www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 508

DATA: 10/04/2013

APPUNTI

STUDENTE: Parrino

MATERIA: Fisica I
Prof. Trigiante

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FISICA

Vettori

- Vettore per uno scalare → $\vec{V'} = a\vec{V}$ → $|\vec{V'}| = |a||\vec{V}|$
- Vettore opposto → $\vec{V'} = -\vec{V'}$
- Versore → VETTORE CON MODULO UNITARIO $\vec{u}$
- Vettore generico espresso col versore → $\vec{V} = |\vec{V}|\vec{u}$
- Somma 2 vettori → REGOLA PARALLELOGRAMMA
- PRODOTTO TRA VETTORI
  - ↳ scalare $\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}||\vec{W}| \cos\theta$
  - ↳ vettoriale $\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}||\vec{W}| \operatorname{sen}\theta$ (o con prodotto matriciale)
- VETTORE ESPRESSO MEDIANTE COMPONENTI ⇒ $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$
  - ↳ $\vec{V} = V_x + V_y + V_z$
- VETTORE POSIZIONE DI UN PUNTO $P(x, y, z)$
  - ↳ $\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}$
- VETTORE POSIZIONE RELATIVA TRA P e Q
  - ↳ $\vec{QP} = \vec{OP} - \vec{OQ} = (x_1 - x_2)u_x + (y_1 - y_2)\vec{u}_y + \ldots$
- SOMMA DI 2 VETTORI IN COMPONENTI
  - ↳ $\vec{V} + \vec{W} = (V_x + W_x)\vec{u_x} + (V_y + W_y)\vec{u_y} + (V_z + W_z)\vec{u_z}$
- PRODOTTO SCALARE DI 2 VETTORI IN COMPONENTI
  - ↳ $\vec{V} \cdot \vec{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$
- COORDINATE POLARI DI UN PUNTO P ⟶ $\vec{r}$ (direzione radiale $\vec{u_r}$)
  - φ (direz. tangenz. $\vec{u_\varphi}$)
  - $P(r, \varphi)$

Cinematica

- Moto: qnd vettore posizione $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ varia nel tempo
- MOTO UNIDIREZIONALE
  - ↳ velocita' → $v = \frac{dx}{dt}$ (velocita' istantanea)
  - ↳ spazio percorso → $\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$
  - ↳ posizione istantanea → $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$
  - ↳ accelerazione $\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

↳ Velocita' tangenziale → $\vec{v} \perp \vec{r}$ ($\vec{v}$ tangenziale alla
direzione traiettoria di raggio
$R = |\vec{r}|$

$\vec{\tau}$ = versore tangente
alla curva con stessa direzione di $\vec{v}$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau} = R\omega\vec{\tau}$$

↳ Spazio di traiettoria percorso S S = lungh. arco

$S = R\varphi(t) = R\omega t$ (lo spazio percorso = angolo × il raggio)

Quindi se $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$

↳ Accelerazione : dovuta alla variazione di direzione e verso della velocita' ma con $|\vec{v}|$ cost

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(-R\omega sen(\omega t))}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t) \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(+R\omega\cos(\omega t))}{dt} = -R\omega^2 sen(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2\cos(\omega t), -R\omega^2 sen(\omega t))$$
$$= (-\omega^2 x(t), -\omega^2 y(t)) = -\omega^2\vec{r}(t)$$ → accelerazione centripeta diretta verso il centro (verso opposto a $\vec{r}(t)$)

$|\vec{a}| = \omega^2 r$ (vettore posizione)

$|a| = +\omega^2 R$ e dato che $v = R\omega$ $R = \frac{v}{\omega}$ $\omega = \frac{v}{R}$

$$= +\omega^2\left(\frac{v}{\omega}\right) = +\omega v = \left(\frac{v}{R}\right)v = \frac{v}{R}$$

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$$

- MOTO NON UNIFORME → $\vec{v} \neq cost$ $\vec{a} \neq 0$

↳ Velocita' non costante → $\Delta V = V_2 - V_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t')dt$

↳ Accelerazione non nulla → $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt}$

- MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

↳ COORDINATE POLARI : $x(t) = R\cos(\varphi(t))$
$y(t) = R sen(\varphi t)$

↳ ARCO DI Traiettoria percorso $S = R\varphi(t)$

↳ Velocita' : varia in modulo, direzione e verso

$$\vec{v} = \frac{spazio}{tempo} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \frac{d}{dt}R\varphi(t)\vec{\tau} = R\frac{d\varphi(t)}{dt}\vec{\tau}$$

con $\vec{\tau}$ versore tangenziale alla traiettoria // a $\vec{v}$

$$a_y = \begin{cases} V_y(t) = V_y(t_0) + a_y(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + V_y(t_0)(t-t_0) + \frac{a_y^2}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

$$a_z = \begin{cases} V_z(t) = V_z(t_0) + a_z(t-t_0) \\ z(t) = z(t_0) + V_z(t_0)(t-t_0) + \frac{a_z^2}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

3 moti unidimensionali indipendenti.

↳ GRAFICO PARABOLA :

concavità verso l'alto → $a>0$

concavità verso il basso → $a<0$

Dinamica

- PRINCIPI DI NEWTON
  I) Se un oggetto non subisce azioni esterne esso persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme

  II) la forza agente su un oggetto è proporzionale all'accelerazione prodotta secondo un fattore di proporzionalità detto m : massa inerziale

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

  III) Ad ogni azione ne corrisponde una uguale e contraria.

- OSCILLATORE ARMONICO (molla)

↳ forza elastica $|\vec{F_e}| = k_e |x|$

k_e = costante elastica
$|x|$ = spostamento

In generale $\vec{F_e} = -k_e x \vec{u_x}$

↳ equazioni del moto unidimensionale

$$\vec{a} = a \vec{u_x} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u_x}$$

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \rightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u_x} = -k_e x \vec{u_x}}$$

↳ frequenza angolare → $\omega_0^2 = \frac{k_e}{m} > 0$

$$\vec{a} = -\omega_0^2 x(t)$$

Date le condizioni iniziali

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \,\text{sen}(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t)$$

↳ Periodo → $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_e}}$

22.02.2010

FISICA

FISICA: Scienza che studia i fenomeni naturali

FENOMENI differenti: OTTICI, ACUSTICI, MAGNETICI
In corrispondenza delle varie tipologie di fenomeni si sviluppano le branche della fisica:
* ottica
* acustica
* meccanica (moto dei corpi)
* elettromagnetismo
* termodinamica

Esistono connessioni tra tali fenomeni apparentemente differenti. Ad esempio i fenomeni ottici sono riconducibili a quelli elettromagnetici..

Nel XX secolo vennero appurate conoscenze sulla STRUTTURA DELLA MATERIA.

Tutte le proprietà della materia sono spiegabili per un numero limitato di mattoni costituenti (particelle) e delle loro interazioni

le leggi NEWTONIANE della meccanica classica non valgono se:

↳ si considerano fenomeni in cui gli oggetti si muovono con velocità elevate, prossime alla velocità della luce $v \sim c$

↳ si considerano forze gravitazionali molto intense

la Meccanica classica venne difatti sostituita con la meccanica quantistica.
Einstain elaborò difatti le teorie → della relatività ristretta
→ della relatività generale

LA STRUTTURA DELLA MATERIA

MATERIA: Particelle fondamentali
* elettroni e^- → $m_e \sim 10^{-30}$ kg
* protoni p^+
* neutroni n

p^+, n → $m \sim 2000\, m_e$

le particelle fondamentali formano gli atomi che posseggono un nucleo centrale di protoni p^+ e di neutroni n

Dimensioni di un atomo 10^{-10} m = angstrong

Dimensioni del nucleo 10^{-15} m = fermi

Tutta la massa atomica è concentrata nel nucleo che risulta molto più piccolo dell'intero atomo.

FORZA MAGNETICA → interazione esercitata sull'ago della bussola da un oggetto.

→ cariche uguali si respingono

Per superare le forze ~~repulsive~~ tra i protoni di un nucleo

tra gli i protoni nel nucleo

→ FORZA NUCLEARE FORTE → a corto raggio con $r < 10^{-15}$ m

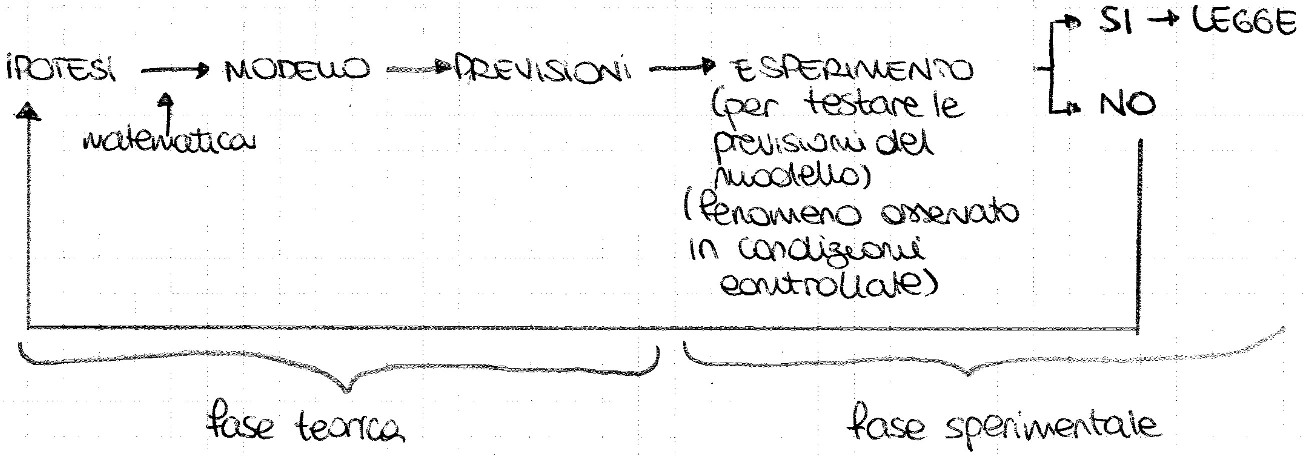
FORZA NUCLEARE FORTE → a corto raggio con $r < 10^{-15}$ m.

→ FORZA NUCLEARE DEBOLE → a corto raggio responsabile di alcuni decadimenti radioattivi

a corto raggio responsabile di alcuni decadimenti radioattivi

IL METODO SCIENTIFICO E LA MISURAZIONE

Galileo Galilei (XVII sec) comprese la relazione tra teoria ed esperimento nell'indagine scientifica elaborando il METODO SCIENTIFICO.



Una GRANDEZZA FISICA → descritta da una misura, oggetto matematico

Una LEGGE FISICA → Relazione tra grandezze fisiche ovvero una legge matematica tra le misure delle grandezze.

In fisica si usano le cosiddette DEFINIZIONI OPERATIVE.
Le GRANDEZZE FISICHE si dividono in

★ GRANDEZZE FONDAMENTALI : riferite a quantità standard della stessa grandezza presa come unità di misura.

★ GRANDEZZE DERIVATE : grandezze che sono funzioni delle quantità fondamentali (VELOCITÀ ...)

TEORIA DELLA MISURA E DELL'ERRORE

23.02.10

Ogni misura è affetta da un errore, da un incertezza inevitabile

Incertezza o errore ~~insito~~ nella misura

la migliore stima che possiamo avere nella misurazione dello strumento è detta sensibilità dello strumento ε (epsilon)

Un intervallo di misura 7,6 cm ⟷ 7,7 cm può essere rappresenta 7,6 ± 0,1 cm in cui 7,6 è la migliore stima e 0,1 rappresenta l'errore.

