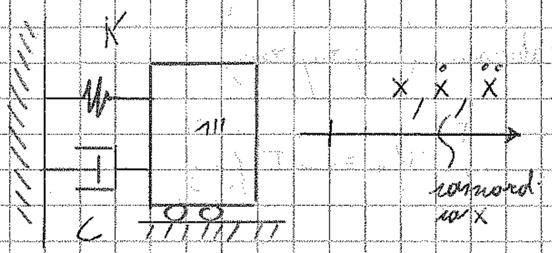
NUMERO: 513 DATA: 10/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Roati

MATERIA: Dinamica dei Sistemi Meccanici + Es.
Prof. Fasana

Vibrazioni di sistemi 1 gdl smorzati



"Modello" (semplice e lineare)

K - tiene conto delle capacità di accumulo di energia elastica
c - tiene conto delle dissipazioni di energia
m - tiene conto di tutte le proprietà inerziali

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0}$$

eq lineare, II ordine, coefficienti costanti

- la soluzione (AI) ha sempre la forma

$$\boxed{x = A e^{st}} \qquad A, s \in \mathbb{C}$$

- sostituendo ricavo $s_{1,2}$
anche una loro c. l. è soluzione

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

con $$\boxed{s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}}$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 249

la spostamento in funz. del tempo è descritto da una funz. complessa

$$\boxed{x(t) = \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right) e^{-\zeta \omega_n t}}$$

con le formule di eulero la riporto in una forma reale

$$x(t) = \left[\left(A_1 + A_2\right)\cos \omega_d t + i\left(A_1 - A_2\right)\operatorname{sen}\omega_d t\right] e^{-\zeta\omega_n t}$$

- devo fare un ulteriore passaggio imponendo le condizioni iniziali

$$\boxed{\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ \omega_d i\left(A_1 - A_2\right) + \left(A_1 + A_2\right)\left(-\zeta\omega_n\right) = v_0 \end{cases}}$$

$$x(t) = \left[\left(x_0\right)\cos\omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\operatorname{sen}\omega_d t\right] e^{-\zeta\omega_n t}$$

- ora si vede che lo spostamento è descritto da una "funzione armonica", modulato in modo decrescente da un esponenziale negativo ⟵ è plausibile (controllo!!)

$$a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t =$$
$$= c \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} a = c \operatorname{sen}\varphi \\ b = c\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \operatorname{tg}\varphi = a/b \end{cases}$$

2

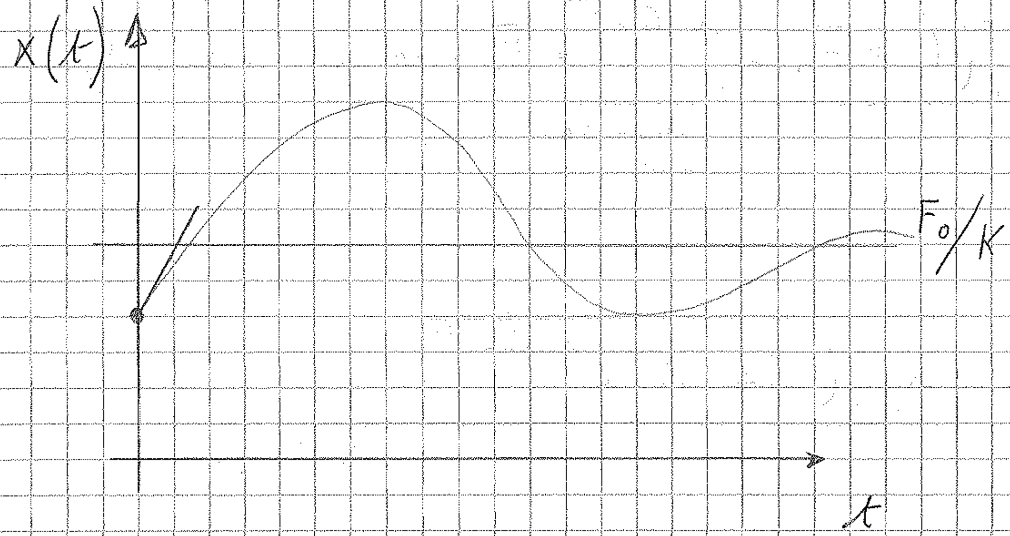
- la resp. libera è sempre identica e va a zero a regime; per cui la trascuro;
- la resp. forzata dipende dalla forma della forzante
- la sol. è

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{s_1 t} + \dots} \qquad (\zeta < 1)$$

$$= \boxed{\left(a \cos \omega_d t + b \operatorname{sen} \omega_d t\right) e^{-\zeta \omega_n t} + F_0/K}$$

- le condizioni iniziali si applicano a tutta la soluzione

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = F_0/K + a \\ v_0 = b\,\omega_d - \zeta\,\omega_n\, a \end{cases}}$$



3

- X è una "funzione complessa"

$$X = F_0 \frac{(K - m\Omega^2) - i\Omega c}{(K - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2} \in \mathbb{C}$$

$$X = X(\Omega) = \ldots$$

e dipende
- da come è fatto il sistema (m, c, K)
- da cosa lo eccita (F_0, Ω)

- si ricavano modulo e fase

$$\boxed{|X| = x_0 = \frac{F_0 / K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

$$\omega_n \zeta = \frac{c}{2m}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)} = -\frac{2\zeta r}{1 - r^2}}$$

- torno alla notazione reale

$$x(t) = x_0 e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$
$$= x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)} = \mathrm{Re}\left[x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}\right]$$
$$= x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

1

4

- è utile studiare la risposta ad una forzante armonica perché:

se il sistema è lineare, vale il PSE ①

2 condizioni

se funz. periodica si può rappresentare come opportuna somma di sinusoidi (Fourier) ②

allora

② → $$f(t) = f(t + T_0) = f_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \left[a_K \cos(K\Omega_0 t) + b_K \sin(K\Omega_0 t) \right]$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{pulsazione fondamentale}$$

① → studio la RF per $K = 1$ + $(\Omega = \Omega_0)$
" " " " $K = 2$ + $(\Omega = 2\Omega_0)$
" " " " $K = 3$ + $(\Omega = 3\Omega_0)$
⋮
=

- impongo le c. iniziali a tutta la soluzione

$$\begin{cases} x_0 = a + \dfrac{F_0}{K - m\omega^2} \\ v_0 = b\,\omega_n \end{cases}$$

- considero per facilità il caso $\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$

$$x(t) = \frac{F_0}{K - m\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_n t\right)$$

$K = m\omega_n^2$

$f(t) = F_0 \cos\omega t$
$\xi = 0$
$x_0 = 0$
$\dot{x}_0 = 0$

↳ Risonanza infinita

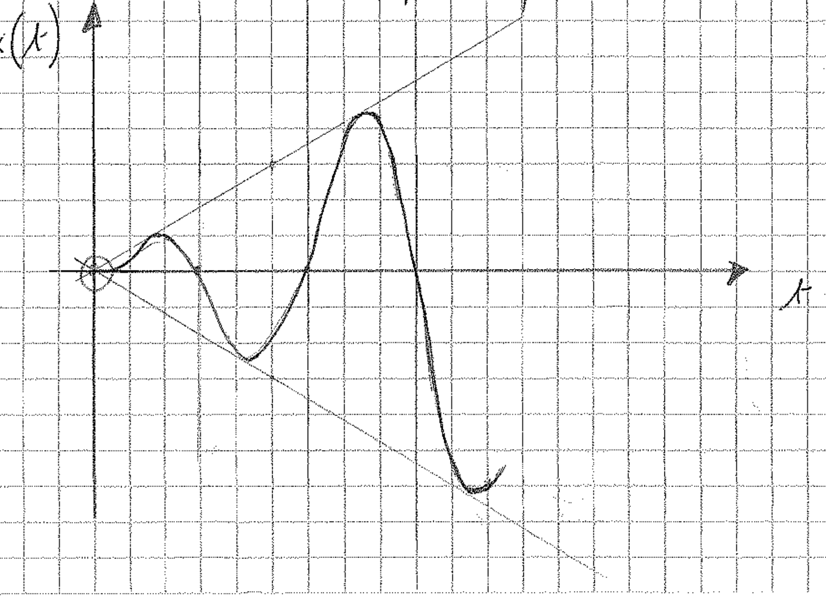
- se $\omega \to \omega_n$

$$\boxed{\lim_{\omega \to \omega_n} x(t) = F_0 \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{-t\,\operatorname{sen}\omega t}{-2m\omega}}$$

