



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 505**

**DATA: 10/04/2013**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Luce**

**MATERIA: Gasdinamica I**

**Prof. Iuso**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# \*\*\* GAS DINAMICA \*\*\*

## Materiale Didattico ↓

- 1 Modern Compressible Flow, J.D. Anderson (McGraw Hill)
- 2 Elements of Gasdynamics, H.W. Liepmann & Roshko
- 3 Viscous Fluid Flow, F.M. White (McGraw Hill)
- 4 Gasdynamics. Problemi risolti e richiami di teoria, G. Iuso - F. Quoi (Levrotto-Bella)

## Modalità d'esame ↓

SCRITTO (2h) } 1h 15 min TEORIA  
 } 45 min ESERCIZI

La teoria prevede 20 domande semplici + 3/4 a risposte articolate (es. scriviamo l'equazione integrale, le ipotesi e i vari contributi; non tutte le dimostrazioni).

Gli esercizi di solito sono 2 (es. calcolare le resistenze per un flusso supersonico che investe un cono / cono. es. pliche piane investite da corrente supersonica con incidenza nulla; calcolare il  $D_1$ ).

In questo corso studieremo

### 1 Flussi Compressibili ( $\gamma \neq \text{cost}$ )

1) Inviscosi ( $\mu=0$ ,  $l=0$ ,  $d=0$ )

2) Viscosi, Condensabili e Diffusivi

Tratteremo poco situazioni in cui  $d \neq 0$ . Sappiamo invece che ci troveremo

in particolare  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Alto Subsonico } (M < 1) \\ \text{Supersonico } 1.3 \leq M \leq 4 \end{array} \right.$

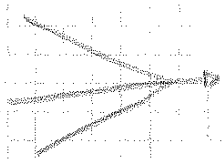
(con  $M > 0.4$  il campo di moto conviene ad essere compressibile)

A noi interessa calcolare la distribuzione  $p(x)$  che ci permette di calcolare Forze e Momenti Integrali. Sarebbe tuttavia più Linearizzare e ricavare:

$$C_L = C_L(\dots)$$

$$C_D = C_D(\dots)$$

$$C_M = C_M(\dots)$$



dipendono dalle forme, dall'incidenza del Kech, Rayleigh etc...

D) Flussi Conici (No!!)



parti relative al prof. ZANETTI

E) Flussi Transonici e Ipersonici.

Nel caso in cui per  $\mu \neq 0$ ,  $l \neq 0$

$\Rightarrow$  rivedremo le nostre equazioni ed inseriremo i contributi di  $\mu$  e  $l$  (nelle equazioni delle quantità di moto e dell'energia)

Studieremo infine  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Flussi Isotermi} \\ \text{// Adiabatici} \end{array} \right.$

- Problemi di Dissociazione.

In base al numero di Tech avremo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Flussi Incompressibili} \text{ ①} \\ \text{=} \\ \text{Compressibili} \text{ ②} \end{array} \right.$

①  $f = \text{cost}$

②  $f \neq \text{cost}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Stazionario} \quad f = f(x, y, z) \\ \text{Instazionario} \quad f = f(x, y, z, t) \end{array} \right.$

Una Particella Fluida è un insieme di molecole (di numero elevato) caratterizzate da un suo Volume.

Il Volume è sufficientemente grande per contenere un numero elevato di molecole ma, sufficientemente piccolo per ritenere proprietà ( $f, p, T$ ) del fluido = costante su tutte le particelle fluide  $\Rightarrow$  Proprietà puntiformi!!!

Le dimensioni di una particella fluide sono  $\approx dx$  (quantità infinitesime)

Assumeremo allora che il Modello che consideriamo sia Continuo!!!

$N_A$  (numero di Avogadro) =  $6,023 \cdot 10^{26}$  molecole ||

In un Gas qualsiasi, 1 kilomole (grammole) 1000 moli contiene un numero di molecole pari a  $6,023 \cdot 10^{26}$  ||

In Condizioni Standard ( $T = 298^\circ K, p = 101300 \text{ Pa}$ ) 1 Kilomole occupa un Volume  $V = 22,4 \text{ m}^3$

$\Rightarrow$  1 mole contiene  $6,023 \cdot 10^{23}$  molecole (calcoliamo in  $\text{dm}^3$  o litri)

Quante molecole vi sono in  $1 \text{ m}^3$ ? (densità)

$n = \frac{\text{Molecole}}{\text{Volume}} = \frac{6,023 \cdot 10^{26}}{22,4} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$  Per qualsiasi GAS

valori medio d'insieme

$$E = \frac{1}{2} m (\overline{w^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{1}{2} m (\overline{w^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})}_{\substack{\text{Energie Cinetica} \\ \text{(macroscopica)}}} + \underbrace{\frac{m}{2} (\overline{w'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}_{\substack{\text{Energie Interne} \\ \text{medie cinetiche traslazionali}}}$$

Energie Interne di un gas è proporzionale alle Temperature!

Come rappresentiamo con un solo numero le fluttuazioni?

$$V_{\text{at}} = \sqrt{\overline{w'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}} = \sqrt{\frac{2E_T}{m}} \quad ||$$

V<sub>agitazione termica</sub>

perché  $E_T = \frac{1}{2} m (\dots) = \frac{1}{2} m V_{\text{at}}^2$

Un Sistema è in Equilibrio Termodinamico quando abbiamo condizioni di Omogeneità delle varie grandezze ( $p, \rho, T$ )

Il disequilibrio è dato dai gradienti !!!

(es. un gas in quiete è in equilibrio termodinamico!)

(es. per un gas in movimento esiste equilibrio termodinamico a monte ( $p_{00}, T_{00}, \rho_{00}$ ) mentre vicino alle pareti no a cause dello strato limite!)

Legame tra fluttuazioni molecolari e  $T$

$$K_B \text{ (cost di Boltzmann)} = 1,380 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} = \frac{R}{N_A} \quad ||$$

Sempre per l'Azze:

$$V_{az} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8314 \cdot 298}{29}} \approx 500 \text{ m/s} \parallel$$

Velocità del suono:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \approx 340 \text{ m/s} \parallel$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4 \parallel$$

$$\gamma_{elio} = 1,667 \parallel$$

La propagazione del suono avviene per effetto di successive collisioni molecolari  $\Rightarrow$  scambio di quantità di moto.