STRUMENTO DI MISURA

Dispositivo che da una risposta definita alla grandezza che vogliamo misurare.
Prima di usare uno strumento bisogna tararlo.
Facciamo delle tacche alle risposte che corrispondono a quantità standard delle grandezze costituendo una scala graduata.

Intervallo di misura $x \pm \epsilon$ (misura ± l'errore)

ESISTONO DIVERSI TIPI DI ERRORI

- Dovute alla sensibilità dello strumento
- Sistematici - legati al processo di misura (per esempio strumenti calibrati o tarati male)
- Accidentali/Statistici → influenzano ogni misura che facciamo in modo casuale.

(se chiamiamo x_0 la misura reale della grandezza nella misurazione otterremo valori di x distribuiti casualmente rispetto a x_0, se ripetiamo n volte le misure ~~sono~~ trovate al di sopra o al di sotto di x_0 sono in numero uguale. L'intervallo ottenuto da tali valori x ci da una stima dell'errore e può essere > ε)

$$x_i \pm \delta x$$

$\delta x = \max(\epsilon$, errori statistici, errori sistematici$)$

↳ intervallo dell'errore

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \leftarrow$$ valore medio ottenuto con N misurazioni

N = n° misure fatte.

Per N molto grande gli errori tendono ad annullarsi

①

Per una misura sempre più precisa $\delta x \to 0$

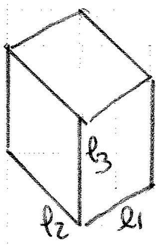
$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dx}{dy}(\bar{x})$ → la pendenza della secante coincide con la pendenza della tangente.

Se δx e' molto piccolo possiamo approssimare il rapporto incrementale con la derivata.

$\frac{\delta x}{\bar{x}} \ll 1 \qquad \frac{\delta y}{\delta x} \simeq \frac{dy}{dx}$

$$\delta y = \left| \frac{dy}{dx}(\bar{x}) \right| \delta x$$

Per una grandezza derivata espressa in funzione di più grandezze $F(x, y, z \ldots)$



Volendo calcolare volume

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$$

stime migliori delle grandezze fondamentali

x	$\bar{x} \pm \delta x$
y	$\bar{y} \pm \delta y$
z	$\bar{z} \pm \delta z$

la stima migliore di F è → $\bar{F} = F(\bar{x}; \bar{y}, \bar{z} \ldots)$

Definiamo la derivata parziale ovvero come varia F al variare di una sola variabile mantenendo costanti.

$x \qquad \bar{x} \to \bar{x} + \Delta x$

$y = \bar{y}$

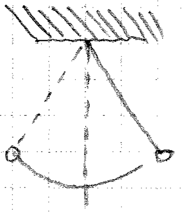
$z = \bar{z}$

$$\Delta F = F(\bar{x} + \Delta x), \bar{y}, \bar{z}) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Calcoliamo il limite per $\Delta x \to 0$ della variazione di ΔF in relazione a Δx

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \ldots) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}, \bar{z}) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\Delta x}$$

ESEMPIO : il pendolo



Il periodo di oscillazione dipende dall' accelerazione gravitazionale e dalla lunghezza del filo (ISOCRONISMO DEL PENDOLO)

$g \sim 9{,}8 \ m/s^2$ (accelerazione gravità)

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ → PERIODO DEL PENDOLO

Analisi dimensionale

$[s] = \sqrt{\frac{[\cancel{lung}]}{\frac{[\cancel{lung}]}{[s]^2}}} \Rightarrow \quad [S] = [S]$ → formula corretta perchè la grandezza al 1° membro è = alla grandezza del II membro.

Calcolando g in funzione di T ed l

$$g(T, l) = (2\pi)^2 \ \frac{l}{T^2}$$

$\bar{l} \pm \delta l \qquad \bar{T} \pm \delta T \qquad \bar{g} \pm \delta g$

$$\bar{g} = (2\pi)^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2}$$

Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\delta g}{\delta l} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \qquad \frac{\delta g}{\delta T} = \frac{-2(2\pi)^2 \ l}{T^3}$$

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta l}\right)^2 \delta l^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta T}\right)^2 \delta T^2} = \sqrt{\frac{(2\pi)^4}{\bar{T}^4} \delta l^2 + \frac{4(2\pi)^4}{\bar{T}^6} \bar{l}^2 \delta T^2}$$

Calcolando l'errore relativo

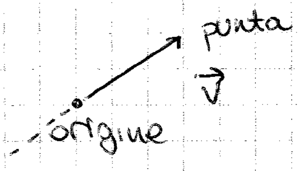
$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{\bar{l}}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta T}{\bar{T}}\right)^2}$$

Se abbiamo una funzione $F = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$

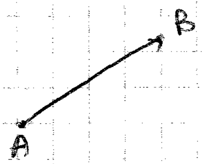
$$\frac{\delta F}{F} = \sqrt{\alpha^2\left(\frac{\partial x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\partial y}{y}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial z}{z}\right)^2}$$

Alcune grandezze
- numero = misura in unità (u)
- direzione
- verso

VETTORE

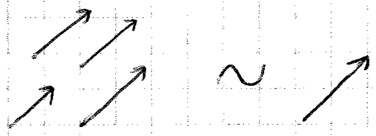


$|\vec{V}| > 0$ → modulo
retta su cui giace v → direzione
verso della punta → verso



$\vec{AB}$

$|\vec{AB}| = 0,5$ ⓜ

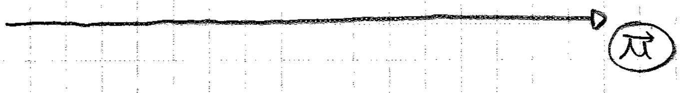


⇒ VETTORE LIBERO che consente lo spostamento rigido ed ~~ha~~ è caratterizz. da modulo, direzione e verso

la forza invece sarà descritta da un vettore applicato.

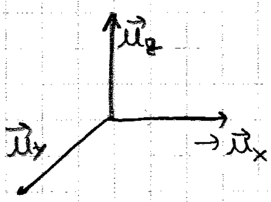
DEFINIAMO VERSORE $\vec{u}$

$|\vec{u}| = 1$ u



Ciascun asse è distinto rispettivamente dal suo VERSORE

(x, y, z ...)



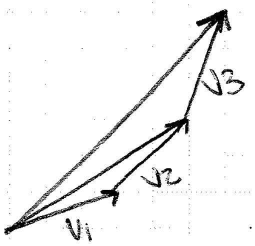
Per $a \in \mathbb{R}$ $\vec{V} = a\vec{V} = \vec{V}$

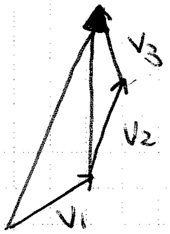
$|\vec{W}| = |a\vec{V}| = |a||\vec{V}|$ → MODULO

→ direzione = a quella di $\vec{V}$

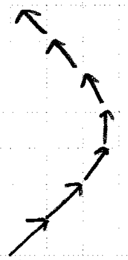
→ verso di $\vec{v}$ se $a > 0$
verso opposto di $\vec{v}$ se $a < 0$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA





$$(\vec{V_1}+\vec{V_2})+\vec{V_3} = \vec{V_1}+(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$$



Possiamo calcolare la somma di n vettori

$$V_1+V_2+\ldots V_N = \sum_{i=1}^{N}\vec{V_i}$$

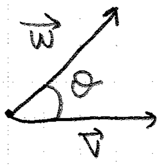
IL PRODOTTO PER UN NUMERO È DISTRIBUTIVO RISPETTO ALLA SOMMA VETTORIALE

$$a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v}+a\vec{w}$$

$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v}+b\vec{v}$$

PRODOTTO SCALARE

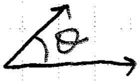
$\vec{v}\cdot\vec{w}$



$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$

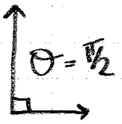
se $\vec{v}\cdot\vec{w} < 0 \rightarrow \cos\theta < 0$

se $\vec{v}\cdot\vec{w} > 0 \rightarrow \cos\theta > 0$



Due vettori sono ORTOGONALI se e solo se il loro prodotto scalare sia nullo $\rightarrow \theta = \pi/2$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow$



$$\vec{V} \circ \vec{V} = |\vec{V}||\vec{V}|\cos(0) = |\vec{V}|^2$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

$$|\vec{V} + \vec{w}| = \sqrt{(\vec{V}+\vec{w})(\vec{V}+\vec{w})} = \sqrt{\vec{V}\vec{V} + \vec{w}\cdot\vec{w} + \vec{V}\cdot\vec{w} + \vec{w}\vec{V}}$$

$$= \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{V}\vec{w}}$$

$$= \sqrt{|\vec{V}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{V}||\vec{w}|\cos\theta}$$

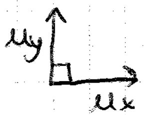
Vogliamo calcolare il prodotto scalare tra qst 2 vettori

$$\begin{cases} \vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \\ \vec{w} = W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y \end{cases}$$

↳ $\vec{V}$ e $\vec{w}$ in componenti ortogonali

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 1 \cdot 1 \cdot \cos \pi/2 = 0$$



$$\vec{V} \cdot \vec{w} = (V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y) \circ (W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y)$$

$$= V_x W_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + V_x W_y \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y + V_y W_x \vec{u}_y \vec{u}_x + V_y W_y \vec{u}_y \vec{u}_y$$

$$= V_x W_x + W_y W_y = |\vec{V}||\vec{w}|\cos\theta$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \circ \vec{V}} = \sqrt{V_x^2 \cdot V_y^2}$$

È conveniente talvolta scrivere un vettore come vettore riga

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y = (V_x, V_y)$$

$$\vec{u}_x = (1, 0)$$
$$\vec{u}_y = (0, 1)$$

$$\vec{W} = W_x \vec{u}_x + W_y \vec{u}_y = (W_x, W_y)$$

$$\vec{V} + \vec{W} = (V_x, V_y) + (W_x, W_y) = (W_x + V_x, W_y + V_y)$$

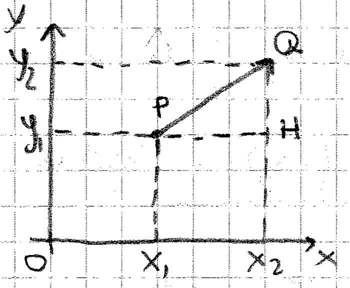
$$\vec{V} \circ \vec{W} = (V_x, V_y) \cdot \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} = V_x W_x + V_y W_y$$

↳ PRODOTTO MATRICIALE

Il vettore posizione relativa $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$\vec{PQ} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$



$$|\vec{PQ}| = \sqrt{|PH|^2 + |HQ|^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

ESEMPIO:

P (2, 4, 0)
Q (1, -5, 7)

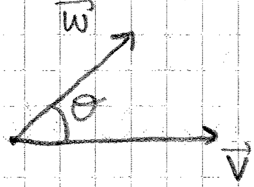
Trovare il vettore posizione relativa PQ