Hopital, xke $\lim_{\omega\to\omega_n} x(t) \left[\frac{0}{0}\right]$

(si deriva rispetto ω si fa il limite)

$$\boxed{= \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_n}\,t}_{\text{ampiezza infinita}}\;\operatorname{sen}\omega_n t}$$



6

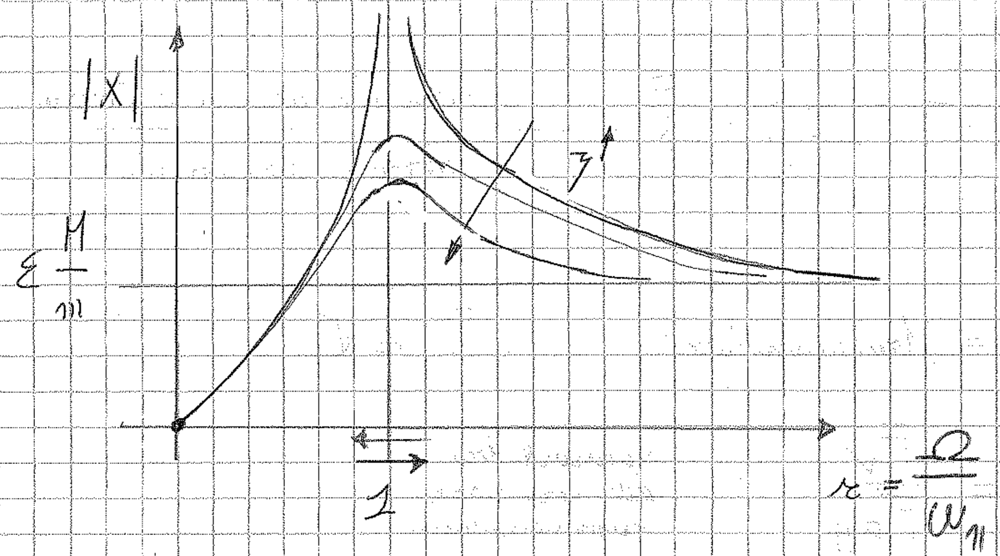
- sono diffusi i sistemi con

$$\begin{cases} c \cong 0 \\ \omega \cong \omega_n \end{cases}$$

- B e B_∞ sono particolari e legati; li distingue la scala temporale

- $x_g(t)$ non è necessario portarselo dietro, ma devo fare attenzione;
  se $\zeta \neq 0$ per capire se il "transitorio" è passato si deve fare attenzione: dipende, è una questione di tempi!!

  attenzione all'acquisizione dei dati



Trasmissibilità (continua Esempio)

- leggo |X|,
  per ottenere piccoli spostamenti posso:
  1) lavorare a velocità basse

$$\omega << \omega_n \uparrow = \frac{K}{m} \uparrow\downarrow$$ (molle grandi)

2) attraversare la "risonanza" e lavorare a velocità alte per la centrifuga

$$\omega >> \omega_n \downarrow = \frac{K}{m} \downarrow\uparrow$$ (molle piccole) (smorzatore)

ottengo spostamenti non piccoli, ma contenuti

- valuto un'altra forma di FRF per evidenziare il fatto che aumentare ζ non è detto che sia solo benefico (picco di risonanza), ma nascono altri problemi (trasmissibilità)
  palline ad attrito

8

- non si fanno ζ troppo elevati e si lavora con $\omega >> \omega_n$, per avere $|X|$ e $|T|$ limitati

Funzione Impulso (di Dirac)

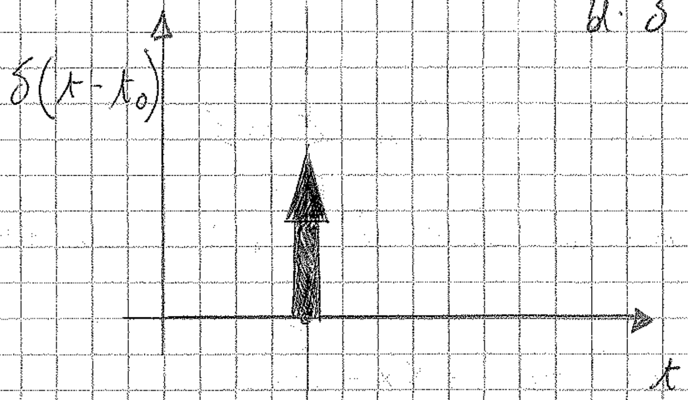
- è utile per studiare la risposta di un sistema 1gdl ad una forzante qualunque non periodica
- è un oggetto matematico definito così

$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad \forall t \neq t_0$$

$$\delta(t - t_0) \to \infty \qquad t = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

dipende dalle u.d.m. di δ



- ha la prop.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0) \cdot 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 249

$$-\frac{\varepsilon}{2} < t < +\frac{\varepsilon}{2} \longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \quad (1)$$

$$t > +\frac{\varepsilon}{2} \longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \quad (2)$$

- abbiamo due eq del moto che devono (in qualche modo) interfacciarsi

(1) $\varepsilon \to 0$
$F_0 \to \infty$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ F_0 \to \infty}} \left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right] = x(0^+) = 0$$

- al termine dell'applicazione dell'impulso lo spostamento è nullo; (l'accelerazione deve avere un po' di tempo per trasformarsi in spostamento)

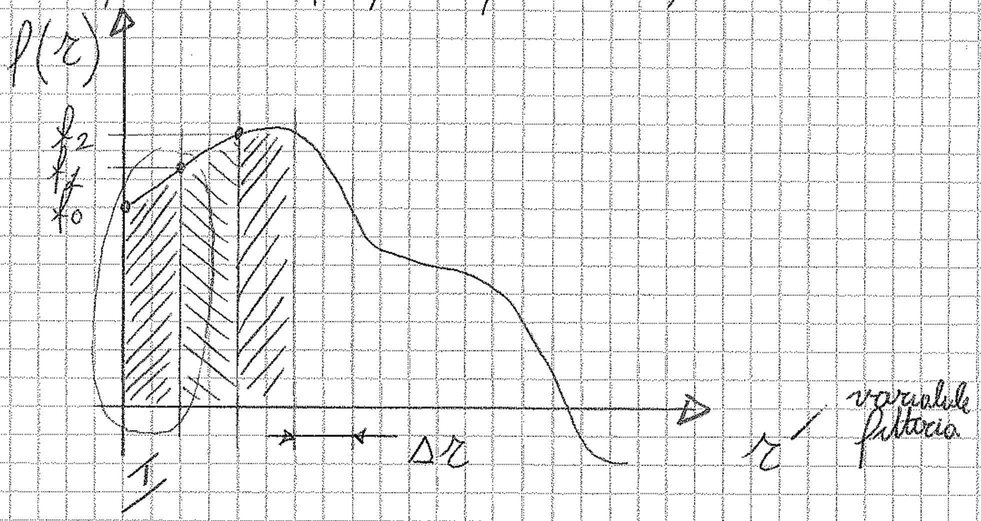
$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ F_0 \to \infty}} \left[m\dot{x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right] = m\dot{x}(0^+) = 1$$

- la velocità non è nulla

- $$\begin{cases} x(0^+) = 0 \\ \dot{x}(0^+) = 1/m \end{cases}$$ intensità dell'impulso

rappresentano le c. iniziali da applicare al moto del sistema per $t > \frac{\varepsilon}{2}$

Risposta ad una forzante di f. qualunque (non periodica)



- si vuole determinare la risp. del sist. in un ist. generico, tenendo conto che è stata applicata una forza generica

$$f(\tau) \longrightarrow x(t)^?$$

$\Delta t \to d\tau$ x andare continuo (POI...)

- discretizziamo l'asse dei tempi in tante parti

$\Delta\tau$ τ come dire che l'ist generico $\tau \neq \Delta\tau$

- introduciamo

$$f(\tau = 0) = f_0$$

$$f(\tau = \Delta\tau) = f_1$$

$$\vdots$$

$$f(\tau = k\Delta\tau) = f_k$$

- trascuro tt i contributi tranne il primo, possiamo calcolare la risposta all'impulso per questo contributo, solo che questa volta non è unitario

$$x_0 = f_0 \, \Delta\tau^{?} \cdot h(t)$$

- se agisse solo questo contributo sapremmo calcolare la risposta

$\cancel{Kg} \cdot \cancel{s}$ ||| $\cancel{s}$ $\cancel{s}$ Kg rad |||

21

che rappresenta l'integrale di convoluzione

N.B.