Il suono è una fluttuazione di pressione !!! (piccole perturbazione)

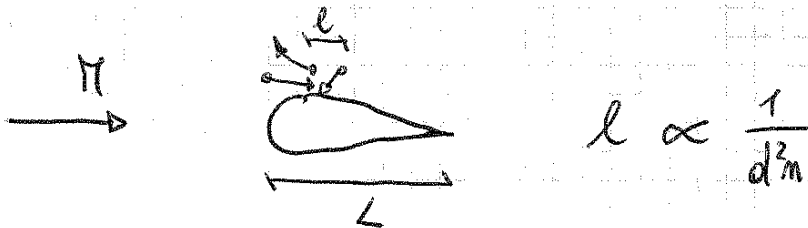
Per scrivere le Equazioni di Bilancio assumiamo la condizione di Fluido Continuo

$\Rightarrow$  sarà caratterizzato da un parametro

$$K_m = \frac{l}{L}$$

libero cammino medio  
lunghezza di riferimento

Numero di Knudsen



$K_m < 0.01$   $\longrightarrow$  Fluido Continuo

$0.01 < K_m < 0.1$   $\longrightarrow$  Fluido leggermente rarefatto

$0.1 < K_m < 10$   $\longrightarrow$  Moderatamente

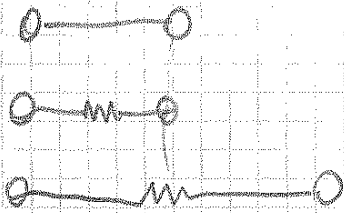
$K_m > 10$   $\longrightarrow$  Altamente

### 3 A Temperature Elevate entrano in gioco i g.d.l. vibrazionali

○  $3m \rightarrow$  tutti i possibili g.d.l.

dunque

$$\textcircled{2} L_v = 3m - L_t - L_r \Rightarrow \boxed{L = L_t + L_r + \textcircled{2}L_v}$$



$$1 \quad E_{elastica} = \frac{1}{2} k s^2$$

$$2 \quad E_{cinetica} = \frac{1}{2} m v^2$$

$s$  (variazione di lunghezza)  
dovuta alla temperatura

Per  $T \approx T_{amb} \rightarrow L_v \approx 0$

Per l'Azze abbiamo:

0.8  $N_2$

0.2  $O_2$

$$\Rightarrow L = 3t + 2r = 5'$$

↳ Sono due componenti ugualmente complessi (2)

### Legame tra Energie e $L$

Il principio di Equipartizione ci dice che l'Energia si ripartisce allo stesso modo per ogni g.d.l. per molecola.

$$\bar{E} = \frac{1}{2} k_B T$$

○ con  $L$  g.d.l.  $\rightarrow E_L = L \cdot \frac{1}{2} k_B T \frac{J}{molecola}$



$$3) e_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p = \left(\frac{dh}{dT}\right)_p = \frac{L+2}{2} \frac{R}{\pi} \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right] \parallel$$

$$4) c_p = \left(\frac{dE}{dT}\right)_p = e_p \pi = \frac{L+2}{2} R \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right] \parallel$$

$$[\pi] = \left[ \frac{kg}{mole} \right]$$

Esponente delle Isentropiche  $\gamma = \frac{e_p}{c_v} = \frac{L+2}{L}$

es. Anze

$$L = 5$$

$$e_p = \frac{7}{2} \frac{R}{\pi} = 1003 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right] \parallel$$

$$\pi = 29 \text{ kg/mole} \Rightarrow$$

$$c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\pi} = 717 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right] \parallel$$

$$\gamma = 1,4$$

Compressibilità  $\downarrow$

I liquidi sono incompressibili ... i GAS no...  $\xrightarrow{p} \square \xleftarrow{p+dp}$

Comprimiamo un fluido per effetto di  $dp \Rightarrow$  Variazione di Volume

$$\beta = \frac{\text{Variazione percentuale Volume}}{\text{variazione}} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \parallel$$

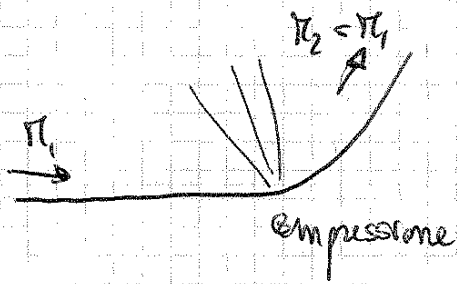
Più Alto è  $\beta$  meno comprimibile è il fluido.

es.

$$\text{liquidi} \rightarrow \beta \approx 5 \cdot 10^{-10} \left[ \frac{m^2}{N} \right]$$

$$\text{gas} \rightarrow \beta \approx 10^{-5} \left[ \frac{m^2}{N} \right]$$

es.2 in  $dV < 0$  (fluido che comprime)  $\Rightarrow$   $dy > 0$   $y \uparrow$   
 decelerato



Aumentate le densità!!!

In generale: esponenziale:

$$\Delta V = \frac{V_f - V_i}{V_i} = 1 \Rightarrow V_f = 2V_i$$

dunque  $\frac{dV}{V} = 1$  con  $M \approx 0.1 \rightarrow \frac{dy}{y} = -M^2 = -0.01$

(dell'ordine del -1%) Ecco perché lo consideriamo Incompressibile!!

es.2

$$M = 0.4 \rightarrow M^2 = 0.16 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -0.16 \quad (-16\%) \quad \text{VARIAZIONI CONSISTENTI}$$

TABELLA RIASSUNTIVA:

- $0 \leq M \leq 0.3$  Flusso Incompressibile
- $0.4 \leq M \leq 1$  // Compressibile Subsonico
- $0.8 \leq M \leq 1.2$  // // Transonico
- $1.2 \leq M \leq 4$  // // Supersonico
- $M > 4$  // // Ipersonico

In generale:

Sforzo di taglio:  $\tau_{yx} = \mu \left( \frac{dv_x}{dy} \right)$  **LEGGI DI NEWTON**

Lo Sforzo di Taglio fra i filamenti fluidi

Considerando le nostre particelle fluide:

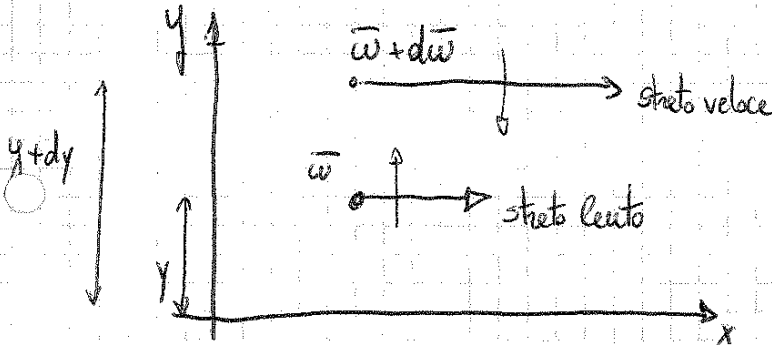


si fa anche una  $v'$  in direzione  $y$

$mv' =$  quantità di moto nelle direzione  $x \Rightarrow$  Necessario Sforzo VISCOSO

Sforzo =  $\tau_{yx} = \int m \bar{c} v' d\bar{m} = - \int \bar{c} v' v' d\bar{m}$   
molle/m<sup>3</sup> = densità volumetrica  
mediato in un insieme di molecole  
 ( $\tau_{xx} = - \int \bar{c} v' v' d\bar{m}$ )

Considerando un gradiente di velocità:



Velocimento

Flusso netto scambiato (diretto lungo  $x$  e trasversale da  $v_{at}$ ) =  $-m(w+dw)m v_{at} + m w m v_{at}$

=  $-m dw m v_{at} = \int \bar{c} v' v' d\bar{m}$   $\rightarrow$  He le strutture di uno sforzo!

ma:

$dw = \frac{dw}{dy} dy$

He le collisioni avvengono a distanza  $l$  (libero cammino medio)!!!

