



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 515

DATA: 10/04/2013

A P P U N T I

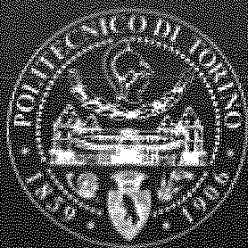
STUDENTE: Zito

MATERIA: Scienza delle Costruzioni - solo domande teoria
Prof. Valente

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



Politecnico di Torino



Anno Accademico 2012-13

Facoltà di INGEGNERIA EDILE

D.L.S.E.G.

Corso di SCIENZA delle COSTRUZIONI

Docente : Prof. Ing. Silvio Valente

DOMANDE ESAME ORALE

A cura di : Alessandro Zito



- (v) Il criterio di Von Mises o della massima energia di distorsione. Cosa si intende per ellisse di Von Mises ?

5. Il solido di Saint Venant, capitolo 9

- (a) Quali sono le ipotesi che definiscono il solido di Saint Venant ?
- (b) Come si semplifica il problema elastico sotto tali ipotesi ?
- (c) Cosa si intende per caso elementare di Saint Venant e caso composto ?
- (d) Il caso dello sforzo normale centrato (tensioni, deformazioni e lavoro)
- (e) Il caso della flessione retta (tensioni, deformazioni e lavoro, asse neutro, asse di sollecitazione, raggio di curvatura)
- (f) Il caso composto di flessione deviata
- (g) Il caso composto di sforzo normale eccentrico. La regione di nocciolo
- (h) Cosa si intende per ortogonalità energetica dei casi di S. Venant che generano σ_z ?
- (i) L'equazione differenziale della linea elastica. Illustrare qualche esempio di applicazione
- (j) La torsione delle travi di sezioni circolari (tensioni, deformazioni, lavoro)
- (k) Perché la teoria precedente vale anche nel caso di sezioni cave
- (l) La torsione delle sezioni non circolari (tensioni, deformazioni, lavoro)
- (m) Cosa si intende per analogia della membrana ?
- (n) Cosa si intende per analogia idrodinamica ?
- (o) La torsione della sezione rettangolare (tensioni, deformazioni, lavoro)
- (p) La torsione delle sezioni sottili aperte, costituite da rettangoli di spessori diversi
- (q) Dimostrare la formula di Bredt per la torsione delle sezioni sottili chiuse (tensioni, deformazioni, lavoro)
- (r) Dimostrazione che il centro di taglio coincide col centro di torsione
- (s) La teoria approssimata del taglio retto (Jourawsky) (tensioni, deformazioni, lavoro)
- (t) In quali casi la teoria precedente è esatta ?
- (u) Come si determina il centro di taglio nel caso delle sezioni sottili aperte ?
- (v) In quali casi il centro di taglio è individuabile senza calcoli ?
- (w) Il caso composto di taglio deviato
- (x) In quali casi i due tagli retti sono (o non sono) energeticamente ortogonali ?
- (y) Le verifiche di resistenza nel solido di Saint Venant. Di quali proprietà gode lo stato tensionale che nasce nel solido di Saint Venant ?

6. Il Principio dei Lavori Virtuali (Capitolo 16)

- (a) Il calcolo degli spostamenti nelle strutture reticolari isostatiche col PLV. Esempio di applicazione.

7. La stabilità dell'equilibrio elastico (Capitolo 17)

- (a) Il problema della stabilità dell'equilibrio elastico. Iniziare col caso ad un solo grado di libertà costituito da due aste rigide. Discutere anche la stabilità del ramo post-critico
- (b) Dimostrare la formula di Eulero per pilastri incernierati alle estremità. Cosa si intende per iperbole di Eulero ? Cosa si intende per transizione governata dalla snellezza ?
- (c) Nel problema euleriano, come si tiene conto di condizioni al contorno diverse da quelle citate al punto precedente ?

DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP.3

6/7

Teoremi delle catene cinematiche 1a)

Riguarda i sistemi labili o ad un grado di libertà \Rightarrow Per definizione questi sistemi vengono definiti come catene cinematiche.

Lo studio grafico delle catene cinematiche si basa su 2 importanti teoremi.

PRIMO TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

Fisso si applica nel caso in cui la catena che stiamo analizzando e' composta da almeno 2 corpi rigidi.

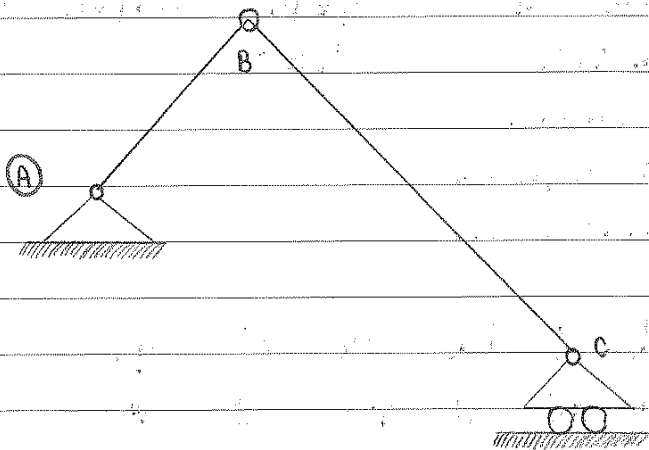
ENUNCIATO: Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema meccanico sia una volta labile e' che, per ciascuna coppia di corpi i e j , i centri assoluti di rotazione C_i e C_j e quello relativo C_{ij} siano allineati.

SECONDO TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

Fisso si applica quando la catena e' composta da almeno 3 corpi rigidi.

ENUNCIATO: Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema meccanico risulti una volta labile e' che, per ciascuna terna di corpi i, j e k , i tre centri relativi C_{ij}, C_{jk} e C_{ki} siano allineati.

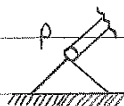
ESEMPIO 1



Struttura: travellismo. Vincoli esterni: Vincolo A \equiv Cerniera ; Vincolo C: carrello

Vincolo interno: cerniera interna.

Cerniera:



Vincolo che impone al punto P di rimanere fisso nel piano. Permette la rotazione ψ attorno allo stesso punto P \Rightarrow Il punto P coincide



Politecnico di Torino



Anno Accademico 2012-13

Facoltà di INGEGNERIA EDILE

D.I.S.E.G.

Corso di SCIENZA delle COSTRUZIONI

Docente : Prof. Ing. Silvio Valente

DOMANDE ESAME ORALE

Capitolo 7, Scienza delle costruzioni Alberto Carpinteri

A cura di : Alessandro Zito



DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI FINITE CAP. 4

e ~~≠~~ \hat{x}
 $e \equiv$ dominio della funzione f . Volume occupato dal corpo nello stato finale

conseguenza \Rightarrow CAMPO VETTORIALE DI SPOSTAMENTI

Vettori spostamento \rightarrow possono essere proiettati su un sistema di riferimento $xy\hat{k}$.

$$\{n\} = u(x,y,z)\hat{i} + v(x,y,z)\hat{j} + w(x,y,z)\hat{k}$$

$u, v, w = f(x,y,z)$ $\{n\} \equiv$ incognita PRIMARIA nei problemi strutturali

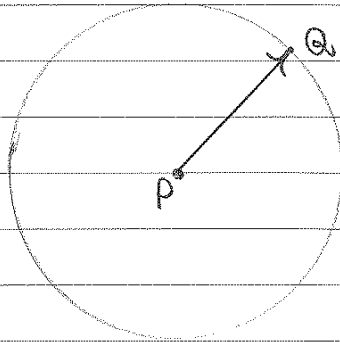
Ipotesi di regolarità della funzione $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ con esclusione di penetrazioni e fratture

la frattura implica la discontinuità della funzione spostamento.

f e f^{-1} (inversa) devono risultare continue e biettive (biunivoche) (sia suriettiva $\text{im}f = Y$ che iniettiva $y \in \text{im}f$ è immagine di un solo elemento $x \in \text{dom}f$. caso piano).

Requisiti che implicano che f ed f^{-1} devono essere OMEOMORFISMI.

$P \in$ corpo; Q \in intorno di P Q, P arbitrario



$$PQ = \int dr = (x_Q - x_P)\hat{i} + (y_Q - y_P)\hat{j} + (z_Q - z_P)\hat{k}$$

f sufficientemente regolare (continua assieme alle sue derivate parziali), f sviluppabile in serie di Taylor fino ai primi termini.

$$\textcircled{a} \quad u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P dz$$

$$\textcircled{b} \quad v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P dz$$

DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 4

1/3

$$[\psi^p] = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_x \end{vmatrix}$$

ϵ = derivate parziali del vettore spostamento nelle relative direzioni

$\gamma = \Sigma$ derivate parziali incrociate

$[\epsilon]$ = matrice di elementi pun

Hp: Piccoli spostamenti e regolarità di f , i parametri ϵ e γ sono tali, che $\epsilon, \gamma \ll 1$

DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 4

~~Ag~~

$$0 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$[\varphi_P] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad 0 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad 0$$

$$[\varepsilon_P] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

SVILUPPANDO I CALCOLI OTTIENIAMO:

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P dx$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_P dx$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_P dx$$

PUNTO R

$$u_R = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_P dy$$

$$v_R = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_P dy$$

$$w_R = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_P dy$$

12

DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 4

A.2.

θ = angolo formato dai suddetti assi a deformazione avvenuta.

$$\theta = \frac{1}{L} \left(\frac{M_1}{EI} + \frac{M_2}{EI} \right) \cdot L = \frac{M_1 + M_2}{EI}$$

$$\theta = \frac{1}{L} \left(\frac{M_1}{EI} + \frac{M_2}{EI} \right) \cdot L = \frac{M_1 + M_2}{EI}$$

$$\theta = \frac{1}{L} \left(\frac{M_1}{EI} + \frac{M_2}{EI} \right) \cdot L = \frac{M_1 + M_2}{EI}$$

... ..