- vale sempre se è un sist lineare
- la f. da integrare può essere semplice o impossibile
- è intrinsecamente una risposta a regime
(non si vedano le c.i.)

$$f_0 = f(0\Delta\tau) \longrightarrow x_0 = [f_0 \, \Delta\tau] \, h(t-0) \; +$$
$$f_1 = f(1\Delta\tau) \qquad +$$
$$\vdots$$
$$f_k = f(k\Delta\tau) \longrightarrow x_k = [f_k \, \Delta\tau] \, h(t-k\Delta\tau) \; +$$
$$\vdots$$

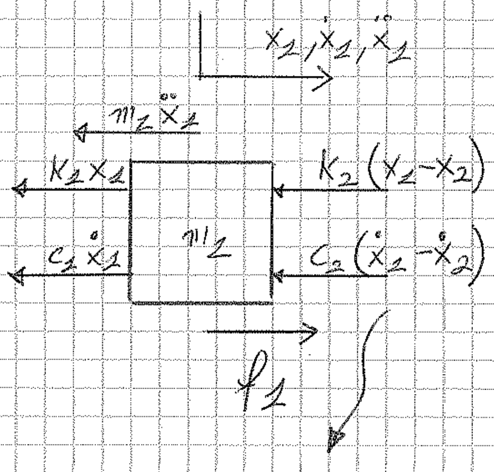
PSE $=$

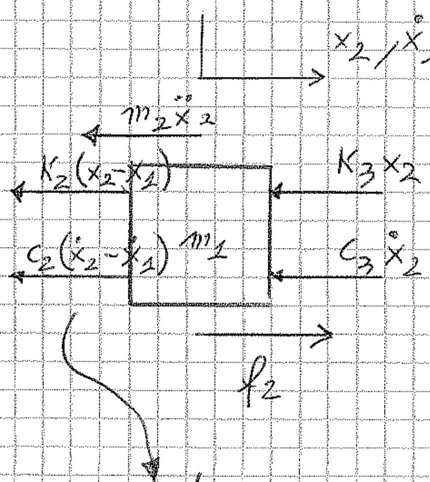
$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} [f_k(k\Delta\tau) \, \Delta\tau] \, h(t-k\Delta\tau)$$

$$\Delta\tau \to d\tau \to \Sigma \to \int$$
$$k\Delta\tau \to \tau \to f(k\Delta\tau) \to f(\tau)$$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \, h(t-\tau) \, d\tau$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 249





- non so $x_1 \gtrless x_2$
- la K_2 vede $x_1 - x_2$
- posso considerare separati i contributi e poi sommarli

$x_1 > 0 \rightarrow \xleftarrow{K_2 x_1}$ $(x_2 = 0)$

$x_2 > 0 \rightarrow \xrightarrow{K_2 x_2}$ $(x_1 = 0)$

stesso verso perché ho già tenuto conto con $x_2 - x_1$ invece di $x_1 - x_2$

ottengo 2 eq lineari di secondo ordine a coeff. costanti;
il problema è che sono accoppiate e non posso risolverle una indipendentemente dall'altra

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (K_2 + K_3) x_2 - K_2 x_2 = f_2 \end{cases}$$

3) faccio riferimento a $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$

$\{\dot{x}(t)\} =$

$\{\ddot{x}(t)\} =$

per riscrivere le eq in forma matriciale e compattarla

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} +c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & +c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Risoluzione del sist di eq accoppiate

1) $$[m]\{\ddot{x}\} + \underbrace{\cancel{[c]\{\dot{x}\}}}_{=0 \text{ in principio}} + [K]\{x\} = \{0\}$$

x ved le prop DEL SISTEMA

studio l'eq. OMOGENEA, senza SMORZAMENTO

→ voglio sapere la risposta libera!!

* Per ipotesi (da verificare) le matrici $[m]$, $[K]$

viene sempre così con l'approccio lagrangiano

se non sono diagonali $\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & m & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & K & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}$

sono almeno SIMMETRICHE $[m] = [m]^T$, $[K] = [K]^T$

* Per ipotesi la matrice di massa è DEFINITA POSITIVA

$$\underbrace{\underset{1\times n}{\{v\}^T} \underset{n\times n}{[m]} \underset{n\times 1}{\{v\}}}_{\text{scalare}} > 0$$

* Per ipotesi la matrice di rigidezza è SEMI DEFINITA POSITIVA

$$\{v\}^T [K] \{v\} \geq 0$$

suppongo
vedo che la forma della f. $g(t)$ della soluzione sincrona è

armonica con pulsazione ω

$$g(t) = a \cos \omega t + b \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

↳ esiste la sol SINCRONA

↳ deve avere una forma particolare con PULSAZIONE ω

6) posso fare come 1 gdl risostituendo

$$\ddot{g}(t) = -\omega^2 g(t)$$

$$-[m]\{A\}\omega^2 g(t) + [K]\{A\} g(t) = \{0\}$$

✳ quest eq vale in ogni ist di tempo (si è potuto fare xkè è una quantità scalare)

7) metto in evidenza $\{A\}$ EVP

$$✳ \quad \boxed{([K] - \omega^2 [m])\{A\} = \{0\}}$$

↳ è un sistema ALGEBRICO in cui le eq differenziali sono sparite

↳ è un sistema OMOGENEO

per risolverlo ① soluzione BANALE $\{A\} = \{0\}$ ← non serve

trovo ω^2, $\{A\}$ ② soluzione $\det([K] - \omega^2 [m]) = 0$

x avere SB deve imporre

- il polinomio si chiama EQUAZIONE CARATTERISTICA,

calcolo la soluzione

$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ $n =$ n gdl

le soluzioni dell' eq caratteristica sono gli AUTOVALORI del sistema

- calcolati gli autovalori ritorno al SISTEMA ALGEBRICO e sostituisco uno dei generici autovalori

$$\boxed{\left([K] - \omega_r^2 [m]\right)\{A\} = \{0\}}$$

calcolo la soluzione

$\{\psi_r\}$

e la chiamo AUTOVETTORE (per quel certo autovalore)

$$\{\psi_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_{1r} \\ \vdots \\ \psi_{nr} \end{Bmatrix}$$ ricordo a chi AVAL è legato

N.B. $[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

$$\downarrow$$

$$[K]\{A\} - \omega^2 [m]\{A\} = \{0\}$$

$$\downarrow$$

risolvo l'autoproblema e trovo

(r freq) forma modale (spost)

$\omega_r^2 \; , \; \{\psi_r\}$ $r = 1, \dots, n$

e trovo il MODO PROPRIO

e ottengo, considerando le ipotesi iniziali

$$[K] = [K]^T$$
$$[m] = [m]^T$$

$$\boxed{0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}}$$

casi

$r \neq s \rightarrow \omega_r \neq \omega_s \rightarrow \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$

$r = s \rightarrow \omega_r = \omega_s \rightarrow \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} \neq 0$ (*)

perché $[m]$ è definita positiva

$$\boxed{m_r = \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\}} = \text{MASSA MODALE} > 0$$

solo in un caso dei calcoli trovo un valore non nullo

u. d. m. è Kg avendo definito gli AVETT adimensionali

questo risultato definisce il PRINCIPIO DI ORTOGONALITÀ DEGLI AUTOVETTORI, RISPETTO A $[m]$

(*) considero la 1ª eq (primo membro), ottengo

$$\boxed{\{\psi_s\}^T [K] \{\psi_r\}}$$

casi

$r \neq s \longrightarrow \qquad \longrightarrow \{\psi_s\}^T [K] \{\psi_r\} = 0$

$r = s \longrightarrow \qquad \longrightarrow \{\psi_r\}^T [K] \{\psi_s\} \neq 0$

$$\boxed{K_r = \{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\}} = \text{RIGIDEZZA MODALE}$$

questo risultato definisce il PRINCIPIO ...