Si può in alternative usare le Formule Memorie: (interpretative)

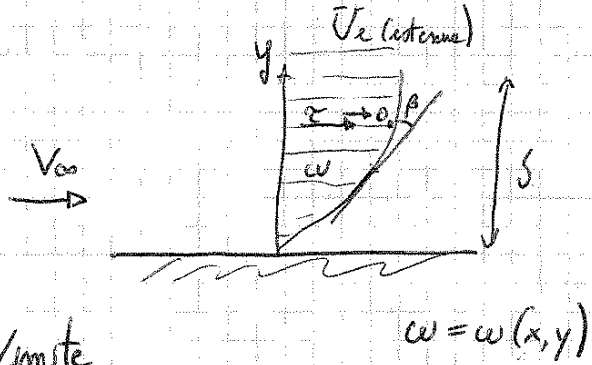
$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^\omega$$

$$\omega = \omega(T)$$

$$\text{En } T = 300^\circ K \rightarrow \omega = 0.75$$

Abbiamo dunque visto che:

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{dw}{dy} \right)$$



Altro non è che un'espressione dello Stato Limite

"Non c'è resistenza nei Fluidi Imviscidi" → Premessa di D'Alembert  
 Premette → Teorema dello Stato Limite

Sappiamo che:

$$\mu \approx \gamma V_{rel} \cdot l \quad \frac{dw}{dy} \text{ è la tangente in ogni punto dello Stato Limite!}$$

$\tau$  diminuisce verso l'esterno

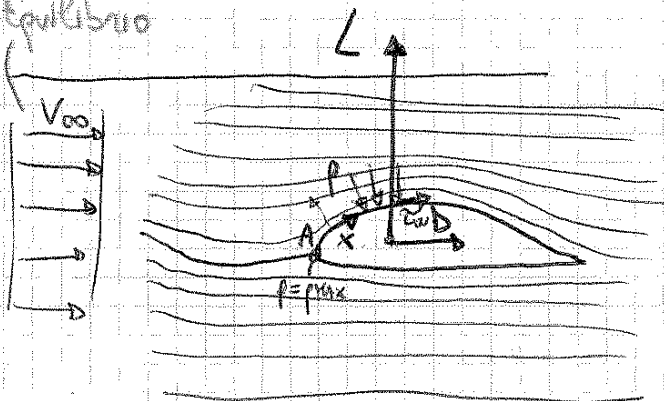
per  $y=0 \rightarrow \beta = \beta_{max}$

⇒ MASSIMO Sforzo d'Attrito!

$$\tau_w = \mu \left( \frac{dw}{dy} \right)_{y=0}$$

LEGGE DI NEWTON

in Equilibrio



$$p_A = p_{max}, \quad V_A = 0$$

$$\tau_w(x) \parallel \text{superficie}$$

$$p(x) \perp //$$

Nel flusso esterno vi è flusso d'Equilibrio ⇒ Non vi è gradiente lungo y

Un altro parametro molto importante è il Numero di Reynolds

$$Re = \frac{V \cdot L \cdot \rho}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu \frac{V}{L}} = \frac{\text{Forze d'Inerzia}}{\text{Forze Viscose}}$$

$\frac{V}{L}$  è simbolo di gradiente

Da  $Re$  dipende tutto ciò che succede nello Strato Limite

$$C_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho V_e^2}$$

spessore apertura

$$H = (\text{parametro di forma}) = \frac{S^*(x)}{\theta}$$

spessore di quantità di moto

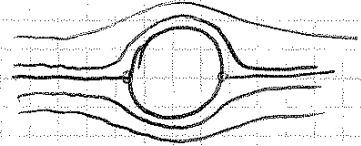
$S(x) \rightarrow$  spessore dello Strato Limite

$Re < Re_{cr} \rightarrow$  Strato Limite Laminare

$Re > Re_{cr} \rightarrow$  " " Turbolento

1  $Re$  basso  $\rightarrow$  effetti viscosi dominanti!

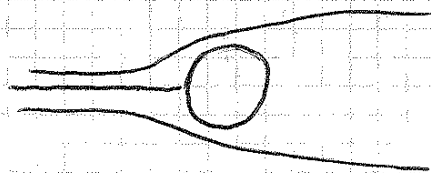
$\Rightarrow$  le linee di corrente avvolgono tutto il cilindro



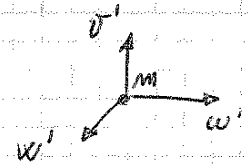
2  $Re$  elevato  $\rightarrow$  effetti viscosi irrilevanti

$\Rightarrow$  le linee di corrente separano!

(in quel punto  $\tau_w = 0$  !!)



Consideriamo ora sempre la nostra particella:



si dimostra che:

$$q_x = \gamma \left( e' + \frac{w'v' + v'v'' + w'w''}{c} \right) \cdot w'$$

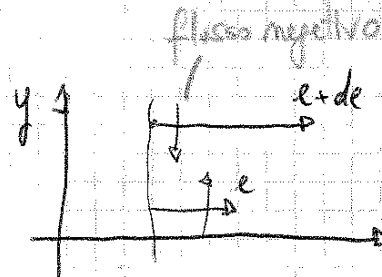
$$\left[ \gamma e' w' \right] \left[ \frac{J}{m^2 s} \right] = \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} q_y &= \gamma e' v' \\ q_z &= \gamma e' w' \end{aligned} \right\}$$

Le Leggi di Fourier lega le proprietà di trasporto del punto di vista microscopico.

