEAMENTI NUMERABILI

$C_0 = C_{00}, C_{01}\ C_{02}\ C_{03} \dots$

$C_1 = C_{10}\ C_{11}\ C_{12}\ C_{13} \dots$

$C_2 = C_{20}\ C_{21}\ C_{22}\ C_{23}$

$C_n = C_{n0}\ C_{n1}\ C_{n2}\ C_{nn}$

DEFINISCO UN ALLINEAMENTO $x \in \mathbb{R}^+$ DEL TIPO

$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

DOVE $a_0 \neq C_{00}$; 9

$a_1 \neq C_{11}$; 9

$a_2 \neq C_{22}$; 9

$a_n \neq C_{nn}$; 9

QUESTO x NON APPARTIENE ALLA LISTA

INFATTI $x \neq C_0 ; x \neq C_1 ; x \neq C_2 ;$

$\dots x \neq C_n\ \forall n.$

QUINDI CI SONO PIU' ELEMENTI DI $\mathbb{R}$ CHE DI N E DI $\mathbb{Q}$.

INSIEME DELLE PARTI DI $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $P(N) \sim \mathbb{R}$

$\downarrow$

NON È NUMERABILE

PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI

- OGNI NUMERO REALE È ANCHE UN NUMERO COMPLESSO; SE x, y SONO REALI ALLORA $x+y$, $x \cdot y$ COME NUMERI COMPLESSI COINCIDONO CON $x+y$; xy COME NUMERI REALI.

- VI È UN NUMERO COMPLESSO $i \mid i^2 = -1$

- OGNI NUMERO COMPLESSO SI PUÒ SCRIVERE IN MODO UNICO COME $z = a + ib$ CON a e $b \in \mathbb{R}$ i = n. immagin.

FORMA ALGEBRICA O CARTESIANA DEI NUMERI COMPLESSI.

a: PARTE REALE DEL NUMERO COMPLESSO

$a = \operatorname{Re} z$

b = PARTE IMMAGINARIA

$b = \operatorname{Im} z$

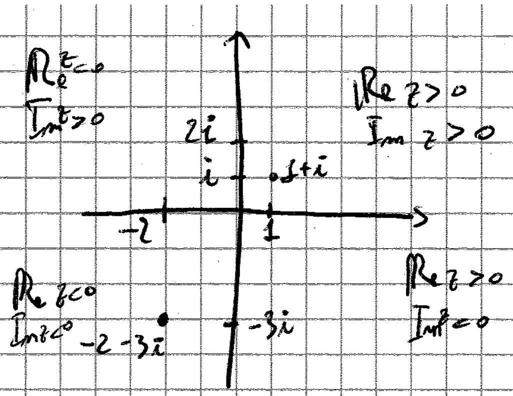
PER DEFINIZIONE OGNI NUMERO z è la somma di $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

LE OPERAZIONI SONO DEFINITE UNA SOMMA E UN PRODOTTO, CHE DERIVANO DA QUELLE DI $\mathbb{R}$ TENENDO CONTO CHE $i^2 = -1$

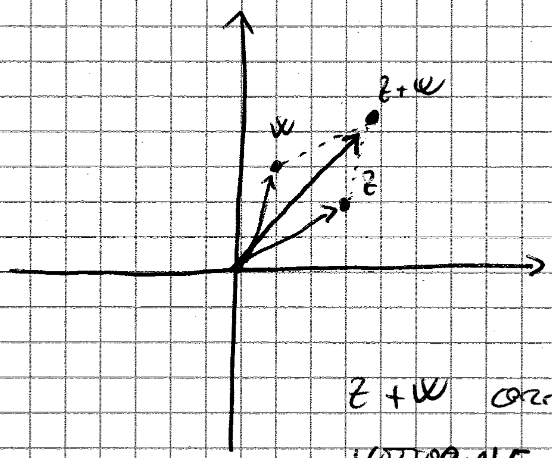
$$(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc - bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

- VALGONO LE PRIME 6 PROPRIETÀ VISTE PER $\mathbb{R}$.

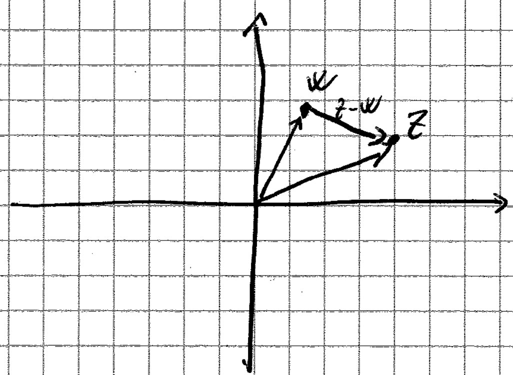


INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI SOMMA E DIFFERENZA



$z + w = ?$

$z + w$ corrisponde alla somma detta somma vettoriale di $z + w$ come vettori del piano con la regola del parallelogramma.