N.B. $r \neq s \xrightarrow{!} \omega_s = \omega_r$

- in generale non è possibile perché non varrebbe più P⊥
- può succedere per analisi FEM di strutture simmetriche → in realtà non ci sono strutture perfettamente simmetriche

10) osserva che i AVETT sono tra loro l.i.

$$\{\psi_r\},\ \omega_r^2 \qquad r = 1, \dots, n$$

e si dimostra per assurdo (sfruttando P⊥)

$$c_1\{\psi_1\} + c_2\{\psi_2\} + \dots + c_n\{\psi_n\} = \{0\}$$

$$\left[c_1[m]\{\psi_1\} + \dots + c_n[m]\{\psi_n\}\right] = [m]\{0\}$$

$$\{\psi_r\}^T\left[\ \dots\ \right] = \{\psi_r\}^T\{0\}$$

$$c_r m_r = 0$$

solo se $c_r = 0 \quad \forall r$

grazie a ciò un qualunque vettore si può scrivere come una base e l. ("sono la base" soluzione!)

$$\{v\} = \sum_{r=1}^{n} c_n \{\psi_r\} \quad (*)$$

dato $\{\psi_r\}$, per avere $\{v\}$ devo calcolare c_r

28

l'espressione è chiamata "trasformazione modale" e da la variazione di certe coordinate

η_r = COORDINATE MODALI

- la "trasformazione modale" si può scrivere

(*)

$$\boxed{\begin{aligned} \{x(t)\} &= [\psi]\{\eta(t)\} \\ \{\dot{x}\} &= [\psi]\{\dot{\eta}\} \\ \{\ddot{x}\} &= [\psi]\{\ddot{\eta}\} \end{aligned}}$$

12) vediamo se la "base dello spazio" da una soluzione così anche nei sistemi con smorzamento

$$[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [K][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

mi ricordo qualcosa

$$[\psi]^T_{n\times n}[m]_{n\times n}[\psi]_{n\times n}\{\ddot{\eta}\} + [\psi]^T[c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [\psi]^T[K][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

$$\text{diag}(m_r) + (\alpha\,\text{diag}(m_r) + \beta\,\text{diag}(K_r)) + \text{diag}(K_r) = \{0\}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & M_r & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}\{\ddot{\eta}\} + \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & C_r & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}\{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & K_r & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} = \{0\}}$$

con $\text{diag}(c_r)$ = MATRICE DIAGONALE DEGLI SMORZAMENTI MODALI

$c_r = \alpha m_r + \beta K_r$ = COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO MODALE

- all'inizio per il sistema senza smorzamento avevo cercato la soluzione sincrona

$$\{x\} = \{A\}\, g(t)$$

e vedo che
- $\{x\} = \{A\}\left(a \cos\omega t + b \sin\omega t\right)$

1 AVETT 1 AVAL $\{\psi_r\}\, \eta_r(t)$

- se ne sono tante
n AVET
n AVAL

se il sistema è lineare, poiché ne ho tante, col PSE le posso combinare

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\, \eta_r(t)$$

$$= [\psi]\, \{\eta(t)\}$$

se da un colpo il sistema non si muove a casaccio ma dipende da ω_r

15) mancano solo i coefficienti della fz che dipende dal tempo

$$a_r, \; b_r \qquad r = 1, \dots, n$$

essi dipendono dalle condizioni iniziali

$$\{x(t=0)\} = \{x_0\}$$
$$\{\dot{x}(t=0)\} = \{v_0\}$$

che vanno imposte all'equazione del moto COMPLETA

$$\{\psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^{T} \{\psi_r\} \ddot{\eta}_r + \{\psi_s\}^T [c] \sum_r \{\psi_r\} \dot{\eta}_r +$$

$$+ \{\psi_s\}^T [K] \sum_r \{\psi_r\} \eta_r = \{\psi_s\}^T \{f(t)\}$$

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + K \eta_r = p_r(t) \quad \forall r = 1, \dots, n$$

$$\boxed{p_r(t) = \{\psi_r\}^T \{f(t)\} =} \quad \text{CARICO MODALE}$$

non è il vero carico

- se conosco $\{f(t)\}$, calcolo $p_r(t)$ e posso calcolare la risposta con l'integrale di convoluzione

$$\eta_r(t) = \int_0^t p_r(\tau)\, h_r(t-\tau)\, d\tau$$

dove $h_r = \dfrac{1}{m_r \omega_{dr}} \operatorname{sen} \omega_{dr}(t-\tau)\, e^{-\xi_r \omega_r (t-\tau)}$

17) posso comparare per la soluzione

$$\{x\} = \text{REGIME} + \text{TRANSITORIO}$$

$$= \int_0^t p_r(\tau) h(t-\tau) d\tau + \left(a_r \cos \omega_{dr} t + b_r \operatorname{sen} \omega_{dr} t\right) e^{-\xi \omega t}$$

di prima perché $\int_0^0 (\dots) = 0$

21

(5) Ritorno alle coordinate fisiche

$$\{x\} = [\psi]\{\eta\}$$

Studio della risposta forzata

- se la forzante è di tipo armonico

$$\{f(t)\} = \{f_0\} e^{i\Omega t}$$

come per 1 gdl la risposta a regime è un'armonica con la stessa pulsazione

REGIME

$$\{x(t)\} = \{x_0\} e^{i\Omega t}$$

- posso derivare e sostituire

$$\{\dot{x}\} = i\Omega\{x_0\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{x}\} = -\Omega^2\{x_0\} e^{i\Omega t}$$

$$(\underbrace{[K] - \Omega^2[m] + i\Omega[c]}_{\text{termini di rigidezza}})\{x_0\}\cancel{e^{i\Omega t}} = \{f_0\}\cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\boxed{[K_D]\{x_0\} = \{f_0\}}$$ dato

$[K_D]$ = m di rigidezza dinamica

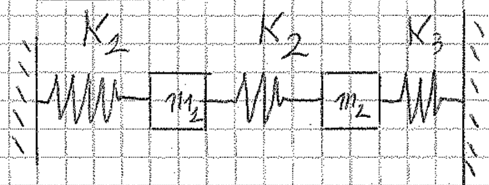
se Ω varia, anche $[K_D]$ varia

- formalmente si può fare

$$\{x_0\} = [D_D]^{-1}\{f_0\}$$

Meccanica Analitica

Esempio 2DOF



eq del moto?

1) x_1 x_2

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[m] = [m]^T$ ~ necessarie per P⊥

$[k] = [k]^T$

2) x_1

$\Delta = x_2 - x_1$ ~ m. r. della m_2 (magari ho uno strumento che lo misura)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + K_2 x_1 - K_2 \Delta = 0 \\ m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{\Delta}) + K_3 (x_1 + \Delta) + K_2 \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ K_3 & K_2+K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

N.B.

1) a seconda dei gdl che scelgo le equazioni (giuste) sono diverse

2) le m. non sono diagonali, né simmetriche

3) AVALL devono essere gli stessi perché dip da m_i e K_i e non da come descrivo il sistema

con $d\left(\vec{\dot{r}} \cdot \vec{\dot{r}}\right) = 2\, \vec{\dot{r}} \cdot d\vec{\dot{r}}$

$$\overline{dW} = m \frac{1}{2} d\left(\vec{\dot{r}} \cdot \vec{\dot{r}}\right)$$

$$T = \frac{1}{2} m\, \vec{\dot{r}} \cdot \vec{\dot{r}} = \text{EN. CINETICA}$$

è una funzione

allora

$$\overline{dW} = dT$$

in questa forma è facile calcolare il lavoro per una forza variabile

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overline{dW} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\dot{r}} = \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$= T_2 - T_1 = \Delta T$$

* se $\left(\quad\right)_{I} = \left(\quad\right)_{II}$ con due percorsi

diversi ottengo lo stesso risultato allora si dice che $\vec{F}$ è conservativa

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

se $\vec{F}$ è conservativa, allora il suo lavoro si può scrivere come variazione di una funz di energia

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_{RIF}} (\quad) - \int_{\vec{r}_{RIF}}^{\vec{r}_2} (\quad)$$

~ molla elastica
~ variazione di quota
...

$$= V_1 - V_2 = -\Delta V$$

$$V = (\qquad) = \text{EN. POTENZIALE}$$

- si possono scrivere in due modi le eq di eq in presenza di N masse, su ognuna delle quali agisce una risultante delle forze

$m_i \qquad i = 1, \dots, N$

STATICA

1) " la risultante delle forze deve essere nulla "

$$\vec{R}_i = 0 \qquad \forall i$$

2) " il lavoro virtuale svolto dalle forze attive è nullo "