... ..

$$\theta = \frac{1}{L} \left(\frac{M_1}{EI} + \frac{M_2}{EI} \right) \cdot L = \frac{M_1 + M_2}{EI}$$

$$\theta = \frac{M_1 + M_2}{EI}$$

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 4

~~AZ~~

$$\{n_a\} = [E_p] \{dr\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mu_a \\ \nu_a \\ w_a \end{Bmatrix} = [E_p] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad dy = dz = 0$$

$$\begin{matrix} 3 \times 1 & & 3 \times 3 & & 3 \times 1 \\ \left\{ \begin{matrix} \mu_a \\ \nu_a \\ w_a \end{matrix} \right\} & = & \begin{vmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & E_z \end{vmatrix} & \cdot & \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mu_a = E_x \cdot dx + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \cdot 0 + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \cdot 0 = E_x dx = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot dx$$

$$\nu_a = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot dx + E_y \cdot 0 + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cdot 0 = \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) dx$$

$$w_a = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot dx + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cdot 0 + E_z \cdot 0 = \frac{1}{2} \gamma_{xz} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx$$

PUNTO R

$$\{n_R\} = [E_p] \{dr\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mu_R \\ \nu_R \\ w_R \end{Bmatrix} = [E_p] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad dx = dz = 0$$

$$\begin{matrix} 3 \times 1 & & 3 \times 3 & & 3 \times 1 \\ \left\{ \begin{matrix} \mu_R \\ \nu_R \\ w_R \end{matrix} \right\} & = & \begin{vmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & E_z \end{vmatrix} & \cdot & \begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mu_R = E_x \cdot 0 + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \cdot dy + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \cdot 0 = \frac{1}{2} \gamma_{yx} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) dy$$

$$\nu_R = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot 0 + E_y \cdot dy + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cdot 0 = E_y dy = \frac{\partial \nu}{\partial y} \cdot dy$$

$$w_R = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot 0 + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cdot dy + E_z \cdot 0 = \frac{1}{2} \gamma_{yz} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) dy$$

A meno di termini infinitesimi di ordine superiore, le dilatazioni specifiche coincidono con i termini della diagonale della MATRICE di DEFORMAZIONE.

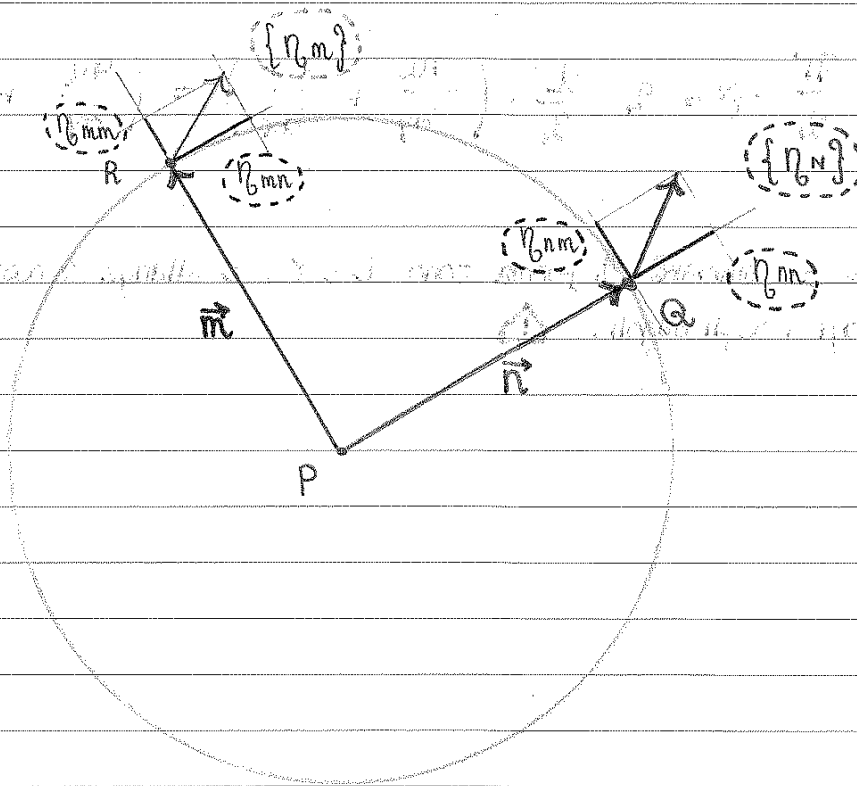
SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP 4

1/2

VARIATIONE delle COMPONENTI del TENSORE delle DEFORMAZIONI al VARIARE del SISTEMA di RIFERIMENTO 2d)

Devo considerare: una SFERA INFINITESIMA di raggio unitario con centro in P. VETTORE \vec{n} individuati sulla sfera il punto Q.



VETTORE SPOSTAMENTO del pt. Q: depurato dalle componenti di rototraslazione, e' fornito dalla relazione $\{u_n\} = [E] \cdot \{n\}$

PROIEZIONE dello spostamento $\{u_n\}$ sulla direzione n vale:

$$u_{nn} = \{n\}^T \{E\} \cdot \{n\}$$

SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP 3

A/B

$$\textcircled{1} \quad \left[\begin{array}{c} \epsilon_x n_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot n_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot n_z \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} \cdot n_x + \epsilon_y n_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cdot n_z \end{array} \right] \quad \textcircled{2}$$

$$\dots \frac{1}{2} \gamma_{zx} \cdot n_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cdot n_y + \epsilon_z n_z \quad \left(\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_z \end{array} \right) \quad \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}; \textcircled{2}; \textcircled{3} \equiv \text{COLONNE}$

$$\underline{q}_{mn} = \epsilon_x n_x m_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} n_y m_x + \frac{1}{2} \gamma_{xz} n_z m_x + \frac{1}{2} \gamma_{yx} n_x m_y + \epsilon_y n_y m_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} n_z m_y + \frac{1}{2} \gamma_{zx} n_x m_z + \frac{1}{2} \gamma_{zy} n_y m_z + \epsilon_z n_z m_z =$$

$$= \underline{\epsilon_x n_x m_x + \epsilon_y n_y m_y + \epsilon_z n_z m_z} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (n_y m_x + n_x m_y) + \frac{1}{2} \gamma_{xz} (n_z m_x + n_x m_z) + \frac{1}{2} \gamma_{yz} (n_z m_y + n_y m_z)$$

$$q_{nm} = [m]^T \cdot [\epsilon] \cdot [n]$$

$$\left(\begin{array}{ccc} m_x & m_y & m_z \end{array} \right) \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & n_x \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & n_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z & n_z \end{array} \right]$$

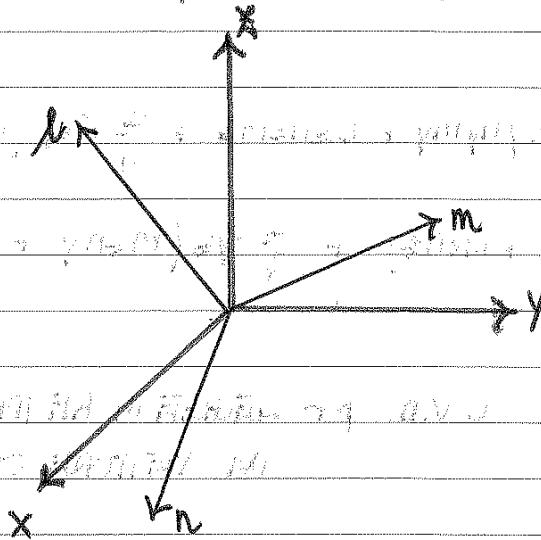
$$\left[\begin{array}{c} \epsilon_x m_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} m_z \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} m_x + \epsilon_y m_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} m_z \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} m_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} m_y + \epsilon_z m_z \end{array} \right] \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3}$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c} n_x \\ n_y \\ n_z \end{array} \right)$$

$\textcircled{1}; \textcircled{2}; \textcircled{3} \equiv \text{COLONNE}$

DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI / CAP. 4

A#
 Considero ora 3 DIREZIONI mutuamente ORTOGONALI n, m, l ruotate
 rispetto a quelle iniziali di RIF. x, y, z.



⇒ Posso esprimere la LEGGE di TRASFORMAZIONE della MATRICE delle
 DEFORMAZIONI per ROTAZIONI del SISTEMA di RIF.

MATRICE del RIFERIMENTO RUOTATO n, m, l indicata con $[E^*]$, ove
 * sta per ROTAZIONE

$$[E^*] = \begin{vmatrix} \epsilon_n & \frac{1}{2} \gamma_{nm} & \frac{1}{2} \gamma_{nl} \\ \frac{1}{2} \gamma_{nm} & \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{ml} \\ \frac{1}{2} \gamma_{nl} & \frac{1}{2} \gamma_{ml} & \epsilon_l \end{vmatrix}$$

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP 4

A.L.

COSA SONO LE DEFORMAZIONI PRINCIPALI e COME SI TROVANO

2e)

DOMANDA: esistono dei punti sulla SFERA INFINITESIMA che subiscono solo spostamenti RADIANI?

Dobbiamo definire dunque quelle DIREZIONI nelle quali avvengono le sole dilatazioni e non gli scorrimenti angolari.
 VETTORE $\{n\}$ // al VETTORE SPOSTAMENTO $\{u\}$

$$\Rightarrow \{u\} = \epsilon_n \{n\}$$

EQUAZIONI agli AUTOVALORI che regge il problema:

$$([E] - [I]\epsilon_n) \{n\} = \{0\}$$

[I] : MATRICE IDENTITA' (3x3)

$\epsilon_x - \epsilon_n$	$\frac{1}{2} \gamma_{yx}$	$\frac{1}{2} \gamma_{zx}$	n_x	=	0
$\frac{1}{2} \gamma_{xy}$	$\epsilon_y - \epsilon_n$	$\frac{1}{2} \gamma_{zy}$	n_y		
$\frac{1}{2} \gamma_{xz}$	$\frac{1}{2} \gamma_{yz}$	$\epsilon_z - \epsilon_n$	n_z		

ha SOLUZIONE OVIA del SISTEMA non ha SIGNIFICATO FISICO, dovendo i COSENI DIRETTORI obbedire alla CONDIZIONE di NORMALITA':

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

SOLUZIONE ≠ della OVIA, e rappresenta una DIREZIONE PRINCIPALE se il DETERMINANTE della MATRICE dei COEFFICIENTI si annulla.

DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 4

A. F.

3 CASI:

(A) $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow$ 3 DIREZIONI PRINCIPALI SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI

(B) $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow$ DIREZIONE $\{\eta_3\}$ è PRINCIPALE ASSIEME ALLE ∞^2 SOLUZIONI DIREZIONI ad essa ortogonali (giacitura principale 1a)

(C) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow$ le ∞^2 DIREZIONI sono tutte PRINCIPALI

IL TENSORE delle DEFORMAZIONI nel SISTEMA di RIFERIMENTO PRINCIPALE è DIAGONALE

ϵ_1	0	0
0	ϵ_2	0
0	0	ϵ_3

essendo nulli gli SCORRIMENTI ANGOLARI

A. F.

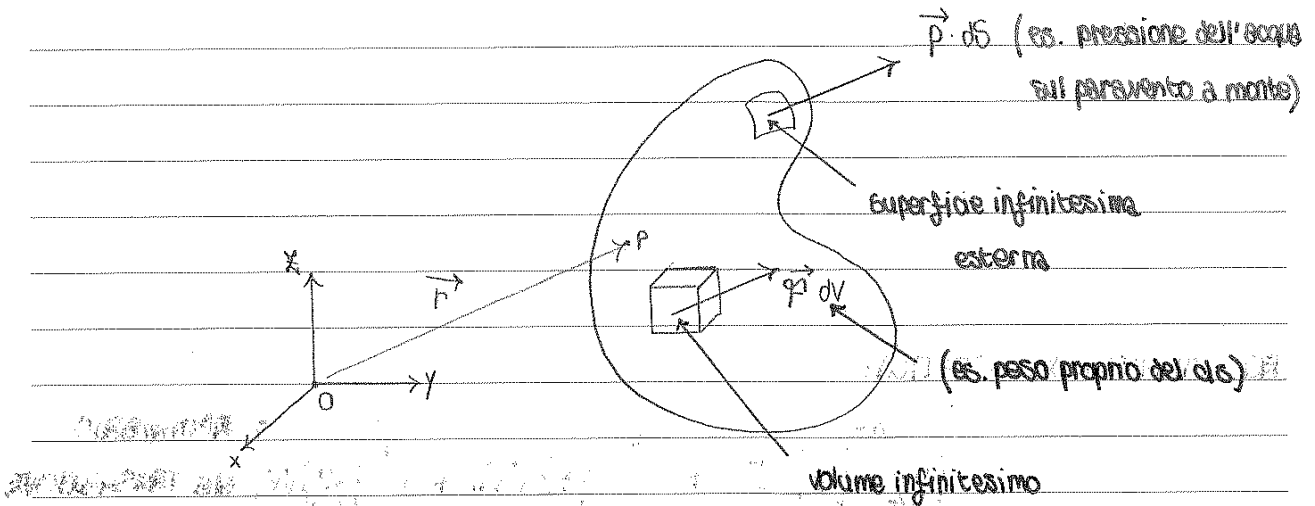
SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

CAP. 4

★

TENSORI degli SFORZI 3a)

CORPO in EQUILIBRIO sotto l'azione di FORZE DISTRIBUITE sull'unita' di superficie esterna $\{p\}$, e nell'unita' di volume $\{q\}$



Scrivo le eq. CARDINALI della STATICA

FORMULE di LAGRANGE

$$\int_S \{p\} dS + \int_V \{q\} dV = \{0\}$$

EQUILIBRIO alle TRASLAZIONI

$$\int_S \{r\} \wedge \{p\} dS + \int_V \{r\} \wedge \{q\} dV = \{0\}$$

EQUILIBRIO alle ROTAZIONI

$S \equiv$ FRONTIERA del CORPO $V \equiv$ VOLUME occupato dal CORPO

$\{r\} \equiv$ VETTORE POSIZIONE del pt. del CORPO

\Rightarrow CORPO e' DEFORMABILE $\Rightarrow \{r\} \approx$ vettore di POSIZIONE FINALE $\{r\} + \{n\}$

S e V si considerano al momento iniziale e NO S' e V' (sup. e vol. in seguito alla APPLICAZIONE dei CARICHI).

Immagino di sezionare il CORPO con un PIANO SECANTE Λ passante per un punto P e al CORPO.

SEZIONE \Rightarrow mi divide il corpo in 2 parti. Tali parti saranno in equilibrio sotto l'azione delle forze di sup. che quelle di vol. sia quelle relative alla sup. periferica esterna S_A , che quelle relative alla superficie della sezione Λ_A , e trasmesse alla sezione

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

CAP. 4

AZ.

EQ. CARDINALI della STATICA per la parte di SOLIDO B simili a quelle del SOLIDO A sostituendo il pedice A con B.

$\{t\}$ = VETTORE TENSIONE \Rightarrow si può definire una volta che si conoscono il vettore di POSIZIONE $\{r\}$ e il VETTORE $\{n\}$ alla AREEA $d\Omega$, $\{n\}$ \perp al PIANO di GIACITURA

$$\{t\} = f(\{r\}; \{n\}) = \{tn\}$$

$\{t\}$ \Rightarrow le COMPONENTI si possono scrivere in funzione del sistema di riferimento esterno

$$\{tn\} = t_{nx} \cdot \hat{i} + t_{ny} \cdot \hat{j} + t_{nz} \cdot \hat{k}$$

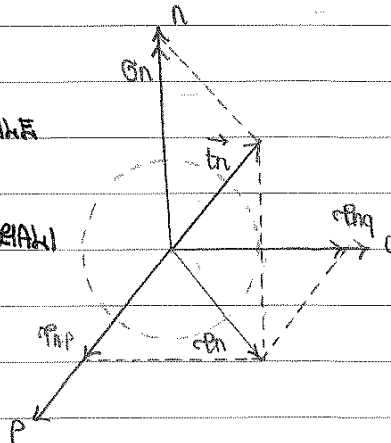
$\{t\}$ \Rightarrow le componenti si possono scrivere in funzione di un sistema di riferimento locale, con uno degli assi coordinati coincidente con la normale all'area $d\Omega$, e gli altri 2 giacenti sul piano di SEZIONE

$\vec{n}, \vec{p}, \vec{q}$ vettori della TERNA LOCALE

σ_n = COMPONENTE NORMALE

τ_{np}, τ_{nq} COMPONENTI TANGENZIALI

sugli ASS p, q .



\vec{n} varia in ∞^2 modi

$$\{tn\} = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_{np} \vec{p} + \tau_{nq} \vec{q}$$

RISULTANTE di τ_{nq} e τ_{np} sul piano secante \Rightarrow COMPONENTE TANGENZIALE TOTALE τ_n

$$\tau_n = \sqrt{\tau_{nq}^2 + \tau_{np}^2}$$

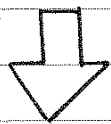
SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 4

~~A~~

$$\Rightarrow \int \{tn\} d\Omega_n = + \int \{tx\} n_x d\Omega_n + \int \{ty\} n_y d\Omega_n + \int \{tz\} n_z d\Omega_n$$

DIVIDO $\times d\Omega_n$

$$\{tn\} = + \{tx\} n_x + \{ty\} n_y + \{tz\} n_z \quad \text{ESPRESSIONE detta a CAUCHY}$$



può essere posta in FORMA MATRICIALE
 considerando le COMPONENTI SPECIFICHE
 di TENSIONE, cioè le componenti dei
 vettori $\{tx\}$, $\{ty\}$, $\{tz\}$, sugli
 assi X, Y, Z

t_{xx} componente normale alla faccia \perp all'asse x	t_{nx}	=	t_{xx}	t_{yx}	t_{zx}	n_x
	t_{ny}		t_{xy}	t_{yy}	t_{zy}	n_y
	t_{nz}		t_{xz}	t_{yz}	t_{zz}	n_z

NOTAZIONE TRADIZIONALE

COME VARIA LO SFORZO SULLA GIACITURA di n VARIANDO n	t_{nx}	=	σ_x	τ_{yx}	τ_{zx}	n_x	CONDIZIONE di EQUILIBRIO di CAUCHY (1789-1857)
	t_{ny}		τ_{xy}	σ_y	τ_{zy}	n_y	
	t_{nz}		τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z	n_z	

EQUAZIONI di EQUILIBRIO

σ \equiv componenti normali

τ \equiv componenti tangenziali

\Rightarrow coeff. di $T_n = 9$

$T_n = \infty^5$ per Hp iniziali

FORMA COMPATTA

$$\{tn\} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} \cdot \{n\}$$

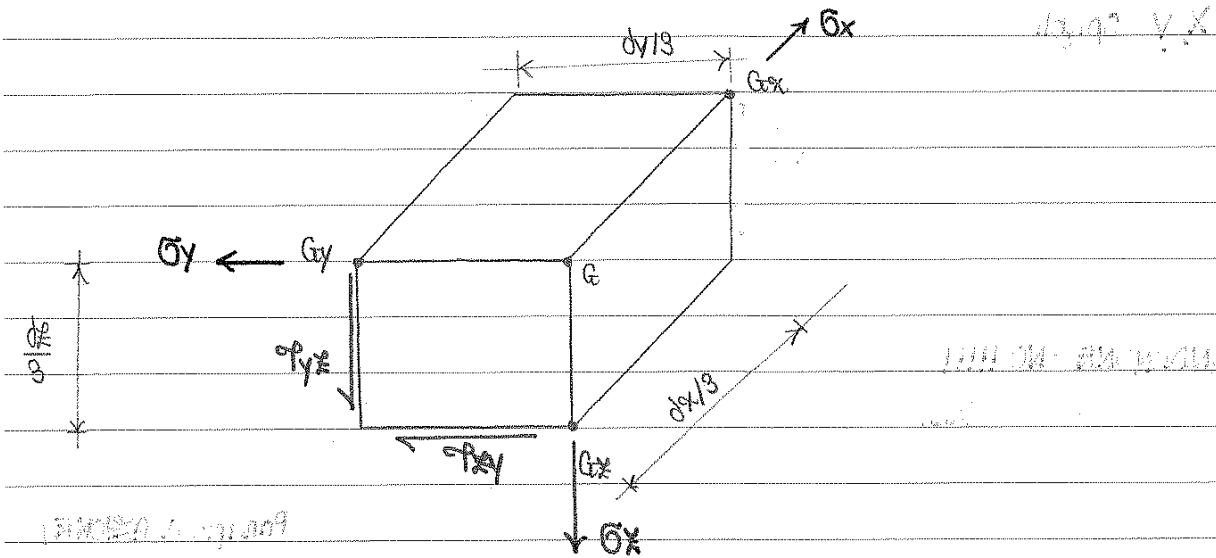
SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

CAP. 4
~~1.2~~

$G \equiv$ baricentro dell'AREOLA TRIANGOLARE $d\Omega_n$. Ha per proiezione sui piani coordinati i baricentri delle areole $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$.

VETTORI TENSIONE \Rightarrow sono applicati a tali baricentri G_x, G_y, G_z .

CONDIZIONI di EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto agli assi G_x, G_y, G_z .



COMPONENTI SPECIALI DELLA TENSIONE $G_x, G_y, G_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ presentano braccio nullo rispetto all'asse G_x . Uniche 2 componenti che contribuiscono alla ROTAZIONE son τ_{yz} e τ_{xy} .

$$G_x + \tau_{yz} \cdot \frac{dz \cdot dy}{2} \cdot \frac{dy}{3} - \tau_{xy} \cdot \frac{dy \cdot dz}{2} \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

$$\frac{4}{3} d\Omega_y \cdot dy = \frac{4}{3} d\Omega_z \cdot dz = dV$$

$dV =$ volume del Tetraedro elementare

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$[G]$ matrice delle tensioni \rightsquigarrow SIMMETRICA \Rightarrow 6 componenti significative

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \rightsquigarrow \text{RECIPROCA}^{\circ} \text{ delle } \tau$$

Dato un certo spigolo x , le τ possono essere entranti oppure uscenti.