Legame tra  $\lambda$  e fluttuazioni  $\downarrow$

consideriamo un campo fisico con  $\nabla T$



Analizziamo lo scambio in direzione  $y$ . Quale è il flusso netto?

$$\gamma e' v' = -m(e+de) n v_{at} + m e n v_{at}$$

$$\Rightarrow \gamma e' v' = -m(de) n v_{at}$$

$$de = \frac{de}{dy} \cdot l$$

$$\Rightarrow \gamma e' v' \approx -m \frac{de}{dy} l n v_{at}$$

$$e = e_v T$$

$$\approx -m e_v \frac{dT}{dy} l n v_{at} = \left[ -\lambda \frac{dT}{dy} \right]$$

FOURIER

$$\Rightarrow \lambda \approx m e_v n l v_{at} = \gamma l v_{at} e_v \Rightarrow$$

$$\lambda \approx \mu e_v$$

## Trasporto di Masse $\downarrow$

- quando abbiamo a che fare con miscele di almeno due gas di natura diverse, le cui concentrazioni cambiano da punto a punto
- $S$  = concentrazione delle specie  $x$
- $J$  = flusso di masse
- $D$  = diffusività / coeff. di diffusione

$$J = D \frac{ds}{dx} \rightarrow \text{LEGGE DI FICK}$$

(il flusso nasce se vi è un gradiente  $\Rightarrow$  se vi sono effetti dissipativi)

### TABELLA RIASSUNTIVA:

$\tau = \mu \frac{dw}{dy}$	<u>Legge di Newton</u>
$q = -\lambda \frac{dT}{dy}$	<u>Legge di Fourier</u>
$J = -D \frac{ds}{dx}$	<u>Legge di Fick</u>

### Esercizi

per GAS monocomponenti e miscele con componenti non reagenti avremo

$$\left. \begin{array}{l} m_i \text{ (masse) [Kg]} \\ M_i \text{ (masse molare) [Kg/mole]} \\ N_i \text{ (numero moli)} \end{array} \right\}$$

$$m_T = \sum m_i, \quad N_T = \sum N_i$$

Es. 4.6 pag 35

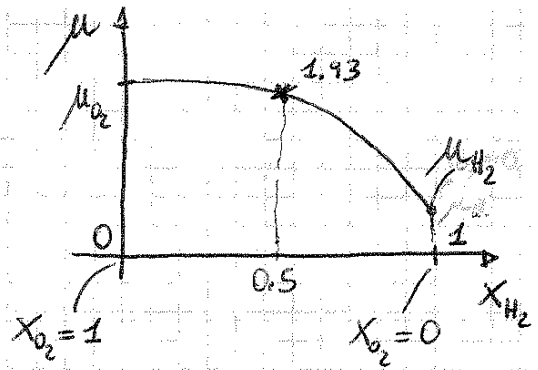
1 → H<sub>2</sub>

2 → O<sub>2</sub>

T = 288°K

0 < X<sub>H<sub>2</sub></sub> < 1

Calcolare  $\mu_{\text{miscela}}$



$\sum X_i = 1 \Rightarrow \sum X_{H_2} + \sum X_{O_2} = 1$  (data le 1<sup>e</sup>, le 2<sup>e</sup> le troviamo per differenza)

Risolvendo per componente:

H<sub>2</sub> → S = 0.65 · 10<sup>-6</sup>  
 z = 71°K ⇒  $\mu_{H_2} = 0.885 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/ms}$

O<sub>2</sub> → S = 1.65 · 10<sup>-6</sup>  
 z = 110°K ⇒  $\mu_{O_2} = 2.026 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/ms}$

(G<sub>11</sub> = G<sub>22</sub> = 0 perché stesse specie chimiche) //

G<sub>H<sub>2</sub>O<sub>2</sub></sub> = 1.849

G<sub>O<sub>2</sub>H<sub>2</sub></sub> = 0.265

$\sum X_i = 1 \rightarrow X_{O_2} = 1 - X_{H_2}$

Posso allora calcolare  $\mu_{\text{miscela}}$  !!

Es 3.3 pag 17

Miscela CH<sub>4</sub>

m = 2 kg

CO

m = 6 kg

C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>

m = 10 kg

X<sub>i</sub> = ?

$\mu_{\text{miscela}} = ?$

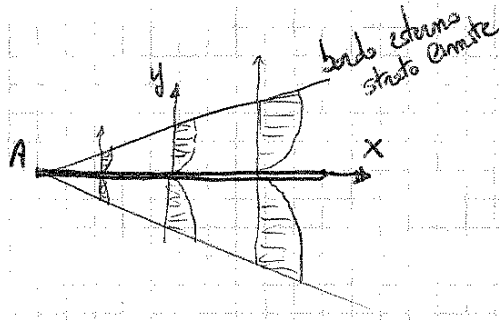
a(miscela) = ?

T = 50°C



Es. piacca piana

$V_{\infty} = 10 \text{ m/s}$



Campo di moto laminare

Cosa succede a  $x_1 = 0.1 \text{ m}$   
 $x_2 = 0.5 \text{ m}$  ?  $\tau_w = ?$   $\tau_{(y=0.5)} = ?$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Viene assegnato l'andamento dello strato limite:  $\frac{u}{V_{\infty}} = \frac{2y}{5} - \left(\frac{y}{5}\right)^2$

Per un moto laminare  $S = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$  ( $x = \text{distanza del bordo d'attacco}$ )

$$Re_x = \frac{V_{\infty} \cdot x}{\nu} \quad (\text{in Condizioni Standard } \nu = 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})$$

Calcoliamo:

in 2mm è avvenuta una separazione

a  $x_1 = 0.1 \text{ m} \longrightarrow S_1 = 1.91 \text{ mm}$

a  $x_2 = 0.5 \text{ m} \longrightarrow S_2 = 4.26 \text{ mm}$

$$V_A = 0$$

Sulle piatte piane non c'è Separazione!!!

↳ solo sul bordo d'uscita...

Le Resistenze è solo d'Attrito !!

Infine calcola  $\tau_w$  e  $\tau_{(y=0.5)}$  ecc

Le relazioni che legano queste variabili sono:

$$\begin{cases} e = e_r T \\ h = e_f T \end{cases} \parallel$$

Abbiamo varie versioni dell'Equazione di Stato:

1) 
$$pV = \frac{mRT}{M}$$

Pressione [Pa]      [kg/mole]

2) 
$$\rho = \frac{m}{V} = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]_{\text{S.I.}} = \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} \right]_{\text{S. TECNICO}}$$

3) 
$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T$$
 oppure 
$$\frac{p}{\rho} = R^* T$$
 
$$\left( R^* = \frac{R}{M} \right)$$

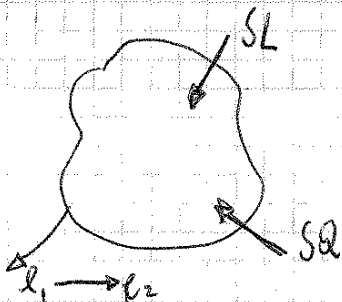
$287 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$