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

i lavori virtuali delle risultanti R_i

$\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

è nulla la loro somma

- utilizzo 2) e sviluppo

$\vec{F}_i$ = forza attiva

$\vec{f}_i$ = forza reazione del vincolo ; tranne le forze d'attrito

↳ spesso accade che è perpendicolare rispetto lo spostamento virtuale (rispetto al moto che il vincolo permette)

allora ricavo PPLLW nella forma

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \right] = 0$$

- vantaggio ⟶ non considero le reazioni vincolari

svantaggio ⟶ formulazione non comoda

Equazioni del moto di Lagrange

- Hamilton modifica il Principio di D'Alembert

$S/800$ $\quad i = 1, \dots, N$ ~ forze che agiscono a ogni massa

- a primo termine distingue le forze conservative da quelle non conservative

$$\vec{F_i} = \vec{F}_{i,c} + \vec{F}_{i,nc}$$

se la f è conservativa ... S

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \delta \vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\delta V_i + \overline{\delta W_{i,nc}} \right)$$

$$= \overline{\delta W_{nc}} - \delta V$$

↳ contengono le somme

- a secondo termine

$$\frac{d}{dt}\left(m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} \right) = m \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\right) \cdot \delta \vec{r} + m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\delta \vec{r} \right)$$

$$= m \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} + m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)$$

$$= m \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} + m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \dot{\vec{r}}$$

$$m \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left[m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} \right] - m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} \right] - m \frac{1}{2} \delta \left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[m \dot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} \right] - \delta T$$

- mettendo assieme

$$\overline{\delta W_{nc}} - \delta V - \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) + \sum_{i=1}^{N} \delta T_i \right.$$

$$= 0$$

- sfrutto la proprietà e scambio $\int$ e δ e considero i sistemi conservativi

$$\boxed{\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} L \, dt\right] = 0}$$

dobbiamo trovare L che dà la stazionarietà; questo strumento è potente, ma non maneggevole allora

- introduco le coordinate generalizzate di Lagrange $q_1(t) \quad q_n(t)$

$$\boxed{q_1, q_2, \dots, q_n \quad n \neq N}$$

N = n° di forze attive agenti sul sistema

n = n° minimo di coordinate necessarie per descrivere in ogni istante la posizione di qualunque punto del sistema

N.B

1) necessarie esattamente
2) dipendono dal tempo
3) non sono uguali al numero di forze attive
4) la scelta non è univoca e porta alla forma delle eq del moto differenti

- dopo averle individuate si esprimono gli spostamenti reali $\vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), \dots)$

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t)}$$

e gli spostamenti virtuali

x Kilos v. avviene senza trascorrere tempo

$$\boxed{\delta\vec{r}_i} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\delta q_n + \phi$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k} \qquad i = 1, \dots, n$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 249

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_K} \dot{q}_K + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}}$$ può non esserci

se derivo la velocità V rispetto la velocità Lagrangiana generalizzata

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_K}}$$ solo 1 se ne salva

e posso vedere l'altro modo di esprimere la forza generalizzata

$$Q_K = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,nc} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_N}$$

- i "pezzi" che servono sono

1) $\delta W_{nc} = \sum_{K=1}^{n} Q_K \tilde{\delta} q_K$ (non è un prod. scalare) LAVORO F. NON CONSERVATIVE

2) (simile) EN. POTENZIALE

3) $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$ EN. CINETICA (devo manipolarla per proseguire)

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (K=\ell)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_K} \dot{q}_K + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \right] \cdot \left[\quad '' \quad \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{K=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_K} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_\ell} \dot{q}_K \dot{q}_\ell$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_K} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \dot{q}_K \right] 2$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

- metto assieme tutti i pezzi

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta \underbrace{L(q_1, \dots, q_n; t)}_{T-V} + \delta W_{nc}(q_1, \dots, q_n; t) \Big] \, dt = 0$$

è scritto il principio di Hamilton scritto in funzione delle coordinate generalizzate come valore scalare

- ora devo trovare la funzione che rende stazionario l'integrale,
Eulero e Lagrange trovarono il metodo per calcolare la stazionarietà di un integrale

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} F(q_K; t) \, dt \right] = 0$$

il risultato è l'EQUAZIONE DI LAGRANGE;

la stazionarietà dell'integrale si ottiene se è rispettata l'equazione

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial L}{\partial q_K} = Q_K}$$

$$\boxed{K = 1, \dots, n}$$

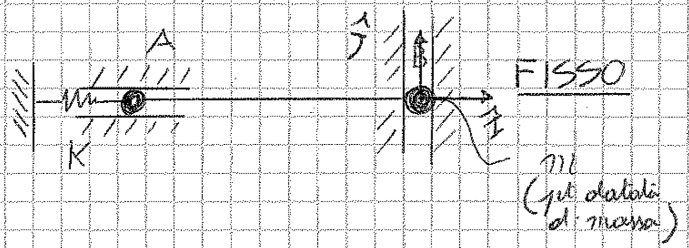
NB

1) la stessa eq si scrive tante volte quanto è il numero di coordinate

2) non è richiesta la scrittura delle accelerazioni, ma solo delle velocità

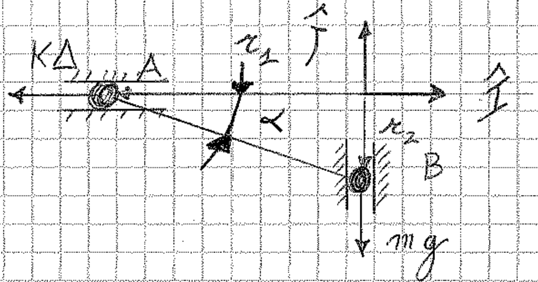
29

Esempio 1DOF



$AB = L$ $\quad \downarrow \vec{g}$

all'equilibrio statico



② Principio dei lavori virtuali (STATICA)

- individuo il SR
- senza considerare i vincoli, individuo quali sono le forze attive
- utilizzo l'angolo come variabile

$$\vec{F_1} = -K\Delta\hat{i} \qquad \Delta = L - L\cos\alpha$$

$$\vec{F_2} = -mg\hat{j}$$

- individuo con un vettore la posizione delle due forze in un istante generico

$$\vec{r_1} = -X\hat{i} \qquad (\vec{F_1})$$
$$= -L\cos\alpha\,\hat{i}$$

$$\vec{r_2} = -Y\hat{j} \qquad (\vec{F_2})$$
$$= -L\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 249

(3) Principio di D'Alambert (DINAMICA)

PPLLVV $\rightsquigarrow \vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{r_1}, \vec{r_2}$

- derivo la posizione del punto dotato di massa

$$\vec{r_2} = -L \sin\alpha \, \hat{j}$$

$$\dot{\vec{r_2}} = -L \cos\alpha \, \dot{\alpha} \, \hat{j}$$

$$\ddot{\vec{r_2}} = \left[L \sin\alpha \, \dot{\alpha}^2 - L \cos\alpha \, \ddot{\alpha} \right] \hat{j}$$

- rispetto al metodo di Newton $\left(\downarrow y, \dot{y}, \ddot{y} \right)$

devo solo calcolare gli spostamenti verticali

$$\delta \vec{r_1} = L \sin\alpha \, \delta\alpha \, \hat{i}$$

$$\delta \vec{r_2} = -L \cos\alpha \, \delta\alpha \, \hat{j}$$

- sostituisco nel PDA e risolvo

no massa

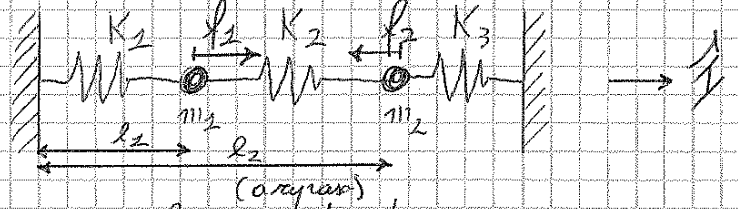
$$-KL(1-\cos\alpha) L \sin\alpha \, \delta\alpha + $$
$$- mg(-L\cos\alpha)\delta\alpha - m(L\dot{\alpha}^2 \sin\alpha - L\ddot{\alpha}\cos\alpha)(-L\cos\alpha)\delta\alpha =$$
$$0$$

- trovo l'equazione del moto

$$mL\left(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin\alpha\right) - mg + KL(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

dove compaiono solo forze attive, ipotizzando che non vi siano attriti

Esempio 2 DOF (continua)



- risolvo con le eq. di Lagrange; in questo caso utilizzando

$$q_1 = x_1$$

$$q_2 = \Delta = (x_1 - x_2)$$

le matrici $[m]$, $[K]$ diventano simmetriche

- $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \sim T_2$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + \dot{\Delta})^2$$

- $V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2$

$$= \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_1 + \Delta)^2$$

- $\vec{F}_1 = f_1 \hat{i}$

$\vec{r}_1 = (l_1 + x_1)\hat{i} \longrightarrow \begin{cases} \partial \vec{r}_1 / \partial x_1 = \hat{i} \\ \partial \vec{r}_1 / \partial \Delta = 0 \end{cases}$

$\vec{F}_2 = - f_2 \hat{i}$

$\vec{r}_2 = (l_2 + (x_1 + \Delta))\hat{i} \longrightarrow \begin{cases} \partial \vec{r}_2 / \partial x_1 = \hat{i} \\ \partial \vec{r}_2 / \partial \Delta = \hat{i} \end{cases}$

l_1, l_2 dipende da SR che ho scelto

↳ l'importante è dopo aver scelto non cambiare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 249

** per $K=1$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1+\dot{\Delta})\right) + K_1 x_1 + K_3(x_1+\Delta) = f_1 - f_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1+\ddot{\Delta}) + K_1 x_1 + K_3(x_1+\Delta) = f_1 - f_2$$

** per $K=2$

$$m_2(\ddot{x}_1+\ddot{\Delta}) + K_2\Delta + K_3(x_1+\Delta) = -f_2$$

- assemblo in matrici

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_3 & K_3 \\ K_3 & K_2+K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1-f_2 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

N.B.