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 4

COME VARIANO LE COMPONENTI DI VARIARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

A.L.
30)

COMPONENTE NORMALE ALL'AREA DI VERSORE $\{n\}$ vale

$$\sigma_n = t_{nn} = \{n\}^T \{\sigma\} \{n\}$$

PROIEZIONE DEL VETTORE TENSIONE $\{t_n\}$ su una generica direzione di VERSORE $\{m\}$ vale

$$t_{nm} = \{m\}^T \{\sigma\} \{n\}$$

VETTORE TENSIONE t_m PROIEZIONE SU una direzione di versore $\{n\}$ vale:

$$t_{mn} = \{n\}^T \{\sigma\} \{m\}$$

LEGGE di RECIPROCA' per le PROIEZIONI del VETTORE TENSIONE

$$t_{nm} = t_{mn} = \sigma_x n_x m_x + \sigma_y n_y m_y + \sigma_z n_z m_z$$

$$+ 2\tau_{xy} (n_x m_y + m_x n_y)$$

$$+ 2\tau_{xz} (n_x m_z + m_x n_z)$$

$$+ 2\tau_{yz} (n_y m_z + m_y n_z)$$

ove

• n_x, n_y, n_z : COMPONENTI del VERSORE n

• m_x, m_y, m_z : COMPONENTI del VERSORE m

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 4

A. E.

COSA SONO LE TENSIONI PRINCIPALI e COME SI TROVANO

3d)

Determinare se esistono delle giaciture, rispetto le quali si hanno sole componenti normali di TENSIONE. \Rightarrow $\{n\}$: VETTORE NORMALE alla giacitura dovrà essere // al VETTORE TENSIONE $\{tn\}$

$$\{tn\} = \sigma_n \cdot \{n\}$$

EQUAZIONI agli AUTOVALORI del PROBLEMA

$$([\sigma] - [\nu] \sigma_n) \cdot \{n\} = \{0\}$$

ove con $[\nu]$ si intende la MATRICE IDENTITÀ (3x3) Analogia con il caso della DEFORMAZIONE.

$\sigma_x - \sigma_n$	τ_{yx}	τ_{zx}	n_x	=	0
τ_{xy}	$\sigma_y - \sigma_n$	τ_{zy}	n_y	=	0
τ_{xz}	τ_{yz}	$\sigma_z - \sigma_n$	n_z	=	0

La soluzione OVIA del SISTEMA non ha significato FISICO perché i coseni direttori del vettore \vec{n} devono obbedire alla legge di normalità ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$)

La soluzione è diversa dalla OVIA, e rappresenta una DIREZIONE PRINCIPALE se e solo se il DETERMINANTE della MATRICE dei coefficienti si annulla.

Tale condizione fornisce una EQUAZIONE ALGEBRICA di 3° GRADO nell'incognita σ_n :

$$\sigma_n^3 - I_I \sigma_n^2 - I_{II} \sigma_n - I_{III} = 0$$

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 7

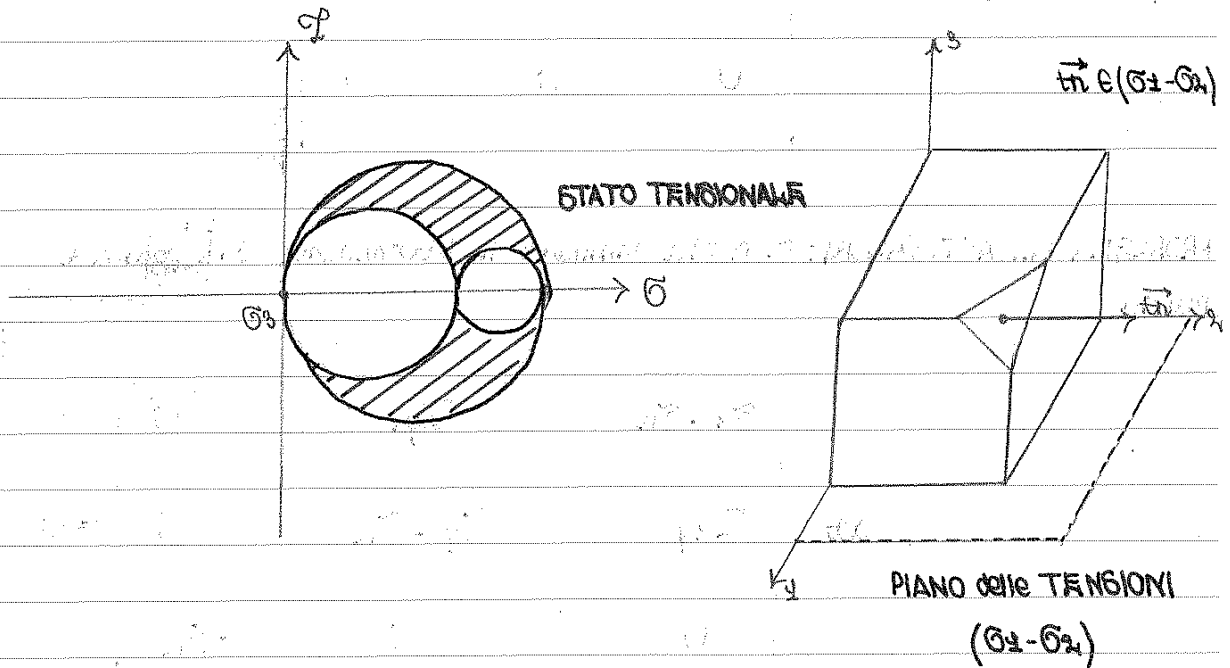
A.L.

DIMOSTRAZIONE delle REGOLE di COSTRUZIONE dei CERCHI di MOHR, per lo STATO TENSIONALE PIANO 3e)

STATO TENSIONALE: si dice PIANO se il VETTORE TENSIONE è in ogni caso ad una MEDESIMA GIACITURA, indipendentemente dalla SEZIONE scelta.

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE perché uno STATO TENSIONALE sia PIANO è che una delle TRE TENSIONI PRINCIPALI si ANNULLI.

ES. $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0 \Rightarrow$ VETTORE TENSIONE è al piano delle TENSIONI $\sigma_1 - \sigma_2$, qualsiasi sia l'ORIENTAMENTO dell'AREA $d\Omega_n$.



EQUAZIONE

τ_{n1}	=	$\sigma_1 n_1$	0	0	n_1
τ_{n2}	=	0	$\sigma_2 n_2$	0	n_2
τ_{n3}	=	0	0	0	n_3

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 4

A.L.

$(\sigma_x + \sigma_y)$ traccia del minore significativo del TENSORE degli SFORZI;

$(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \equiv$ DETERMINANTE di tale MINORE

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

RISULTATO: si può ottenere anche imponendo che il MINORE PRINCIPALE sia diagonale.

$$[\sigma^*] = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Annullando il termine non diagonale si ha:

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta - \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)}}{2} \cdot \sin 2\theta = 0$$

ANGOLO di cui deve ruotare il sistema di riferimento XY per raggiungere quello principale:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

con $-\pi/4 < \theta < \pi/4$

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 4

cosa si intende per TENSORE IDROSTATICO e DEVIATORICO

3f)

Ogni TENSORE degli SFORZI $[\sigma]$, relativo ad un TERNA GENERICA di RIFERIMENTO, sarà rappresentabile come SOMMA di 2 COMPONENTI:

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

ove $[\sigma^i]$ = TENSORE IDROSTATICO

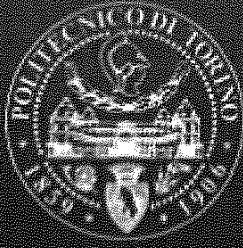
$$[\sigma^i] = \begin{vmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{vmatrix}$$

e $[\sigma^d]$ = TENSORE DEVIATORICO

$$[\sigma^d] = \begin{vmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{vmatrix}$$

CARATTERISTICHE TENSORE IDROSTATICO :

- non dipende dalla terma di riferimento essendo funzione soltanto della traccia
- $\bar{\sigma}$ \Rightarrow componente detta IDROSTATICA, poiché i liquidi in pressione si scambiano sforzi interni di tale tipo. Tensioni PRINCIPALI tutte e tre uguali dunque tutte le direzioni sono PRINCIPALI
- Nei fluidi in pressione il vettore TENSIONE agisce sempre ortogonalmente a qualsivoglia areola $d\Omega$, e' di compressione.
- Nei fluidi il vettore TENSIONE ha modulo pari alla pressione del fluido.



Politecnico di Torino



Anno Accademico 2012-13

Facoltà di INGEGNERIA EDILE

D.I.S.E.G.

Corso di SCIENZA delle COSTRUZIONI

Docente : Prof. Ing. Silvio Valente

DOMANDE ESAME ORALE

Capitolo 3. Scienza delle costruzioni Alberto Carpinteri

A cura di : Alessandro Zito



DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 8

A.S.

EQUILIBRIO lungo la DIREZIONE X

$$A. \quad \left(\begin{array}{c} + \\ \rightarrow x \end{array} \right) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx (dy dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz (dx dy) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy (dx dz) + f_x dx dy dz = 0$$

OSSERVIAMO:

- gli INCREMENTI di TENSIONE sono moltiplicati per le aree elementari su cui esse agiscono
- la FORZA di VOLUME è moltiplicata per il volume elementare in cui essa agisce.

Se DIVIDIAMO l' EQUAZIONE A. per il VOLUME ELEMENTARE $dx dy dz$, si ottiene le PRIME delle EQUAZIONI INDEFINITE dell' EQUILIBRIO:

$$\left(\begin{array}{c} + \\ \rightarrow x \end{array} \right) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

Analogamente otteniamo le EQUAZIONI INDEFINITE dell' EQUILIBRIO per le direzioni y ed z

$$\left(\begin{array}{c} y \\ \uparrow \end{array} \right) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} z \\ \swarrow \end{array} \right) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

N.B. $\sigma(f_{ix})$: i indica la GIACITURA
 x : indica la DIREZIONE

SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

A.S.

Espresso la relazione B. ottenendo

$$\begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Alle condizioni di EQUIVALENZA al CONTORNO A. si può dare una forma **MATRICIALE** esplicita

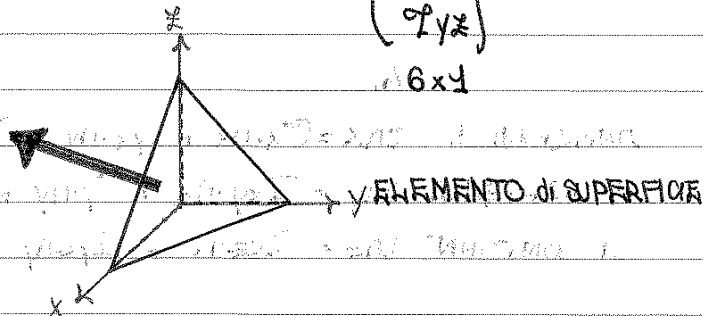
6 componenti: derivano dalla reciprocità delle forze

$$\begin{matrix} 3 \times 6 \\ \left. \begin{array}{c} n_x \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 0 & 0 & n_z \\ n_y & 0 & 0 \\ 0 & n_x & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \times 1 \\ \left. \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \times 1 \\ \left. \begin{array}{c} p_x \\ p_y \\ p_z \end{array} \right\} \end{matrix} *$$

6×1

* Pressioni che si verificano al contorno.