$\vec{PQ} = (1-2 , -5-4 , 7-0) = (-1 , -9 , 7)$

PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{V} , \vec{W}$

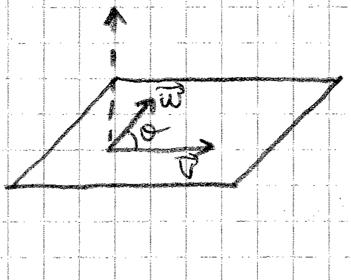
$\vec{V} \times \vec{W}$



$|\vec{V} \times \vec{W}| = |\vec{V}||\vec{W}| \operatorname{sen}\theta$ → modulo

casi particolari

① se $\theta = k\pi$ $\quad \vec{V} \times \vec{W} = 0 \iff \vec{V} // \vec{W}$ (paralleli)



→ direzione : perpendicolare al piano in cui giacciono i 2 vettori, i 2 fattori

→ VERSO → Regola mano destra

* si dispongono le dita verso $\vec{V}$ e le piego verso $\vec{W}$ il pollice definisce il verso

usando l'antisimmetria

$$= (V_x W_y - V_y W_x)(\vec{u}_x \times \vec{u}_y) + (V_z W_x - V_x W_z)(\vec{u}_z \times \vec{u}_x) +$$

$$+ (V_y W_z - V_z W_y)(\vec{u}_y \times \vec{u}_z)$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad , \quad \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad , \quad \vec{u}_x \times \vec{u}_z = -\vec{u}_y$$

$$= (V_x W_y - V_y W_x)\,\vec{u}_z + (V_z W_x - V_x W_z)\,\vec{u}_y + (V_y W_z - V_z W_y)\,\vec{u}_x$$

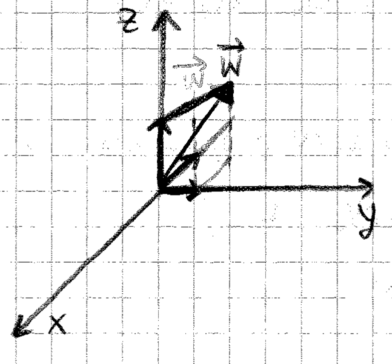
Per determinare il prodotto vettoriale possiamo anche usare il determinante matriciale di una matrice simbolico

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

ESERCIZIO :

① Sia dato un vettore $\vec{V}$ in componenti v

$$\begin{cases} \vec{V} = 2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y - \vec{u}_z \\ \vec{W} = -\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z \end{cases}$$



$$\vec{V} \times \vec{W} = |\vec{V}||\vec{W}| \cos\theta$$

$$\star \quad \cos\theta = \frac{\vec{V} \times \vec{W}}{|\vec{V}||\vec{W}|}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{W}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

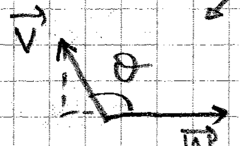
prodotto scalare $\vec{V} \cdot \vec{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$

$$= (2 \cdot (-1)) + (3 \cdot 1) + (-1 \cdot 2)$$

$$= -2 + 3 - 2 = -1$$

$$\star \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{6 \cdot 14}} = 1{,}68\pi rc \qquad \theta = 1{,}68\,\pi$$

proiezione di $\vec{V}$ su $\vec{W}$ negativa



$$\theta \cong 1{,}68 \text{ rad.} > \pi/2$$

MECCANICA

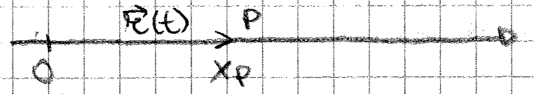
CINEMATICA

Analisi descrittiva a prescindere le caratteristiche del moto

DINAMICA

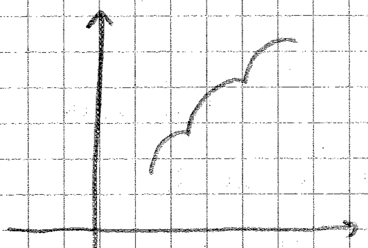
Studio delle cause (forze) che determinano il moto.

MOTO PIÙ SEMPLICE → moto lungo una traiettoria rettilinea



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u_x}$$

È possibile misurare la posizione del punto in ogni istante semplic. con la coordinata x.



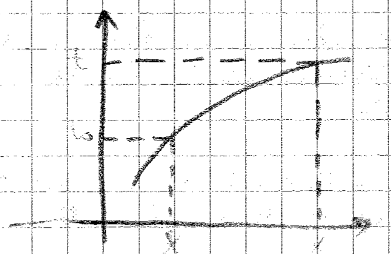
LEGGE ORARIA: Descrive il moto della particella in ogni istante di tempo.

VELOCITÀ → Quanto la posizione del punto varia nel tempo.

In un istante t_0, istante successivo $t_0 + \Delta t > t_0$

In t_0 → la posizione della particella $x(t_0) = x_0$

In t " " " $x(t) = x_t$



Definiamo VELOCITÀ MEDIA:

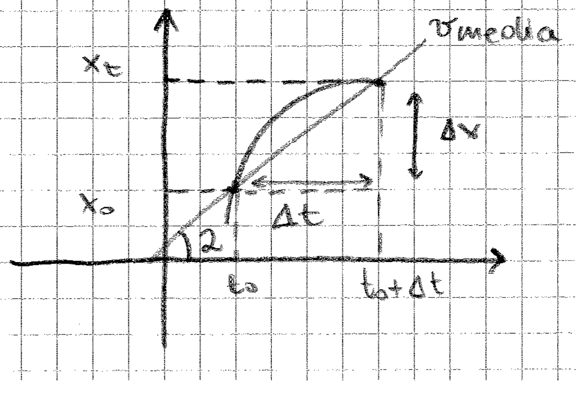
$$v_{media} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Delta x \equiv x(t) - x(t_0)$$

oppure

$$v_{media} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

GRAFICAMENTE v_{media}

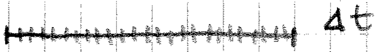
$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha$$



Da tale definizione $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$

a $\Delta t \to 0$ $dx = v(t)\,dt$

In generale partendo da un istante t_0 arrivando in un istante $t = t_0 + \Delta t > 0$ con Δt intervallo finito, per calcolare la velocita' del punto divido Δt in un numero infinito di intervalli infinitamente piccoli così da calcolare la velocità istantanea costante.



$\Delta t = dt_1 + dt_2 + dt_3 \dots dt_n$ →

la velocita' varia tra un intervallo e l'altro ma si considera costanti in ogni intervallo infinitesimo.

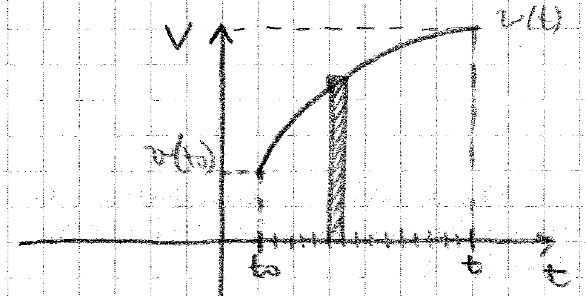
$dt_1 \Rightarrow$ $dx_1 = v_1\,dt_1$ → spostamento nell'intervallo dt_1

$dt_2 \Rightarrow$ $dx_2 = v_2\,dt_2$

$dt_n \Rightarrow$ $dx_n = v_n\,dt_n$

★ $\Delta x = x(t) - x(t_0) = dx_1 + dx_2 + \dots dx_n = v_1\,dt_1 + v_2\,dt_2 \dots + v_n\,dt_n$

tale somma viene rappresentata graficamente in tale modo



Consideriamo un intervallo infinitesimo dt_i e la sua corrispondente velocita' istantanea $v(t_i)$

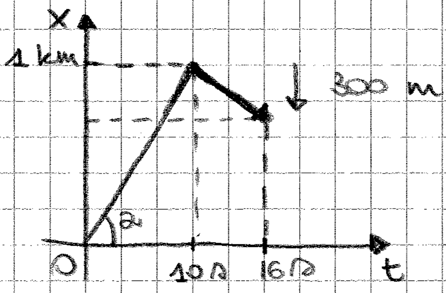
Ciascuno dei termini della sommatoria ★ può essere rappres. come l'area dei rettangolini di base dt_i e altezza $v(t_i)$

la somma delle aree di tali rettangolini si approssima all'area sottesa dalla curva della velocita'.

$$\Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

Scriveremo anche $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$

Basta allora conoscere la posizione iniziale t_0.



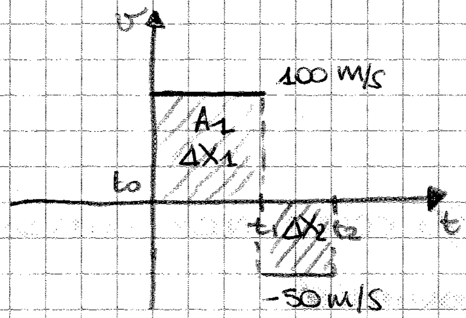
Nell' istante t_2 dopo 6 sec. $x = 700$ m

$t_1 \le t \le t_2$ $\quad v = cost. = v_2 = ?$

$$x(t) = x(t_1) + v_2(t - t_1)$$

$$v_2 = \left(\frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}\right) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_1 - t_2} = \frac{700 - 1000}{6\,s} = \frac{-300}{6}\ m/s = -50\ m/s$$

$v_2 < 0$ perché l'oggetto si sposta in verso opposto rsp. all' asse $\xrightarrow{x}$



$$\Delta X_1 = 100\ \frac{m}{s} \times 10\,s = 1000\ m$$

$$\Delta X_2 = -50\ \frac{m}{s} \times 6\,s = -300\ m$$

LA VELOCITA' IN UN MOTO NON UNIFORME VARIA NEL TEMPO.

$$t_0 \xrightarrow[\Delta t]{} t = t_0 + \Delta t$$

$$v(t_0) \xrightarrow[\Delta v]{} v(t) = v(t_0 + \Delta t)$$

Definiamo ACCELERAZIONE MEDIA

$$a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

~~Definiamo allora~~ definiamo Accelerazione istantanea $\Delta t \to 0$ il valore limite a cui tende l'accelerazione media al tendere $\Delta t \to 0$

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}(t_0)$$

Se prendo Δt talmente piccolo da poter considerare costante la variazione della velocità nell'intervallo

$$t_0 \xrightarrow[\Delta t]{} t = t_0 + \Delta t$$

$x(t_0)$ $x(t)$

$v(t_0)$ $v(t)$

$a(t)$ $$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \\ v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' \end{cases}$$

se il moto è uniforme $v(t) \equiv cost = v(t_0)$

$a = \frac{dv}{dt}$ → derivata di una cost $= 0$

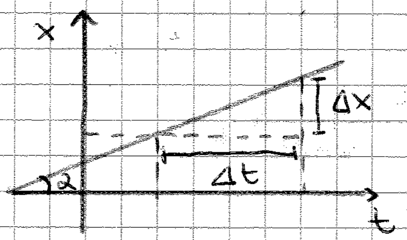
$v(t) \equiv v(t_0)$

$x(t) \equiv x(t_0) - v(t_0)(t - t_0)$

MOTO UNIFORME ($a=0$)

$v(t_0) = v$ $\qquad$ $x(t_0)$

$v(t) = v = cost$ $\qquad$ $x(t) = x(t_0) + v(t - t_0)$



$\boxed{v = tg\alpha}$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO ($a(t) = a = cost$)