$z - w = ?$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 477

LE POTENZE DI i SONO PERIODICHE DI PERIODO 4

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = (-i)i = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

...

$i^{4k} = 1$

$i^{n+4k} = i^n$

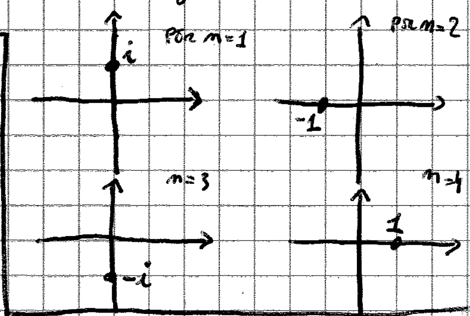
$$\begin{cases} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i \cdot -1 = -i \\ i^4 = -1 \cdot -1 = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$ i IN FORMA ESPONENZIALE

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{(i)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{2}}}$$

è utile utilizzare la scrittura esponenziale perché non bisogna utilizzare l'identità $i^2 = -1$, ma osservando gli angoli e la distanza dall'origine. E la distanza dall'origine non cambia.



es. $i^{34} = i^{32} \cdot i^2 = i^2 = -1$

$i^{2012} = 1$

$i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{i^4 \cdot i^3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = i$

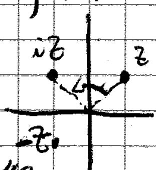
$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$

$(1-i)^4 = 1^4 + 4\,1^3 \cdot -i + 6\,1^2(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4 =$

$= 1 - \cancel{4i} - 6 \cancel{+4i} + 1 = -4$

NUMERO $\mathbb{C}$ $\to$ NUMERO $\mathbb{R}$

SE SI MOLTIPLICA UN NUMERO z PER i IL SUO MODULO NON CAMBIA, MA VIENE RUOTATO DI $\frac{\pi}{2}$ es. $z \cdot i = \left(|z| \cdot e^{i\theta}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = |z|e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$



SE SI MOLTIPLICA PER $2i$, OLTRE A RUOTARE DI $\frac{\pi}{2}$ RADDOPPIA ANCHE IL MODULO

es. $z \cdot 2i = |z|e^{i\theta} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2|z|e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

NB QUANDO SI HA i^m, SI DIVIDE m PER 4, E TROVATO IL RESTO r, $i^m = i^r$? NO!

es. $i^{34} \to 34|4 \to r=2 \to i^{34} = i^2 = -1$

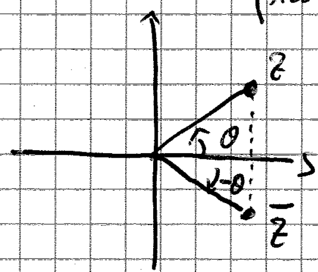
OPERAZIONE DI CONIUGAZIONE

$\underset{x+iy}{z} \to \bar{z} = x - iy$ ← SI CAMBIA SEGNO SOLO ALLA PARTE IMMAGINARIA

PROPRIETÀ

• IL MODULO DI $|z|$ NON CAMBIA, L'ARGOMENTO CAMBIA SEGNO (È UNA RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE REALE)

$$|z| = |\bar{z}|$$



• $\overline{(\bar{z})} = z$

CON NOTAZIONE CARTESIANA

• $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

PRODOTTO DI 2 NUMERI ℂ (CONIUGATI) → NUMERO REALE $|z|^2 \geq 0$

CON NOTAZIONE ESPONENZIALE

• $z \cdot \bar{z} = |z| e^{i\theta} \cdot |z| e^{-i\theta} = |z|^2 e^{i(\theta - \theta)} = |z|^2 e^{i0} = |z|^2$

DIVISIONE TRA NUMERI COMPLESSI

$\frac{z}{w}$ = CON $w \neq 0$ (ANCHE IN ℂ LA DIVISIONE PER 0 NON HA SENSO) $= \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$ ← LA DIVISIONE TRA DUE N° COMPLESSI È DIVENTATA LA DIVISIONE PER UN NUMERO REALE

ES. $z = -1 + i$, $w = 3 + i$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{(-1+i)(3-i)}{10} = \frac{-3 + i + 3i - i^2}{10} = -\frac{2}{10} + \frac{4i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$$

→ $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

→ $\bar{w} = 3 - i$

EQUAZIONI CON NUMERI COMPLESSI

DIFFERENZE CON EQUAZIONI REALI: - CI SONO OPERAZIONI DIVERSE ES. CONIUGAZIONE, LA MOLTIPLICAZ. HA SIGNIFICATO DIVERSO.