1) $[m]$, $[K]$ sono in automatico simmetriche
necessaria x dimostraz P.L.

2) Lagrange e Newton danno due eq. diverse per descrivere il moto dello stesso sistema, in funzione delle stesse coordinate lagrangiane, entrambe sono corrette ed inoltre qualunque loro combinazione va bene
? in questo caso semplice si possono ricavare

3) le forze generalizzate non coincidono con le forze vere ma sono una loro combinazione lineare

37

• $T = \frac{1}{2} m v^2$

velocità assoluta di m che trasla e ruota

1) $v_{ass} = v_{rel} + v_{tras}$ (già risalto)
2) vettori

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$ derivate dei versori

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt}$$

$$= (\dot{x} - y\Omega)\hat{i} + (\dot{y} + x\Omega)\hat{j}$$

$$T = \frac{1}{2} m\left[(\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2\right]$$

• $V = \frac{1}{2} K_x \Delta_x^2 + \frac{1}{2} K_y \Delta y^2$

$$\Delta_x = l_f - l_0$$

$$= \sqrt{(l_0 + x)^2 + y^2} - l_0$$

prima o poi derivando via via (lo avrei fatto anche con Newton)

$$\simeq x$$

$$V = \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y y^2 \qquad \text{per } x, y << l_0$$

N. B.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \qquad T_2 \ \checkmark$$

$$+ \frac{1}{2} m (2\Omega)(x\dot{y} + y\dot{x}) + \qquad T_1 \ \times$$

$$+ \frac{1}{2} m (\Omega^2)(x^2 + y^2) \qquad T_0 \ \times$$

si tratta di un sistema "non naturale" ci sono anche le coordinate e non solo la velocità

34

$$= \frac{1}{2} h \left[\left(\dot{x} - y\Omega \right)^2 + \left(\dot{y} + x\Omega \right)^2 \right]$$

~~essendo tipico assegnare a $\mathcal{F}_2$ la forma di un'energia cinetica~~

- si scrive l'eq di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial L}{\partial q_K} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_K} = Q_K$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$$

$\boxed{q_1 = x}$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\Omega y$$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial x} = m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x - K_x x$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = c_x \dot{x} + h\left(\dot{x} - y\Omega\right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\Omega\dot{y}$$

$Q_1 = 0$ perché ho già contato tutte le forze

$$m\ddot{x} - m\Omega\dot{y} - m\Omega\dot{y} - m\Omega^2 x + K_x x + c_x\dot{x} + h\left(\dot{x} - y\Omega\right) = 0$$

$\boxed{q_2 = y}$

$$m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} - m\Omega^2 x + K_y y + c_y\dot{y} + h\left(\dot{y} + x\Omega\right) = 0$$

35

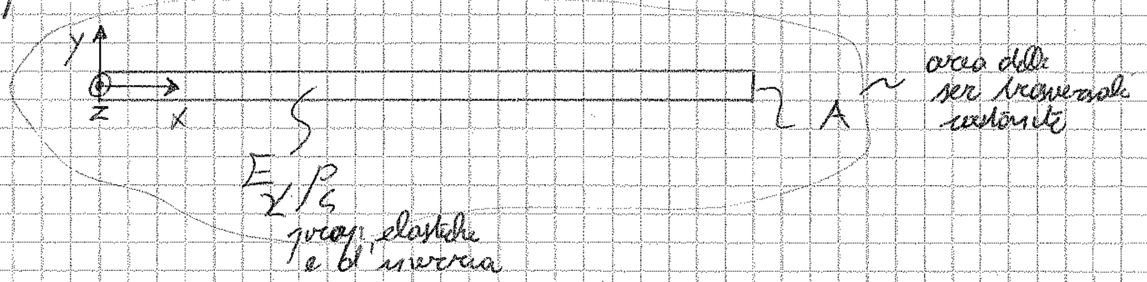
Vibrazioni in strutture continue

- non sempre è possibile ipotizzare che il sistema sia a parametri concentrati (caratteristiche di inerzia / massa / dissipazione)
- per le strutture continue le eq del moto sono un po' diverse

calcolo delle frequenze proprie e delle forme modali della trave prismatica, "spaghetto"

- una dimensione è molto superiore alle altre due;

* comportamento estensionale



- alla trave (non vincolata) è consentito il moto solo lungo x (ROD)
- vogliamo sapere: 1) n gdl
  2) freq proprie
  3) def. modali
- la massa è DISTRIBUITA nella struttura, per cui ogni elementino "dm" concorre alla massa complessiva;

$$\infty \text{ gdl} \longrightarrow \infty\ \omega_r$$

76

con μ = MASSA PER UNITA' DI LUNGHEZZA

$$\frac{\partial N}{\partial x} \cancel{dx} - \ddot{u} \, \mu \, \cancel{dx} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \mu \ddot{u}$$

* FMS dice $N = f(u)$

$$N = A\sigma$$
$$\sigma = E\varepsilon$$
$$\varepsilon \doteq \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- sostituisco il risultato nell eq. del moto

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\vdots$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

che costituisce l' EQ. DELLE ONDE (di D'Alambert)

N.B.

1) l'eq descrive le oscillazioni assiali di una barra, ma anche tante altre cose (oscillazioni torsionali, propagazione del suono) con una cost c che dipende dall' oggetto descritto

2) è un eq. DIFFERENZIALE di secondo grado alle DERIVATE PARZIALI (t, x)

ottengo due eq. DIFF con le variabili SEPARATE

$$\begin{cases} \ddot{f} + \omega^2 f = 0 & (1) \\ g'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 g = 0 & (2) \end{cases}$$

che so risolvere

$$\begin{cases} \cancel{f(t)}\ \eta(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ g(x) = d \cos \omega/c\, x + e \sin \omega/c\, x \end{cases}$$

$$u(x,t) = (\ \dots\ ) \cdot (\ \dots\ )$$

N.B

a, b, d, e, ω sono incognite

1) a, b ⟵ condizioni iniziali

2) d, e ⟵ condizioni di bordo

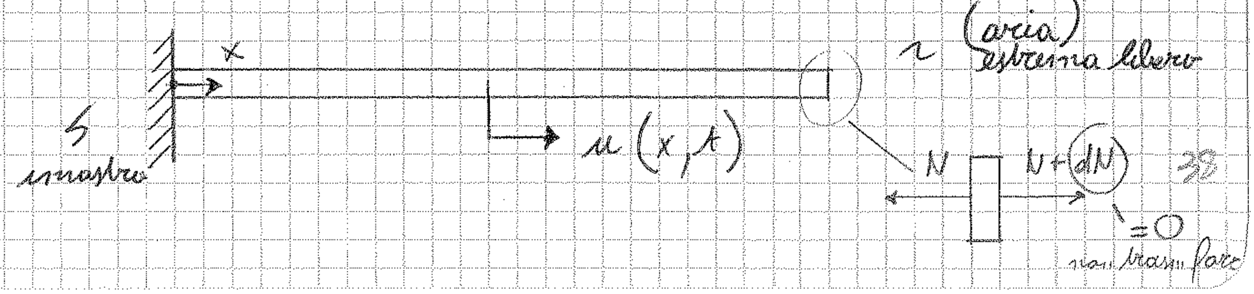
ω ⟵ ? ⟵ AP

fin'ora i virtuali non sono mai entrati in gioco

- le c.l. non necessariamente sono sugli spostamenti, possono essere sulle velocità, accelerazioni, forze, momenti, ecc;

i possono essere vari casi, ad esempio

↳ ASTA CLAMPED - FREE



38

- AP $\longrightarrow$ ottenga ω e la corrispondente soluzione $\{X\}$ $g(x)$ $(\phi(t))$