Dato $v(t_0)$

$\Downarrow$

$$v(t) = v(t_0) + (a_1 dt_1 + a_2 dt_2 + \dots + a_n dt_n) \qquad a_1 = a_2 = a_n = a$$

$$= v(t_0) + a(dt_1 + dt_2 + \dots + dt_n)$$

$$= v(t_0) + a(t - t_0)$$

Dato $x(t_0)$ $\qquad$ $v(t) = V_0 + a(t - t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [(v(t_0)) + a(t' - t_0)]\,dt'$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{v(t_0)}_{\to \text{cost}}\,dt' + \int_{t_0}^{t} \underbrace{a}_{\to \text{cost}}t'\,dt' - \int_{t_0}^{t} \underbrace{at_0}_{\to \text{cost}}\,dt$$

$$= x(t_0) + v(t_0)\cdot(t - t_0) + a\left[t^2/2\right]_{t_0}^{t} - at_0(t - t_0)$$

$$= x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) + at_0(t - t_0)$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2}$$

la posizione al tempo t $x(t)$ non dipende più in maniera lineare dal tempo ma in maniera quadratica

→ il grafico dello spostamento in funzione del tempo è UNA PARABOLA

→ Rivolta verso l'alto se l'accelerazione $a > 0$

→ verso il basso se $a < 0$

continuo

→ 2-3-10 pg ②

il modulo di
tale vettore posizione relativa ci da la distanza tra 2 punti P e P_0

$|\Delta\vec{r}|$ → rappresenta la distanza in linea d'aria non lo spazio di traiettoria percorso. ΔS

Definiamo una VELOCITA' MEDIA come

$$\boxed{\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} = \frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$

In componenti

$$\vec{v}_{media} = \left(\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right)$$

$$\vec{v}_{media} \propto \Delta\vec{r}$$

il valore limite di vmedia al tendere di $\Delta t \to 0$

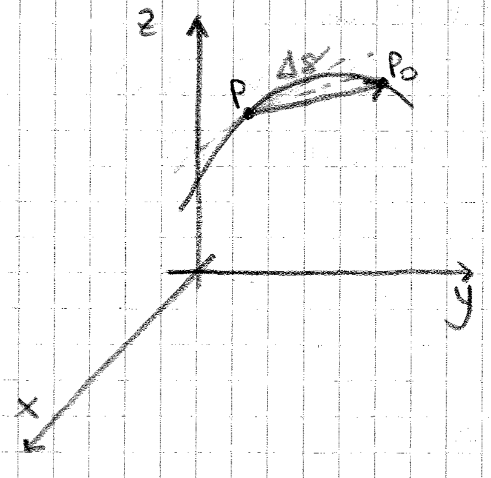
$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t_0) = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right)$$

$$= \left(v_x(t_0), V_y(t_0), v_z(t_0)\right)$$

$$= \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$



man mano che avviciniamo P a P_0 varia la direzione della secante ~~e approssa~~ tende alla direzione della tangente alla curva nel punto P

Man mano che i 2 punti si avvicinano la lunghezza della secante si approssima all'arco di traiettoria ΔS

CASO SEMPLICE in cui **a è cost.**

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow$ le componenti sono costanti.
① ② ③

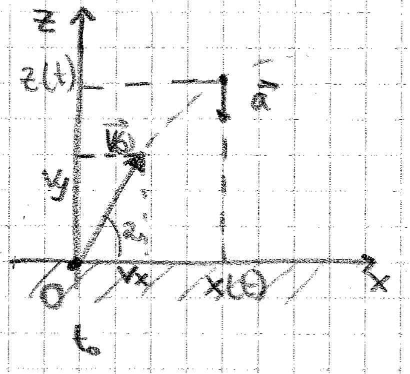
① $\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t-t_0) \\ x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) + \frac{a_x}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$

② $\begin{cases} v_y(t) = v_y(t_0) + a_y(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t-t_0) + \frac{a_y}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} v_z(t) = v_z(t_0) + a_z(t-t_0) \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)(t-t_0) + \frac{a_z}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$

3 MOTI UNIFORMEMENTE ACCELERATI CHE POSSONO ESSERE RISOLTI INDIPENDENTEMENTE

ESERCIZIO: pallottola di un cannone



$t_0 = 0$

$\vec{r}(0) = (0,0)$ → posiz. iniziale

$\vec{v}(0) = (V_x^0, V_z^0)$

$|\vec{v}(0)| = v^{(0)}$

$\begin{cases} V_x^{(0)} = V^{(0)} \cos(\alpha) \\ V_z^{(0)} = V^{(0)} \operatorname{sen}(\alpha) \end{cases}$ componenti di $\vec{v}(0)$

α = inclinazione del cannone → variabile.

Supponiamo di trascurare l'attrito dell'aria

In ogni istante la palla di cannone è soggetta all'acceleraz. gravitazionale rivolta verso il basso $\vec{a} = \vec{g} = 9,81 \, m/s^2$

$\vec{a} = -g\vec{u}_z \qquad g \sim 9,8 \, m/s^2$

$\vec{a} = (0, -g)$

MOTO UNIFORME LUNGO x

$a_x = 0$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a_y = -g$

$$d = \frac{2(v^{(0)})^2}{g} tg(\alpha) \cos^2\alpha =$$

$$= \frac{(v^{(0)})^2}{g} (2\cos(\alpha)\, sen(\alpha))$$

$$d = \frac{v^{(0)2}}{g} (sen(2\alpha))$$

$$d\ max \Longleftrightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \pi/4$$

In che istante raggiungerà la quota max?

$$t_{max} \quad V_z(t_{max}) = 0$$

$$V_z(t) = V_z(0) + a_z(t-0)$$

$$= V_z(0) - g\,t$$

$$V_z(t_{max}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{max} = \frac{V_z(0)}{g}$$

Altezza massima = $z(t_{max})$ =

$$h_{max} = z(t_{max}) = V_z(0)\, t_{max} - \frac{g}{2} t^2_{max}$$

$$= \frac{V_z(0)^2}{g} - \frac{V_z^2(0)}{2g} = \frac{V_z^2(0)}{2g}$$

$$= \frac{(v^{(0)})^2}{2g} \cos^2\alpha$$

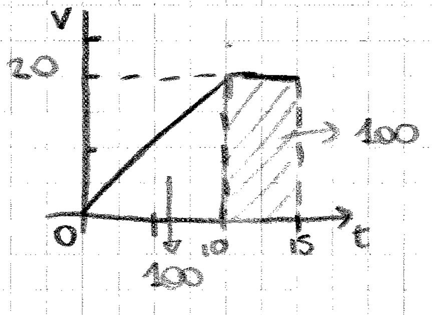
② $10 \le t < 15$ s

$$v(t) = v(10) + \overset{=0}{a}(t-10) = v(10) = 20\,m/s$$

$$x(t) = x(10) + v(10)(t-10) + \underbrace{\frac{a}{2}(t-10)^2}_{=0}$$

$$X(15) = x(10) + v(10)(15-10) = 100 + 20 \cdot 5 = 200\ m$$

$$v(15) = 20\ m/s$$



③ $15 \le t \le 20$ s

$$v(t) = v(15) + a(t-15)$$

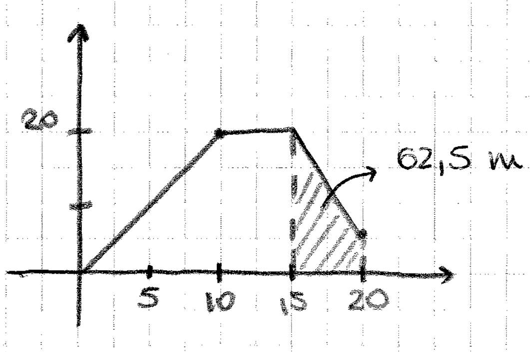
$$x(t) = x(15) + v(15)(t-15) + \frac{a}{2}(t-15)^2$$

$$v(20) = v(15) - 3(20-15) = 20 - 3(5) = 5\ m/s$$

$$x(20) = x(15) + v(15)(20-15) - \frac{3}{2}(20-15)^2$$

$$= 200 + 20 \cdot 5 - \frac{3}{2}25 = 200 + 100 - \frac{75}{2}$$

$$= \frac{600-75}{2} = \frac{525}{2} = 262{,}5\ m$$



$$\Delta x\ tot = x(10) + x(15) + x(20) = 100$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u_z} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u_z}$$

Se la rotazione avviene in senso antiorario ω uscente dal centro della circonferenza, se in senso orario ω entrante.

Il verso di ω dipende dal moto.

Velocità istantanea $v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y})}{dt}$

tangente alla traiettoria circolare

$$= \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y}$$

$$= V_x \vec{u_x} + V_y \vec{u_y}$$

Mentre P ruota le 2 proiezioni x(t) e y(t) variano nel tempo. Il moto circolare si compone in 2 moti oscillatori unidimensionali delle componenti x(t) e y(t) che variano col coseno e col seno dell'angolo.

$\to$ derivata di x $\to$ D(Rcos(ωt))

$$\vec{v} = (-R\omega \, sen(\omega t), R\omega \cos(\omega t))$$

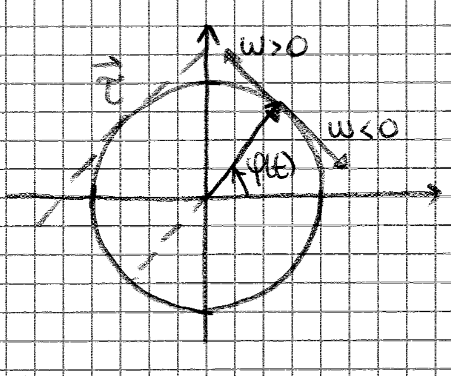
$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2 \omega^2 sen^2(\omega t) + R^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = \underset{\substack{\downarrow\downarrow \\ R = cost \\ \omega = cost}}{R\omega} = v$$

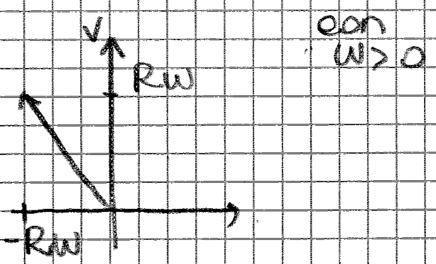
La velocità $v = R\omega$ non varia in modulo perchè R e ω sono costanti.