4) 
$$N = \frac{m}{M} \Rightarrow PV = NRT$$

Per un gas qualsiasi in condizioni standard  $\xrightarrow{\text{con } N=1}$   $V = 22.4 \text{ m}^3$

5) 
$$m = \frac{N}{v} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \Rightarrow p = mRT$$

1° Principio Termodinamico

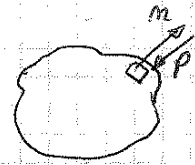


sistemi termodinamico su cui viene effettuato del Lavoro e del Calore.

$$\Rightarrow \boxed{dL = -\rho dv}$$

Invertire segno

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{vT}{m} \left[ \frac{m^3}{kg} \right]$$



$$\Rightarrow \boxed{de = Sg - p dv}$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} = e + pv$$

$$\Rightarrow e = h - pv \parallel$$

$$\Rightarrow de = dh - p dv - v dp$$

$$\Rightarrow \boxed{dh = Sg + v dp}$$

2° Principio Termodinamica  $\rightarrow$

In che direzione avviene un processo?

$$\boxed{S = \frac{S}{m}} \rightarrow \text{entropia specifica}$$

$\hookrightarrow$  è variabile di stato  
 $\Rightarrow ds$

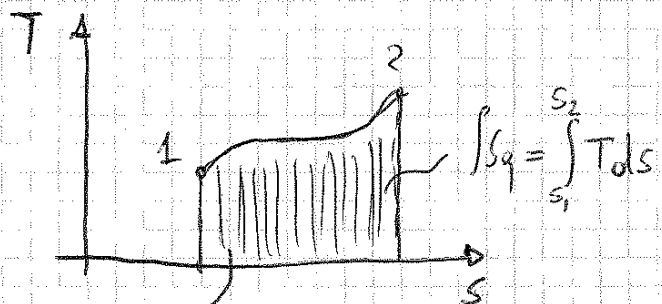
$$\boxed{ds = \frac{Sg}{T} + ds_{\text{irreversibile}}}$$

$ds_{\text{irre}}$  è dovuto agli effetti viscosi  $\Rightarrow$  quando vi è gradiente,  $ds_{\text{irre}} > 0 \parallel$

1. Per processi reversibili

$$ds_{\text{irre}} = 0$$

$\hookrightarrow ds = \frac{Sg}{T} \parallel$



quantità di calore globale fornita al sistema

$$\Rightarrow T ds = e_p dT + p dv$$

$$\Rightarrow ds = e_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{p}{T}\right) dv$$

$$p v = \frac{R}{M} T$$

$$\Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{1}{v} \frac{R}{M}$$

$$\Rightarrow ds = e_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dv}{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 - S_1} = e_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$= e_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$= e_v \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$ds = e_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp \quad (dh = e_p dT)$$

$$\Rightarrow ds = e_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{M} \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 - S_1 = e_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}}$$

1 nell'ugello (Condizione di aderenza  $\rightarrow$  Stato Limite reversibile)

2 attorno alle sfere (pura v. i. stato limite)

Anche  $V_B = V_A = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{in A} \rightarrow \text{arresto isentropico} \\ \text{in B} \rightarrow \text{stato limite} \end{array} \right\}$

$$p_B < p_0$$

$$\frac{dw}{dy} \neq 0, \quad p_T \neq p_0, \quad T_T \neq T_0$$

$$p_0 = p_0(y)$$

La pressione statica è costante nello Stato Limite:  $p_s = \text{cost}$

Il processo è Isoboro lungo y

$$q = \text{pressione dinamica} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

1 GAS INCOMPRESSIBILE  
( $\gamma = \text{cost}$ )

$$\rightarrow p_{0(y)} = p(y) + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{Bernoulli}$$

(su ogni linea di corrente)

2 GAS COMPRESSIBILE  
( $\gamma \neq \text{cost}$ )

$$\rightarrow p_0 = p \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(vale anche per  $\gamma = \text{cost} \rightarrow M \rightarrow \infty$ )

$$p_w = p_s \quad (V=0) \quad \text{!! Non è come } p_{\text{TOT}} \quad \text{!!}$$

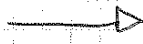
Lungo x invece, variando  $V_x$ , varrà anche p!

## Relazioni per Flussi Isentropici ↴

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{\pi} \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \parallel$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\gamma}$$

$$\frac{p}{y^\gamma} = \text{cost}$$

## Leggi di Conservazione (Equazioni di Bilancio) ↴

- di Masse
- di Quantità di Moto
- di Energia

possono essere ricavate in varie forme

1 Forme Integrale (calcolo  $\vec{F}$ ,  $\vec{\pi}$  in un certo Volume di controllo)

2 Forme Differenziale (valori puntuali di  $p, \vec{V}, y, T, \dots$ )

Ancora a vedere se esse variano una certa grandezza  $G$  nel tempo:

② Anche' esso vale sia per Volumi finiti che infinitesimi.

Si osserva il Volume di controllo mentre evolve all'interno del campo di moto!  
 Le particelle sono le stesse  $\Rightarrow$  E' come se l'osservatore viaggiasse e vedesse delle particelle.

- Le equazioni a cui giungiamo attraverso le forme ~~diffenziale~~ <sup>splesive</sup> si dicono **CONSERVATIVE !!!**  $\rightarrow$  DELLA DIVERGENZA  
 (LAGRANGIANA  $\rightarrow$  <sup>New</sup> ~~classica~~)

Derivate Sostanziale  $\downarrow$

Supponiamo di avere una particella la cui posizione varia nel tempo

$$\vec{V} = w\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$Q$  = generica grandezza

$$Q = Q(t, x, y, z)$$

derivate convettive

$$\underbrace{\frac{DQ}{Dt}}_{\text{derivate sostanziale}} = \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{x,y,z=cost}}_{\text{derivate temporali}} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}}_{\text{sono le componenti della velocità}}$$

$$\Rightarrow \frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + w \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla Q$$