- LE INCOGNITE SONO NUMERI $\in \mathbb{C}$, DUNQUE LE SOLUZIONI VANNO CERCATE IN $\mathbb{C}$

È DI SECONDO GRADO MA NON È UN POLINOMIO (PERCHÉ C'È IL CONIUGATO)

ES. $z^2 + \bar{z}^2 = 0$

BISOGNA CERCARE DI RICONDURSI ALLE EQUAZIONI SU CUI SI SA OPERARE

QUINDI SI TRASFORMANO I NUMERI COMPLESSI z IN COPPIE DI NUMERI REALI. COSÌ FACENDO SI TRASFORMA L'EQUAZIONE IN INCOGNITE COMPLESSE IN UNA EQ. A INCOGNITE REALI (x, y)

$$(x+iy)^2 + (x-iy)^2 = 0$$

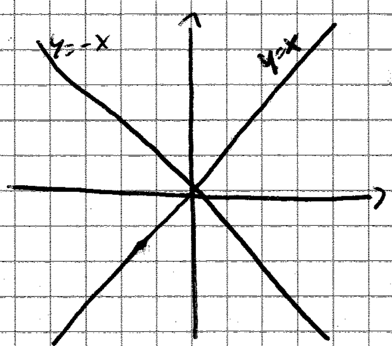
$$x^2 + \cancel{2ixy} + (iy)^2 + x^2 - \cancel{2ixy} + (-iy)^2 = 0$$

$$2x^2 + (i^2)(y^2) + (-i^2)(-y^2) = 0$$

$$2x^2 - y^2 - y^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad y^2 = x^2 \quad y = \pm\sqrt{x^2} = y = \pm x$$

COME VANNO INTERPRETATI I RISULTATI?



LE SOLUZIONI SONO INFINITE E GEOMETRICAMENTE SONO 2 RETTE $(x=y)$ e $(y=-x)$

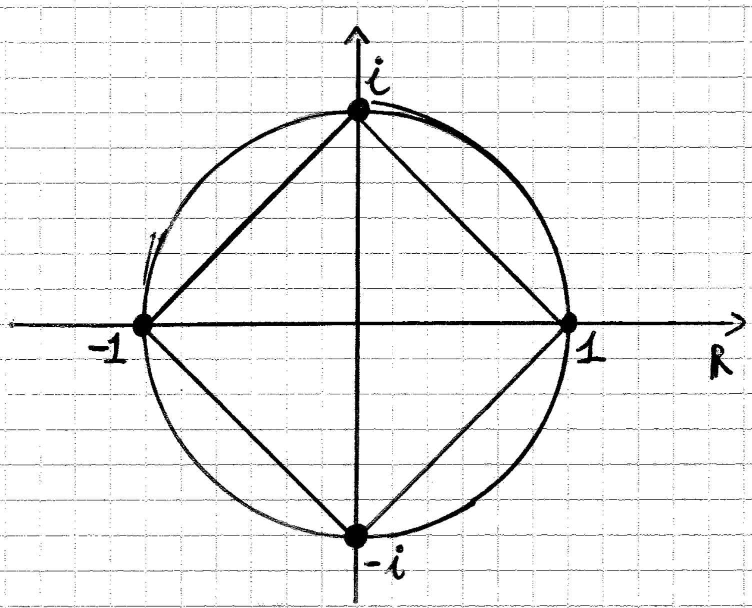
$y = x$ SONO TUTTI I NUMERI COMPLESSI $(x+iy)$ CHE HANNO PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA UGUALE

$y = -x$ " " CHE HANNO LA PARTE REALE OPPOSTA A QUELLA IMMAG.

$(x - iy)$

EQUAZIONI A VARIABILE COMPLESSA

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 0 + \text{modulo } 4 \\ i & n = 1 + \text{modulo } 4 \\ -1 & n = 2 + \text{modulo } 4 \\ -i & n = 3 + \text{modulo } 4 \end{cases}$$



PER RISOLVERE LE EQUAZIONI POLINOMIALI DI GRADO n:

ES $w^4 = 1$ $\quad$ se $w \in \mathbb{R} \rightarrow w = 1, -1$

$\quad$ se $w \in \mathbb{C} \rightarrow w = 1, -1, i, -i$

RICERCA DELLE RADICI DI UN NUMERO COMPLESSO

$\boxed{w^n = z}$ SI VOGLIONO TROVARE TUTTI I w TALI CHE ELEVATI ALLA n DIANO z. CIOÈ SI VOGLIONO TROVARE LE RADICI ENNESIME DI ZETA.

$\left(|w| e^{i\varphi}\right)^n = |z| e^{i\theta}$ ← SI SCRIVONO I NUMERI COMPLESSI w e z IN FORMA ESPONENZIALE

$$|w|^n \cdot e^{in\varphi} = |z| e^{i\theta} \Longrightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| \\ \varphi n = \theta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

SE NON METTESSIMO $2k\pi$ DETERMINEREMMO UN SOLO φ, INVECE DI $n\varphi$

REAL

DA UNA EQ. CON NUMERI COMPLESSI $\xrightarrow{\text{SI TRADUCE}}$ UN SISTEMA DI EQUAZIONI CON NUMERI REALI

→ QUANDO 2 NUMERI COMPLESSI SONO UGUALI?

QUANDO HANNO STESSO MODULO E STESSO ARGOMENTO.