ES

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = -R\omega \, sen(\omega t)(R\cos(\omega t)) + (R\omega \cos(\omega t))(R \, sen(\omega t)) = 0$$

In ogni istante $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$





$\vec{\tau}$ = versore tangente con stessa direzione di $\vec{\tau}$ in ogni istante

Dati $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$\vec{v} = -R\omega\,\text{sen}(\omega t)\vec{u}_x + R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_y$

$\vec{\omega} \wedge \vec{v} =$

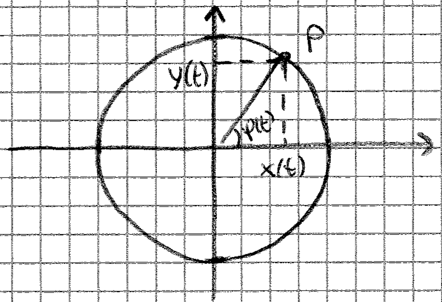
Secondo la regola della mano dx $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ ha direzione radiale (⊥ al piano di $\vec{\omega}$ e di $\vec{v}$ e diretto verso il centro)

$|\vec{\omega} \wedge \vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\pi/2 = \omega v$ che è proprio il modulo dell' $\vec{a}$

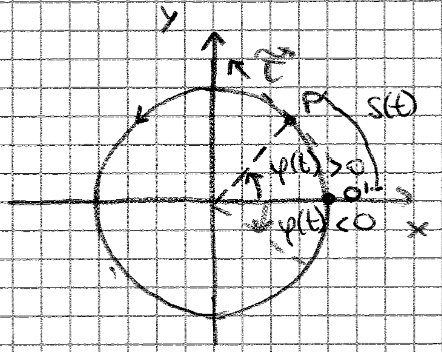
$|\vec{a}| = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$\vec{a}$ si scrive anche come $= \vec{\omega} \times \vec{v}$

CARATTERISTICHE [illegible] MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME



$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = R\,\text{sen}(\varphi(t)) \end{cases}$$



con R = raggio

$S(t) = R\,\varphi(t)$

↓ arco

↳ radianti (angolo)

↳ raggio

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = R\frac{d\varphi}{dt}\vec{\tau} = R\omega\vec{\tau}$ → tale moto circolare NON è uniforme

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \neq$ costante

$|\vec{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = R|\omega| = v$

L'accelerazione derivo come prodotto di 2 funz

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cdot\vec{\tau}\right) = \underbrace{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{\tau}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\frac{ds}{dt}\left(\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right)}_{\vec{a}_r}$$

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r$

LA DINAMICA

: studio del moto in relazione agli oggetti che ne determinano le caratteristiche.

AMBIENTE → interagisce sul sistema e sul suo moto.

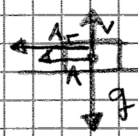
LEGGI DELLA MECCANICA CLASSICA :

Galileo: lo stato di un soggetto non soggetto ad una forza è IN QUIETE.

UN oggetto che non subisce nessuna azione esterna → SISTEMA ISOLATO

il sistema isolato è un concetto limite perché ci sono sempre delle relazioni in natura

SISTEMA ISOLATO : oggetto in moto su un piano



- gravità g
- vincolo v (reazione del tavolo)
- forza attrito aria A
- attrito tavolo At

Se studiamo il moto nel vuoto eliminiamo l'azione dell'attrito dell'aria, utilizzando un disco a ghiaccio secco viene eliminata anche la forza di attrito del piano. Riducendo al minimo le forze di attrito il moto avviene con velocità costante.

PRINCIPIO DI INERZIA

Se un oggetto non subisce azioni esterne esso persiste nel proprio stato di quiete o di moto uniforme

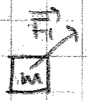
L'effetto di un azione esterna provoca un cambiamento dello stato di un sistema le forze agenti su uno stesso punto si sommano come vettori.

Se agiscono simultaneamente N forze l'azione risultante e' data da

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots \vec{F_n} = m \cdot \vec{a}$$ (accelerazione osservata)

CONFRONTO TRA FORZE:

Prendiamo uno stesso oggetto di massa m



$\vec{F_1} \Rightarrow \vec{a_1} m$

$\vec{F_2} = \vec{a_2} m$

$$\frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F_2}|} = \frac{\cancel{m}|\vec{a_1}|}{\cancel{m}|\vec{a_2}|} \Rightarrow$$ il modu

INTENSITA' DI UNA FORZA:

Forza campione la cui intensita' e' presa come unita' di misura u_F.
Una forza si misura confrontando il suo effetto in relazione a u_F su una stessa massa.

$$|\vec{F_1}| = |\vec{a_1}| \quad \text{su } m$$

$$u_F = \vec{a} \quad \text{su } m$$

$$\Rightarrow \vec{F_1} = \frac{|\vec{a_1}|}{|\vec{a}|} \cdot u_F$$

L'unita' di misura della forza e' il Newton

$$[F] = \text{Newton (N)}$$

la forza e' una grandezza derivata

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$m \to$ proprieta' dei corpi, resistenza a cambiare il proprio stato di moto → INERZIA

la grandezza fisica che misura l'INERZIA e' detta appunto MASSA INERZIALE m.

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

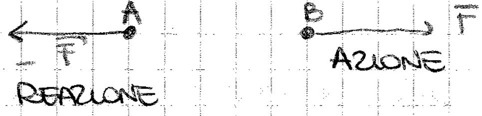
(libro su un auto che se frena subisce una accelerazione)

I sistemi di riferimento in cui non vale il principio di inerzia sono tuttavia sottoposti a delle forze, ovvero accelerati

Non esiste in natura un sistema di riferimento completamente inerziale ovvero che non sia intaccato da alcune forze o accelerazioni.

Prendendo un sistema di riferimento: la terra ciascun punto sulla terra, anche fisso non costituisce un sistema di riferimento inerziale in quanto coinvolto nel moto terrestre.

Una buona approssimaz. del sistema inerziale è un sistema solidale col centro della terra



3° PRINCIPIO DI NEWTON

Ad ogni azione ne corrisponde una uguale e contraria detta REAZIONE

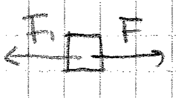
Tale azione reciproca tra 2 particelle è detta INTERAZIONE

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ → definizione dinamica della forza, in relazione all'accelerazione

È necessario definire una definiz. della forza indipendente dall'accelerazione di modo da poter ricavare l'acceleraz.

Definiz. della forza indipendente da $\vec{a}$

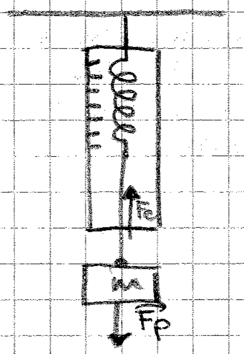
In situazioni di EQUILIBRIO STATICO (ovvero in cui la velocità $v=0$ e quindi $\vec{a}=0$ ovvero, secondo il II principio della dinamica $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0$) possiamo dare una DEFINIZIONE di forza statica.



$\vec{F} + \vec{F}_1 = 0$ $\quad \vec{a} = 0$

$|F| = |F_1|$

Su ogni oggetto agisce una FORZA PESO $\propto$ massa dell'oggetto



Anche a riposo la molla subisce l'azione gravitazionale che la deforma leggermente pertanto x misure + precise e' necessario che la molla sia leggera

$$|\vec{F_p}| = m \cdot g$$ ↪ (acceleraz. gravita') $g \sim 9.8\ m/s^2$

IN condizioni di eq. statico

$$\boxed{\begin{array}{c} |\vec{Fe}| = |\vec{F_p}| \\ \vec{Fp} = -\vec{Fe} \end{array}}$$

Dalla misura della forza possiamo ricavare la massa e tarare il dinamometro in kg.

la forza dipende dalla posizione $\vec{r}$, dalla velocita' $\vec{v}$ e dal tempo t 9.03.10

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$m \cdot a = m \cdot \overset{\rightarrow \vec{a}}{\frac{d^2r}{dt^2}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \overset{\rightarrow \vec{v}}{\frac{d\vec{r}}{dt}}, t\right) \qquad \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = Fx\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right) \\ m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = Fy\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right) \\ m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} = Fz\left(x(t), y(t), z(t), \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right) \end{cases}$$

→ ma non dovrebbe essere dipendente solo da 1 componente ?

3 Equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine in x(t), y(t) e z(t)

Una volta conosciute le condizioni iniziali

$$\vec{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

$$\vec{v}(t_0) = (v_x(t_0), v_y(t_0), v_z(t_0))$$

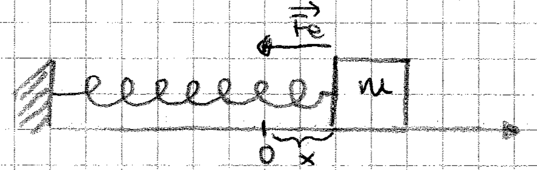
il sistema ha una sola soluzione x(t), y(t), z(t)

con $t > t_0$

⇒ IL MOTO È UNIVOCAMENTE DETERMINATO

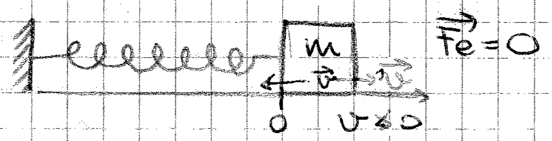
Quindi fissate le condizioni iniziali

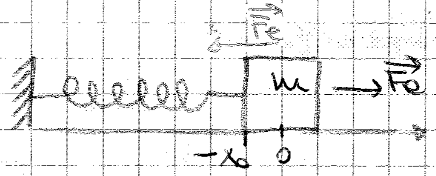
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \rightarrow \text{IL MOTO È UNIVOCAMENTE DETERMINATO}$$

①


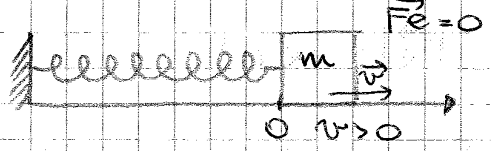
$x(0) = x_0$ $\quad x > 0$
$v(0) = v_0$

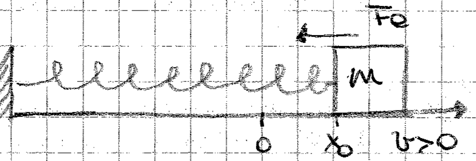
- m inizia ad accelerare verso l'origine
- nell'origine $Fe = 0$ → ciò non vuol dire che il corpo non
  → ~~ciò non~~ vuol dire che m non si muova.
  m possiede una certa inerzia
  ⇒ risulta avere $v < 0$ poichè oltrepassa l'origine ~~e in seguito a questa lieve compressione~~ la molla esercita una forza ~~che si oppone alla compressione~~
  in seguito a tale forza m decellera fino a una posizione $-x_0$ in cui m si ferma ($v = 0$)

②


③


- Il blocco accelera verso destra fino all'origine O, Fe è nulla ma m procede con velocità $\vec{v} > 0$, con tale velocità oltrepassa l'origine e in seguito a questo lieve allungamento la molla esercita una forza che si oppone a tale allungamento (verso sx in qst caso).
  In seguito a tale forza la m si ferma nella sua posizione iniziale x_0, $v = 0$

④


⑤


NELL' ORIGINE :

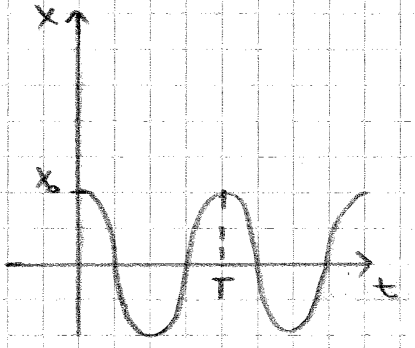
$x = 0$ $\quad \vec{Fe} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

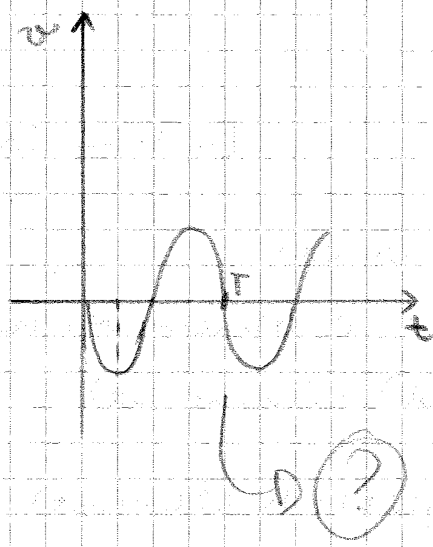
$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 0$$; $t > 0$ in tutti gli istanti successivi