In generale:

$$\boxed{\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\cdot)}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{Vol} \rho \vec{V} dVol = - \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (p \vec{n}) dS + \int_{Vol} \rho \vec{F} dVol$$

variazione q.d.m. dovute  
a flussi e forze  
 $[\frac{q.d.m.}{t}] = [N]$

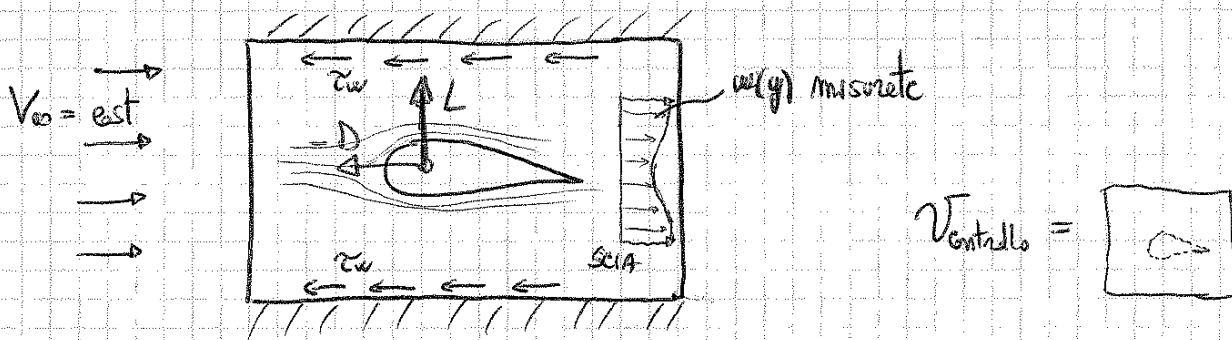
variazione flussi  
di q.d.m.  
 $[\frac{kg}{s} \cdot \frac{m}{s}]$

forze di pressione  
( $f_x=0, \mu=0$ )

forze di campo  
( $\vec{F} = [\frac{N}{kg}]$ )

$$\vec{F} = - \int_S (p \vec{n}) dS + \int_{Vol} \rho \vec{f} dVol \quad \text{ve determinate!!!}$$

ca. **GALLERIA DEL VENTO**



$$-D = - \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad \rightarrow \quad D = \frac{\Delta(q.d.m.)}{\Delta t}$$

In ogni punto del campo  $v$  è dipendente del tempo

(se  $V_{\infty} \neq est \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{Vol} \rho \vec{V} dVol \neq 0$ )

Se invece vediamo la distribuzione di velocità in direzione verticale  $\Rightarrow$  Portance

③ Equazione di Conservazione Energia (INTEGRALE) EULERIANA

Vogliamo dare una relazione più generale del 1° principio (ma per un sistema chiuso)



## Leggi di Conservazione in Forme Differenziale ↓

Possiamo:

- considerare gli stessi principi (dal punto di vista puntuale)
- - passare dalle forme integrali a quelle infinitesime (con  $V_{ol} \rightarrow 0$ )

Dobbiamo trasformare gli Integrali di Superficie in Integrali di Volume.

TEOREMA GAUSS:

$$1) \quad \int_S (\vec{A} \cdot \vec{m}) dS = \int_{Vol} (\nabla \cdot \vec{A}) dVol \quad \vec{A} \text{ vettore}$$

$$2) \quad \int_S (\phi \vec{m}) dS = \int_{Vol} (\nabla \phi) dVol \quad \phi \text{ scalare}$$

## ① Conservazione Masse in Forme Differenziale ↓

$$\frac{d}{dt} \int_{Vol} \rho dVol + \int_{Vol} (\nabla \cdot \rho \vec{v}) dVol = 0$$

Essendo  $Vol$  fisso nel tempo  $\Rightarrow$  posso portare  $\frac{d}{dt}$  dentro l'integrale.

$$\Rightarrow \int_{Vol} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dVol = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \right] \rightarrow \text{FORMA CONSERVATIVA}$$

Immaginiamo sapere che:

$$R = 8314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$Q = N_T C_{v, \text{miscela}} \Delta T \longrightarrow C_{v, \text{miscela}} = \frac{Q}{N_T \Delta T} = 19108,2 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$\left( N_T = \frac{pV}{RT} = 3,611 \text{ moli} \right) \quad \text{me } C_{v, \text{miscela}} = \sum x_i C_{v,i}$$

$$\begin{cases} C_{v, \text{He}} = \frac{f}{2} R = \frac{3}{2} R \\ C_{v, \text{NH}_3} = \frac{f}{2} R = 3 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{He}} C_{v, \text{He}} + x_{\text{NH}_3} C_{v, \text{NH}_3} = C_{v, \text{miscela}} \\ x_{\text{He}} + x_{\text{NH}_3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{\text{NH}_3} = 0,532 \longrightarrow x_{\text{He}} = 0,468$$

$$\begin{aligned} 1) m_{\text{He}} &= N_{\text{He}} \cdot \overbrace{\Pi_{\text{He}}}^{\text{?}} = \overbrace{x_{\text{He}} \cdot N_T}^{\text{?}} \cdot \overbrace{\Pi_{\text{He}}}^{\text{?}} = 6,76 \text{ Kg} \\ 2) m_{\text{NH}_3} &= N_{\text{NH}_3} \cdot \overbrace{\Pi_{\text{NH}_3}}^{\text{?}} = \overbrace{x_{\text{NH}_3} \cdot N_T}^{\text{?}} \cdot \overbrace{\Pi_{\text{NH}_3}}^{\text{?}} = 32,66 \text{ Kg} \end{aligned} \quad \text{? } \textcircled{\text{ok}} \frac{N_i}{N_T} = x_i$$

14+3=17

$$\Pi_{\text{miscela}} = \sum x_i \Pi_i = x_{\text{He}} \Pi_{\text{He}} + x_{\text{NH}_3} \Pi_{\text{NH}_3} = 10,92 \text{ Kg/moli}$$

② Conservazione quantità di moto in Forme Differenziale  $\downarrow$  vettoriale

Applichiamo lo stesso ragionamento di prima e visto che  $v = \text{cost}$

$\Rightarrow$  Possiamo portare le derivate parziali dentro il segno d'integrale

Ogni contributo è una Forza per unità di volume =  $\left[ \frac{N}{m^3} \right]$

flusso turbolento

○  $\underline{f_{visc}}$  → sforzo e ha le stesse strutture di  $\underline{\tau_{yx}} = -f_{visc}$ ,  
 sforzo legato alla velocità macroscopiche sforzo molecolare legato alle fluttuazioni

Lo sforzo nasce quindi da scambi di quantità di moto !!!

Le equazioni di conservazione delle quantità di moto proiettate sui tre assi vengono chiamate **EQUAZIONI DI EULERO** //

○ Conservazione quantità di moto in forme Lagrangiane ↓

consideriamo  $\underline{\vec{F}} = m \underline{\vec{a}}$

$y = \text{cost}$

Avremo che:

x)  $y \frac{Dw}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \quad \parallel \quad \left[ \frac{N}{m^3} \right]$

y)  $y \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \quad \parallel \quad \left[ \frac{N}{m^3} \right] \Rightarrow \boxed{y \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}}$

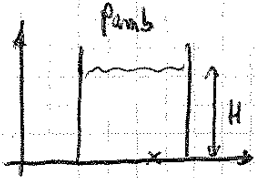
z)  $y \frac{Dw}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \quad \parallel \quad \left[ \frac{N}{m^3} \right]$

Eulero non prende in considerazione sforzi viscosi !!!