Sono quelle pressioni che si applicano sulla faccia inclinata. La superficie racchiude il solido.



FORMA COMPATTA $\Rightarrow [N]^T \cdot \{\sigma\} = \{p\}$ formulata per descrivere l'equilibrio al CONTORNO

DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

1.2:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In forma COMPATTA:

EQUAZIONI STATICHE $[a]^T \{ \delta \} + \{ f \} = \{ 0 \}$

OSSERVAZIONE:

- L' OPERATORE DIFFERENZIALE STATICO è il TRASPOSTO di quello CINEMATICO:

$$[a]_{STATICO} = [a]_{CINEMATICO}^T$$

PROFONDA interconnessione

tra i 2 OPERATORI

MATRICIALI

ANALOGIA: MECCANICA dei CORPI RIGIDI & MECCANICA dei CORPI DEFORMABILI

MATRICE STATICA = TRASPOSTA della

MATRICE CINEMATICA

DOMANDE ORALE SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 8

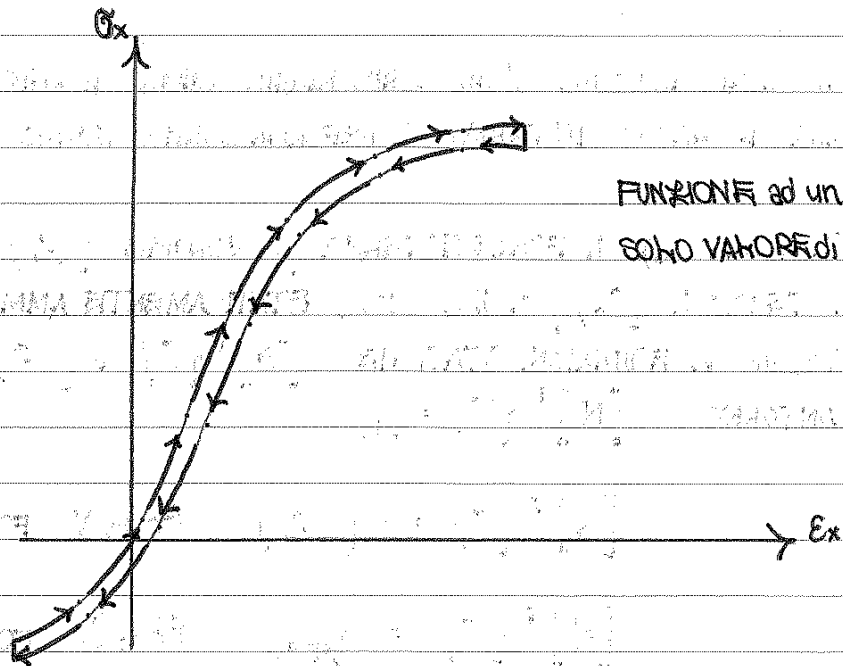
4e)

DEFINIZIONE del COMPORTAMENTO ELASTICO

CORPO ELASTICO: un CORPO DEFORMABILE e' ELASTICO, quando la sua ENERGIA di DEFORMAZIONE, cioè il LAVORO eseguito dall'ESTERNO per portarlo in un certo STATO TENSORIALE $\{\sigma\}$ o in un certo STATO DEFORMATIVO $\{\epsilon\}$, non dipende dal PROCESSO di CARICO (cioè dagli eventi precedenti), ma solo dallo STATO FINALE. L'ENERGIA di DEFORMAZIONE e' in questo caso una FUNZIONE di STATO.

IL LAVORO di DEFORMAZIONE e' rappresentato dal POTENZIALE ELASTICO Φ , coincide con l'area sottesa dalla CURVA $\sigma_x(\epsilon_x)$. Scaricando completamente il CORPO, non vi e' DISSIPAZIONE di ENERGIA e l'ENERGIA ELASTICA IMMAGAZINATA viene TOTALMENTE RESTITUITA.

COMPORTAMENTO ELASTICO



DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

A.Z.

Si ha pertanto

$$dW_e = \int_S \{p\}^T \{d\eta\} dS + \int_V \{f\}^T \{d\eta\} dV$$

COMULABILITA' del CARICO (es. CARICO della NEVE)
SPOSTAMENTI INDOTTI nell'ARCO del TEMPO → PASSO

PROCESSO di CARICO

$$dW_i = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} dV$$

Per il P.H.V vale la seguente UGUAGLIANZA:

$$dW_i = dW_e$$

UN CORPO DEFORMABILE si DEFINISCE ELASTICO quando il LAVORO INFINITESIMO dW_i risulta essere un DIFFERENZIALE ESATTO

Perché il LAVORO INFINITESIMO INTERNO dW_i sia un DIFFERENZIALE ESATTO, è opportuno che lo sia anche l'INTEGRANDO

$$d\Phi = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} \Rightarrow \forall d\varepsilon \in \mathbb{R}^6$$

6 FUNZIONI INCOGNITE ← describe l'equilibrio → describe le deformazioni → es. di vettore UNITARIO una componente $\neq 0$, le altre 5 sono 0.

$dW_i = dW_e$ legame tra $\{\sigma\}$ & funzioni di x, y, z campo tensoriale 6 funzioni di x, y, z 5 sono 0.

di EQUAZIONI ← campo deformativo

le FUNZIONI

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

deve essere una FUNZIONE di STATO ed è detta POTENZIALE ELASTICO

Dalla FUNZIONE Φ è possibile dedurre le COMPONENTI di TENSIONE mediante DERIVAZIONE PARZIALE.

DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP.8

A.F.

II DIFFERENZIALE TOTALE della FUNZIONE ψ può esprimersi come segue:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

che possiamo inscrivere come:

$$d\psi = \epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

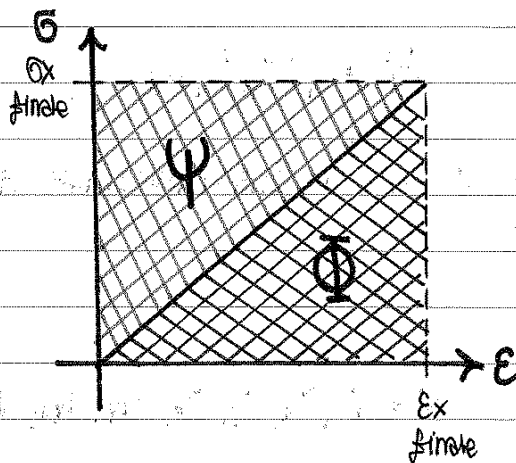
dalla quale possiamo ottenere le COMPONENTI di DEFORMAZIONE:

$$\bullet \epsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} \quad \bullet \epsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} \quad \bullet \epsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z}$$

$$\bullet \gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} \quad \bullet \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} \quad \bullet \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$

L'ENERGIA ELASTICA COMPLEMENTARE e' L'AREA SOTTO LA CURVA $\epsilon_x(\sigma_x)$ e l'ASSE σ_x .

NEI CASO di UNIDIMENSIONALE e LINEARE risulta che $\psi = \Phi$



SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

Δ^2
 MATRICE HESSIANA = MATRICE SIMMETRICA perche' le DERIVATE MISTE
 SONO UGUALI

INTERVENE DELL'ENERGIA DI DEFORMAZIONE del SOLIDO ELASTICO LINEARE

Se vogliamo fare delle previsioni sul comportamento di una struttura bisogna cercare di legare ϵ con σ .

$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right.$ POTENZIALE ELASTICO

$$\Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

CONDIZIONI che devono essere soddisfatte dal POTENZIALE ELASTICO per scrivere la MATRICE HESSIANA:

$$\Phi(\{0\}) = 0$$

\curvearrowright VETTORE

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} \right)_0 = (\sigma_x)_0 = 0$$

\curvearrowright SCALARE

...

Se ci mettiamo nell'intorno di zero

$$\Rightarrow \|\epsilon\| \ll 1$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 = (\tau_{yz})_0 = 0$$

\downarrow
 Hp che fa si' che i termini di
 3° grado siano trascurabili

SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

A.S.

CASO LINEARE

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow \Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

\Rightarrow POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

$$\Psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\}$$

essendo $\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$

$\Psi \equiv$ forma QUADRATICA delle COMPONENTI di TENSIONE.

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

A.S.

Richiamo le EQ. di EQUIVALENZA al CONTORNO ($[N]^T \{G\} = \{p\}$) e suppongo che esse valgano su una certa porzione S_p della sup. ESTERNA del CORPO, e che sulla porzione COMPLEMENTARE S_n venga imposto un CAMPO CONGRUENTE di SPOSTAMENTI $\{u_0\}$



PROBLEMA ELASTICO 3-D

sintetizzato come:

FUNZIONI INCOGNITE = 3

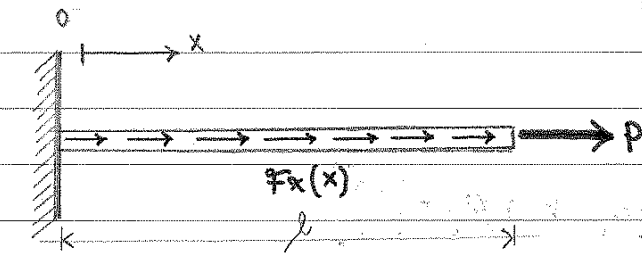
3 EQ. di EQUILIBRIO

$$[L] \{u\} = -\{p\} \quad \forall PE \in V$$

$$([N]^T [H] [a]) \{u\} = \{p\} \quad \forall PE \in S_p$$

$$\{u\} = \{u_0\} \quad \forall PE \in S_n$$

coseni direttori con lo stesso pedice cedimenti al contorno



CORPO UNIDIMENSIONALE ELASTICO

LINEARE fissato ad un estremo,

Sottoposto ad una TRAZIONE P

all'estremo opposto e ad una distribuzione di FORZE ASSIALI $q_x(x)$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{E\} = [e] \{u\} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

TENSIONE: PROPORZIONALE alla DEFORMAZIONE \Rightarrow costante di proporzionalità e rappresentata dal MODULO ELASTICO E

$$[G] = \begin{Bmatrix} E & & & & & \\ & \frac{du}{dx} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \end{Bmatrix}$$

SCIENZA delle COSTRUZIONI **CAP.8**

A.2.