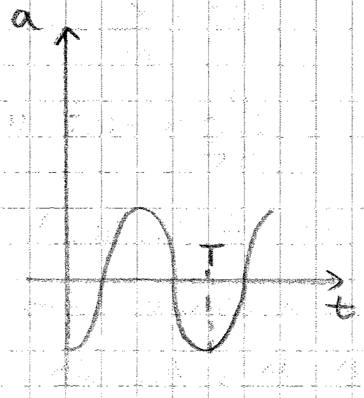
⇒ O è un punto di EQUILIBRIO STABILE

③

LEGGE ORARIA :







$\omega_0 t$ = fase

$t \to t + T$

$\omega_0 t \to \omega_0 (t+T) = \omega_0 t + 2\pi$

$\omega_0 T = 2\pi$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}}$$ ke oscilla più rapidamente

FREQUENZA :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

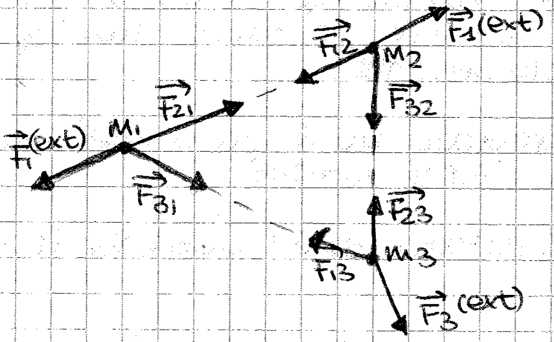
se il sistema e' isolato ovvero l' ambiente non esercita forze sul sistema

$$\vec{F_1}^{(ext)} = \vec{F_2}^{(ext)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \vec{P} = cost \rightarrow$$ LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE SI CONSERVA

Prendiamo in esame particelle che non interagi



$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = (\vec{F_{31}} + \vec{F_{21}}) + \vec{F_1}^{(ext)} = \vec{F_1}^{(ext)} + \vec{F_1}^{(int)} \rightarrow$$ forze interne + esterne

$$\frac{d\vec{P_2}}{dt} = (\vec{F_{12}} + \vec{F_{32}}) + \vec{F_2}^{(ext)} = \vec{F_1}^{(int)} + \vec{F_2}^{(ext)}$$

$$\frac{d\vec{P_3}}{dt} = (\vec{F_{13}} + \vec{F_{23}}) + \vec{F_3}^{(ext)} = \vec{F_3}^{(int)} + \vec{F_3}^{(ext)}$$

Definiamo la quantita' di moto totale

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P_1}}{dt} + \frac{d\vec{P_2}}{dt} + \frac{d\vec{P_3}}{dt} = (\vec{F_{31}} + \vec{F_{21}}) + \vec{F_1}^{(ext)} + (\vec{F_{12}} + \vec{F_{32}}) + \vec{F_2}^{(ext)}$$

$$+ (\vec{F_{13}} + \vec{F_{23}}) + \vec{F_3}^{(ext)} =$$

le forze interne si elidono a coppie - poiché sono azione e reazione

$$= \vec{F_1}^{(ext)} + \vec{F_2}^{(ext)} + \vec{F_3}^{(ext)} = \vec{F}^{(ext)}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}$$

il sistema e' isolato dunque $\vec{F_i}^{(ext)} = 0$

$$P \qquad \vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} = cost$$

Si definisce $|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_{G1} \cdot m_{G2}}{r^2}$ ← LEGGE DI NEWTON

m_G → massa gravitazionale _ capacità di un corpo di subire e esercitare una forza gravitazionale

Dal II principio della dinamica

$$|\vec{F}_{12}| = m_1 a_1 = \frac{G m_{G1} \cdot m_{G2}}{r^2}$$ con

m_1 = massa inerziale

m_{G1} = massa gravitaz.

l'accelerazione a_1 non dipende dalla massa$_1$ ma dalla distanza da m_2 e dalla m_{G2}.

Possiamo dimostrare questo supponendo che $\frac{m_1}{m_{G1}} = k$ con k=cost

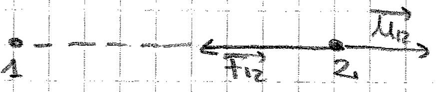
k = costante universale. Essendo k cost. universale posso attribuire ad un oggetto m_{G1} e $m_1 = 1$ ⇒ $\boxed{m = m_G}$

(nonostante siano definite diversamente)

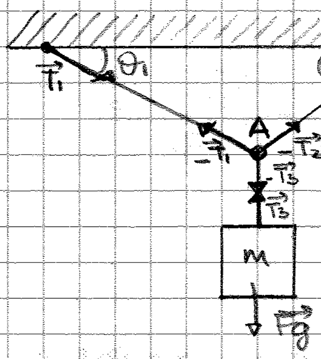
Parleremo solo in generale di MASSA m misurata in kg

$$\Rightarrow |\vec{F}_{12}| = 6,6 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \Rightarrow G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Possiamo definire un versore che definisce la direzione della forza $\vec{F}_{12}$

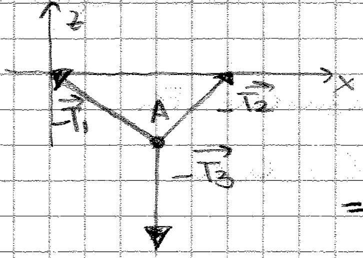


$$\vec{F}_{12} = - G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{12}$$



IL SISTEMA E' IN EQUILIBRIO STATICO
(in ogni punto del sistema la risultante delle forze è uguale a 0)

$\vec{T_3} + \vec{F_g} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{T_3} = -\vec{F_g}$

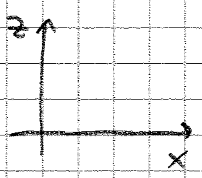


$-\vec{T_1} - \vec{T_2} - \vec{T_3} = 0$

$\Rightarrow \vec{T_1} + \vec{T_2} = -\vec{T_3} = \vec{F_g}$

$T_{max} = 100$ N valore max consentito della tensione

$T_1, T_2 \overset{?}{>} max$

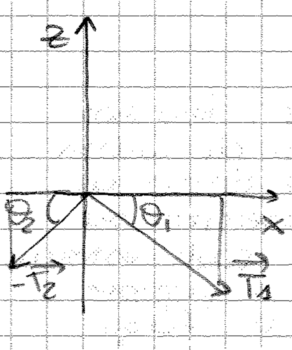


Scriviamo le forze in componenti :

$\vec{F_g} = -\vec{F_g}\,\vec{u_z} = -M \cdot g\,\vec{u_z}$

$\vec{T_3} = T_3 \cdot \vec{u_z}$

$\vec{T_3} = +\vec{F_g} = Mg = 122$ N



$\vec{T_1} = T_1 \cos\theta_1 \vec{u_x} - T_1 \operatorname{sen}\theta_1 \vec{u_z}$

$\vec{T_2} = -T_2 \cos\theta_2 \vec{u_x} - T_2 \operatorname{sen}\theta_2 \vec{u_z}$

$\vec{T_1} + \vec{T_2} = (T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2)\vec{u_x} - (T_1 \operatorname{sen}\theta_1 + T_2 \operatorname{sen}\theta_2)\vec{u_z}$

$\vec{T_1} + \vec{T_2} = -\vec{T_3} = \vec{F_g} = -F_g \vec{u_z}$ ▷ uguaglia le componenti

$$\begin{cases} T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \\ \underbrace{T_1 \operatorname{sen}\theta_1 + T_2 \operatorname{sen}\theta_2}_{\downarrow} = Mg \end{cases}$$

$T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 = 0 \rightarrow T_3 \perp$ all'asse x

componenti z di T_1 e T_2 = componente z di T_3 = Mg

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 209

Scrivendole in componenti

$$\begin{cases} \vec{a_1} = a_1 \vec{u_z} = a \vec{u_z} \quad , \quad \vec{Fg_1} = -m_1 g \vec{u_z} \quad , \quad \vec{T} = T \vec{u_z} \\ \vec{a_2} = a_2 \vec{u_z} = -a \vec{u_z} \quad , \quad \vec{Fg_2} = -m_2 g \vec{u_z} \quad , \quad \vec{T} = T \vec{u_z} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \ ■ \rightarrow T = m_1 a + m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$

sottrazione membro a membro

$$(m_1 + m_2) a = (m_2 - m_1) g$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g = a_1 = -a_2$$

$$■ \ T = m_1 (a + g) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

il moto risulta essere uniformemente accelerato

$\Rightarrow$ $z(t) \rightarrow$ posizione finale $\nearrow$ leggi moto unif. accelerato

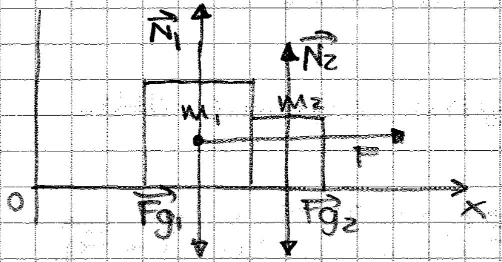
$$z_1(t) = z_1(0) + v_1(0) t + g \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) \frac{t^2}{2}$$

$$z_2(t) = z_2(0) + v_2(0) t + g \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{t^2}{2}$$

se $m_2 >> m_1$

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} g \sim g$$

ESERCIZIO DI DINAMICA



Applichiamo a m_1 una forza $\vec{F}$
m_1 e m_2 sono attaccate
quindi i loro moti interagiscono

$\vec{N} \rightarrow$ forza normale in opposiz. a $\vec{Fg}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 209

$(m_1 + m_2)\, a = F$ → sommo membro a membro della ①

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F_{12} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F \qquad ?$$

se $m_1 >> m_2$

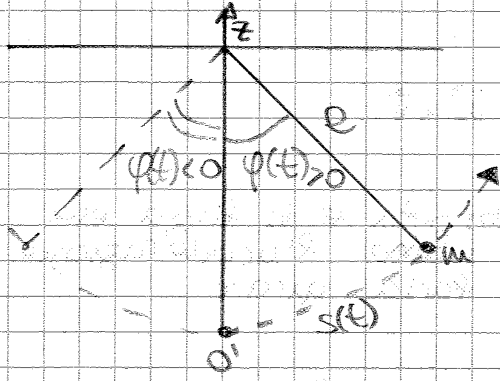
$a \sim \frac{F}{m_1}$ (come se m_2 non esistesse)

$F_{12} \simeq 0$

se $m_2 >> m_1$ $F_{12} \sim F$

PENDOLO SEMPLICE

Prendiamo una massa puntiforme m sospesa ad un filo inestensibile lungo l ~~[illegible]~~ fissato ad un supporto fisso



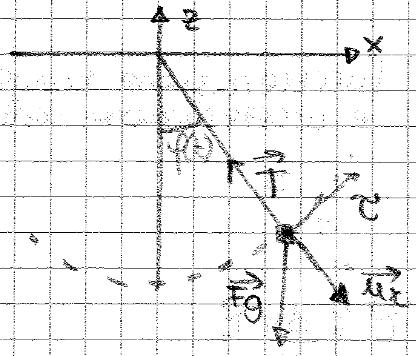
la massa descriverà una traiettoria circolare di raggio l