⇒ Nello stretto Limite Eulero non si può applicare !!!

○ Le equazioni meteorologiche non è le viscosità ma la presenza dei termini non lineari ⇒ Utilizziamo altre equazioni → Navier-Stokes

19.

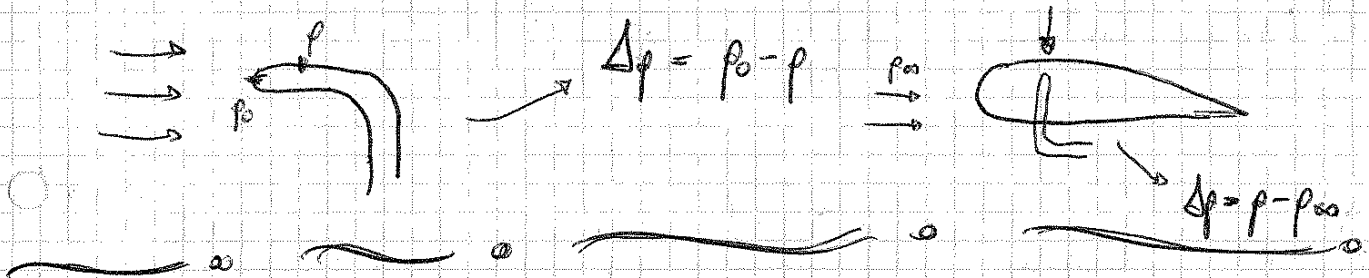


$$\Delta p = \gamma g \Delta h \longrightarrow \Delta p = p_A - p_{amb}$$

$$\Rightarrow p_{fondo} = \gamma g \Delta h + p_{amb}$$

20.

tubo di pitot e sonde per misurazione pressione:



### ③ Conservazione Energia in Forme Differenziale $\downarrow$ scalare

sempre con lo stesso ragionamento trasformiamo gli integrali di superficie in integrali di volume.

Avremo allora che:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega + \nabla \cdot \left[ \gamma \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] d\Omega = -\nabla \cdot (p \vec{v}) + \gamma \dot{q} + \int (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

ricordiamo che:

$$\nabla \cdot (p \vec{v}) = \frac{\partial (pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial (pv_z)}{\partial z}$$

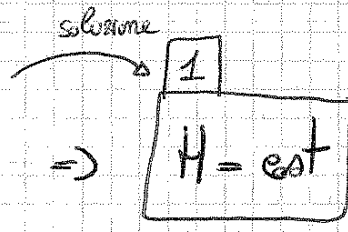
### ④ Conservazione Energia in forme Lagrangiane $\downarrow$

Se consideriamo un flusso con  $\dot{q} = 0$  e  $\vec{f} = 0$

⇒ Abbiamo solo la funzione legge non stazionaria

$$\Rightarrow \rho \frac{DH}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}$$

Se ipotizziamo anche  $\frac{Dp}{Dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{DH}{Dt} = 0} \Rightarrow \boxed{H = \text{cost}}$



$H = \text{cost}$  lungo ogni linea di corrente seguita dalle particelle

⇒ CAMPO POTENZIALICO

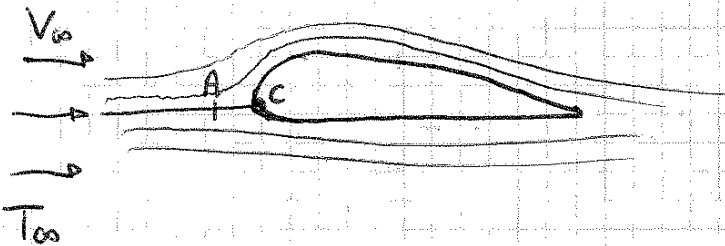
Dunque:

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{cost} = c_p T + \frac{V^2}{2} = \boxed{H_0} = c_p T_0$$

Se  $V \uparrow$  allora  $T \downarrow$

Entalpia di Arresto Isentropica  
(senza effetti dissipativi)

es.



$$H = h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2}$$

Avremo un arresto isentropico poiché le curve si accorgono delle presenze del corpo

$$\Rightarrow \parallel H_A = h_A + \frac{V_A^2}{2} = \text{cost} = H = h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} \parallel$$

$$\boxed{V_C = 0}$$

$$\rightarrow H_C = h_C = c_p T_C$$

$$\boxed{T_C = T_0}$$

Nel punto di Arresto  
vi sono i flussi di  
calore più elevati!!!

me:  $\gamma \frac{R}{\pi} T_0 = a_0^2 \parallel \quad \times \quad \gamma \frac{R}{\pi} T = a^2 \parallel$

⇒  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$   $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \pi^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$   
 $\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \pi^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Inoltre introducendo il concetto di Velocità Limita ↴

è la velocità che si raggiungerebbe se  $T \rightarrow 0$  ( $c_p T + \frac{v^2}{2} = \text{cost}$ )  $\parallel$

⇒  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{V_{lim}^2}{2}$   $\frac{V_{lim}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$

con  $v = V_{lim} \Rightarrow \pi = \pi_{lim} = \frac{V_{lim}}{a} = \infty$  (poiché  $T \rightarrow 0$ )

Infine introducendo il concetto di Velocità Critica ↴

è la velocità che si ha quando  $\pi = 1 \Rightarrow$  Condizioni locali soniche  $\parallel$

⇒  $V^* = v = a^* = a$

quindi:

$\parallel \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{V_e^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \parallel$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{He} = \frac{N_{He}}{N_{TOT}} = 0,375 & L_{He} = 3 \\ X_{CH_4} = \frac{N_{CH_4}}{N_{TOT}} = 0,625 & L_{CH_4} = 6 \end{cases}$$

$$\gamma_{mis} = \frac{\sum x_i (L_i + 2)}{\sum x_i L_i} = \frac{5X_{He} + 8X_{CH_4}}{3X_{He} + 6X_{CH_4}} = 1,41$$

$$\Rightarrow T_2 = 219,2^\circ K$$

(con 1 bar =  $10^5$  Pa)