$\det [A(\omega)] = 0$ $\downarrow$ $\cos \omega/c L = 0$

$\begin{cases} d = 0 \\ e \cos \omega/cL = 0 \end{cases}$ OPPURE

$e = 0$ è soluzione banale

dipende da come è più comodo fare

$$\boxed{\cos \frac{\omega}{c} L = 0}$$ eq. CARATTERISTICA

è possibile solo per certi particolari valori di ω/cL;

in particolare r "partendo da 90°, ogni mezzo giro"

$$\frac{\omega}{c} L = r \frac{\pi}{2}$$

$r = 2i + 1$

$i = 0, 1, 2, \dots$

allora $\boxed{\omega_r = r \frac{\pi}{2} \frac{c}{L}}$ $\boxed{r = 1, 3, 5, \dots}$

infiniti, ma numerabili

- quindi la forma di $u(x,t)$ è corretta, ma $\omega = \omega_r$ è figlio di un AP

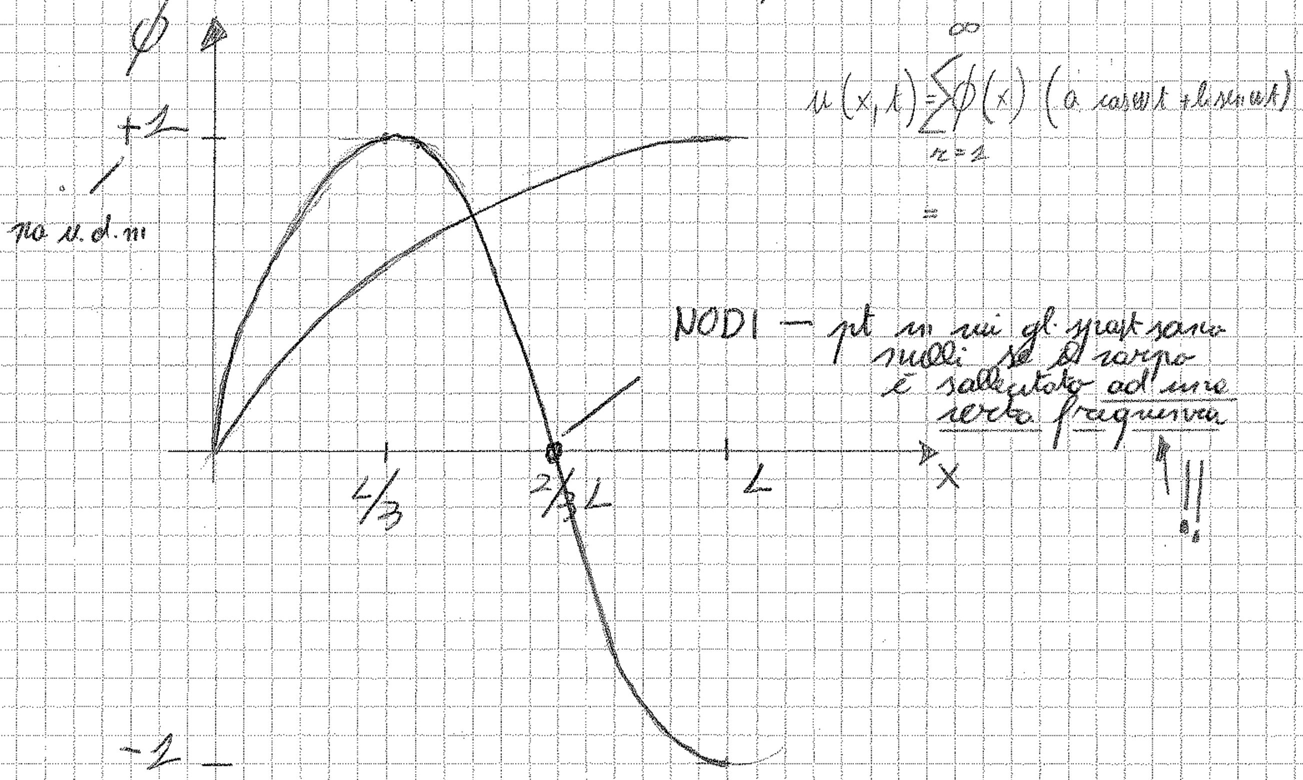
$$u(x,t) = \left(a_r \cos \omega_r t + b_r \operatorname{sen} \omega_r t\right) e \operatorname{sen} \frac{\omega_r}{c} x$$

34

in una somma;
si possono trovare sfruttando P⊥ di AUTOFZ.

. . .

- le AFZ si possono rappresentare (CLAMPED-FREE)



$$\omega = \omega_1 \longrightarrow \phi_1 = \operatorname{sen} \frac{\omega_1}{c} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \frac{x}{L}$$
$(r = 1)$

$$\omega = \omega_3 \longrightarrow \phi_3 = \operatorname{sen} \frac{\omega_3}{c} x = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \frac{x}{L}$$
$(r = 3)$

$\omega = \omega_5 \longrightarrow$ tante, ma sconosciute

quest MODI sono i "mattoni" per descrivere qualunque tipo di moto (con le loro c.l.)

posso eccitare la struttura affinché si veda un certo modo,

oppure a caso tutti i modi vengono eccitati e danno il loro contributo

40

- non so ..., provo a sostituire nella forma generale

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \cdot -c$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

sostituisco nell'eq e verifico che questa intuizione è corretta

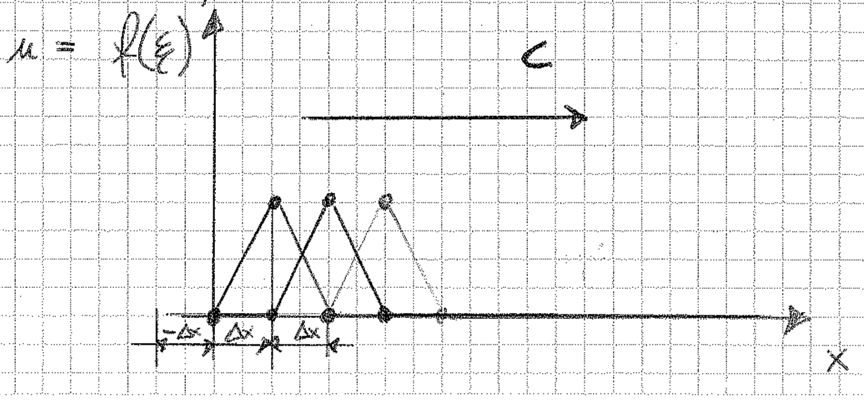
N.B.

1) $f(\xi)$ non so che forma ha

2) $f(\xi)$ funziona per ogni forma

3) da due variabili si passa ad una

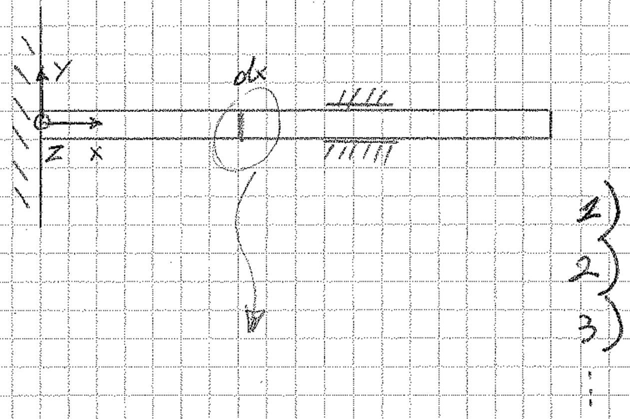
- prendiamo una $f(x \mp ct)$ a caso e vediamo cosa succede per diversi istanti di tempo

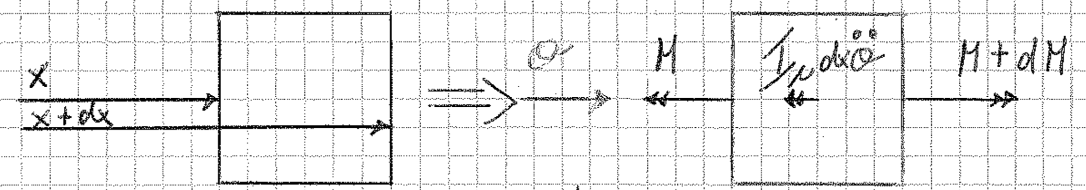


la combinazione di onde progressive e regressive genera la soluzione STAZIONARIA

* comportamento torsionale

↳





della trave!! $\left[I_\mu\right] = \frac{ML^2}{L}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \cancel{M} - \cancel{M} - \frac{\partial M}{\partial x}\cancel{dx} - I_\mu \ddot{\theta}\, \cancel{dx} = 0 \\ M = G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases}$$