Fissiamo verso positivo per la traiettoria. (antiorario)

Vogliamo stabilire la posizione di m nella traiettoria in relazione all'angolo descritto φ(t)

$s(t) = l\varphi(t)$ $s(t) \rightarrow$ coordinata affine (traiettoria percorsa)

DIAGRAMMA CORPO LIBERO: tracciare tutte le forze agenti su m



legge di Newton $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F_g}$

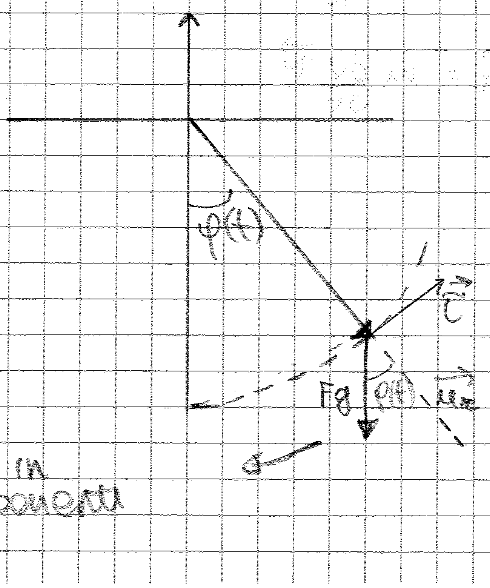
la componente y di $\vec{a} = 0$

$a_y = 0$ $v_y(0) = 0$ $y(t) = 0$ → cioè il moto avviene sul piano zx

$$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_t} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} + \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}$$

$\vec{T} = -T\vec{u_r}$

$\vec{F_g} = -mg\vec{\tau}$

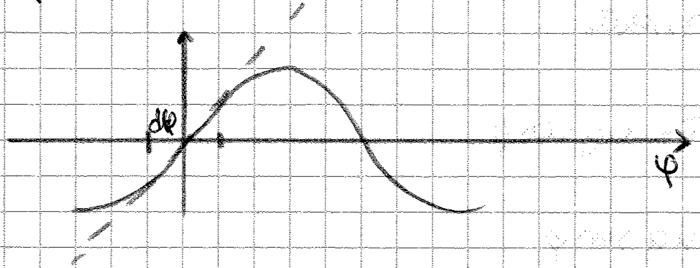


Fg in componenti

$\varphi(t) \approx 0$ piccole oscillazione

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$\operatorname{sen}(\varphi) = \varphi$



Prendendo un piccolo intervallo si può approssimare sen φ alla bisettrice del I e III quadr.
Per piccoli angoli φ possiamo approssimare sen φ a φ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx -\omega_0^2 \varphi(t) \rightarrow \text{PENDOLO}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X \rightarrow \text{OSCILLATORE ARMONICO}$$

$\varphi(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$

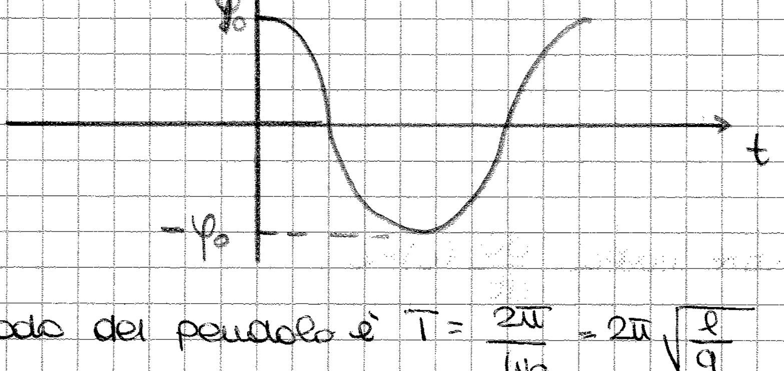
$\varphi(0) = \varphi$

$\frac{d\varphi}{dt}(0)$

Partendo da $\varphi(0) = \varphi_0$ (angolo molto piccolo)

con velocita' $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 = B \\ \frac{d\varphi(0)}{dt} &= \omega_0 A = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$



Il periodo del pendolo è $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ per piccole oscillazioni

$\vec{a} = \vec{a}_{S'} + \vec{a}'$

S sistema inerziale $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_{S'})$

$m\vec{a}' = \vec{F} + m\vec{a}_{S'}$

In assenza di forze $\vec{F} = 0$ l'osservatore individua un accelerazione

$\downarrow \qquad m\vec{a}' = -m\vec{a}_{S'}$

S' non è inerziale

Affinchè 2 sistemi siano inerziali devono essere in moto relativo uniforme.

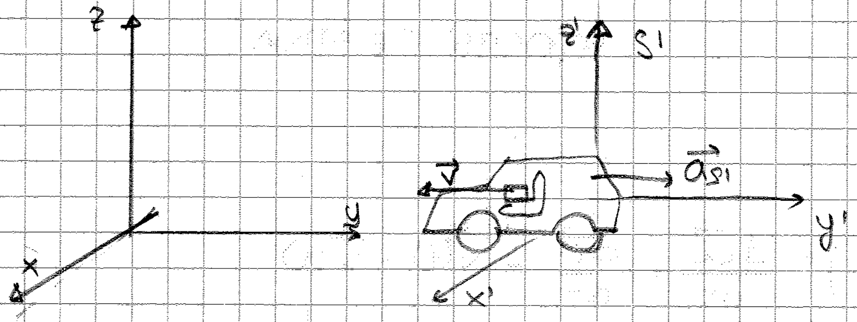
S e S' INERZIALI $\Leftrightarrow$ $\vec{V} = \text{cost}$, $\vec{a} = 0$

Nel caso in cui · (?)

$m\vec{a}' = \vec{F} + - m\vec{a}_{S'}$

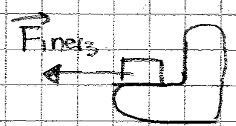
$\vec{F}_{inerziale} = -m\vec{a}_{S'}$

$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{inerziale} \longrightarrow$ legata all'acceleraz del sistema di rif. S'



la macchina frena e il libro procede con la stessa velocità iniziale $\vec{v}$ con $a = 0$

$m\vec{a}' = -m\vec{a}_{S'} = \vec{F}_{inerziale}$

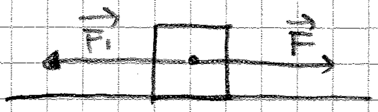


$\vec{F}_{inerziale}$ che agisce sul libro ed è dovuta all'accelerazione del sistema S'

FORZA ATTRITO

Forza che la superficie su cui si muove un oggetto esercita sull'oggetto.

Forza che si oppone al moto relativo tra 2 oggetti in contatto tra loro che scorrono l'uno sull'altro.



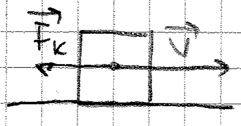
$\vec{F'}$ si oppone a $\vec{F}$ (movimento)

$\vec{F'}$ = forza di attrito statico

Se $\vec{F} > \vec{F_1}$ il corpo si muove.
Esiste un valore di attrito statico max e oltre tale valore se applico una forza > del valore max l'oggetto si muove

attrito ← $|\vec{F'}| < F_s$ (valore massimo)

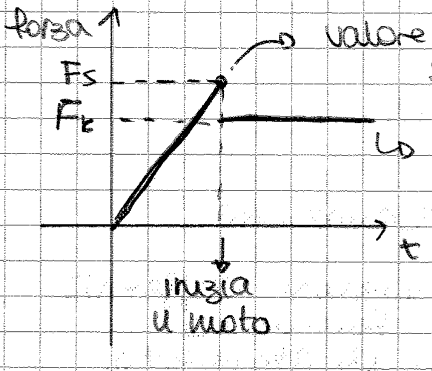
$|\vec{F}| > F_s$ → moto



Una volta in moto l'oggetto ~~incontra~~ il pavimento esercita una nuova f. di attrito detta FORZA ATTRITO DINAMICO $\vec{F_k}$ minore in modulo della forza di ATTRITO STATICO

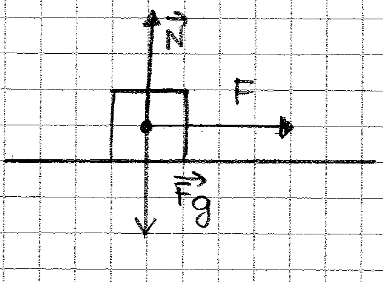
$|\vec{F_k}| < |\vec{F_s}|$

forze di attrito



→ valore max attrito statico

Lo attrito dinamico costante durante il moto



$F_s = \mu_s N$ il valore max dell'attrito statico dipende dall'azione normale che si oppone alla forza di gravità

μ_s = coefficiente di proporzionalità

LAVORO ED ENERGIA

16·03·10

$$m \cdot a = \vec{F}$$

Note le forze e conosciute le condizioni iniziali possiamo descrivere il moto del vettore posizione $\vec{r}(t)$

QUANTITA' CONSERVATE: quantità di moto ~~come~~ in un sistema isolato

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots \vec{P}_n = cost.$$

→ CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO

Se il sistema non è isolato, la quantità di moto non si conserva e

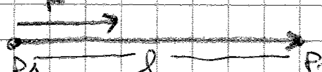
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(ext)}$$

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA TOTALE

Introduciamo il concetto di lavoro.

IL LAVORO

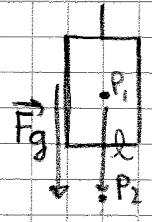
Supponiamo di avere una particella da un punto iniziale P_1 ad un punto finale P_2 e che durante tale spostamento sulla particella agisca una forza costante $\vec{F}$ durante tutto lo spostamento.



$|P_1 P_2| = l$

Allora ⇒ IL LAVORO COMPIUTO DA $\vec{F}$ LUNGO LO SPOSTAMENTO

$$W = |\vec{F}| \cdot l > 0$$

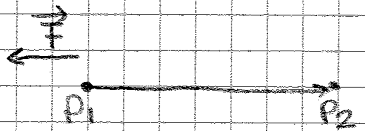


Supponiamo in un ascensore che agisca una forza peso $\vec{F_g}$ allora il lavoro

$$\overline{W} = m \cdot g \cdot l > 0$$

dove m massa corpo g acceleraz. di gravità

$\vec{F_g} = m \cdot g$.



$W = -|\vec{F}| l < 0$

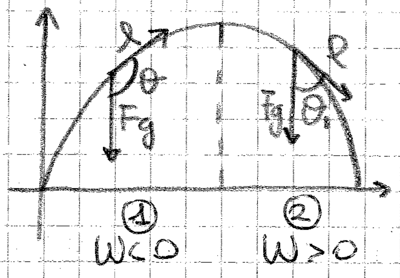
IL LAVORO È POSITIVO

↳ la forza favorisce lo spostamento

IL LAVORO È NEGATIVO

↳ la forza si oppone allo spostam.