$u(0) = 0$ Altra condizione al contorno $\Rightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow EA \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -q(x)$ per $0 \leq x \leq l$

$EA \cdot \frac{du}{dx} = P$ per $x = l$

$u = 0$ per $x = 0$

$l =$ LUNGHEZZA della BARRA

$EA =$ RIGIDEZZA LONGITUDINALE della BARRA

Individuato il campo degli spostamenti $\{u\}$, se si ripercorre il cammino inverso e si riapplicano le equazioni cinematiche e quelle riguardanti il vettore delle tensioni in funzione della Hessiana ($\{\sigma\} = [N] \{u\}$), allora si possono determinare il CAMPO DEFORMATIVO $\{\epsilon\}$ e il CAMPO TENSIONALE $\{\sigma\}$.

SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP. 8

A.S.

Applico ora il P.L.V al SISTEMA DIFFERENZIALE

$$L_e = \int_V \{0\}^T \{\Delta \eta\} dV + \int_S \{0\}^T \{\Delta \eta\} dS + \int_S \{\Delta R\}^T \{0\} dS$$

con $\{\Delta R\}$ = DIFFERENZA delle REAZIONI VINCOLARI

$$L_e = \int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \epsilon\} dV \Rightarrow \text{Rappresenta il DOPPIO del POTENZIALE ELASTICO}$$

$$\Rightarrow 2 \int_V \Phi (\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \dots, \Delta \gamma_{yx}) dV = 0$$

$\Phi \equiv$ FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA \rightarrow si annulla solo quando l'integrando è nullo in \forall pt del CORPO ELASTICO.

\rightarrow CONDIZIONE che si VERIFICA SOLO quando, in ogni pt, si ha:

$$\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_y = \dots = \Delta \gamma_{yx} = 0$$

e cioè SOLO quando le SOLUZIONI A e B COINCIDONO !!!

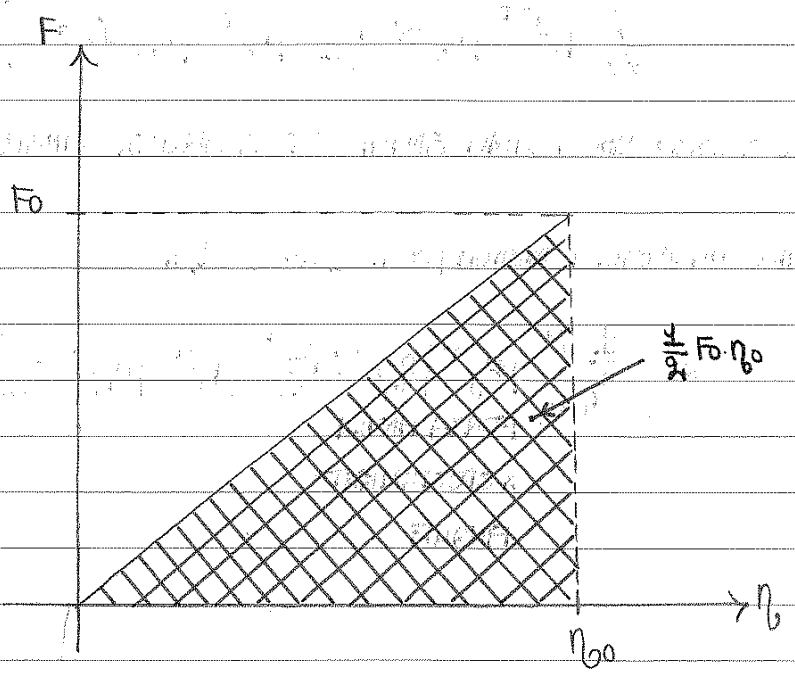
SCIENZA delle COSTRUZIONI IN MECCANICA TRAVE CAP. 8

A.S.

SOTTO l'AZIONE del CARICO F_0 , l'ABBASSAMENTO in MECCANICA varia da 0 a η_0 .

APPLICAZIONE del TEOREMA di CHAPEYRON, il LAVORO di DEFORMAZIONE compiuto sulla TRAVE vale:

$$L_{def} = \int_0^{\eta_0} F(\eta) \cdot d\eta = \frac{1}{2} F_0 \cdot \eta_0$$



SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

A.2.

Immaginiamo ora che il PROCESSO di CARICO venga INVERTITO rispetto al precedente. Si applichino cioè prima le forze $\{P_b\}$, $\{P_a\}$ e poi le forze $\{P_b\}$ e $\{P_a\}$. Il LAVORO di DEFORMAZIONE TOTALE sarà allora esprimibile come segue:

$$L_{b+a} = L_b + L_a + L_{ba}$$

ove il LAVORO mutuo delle FORZE $\{P_b\}$, $\{P_a\}$, per gli spostamenti ulteriori $\{r_a\}$, vale:

$$L_{ba} = \int_V \{P_b\}^T \{r_a\} dV + \int_S \{P_b\}^T \{r_a\} dS$$

Se confrontiamo L_{ab} e L_{ba} , osservando che il PROCESSO di CARICO risulta essere indipendente per il LAVORO TOTALE di DEFORMAZIONE; e che il CORPO è supposto come ELASTICO \Rightarrow si ottiene l'uguaglianza dei 2 lavori mutui:

$$L_{ab} = L_{ba} \quad (\text{DERIVA da } L_a + L_b + L_{ab} = L_a + L_b + L_{ba})$$

In GENERALE si ha che i LAVORI MUTUI di 2 SISTEMI di FORZE sono UGUALI tra LORO e differenti da ZERO.

Quando in PARTICOLARE si ha essi sono entrambi NULLI allora i 2 SISTEMI di FORZE si dicono ENERGETICAMENTE ORTOGONALI, e il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI può essere diventa VALIDO anche per il LAVORO di DEFORMAZIONE.

2 SISTEMI di FORZE sono ENERGETICAMENTE ORTOGONALI quando il LAVORO di TRASCINAMENTO è NULLO.

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

A2

$$\Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Tali COMPONENTI rappresentano il POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE nel caso di ELASTICITA' LINEARE e ISOTROPIA.

COMPONENTI della DEFORMAZIONE: si ottengono derivando PARZIALMENTE Ψ

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}}$$

44

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

1/8.

Bisogna imporre che:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Si ottiene: UN SISTEMA di 4 DISQUAZIONI

• $\frac{\nu}{E} > 0$

• $\frac{\nu}{E^3} (1+\nu)^2 (1-2\nu) > 0$

• $\frac{\nu}{E^2} (1-\nu^2) > 0$

• $\frac{E}{2(1+\nu)} > 0$

che determinano le seguenti SOLUZIONI:

• $E > 0$

• $-1 < \nu < +1$

• $\nu < 1/2$

• $\nu > -1$

} $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ ma in REALTÀ $0 < \nu < \frac{1}{2}$ (poiché per molti MATERIALI non esiste $\nu < 0$)

$\nu \Rightarrow$ COEFFICIENTE di POISSON $\Rightarrow \nu = \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right|$

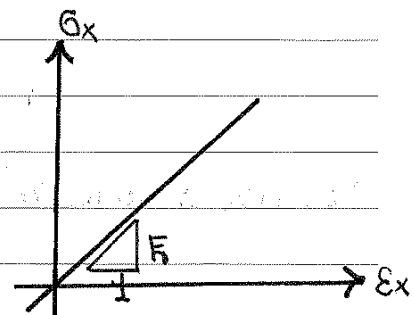
rappresenta il RAPPORTO tra le
DILATAZIONI INDOTTE INDOTTE
NELLE DIREZIONI ORTOGONALI
a quella di SOLLECITAZIONE
e la DILATAZIONE nella DIRE-
ZIONE di SOLLECITAZIONE.

$E \Rightarrow$ MODULO ELASTICO NORMALE o di YOUNG



Rappresenta il COEFFICIENTE

ANGOLARE α della RETTA passante per
l'ORIGINE che descrive la FASE di CARICAMENTO



SCIENZA delle COSTRUZIONI - STATICA - CAP. 8

A.2.

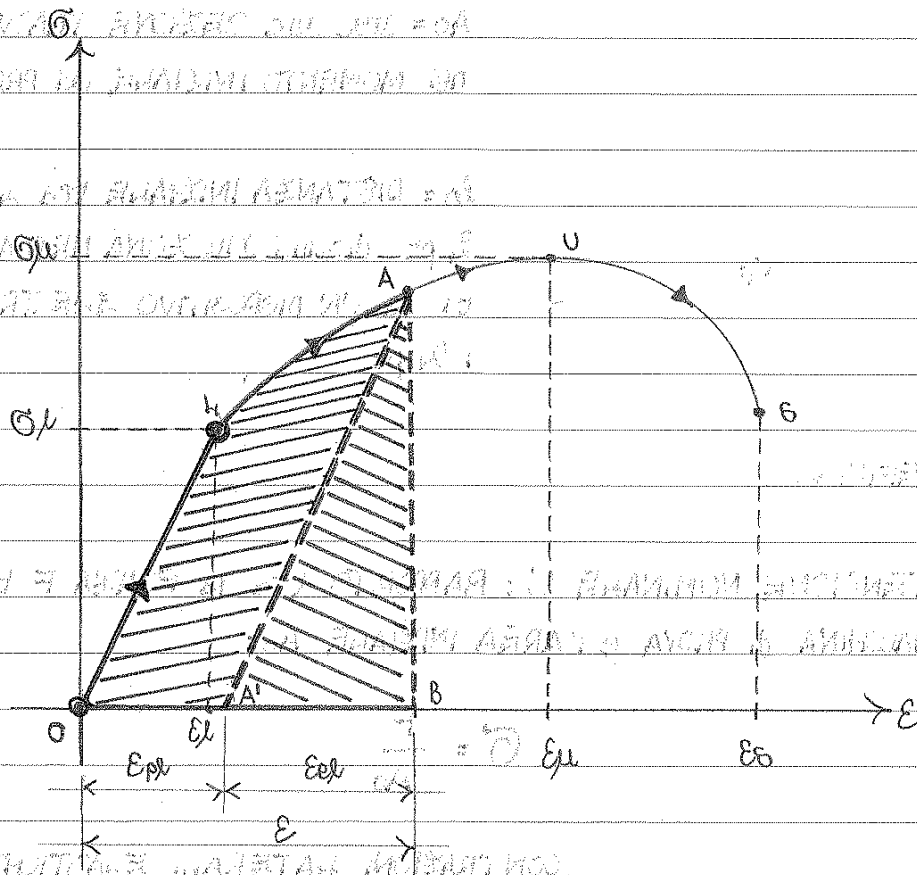
tra i 2 SENSORI, Δl , e la DISTANZA INIZIALE l_0

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

DILATAZIONE MEDIA, relativamente al tratto SOTTO CONTROLLO

Durante la PROVA, e specialmente in REGIME non LINEARE, la DILATAZIONE non è UNIFORME e quindi non è PUNTUALMENTE COINCIDENTE con quella MEDIA

PIANO σ - ϵ



TRATTO Oh: DIAGRAMMA LINEARE ed ELASTICO

Da h in poi: la RISPOSTA non è più LINEARE ed il MATERIALE comincia a **ONERVARSI**.