FMS

$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$

della sezione!! $\left[I_p\right] = L^4$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - I_\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$I_p = \frac{I_0}{2}$

$I_0 = \pi \frac{d^4}{32}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 249

→) delle azioni d'inerzia in questo modello
(EULERO - BERNULLI) non si tiene conto
che la sezione può ruotare
(NO m. r. f. i.) ~ $I_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ Timoshenko

$$\uparrow \begin{cases} \cancel{T} + \frac{\partial T}{\partial x} \cancel{dx} - \cancel{T} - \mu \cancel{dx}\, \ddot{v} = 0 \\ \cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x} \cancel{dx} - \cancel{M} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) \frac{\cancel{dx}}{2} + T \frac{\cancel{dx}}{2} = 0 \end{cases}$$

~ trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -T$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial x} + T = 0 \end{cases}$$

- FMS dice $M = f(v)$

$$M = + E \underset{(z)}{I} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

~ $I_D = \pi \frac{d^4}{32}$

- mettendo a sistema le tre equazioni con

$E\,I$ = RIG. TRAVE = costante ~ altrimenti non si trovano sol. in forma chiusa

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$$

43

con $\beta^4 = -\frac{\mu\, \omega^2}{E J} > 0$

la soluzione è del tipo

$$\phi(x) = \phi_0 e^{\lambda x} \quad \sim \text{armonica}$$

$$(\lambda^4 - \beta^4)\phi_0 \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$\forall x$ vale (EVP)

$\lambda^4 = \beta^4$ $\qquad\qquad$ $\phi_0 = 0$ banale

$\lambda^2 = \pm \beta^2$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i\beta \rightarrow \cos\beta x / \sin\beta x \\ \lambda_{3,4} = \pm \beta \rightarrow \cosh\beta x / \sinh\beta x \end{cases}$$

otteniamo quattro soluzioni e la soluzione finale sarà una c. l. di queste

$$\phi(x) = \left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right] + \left[A_3 e^{\beta x} + A_4 e^{-\beta x}\right]$$

per chiudere si scrive così

(2) $$\boxed{\phi(x) = \left[A \cos\beta x + B \sin\beta x\right] + \left[C \cosh\beta x + D \sinh\beta x\right]}$$

44

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 249

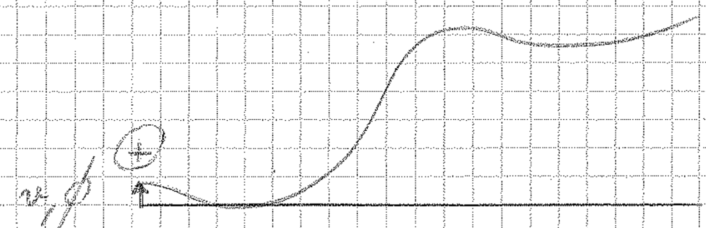
$$* \quad \frac{\partial v^3}{\partial x^3} = \eta(t)\,\frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$$

? il taglio è la derivata del momento

$$T = -EI\,\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi''' = 0$$



$\phi = ?$

$\phi' = ?$

$\phi'' \propto (+) \propto M$

$\phi''' \propto \frac{dM}{dx}$

ad $x = L$

$- \ \phi(L, t) = ?$

$- \ \phi'(L, t) = ?$

$* \ \phi''(L, t) = 0$

$* \ \phi'''(L, t) = 0$

ora si devono calcolare le derivate

invece le c.l.

(2) $\phi(x) = A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x + C\cosh\beta x + D\,\mathrm{senh}\,\beta x$

$\phi'(x) = -A\,\mathrm{sen}\,\beta x + B\cos\beta x + C\,\mathrm{senh}\,\beta x + D\cosh\beta x$

$\vdots$

* approccio con gli operatori all'eq. delle onde (c. flex)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]=0$$

$$\boxed{K[w] + M[\ddot{w}] = 0}$$

con $\boxed{K[\circ] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\,\frac{\partial^2[\circ]}{\partial x^2}\right]}$

$\boxed{M[\circ] = \mu}$

nel dominio $\boxed{D = [0, L]}$

- in generale
  1) $K[\circ]$ (op. di RIGIDEZZA) è un operatore differenziale che lavora sullo spostamento dell'elemento infinitesimo a part. dall'eq. statica → rigidezza
  2) $M[\circ]$ (op. di MASSA) è un op. diff. che lavora sulla derivata seconda dello spostamento → f. i.
  3) l'eq. generale

$$K[w] + M[\ddot{w}] = 0$$

con $w(x, y, z; t)$

è definita in un certo dominio

- come prima (particolare) si cerca una soluzione a VARIABILI SEPARABILI se $\mathcal{L}[u] \neq \mathcal{L}[v]$

$$v\,\mathcal{L}[u] \neq u\,\mathcal{L}[v]$$

$$\boxed{\int_D v\,\mathcal{L}[u]\,dD \equiv \int_D u\,\mathcal{L}[v]\,dD}$$

si dice che $\mathcal{L}[\circ]$ è un operatore autoaggiunto → è equivalente con le proprietà di simmetria di massa e rigidezza

si può provare con

↳ E-B $\angle$IB-$\angle$IB

deve prendere due fz che sodd eq diff

$$u = \phi_r(x) \qquad v = \phi_s(x)$$

$$M[\circ] \longrightarrow \int_0^L \phi_r\,\mu\,\phi_s\,dx \overset{?}{\equiv} \int_0^L \phi_s\,\mu\,\phi_r\,dx \quad ✓$$

$$K[\circ] \longrightarrow \int_0^L \phi_r\,EI\,\frac{d^4\phi_s}{dx^4}\,dx \overset{?}{\equiv} \int_0^L \phi_s\,EI\,\frac{d^4\phi_r}{dx^4}\,dx$$

integro x parti due volte e considero le c. l.

$$= \underbrace{\cancel{EI\,\frac{d^3\phi_s}{dx^3}\phi_r\Big|_0^L}}_{=0} - \int_0^L EI\,\frac{d\phi_r}{dx}\,\frac{d^3\phi_s}{dx^3}\,dx \overset{?}{\equiv} \dots$$

in ogni caso di vincolo sono nulli !!

$$= 0 - \underbrace{\cancel{\left[EI\,\frac{d^2\phi_s}{dx^2}\,\frac{d\phi_r}{dx}\right|_0^L}}_{=0} - \int_0^L EI\,\frac{d^2\phi_r}{dx^2}\,\frac{d^2\phi_s}{dx^2}\,dx \overset{?}{\equiv} \dots$$

$$= \int_0^L EI\,\frac{d^2\phi_r}{dx^2}\cdot\frac{d^2\phi_s}{dx^2}\,dx \equiv \int_0^L EI\,\frac{d^2\phi_s}{dx^2}\cdot\frac{d^2\phi_r}{dx^2}\,dx \quad ✓$$

- se considera l'espressioni da sale

$$\boxed{\int_D \phi_s \, K[\phi_r] \, dD = \omega_r^2 \int_D \phi_s \, M[\phi_r] \, dD}$$

se $r \neq s \longrightarrow$	$\int_D \phi_s K[\phi_r] \, dD = 0$
$r = s \longrightarrow$	$\int_D \phi_r K[\phi_r] \, dD = \omega_r^2 \, M_r = K_r$

K_r = RIGIDEZZA MODALE

questo risultato rappresenta il PRINCIPIO ORTOGONALITÀ

$$\int_D \phi_s \, M[\phi_r] \, dD \begin{cases} 0 & r \neq s \\ M_r & r = s \end{cases}$$

* consideriamo per il generico sistema continuo la RISPOSTA LIBERA

$$K[w] + M[\ddot{w}] = 0$$

~ eq. dinamica di un volume elementare

per vedere l'influenza delle c. iniziali sul sistema lasciato libero di oscillare

↳ ASTA CLAMPED - FREE

in generale $\phi_r(x)$

$$u(x,t) = \sum_{r=1,3,}^{\infty} \left(A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t \right) \left(\sin \frac{\omega_r}{c} x \right)$$

48