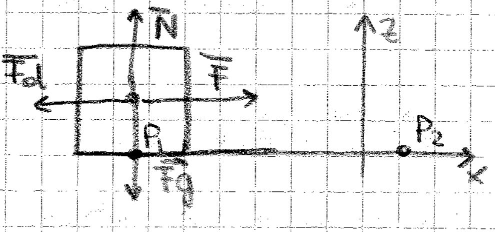
Se lancio un proiettile in aria ci sarà lavoro sia negativo che positivo



① Nel I° tratto di traiettoria il proiettile sale
$\vec{F_g}$ si oppone allo spostamento
e $\theta > \pi/2$ → W<0

② Nel II° tratto di traiettoria il proiettile scende
$\vec{F_g}$ favorisce il moto, $\theta_1 < \pi/2$
→ W>0

MOTO DI UN BLOCCO applicando ad esso forza $\vec{F}$



$\vec{N}$ = reazione normale
$\vec{F_g}$ = forza gravità
$\vec{F_d}$ = forza attrito dinamico

$$(1)\ m\cdot\vec{a} = \vec{F}_{tot} = \vec{F_g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F_d}$$

$$\begin{cases} \vec{F_g} = -mg\vec{u_z} \\ \vec{N} = N\vec{u_z} \\ \vec{F} = F\vec{u_x} \\ \vec{F_d} = -\mu_d N\vec{u_x} \end{cases}$$

Il moto avviene lungo x → $\vec{a} = a\vec{u_x}$ quindi riscrivo la (1)

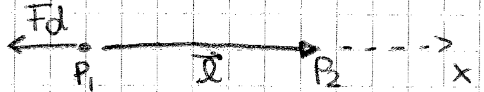
$$(1)\ m\cdot a\vec{u_x} = -mg\vec{u_z} + N\vec{u_z} + F\vec{u_x} - \mu_d N\vec{u_x}$$

$$m\cdot a\vec{u_x} = (N-mg)\vec{u_z} + (F-\mu_d N)\vec{u_x}$$

(uguagliamo le componenti lungo $\vec{u_x}$ e $\vec{u_z}$)

$$\begin{cases} ma = F-\mu_d N & \text{(componente lungo x)} \\ N = mg & \text{(componente lungo z)} \end{cases}$$

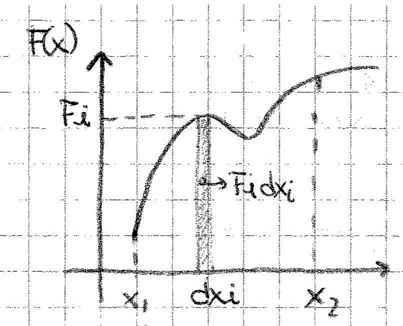
EQUAZIONE DEL MOTO → $\boxed{ma = F-\mu_d N}$



$\vec{l} = l\vec{u_x}$
$\vec{F_d} = -\mu_d mg\vec{u_x}$

IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA DI ATTRITO DINAMICO

$$W = \vec{F_d}\cdot\vec{l} = (-\mu_d mg\vec{u_x})(l\cdot\vec{u_x}) = -\mu_d mgl = -|\vec{F_d}|\cdot l$$



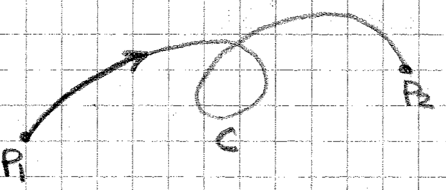
la somma che costituisce il lavoro totale e' data dall'area della curva del moto tra x_1 e x_2

area totale e' data dalla somma di rettangoli che hanno per base dx_i e altezza F_i

Lavoro → $W > 0$ se sopra l'asse x
$W < 0$ se sotto l'asse x

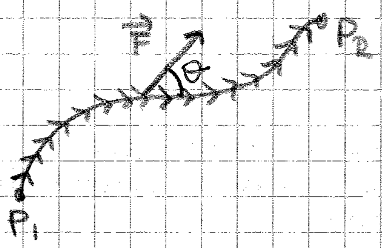
CASO del tutto GENERALE

Particella che descrive un moto (curva) nello spazio



Spostamento definito dalla curva e dal verso di percorrenza, dal punto iniziale P1 al punto finale P2

Spostamento $C(P_1, P_2)$ → curva orientata C



Supponiamo che in un generico spostamento agisca una forza $\vec{F}$ variabile in relazione alla posizione.

Divido l'intero spostamento in piccolissimi intervalli → $d\vec{l}_i$ in modo da poter pensare la forza $\vec{F}$ costante su ognuno di essi.

$|d\vec{l}_i| \simeq 0$

$dl_1 \rightarrow \vec{F_1}$ calcolo lavoro elementare $\rightarrow dW_1 = \vec{F_1} \cdot dl_1$
$dl_2 \rightarrow \vec{F_2}$ $\qquad dW_2 = \vec{F_2} \cdot dl_2$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$dl_m \rightarrow \vec{F_m}$ $\qquad dW_m = \vec{F_m} \cdot dl_m$

Il lavoro totale compiuto dalla forza

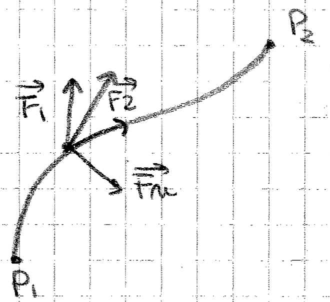
$$W_{C(P_1,P_2)} = dW_1 + dW_2 + \ldots + dW_m$$

(lo dipende dallo spostamento)

$$= \vec{F_1} \cdot dl_1 + \vec{F_2} \cdot dl_2 + \ldots + \vec{F_m} \cdot dl_m = \int_{C(P_1,P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

INTEGRALE DI LINEA (lungo la linea che descrive lo spostamento)

PIU' FORZE AGENTI SU UN CORPO : LAVORO TOTALE



$C(P_1, P_2)$

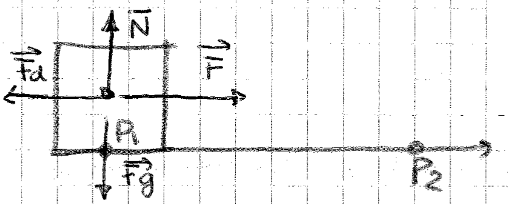
$$\vec F = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

$$W_{C(P_1,P_2)} = \int_{C(P_1,P_2)} \vec F \cdot d\vec\ell = \int_{C(P_1,P_2)} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\right)\cdot d\vec\ell = \int_{C(P_1,P_2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F_i}\cdot d\vec\ell\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{C(P_1,P_2)} \vec{F_i}\cdot d\ell = \sum_{i=1}^{n} W_{i\,C(P_1,P_2)}$$

IL LAVORO DELLA SOMMA DELLE FORZE E' UGUALE ALLA SOMMA DEI LAVORI OTTENUTI DALLE SINGOLE FORZE.

es.(2)



Quindi in qst esempio (2) $W = (\vec F + \vec N + \vec{F_g} + \vec{F_d})\cdot\vec\ell$

$$= \underbrace{\vec F\cdot\vec\ell}_{>0} + \underbrace{\vec N\cdot\vec\ell}_{=0} + \underbrace{\vec{F_g}\cdot\vec\ell}_{=0} + \underbrace{\vec{F_d}\cdot\vec\ell}_{<0}$$

forza che favorisce lo spost → >0

non c'è spostam vertic

forza che si oppone allo spost

(1) $\theta = \theta_s$ $\quad F' = F_s$

$$F_s = mg\,\text{sen}(\theta_s)$$

$$F_s = \mu_s N = \mu_s\, mg \cos(\theta_s)$$

$$\mu_s\, mg \cos(\theta_s) = mg\,\text{sen}(\theta_s)$$

$$\mu_s = \frac{mg\,\text{sen}(\theta_s)}{mg\cos(\theta_s)} = tg(\theta_s)^{*}$$

(2) $\theta > \theta_s$ la massa e' in movimento $a \neq 0$

$$F' = F_d = \mu_d N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m a = -F_d + mg\,\text{sen}(\theta) \\ N = mg \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma = -\mu_d (mg\cos\theta) + mg\,\text{sen}(\theta) \\ \quad = mg\cos\theta\,(tg\theta - \mu_d) \end{cases}$$

$$a = g\cos\theta\,(tg\theta - \mu_d) > 0 \qquad \theta < \pi/2$$

l'accelerazione e' positiva → l'oggetto e' in movimento, se $\theta > \theta_s$

$$tg\theta > \underset{*}{tg\theta_s} \rightarrow \mu_s > \mu_d \rightarrow tg\theta > \mu_d$$

05.10.2009

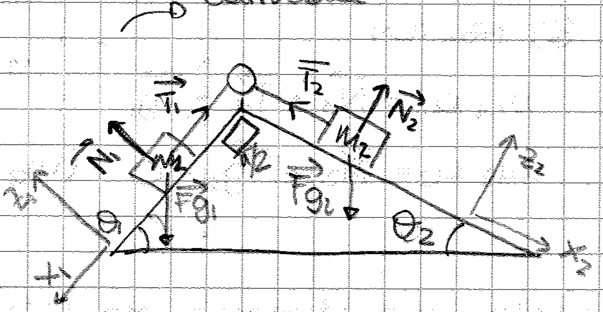
$$\begin{cases} T = m_2 g \\ T = m_1 \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$m_2 g = m_1 \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{m_2}{m_1} g \cdot R \quad \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$$

$$v = \omega R \rightarrow \omega^2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{g}{R}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 R}{m_2 g}}}$$

esercizio : 2 masse collegate con filo inestensibile



$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$$

① NEWTON

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{g_1}$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{g_2}$$

② conviene definire 1 sistema di riferimento x ogni massa

$\vec{z}_1$ e $\vec{x}_1$ — $\vec{z}_2$ e $\vec{x}_2$

m_1 $x_1(t)$?

m_2 $x_2(t)$?

③ Forze come componenti

$\vec{a}_1 = a_1 \vec{u}_{x_1}$ $\vec{a}_2 = a_2 \vec{u}_{x_2}$

$\vec{N}_1 = N_1 \vec{u}_{z_1}$ $\vec{N}_2 = N_2 \vec{u}_{z_2}$

$\vec{F}_{g_1} = m_1 g \,\mathrm{sen}\theta_1 \vec{u}_{x_1} \cancel{m_1 g \cos\theta_1}$
$- m_1 g \cos\theta_1 \vec{u}_{z_1}$ $\vec{F}_{g_2} = m_2 g \,\mathrm{sen}\theta_2 \vec{u}_{x_2} - m_2 g \cos\theta_2 \vec{u}_{z}$

$\vec{T}_1 = -T \vec{u}_{x_1}$ $\vec{T}_2 = -T \vec{u}_{x_2}$

i moti di m_1 e m_2 non sono indipendenti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 209

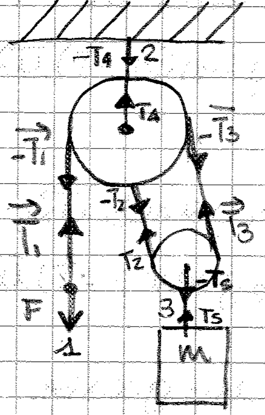
Calcoliamo la tensione T dal sistema ②

$$T = m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_1 a = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g (\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2)$$

Affinché il sistema sia in equilibrio statico è necessario che $a=0$

$$a = 0 \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}$$ dalla ③

ESERCIZIO PIENO DI CARRUCOLE GIGANTI & PICCOLE



Determinare in condizioni di equilibrio statico

- Tensioni ai capi di ogni filo
- Forza $\vec{F}$

EQUILIBRIO STATICO: la risultante delle forze in ogni punto deve essere zero.

Unico filo che si avvolge intorno alle carrucole allora ⇒

⇒ $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = |\vec{T_3}|$ → filo principale 1

2- altro filo T_4

3- altro filo T_5

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 209