Scaricando il PROVINO: si evidenziano delle DEFORMAZIONI PERMANENTI ϵ_{pl}

In questo MODO: parte dell' ENERGIA di DEFORMAZIONE è RESTITUITA dal

SISTEMA a seguito di UNA DEFORMAZIONE ELASTICA (AREA ABA')

SCIENZA delle COSTRUZIONI / CAP. 8

A. S.

l'area sottesa dalla curva $G(w)$ rappresenta l'ENERGIA DISSIPATA SULLA SUPERFICIE UNITARIA di FRATTURA.

$G(w)$: LEGGE COSSIVA \Rightarrow CARATTERISTICA del MATERIALE.

ENERGIA di FRATTURA G_{IC} = PROPRIETA' INTRINSECA del MATERIALE

UNIVERSITÀ LUIGI EINAUDI

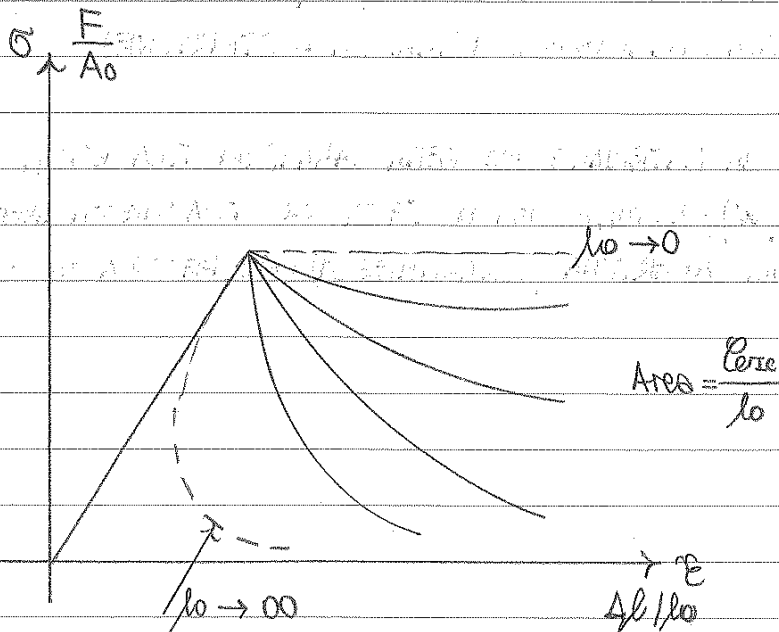
$$G_{IC} = \int_0^{w_0} G(w) dw$$

ENERGIA diSSIPATA sulla SUPERFICIE della FRATTURA vale $G_{IC} \cdot A_0$

G_{IC} : DIMENSIONI di un LAVORO

= anche all'ENERGIA diSSIPATA nel VOLUME (in assenza di INCRUDIMENTO POSITIVO).

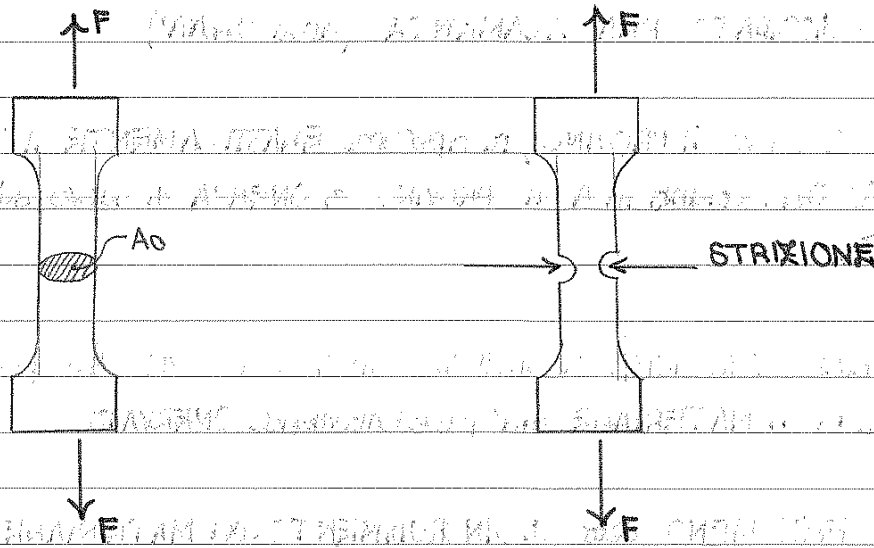
PIANO σ - ϵ : TRANSIZIONE descritta da un solo tratto ELASTICO LINEARE e da un VENTAGLIO di RAMI, SOFTENING, al variare della LUNGHEZZA



SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

A. Z.



MATERIALI DUTTILI: es. ACCIAI ad ALTO TENORE di CARBONIO (cavi ascensori, funivie, travi precomprese). Presentano comportamenti simili a TRAZIONE e COMPRESSIONE.

MATERIALI FRAGILI mostrano comportamenti considerevolmente diversi.

ES. CALCESTRUZZE (nei c/c si vede ad occhio nudo l'eterogeneità, un punto può essere più debole di un altro). Fessili sono DUTTILI a COMPRESSIONE mentre FRAGILI a TRAZIONE. RESISTENZA ULTIMA a COMPRESSIONE \approx di un ORDINE di GRANDINEZZA MAGGIORE di quella a TRAZIONE.

PROVA di TRAZIONE su di un C/S: se condotta pilotando il CARICO, mostra una risposta approssimativamente ELASTICA e LINEARE e poi, all'improvviso, una brusca CADUTA del CARICO STRESS, che corrisponde alla formazione di una FESSURA.

MODERNE TECNICHE ELETTRONICHE permettono oggi di pilotare la DEFORMAZIONE ϵ (OUTPUT = TENSIONE σ).

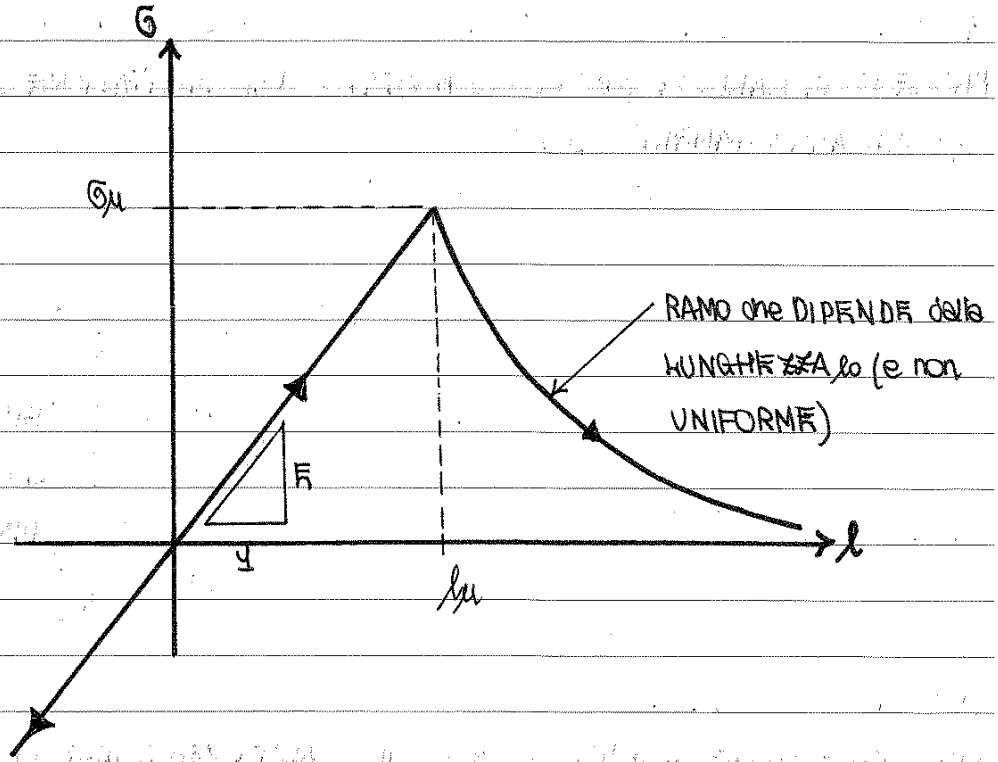
Si evidenzia la CURVA di RISPOSTA POST-ROTTURA del materiale CEMENTIZIO. Recentemente ci si è reso conto dell'esistenza di un esteso ramo di incedimento negativo (in INCREASE SOFTENING) e della possibilità da parte del MATERIALE di dissipare una NOTEVOLE QUANTITÀ di ENERGIA per

SCIENZA delle COSTRUZIONI

CAP. 8

A.F.

MATERIE FRAGILI



DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 8

A.S.

TENSIONE AMMISSIBILE → consente le **CONDIZIONI DI SICUREZZA**

è rappresentata da una frazione della Tensione nominale

CRITERI DI RESISTENZA

MATERIALI DUTTI

$$-\frac{\sigma_p}{\delta} < \sigma < \frac{\sigma_p}{\delta}$$

MATERIALI FRAGILI

$$-\frac{\sigma_c}{\delta} < \sigma < \frac{\sigma_{tr}}{\delta}$$

$\delta > 1 \Rightarrow$ PARAMETRO detto COEFFICIENTE DI SICUREZZA

$\delta = 4,5$ per i MATERIALI

$\delta = 6$ per i MATERIALI

DUTTI

FRAGILI

Aumento δ riduce la

Tensione, e va a favore del materiale ha comportamento lineare

$\delta_{fragili} > \delta_{duttali} \Rightarrow$ meccanismi di danneggiamento più instabili

MAX δ per ospedali in zona sismica, MIN δ per tralicci in alta montagna

ELEMENTI STRUTTURALI \Rightarrow non funzionano in regime uniaassiale

Le prove che di usualmente si effettuano in laboratorio sono **UNIASSIALI**

ESIGENZA: correlare gli stati tensionali biassiali e triassiali a quelli uniaassiali.

Definizione di una funzione del TENSORE DEI FORZI della TENSIONE IDEALE

DOMANDE ORALI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 8

45.

CRITERIO DI TRESCA

CRITERIO DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE

46)

Considera le tensioni tangenziali responsabili dello snervamento che subisce il materiale quando è soggetto ad uno stato tensionale triassiale

Rappresentare sul piano di MOHR del criterio di TRESCA

SEMPLICE

TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA τ_{max}

è uguale alla metà delle differenze tra le tensioni principali estreme

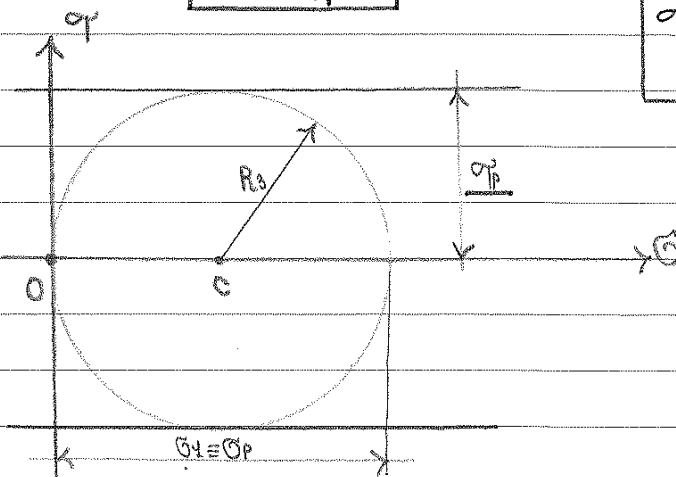
$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

τ_{max} ≡ il raggio massimo dei TRE CERCHI DI MOHR

CONDIZIONE di SNERVAMENTO UNIASSIALE

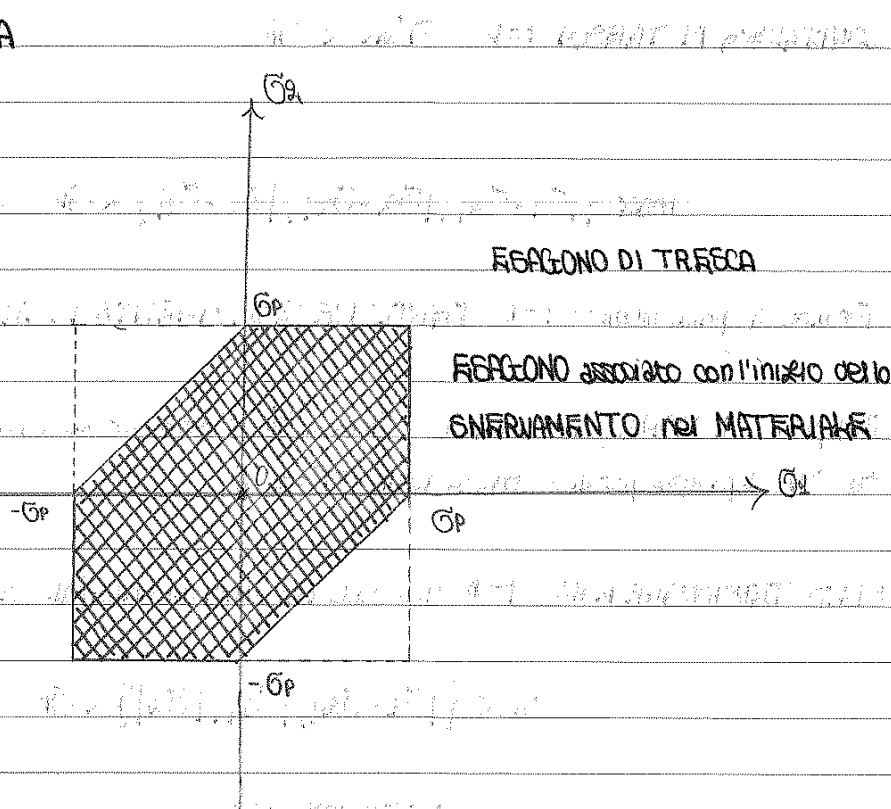
$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

τ_p ≡ TENSIONE TANGENZIALE DI SNERVAMENTO



DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP.8

A.F.
 HENRI EDUARD TRESCA
 (1854 - 1885): ING.
 FRANCESE



STATO DI TENSIONE \rightsquigarrow pt di coordinate σ_1 e σ_2

σ_1 / σ_2

TENSIONI PRINCIPALI

Se pt \in al DOMINIO DI RESISTENZA \Rightarrow componente strutturale SICURO

Se pt \notin al DOMINIO DI RESISTENZA \Rightarrow Componente collasserà in seguito allo snervamento del materiale.

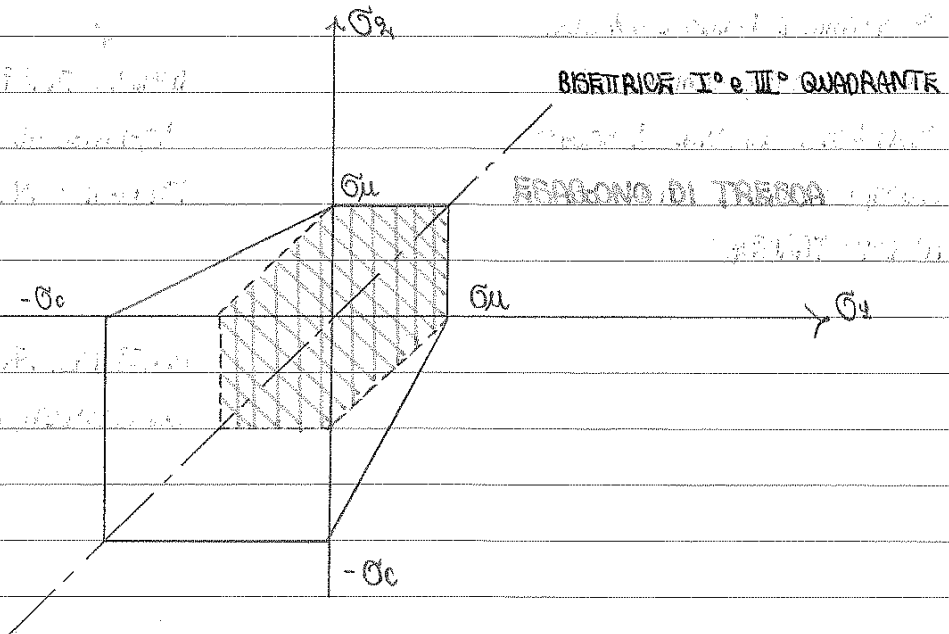
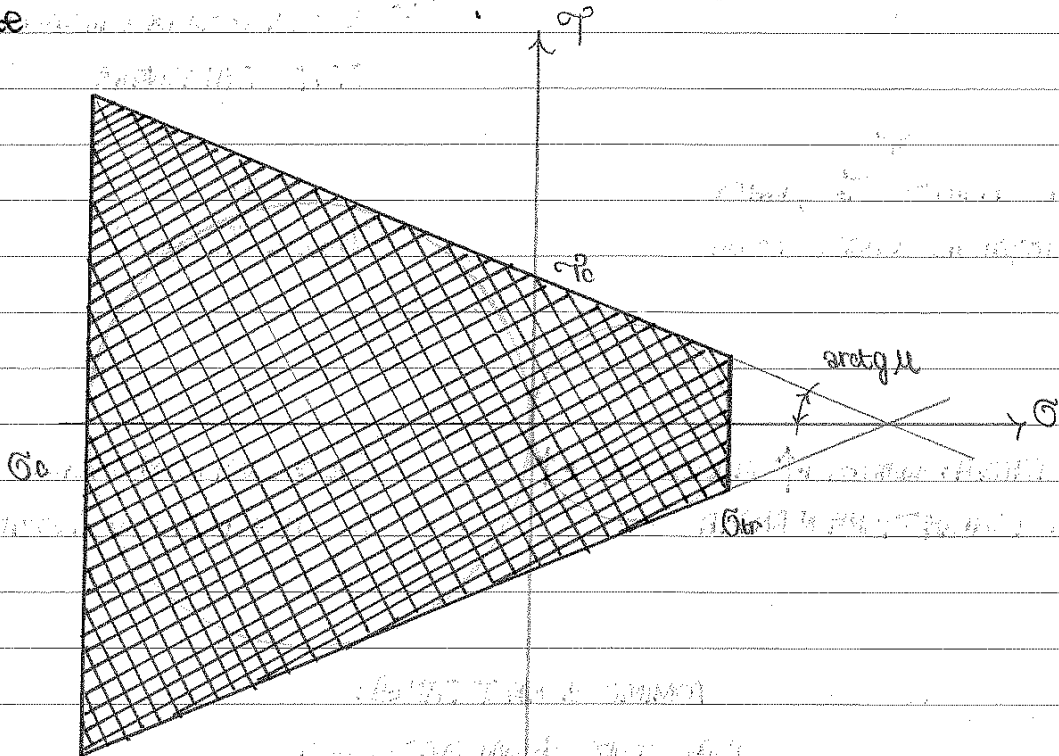
DOMANDE ORALI SCIENZA delle COSTRUZIONI CAP.8

A.7.

DOMINIO DI MOHR-COULOMB

Rappresentato sul piano delle tensioni principali $\sigma_1 - \sigma_2$ da un ESAGONO SIMMETRICO rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante

ESAGONO SIMMETRICO: si riduce a quello di TRESCA per $\mu = 0$ (ATRITO INTERNO NULLO)



DOMANDE ORALI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI CAP. 8

4/8

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

TRACCIA $\sigma \rightsquigarrow (\sigma_1 - \bar{\sigma}) + (\sigma_2 - \bar{\sigma}) + (\sigma_3 - \bar{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\bar{\sigma}$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3 \cdot \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) =$$

$$= \sigma_1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_3 = 0$$

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_d$$

TENSORE ISOTROPO

L'energia Φ_d associata al Tensore DEVIATORICO vale:

$$\Phi_d = \frac{1 + \nu}{E} J_{II d}$$

Secondo Von Mises la quantità da limitare è $J_{II d}$. Von Mises limita l'energia potenziale dovuta al tensore deviatorico.

$$J_{II d} = - \left[\frac{(\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma})}{\text{MINORE } 1-2} + \frac{(\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma})}{\text{MINORE } 1-3} + \frac{(\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma})}{\text{MINORE } 2-3} \right]$$

$$J_{II d} = - \frac{1}{9} \left[\frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)}{\text{MINORE } 1-2} + \dots \right] \quad \text{9 TERMINI}$$

	$2\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-\sigma_3$	
$2\sigma_2$	$4\sigma_1\sigma_2$	$-2\sigma_2^2$	$-2\sigma_2\sigma_3$	
$-\sigma_1$	$-2\sigma_1^2$	$+\sigma_1\sigma_2$	$+\sigma_1\sigma_3$	
$-\sigma_3$	$-2\sigma_1\sigma_3$	$+\sigma_2\sigma_3$	$+\sigma_3^2$	

$$J_{II d} = - \frac{1}{9} \left[\sigma_3^2 - 2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2 + 5\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + \dots \right]$$

MINORE 1-2