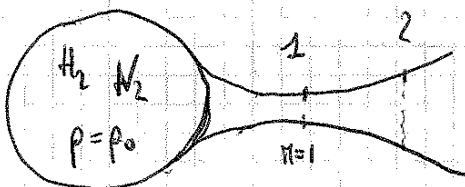
$$\mu_{mis} = \sum x_i \mu_i = X_{He} \mu_{He} + X_{CH_4} \mu_{CH_4} = 11,5 \text{ Kg/kole}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1,01 \text{ Kg/m}^3$$

psichi

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{R}{\mu_{mis}} T_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{p_1}{\frac{R}{\mu_{mis}} T_1} = 3,16 \text{ Kg/m}^3$$

es. pag 24



$$\begin{aligned} C_{H_2} &= 0.6 \\ C_{N_2} &= 0.4 \end{aligned}$$

essendo

$$\Pi_0 = \Pi_{mis} = \sum x_i \Pi_i = \sum \frac{1}{\frac{c_i}{\Pi_i}} = \frac{1}{\frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{23}} = 3,18 \text{ Kg/mole}$$

$$\Rightarrow \rho_{er} = \rho_0 \left( \frac{T_{er}}{T_0} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} = 0,0367 \text{ Kg/m}^3$$

$$\Rightarrow G = \rho_{er} V_{er} A_{er} = 7,3 \text{ Kg/s}$$

essendo:

$$V_{er} = \Pi_{er} \cdot a_{er} = \Pi_{er} \cdot \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_{er}} = 996 \text{ m/s}$$

Termine di Procco  $\nabla$

Immaginiamo volere esprimere  $H = \text{cost}$  in modo diverso:

$$H = h + \frac{v^2}{2} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt}$$

che relazione lega  $\Pi$  con  $\Pi^*$ ?

è utile perché quando  $\Pi \rightarrow \infty$  il valore di  $\Pi^*$  tende ad un numero finito!

Consideriamo un campo di moto

$$\underbrace{v, T, \Pi}_{\text{campo di moto}} \quad \Pi = \frac{v}{a}, \quad a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

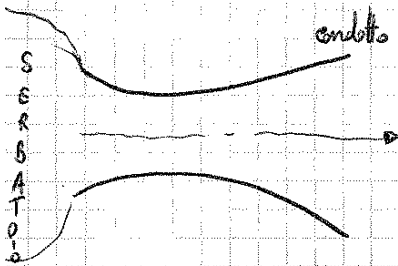


$M \rightarrow \infty$  rappresenta il rapporto tra  $V_e$  e  $a \rightarrow 0$

es. Anse

$$\gamma = 1,4 \Rightarrow \pi^* = \sqrt{6} = 2,449$$

Legame tra grandezze critiche e grandezze d'arresto ↓



Seppur che:

$$\frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \quad (\text{se } V=0)$$

In condizioni critiche  $\pi = \pi^* = 1$

$$\Rightarrow \frac{a^{*2}}{a_0^2} = \frac{2}{\gamma+1} = \frac{T^*}{T_0}$$

Dell'isentrope abbiamo che:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \begin{array}{l} \text{critiche} \rightarrow 2 \\ \text{arresto} \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

allo stesso modo

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Le soluzioni possono essere ricercate:

- Analiticamente

- Numericamente  $\rightarrow$  CFD ( $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ )  $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$

**Crocco**



lega insieme la cinematica del corpo e la Termodinamica!! //

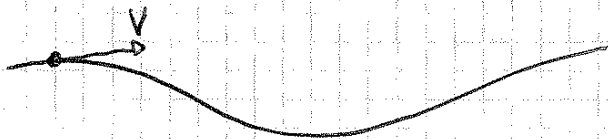
Assunzioni:

- flusso inviscido ( $\mu = 0$ )

- processi reversibili

- forze di massa  $\vec{f} = 0$  (forze di campo)

Consideriamo il nostro campo di moto



$$\vec{V} = w\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Le particelle possono traslare lungo  $u, v, w$  ma può anche ruotare!

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$$

Ad ogni vettore  $\vec{V}$  possiamo associare  $\nabla \times \vec{V}$  (è sempre un Vettore)

$$\text{ROTORE } \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}_S = \nabla h - \frac{\nabla \varphi}{y}$$

me

$\frac{\nabla \varphi}{y}$  lo ricaviamo dall'equazione lagrangiana delle quantità di moto!

$$\left\| y \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \varphi \right\| \Rightarrow y \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla \varphi$$

$$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}_S = \nabla h + \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla h + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)$$

Invece:

$$H = h + \frac{v^2}{2} \Rightarrow \nabla h = \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}_S = \left[ \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right]$$

Identità vettoriale:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\Rightarrow \nabla \mathcal{L}_S = \nabla H - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

/
/
/

$\nabla H \neq 0$       campo vorticoso      campo irrotazionale

TEOREMA DI  
CROCCO

Assunzioni:

- flusso irrotazionale ( $\mu=0$ )
- forze campo  $\vec{f}=\vec{0}$
- Campo irrotazionale
- stazionarietà
- evoluzione isentropica

Consideriamo l'espressione lagrangiana delle quantità di moto:

$$\Rightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p$$

$$\text{me } \frac{D\vec{v}}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p$$

sfruttando l'identità vettoriale:

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\Rightarrow \rho \left[ \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right] = -\nabla p$$

me il campo è irrotazionale!!

$$\Rightarrow \rho \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p \quad ||$$

Passando alle forme infinitesime:

$$\Rightarrow \rho d \left( \frac{v^2}{2} \right) = -dp \quad ||$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\gamma\phi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma\phi_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\phi_z)}{\partial z} = 0$$

Andando a fare le derivate e ordinando... giungiamo a:

$$\gamma(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$

bisogna ora eliminare le derivate  $\Rightarrow$  consideriamo l'eq. delle particelle di moto.

$$dp = -\gamma V dV = -\frac{\gamma}{2} dV^2 \quad V^2 = w^2 + v^2 + w^2$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{\gamma} = -\frac{\gamma}{2} d(w^2 + v^2 + w^2) = -\gamma d\left[\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right]$$

ma  $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma}\right)_{s=\text{cost}}$  ma il flusso è isentropico  $\Rightarrow a^2 = \frac{dp}{d\gamma} \parallel$

$$\Rightarrow dp = a^2 d\gamma \quad \text{e} \quad d\gamma = \frac{dp}{a^2} \parallel \quad (\text{dividendo per } a^2)$$

$$\parallel d\gamma = -\frac{\gamma}{a^2} d\left[\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right] \rightarrow \text{calcolo } \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= -\frac{\gamma}{a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2} \right] = -\frac{\gamma}{a^2} [\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{yx} + \phi_z \phi_{zx}] \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y} &= \dots \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \dots \end{aligned} \right.$$

L'espressione di Laplace si presta bene alle Linearizzazione delle equazioni.

(nei flussi incompressibili con  $M \leq 0,3$ ; con flussi compressibili  $M < 0,8/0,9$ )

Nel campo Transonico ( $0,8 \leq M \leq 1,2$ ) le equazioni non si può linearizzare!!!

Anche in campo Iprsonico non si possono linearizzare le equazioni, ma in quello Supersonico si.

Le Linearizzazione comporta delle Approssimazioni!!!

(con l'avvento del computer si è sviluppate le CFD)

non calcoliamo più le soluzioni analitiche

ma una quantità di dati che discretizza  $\phi$

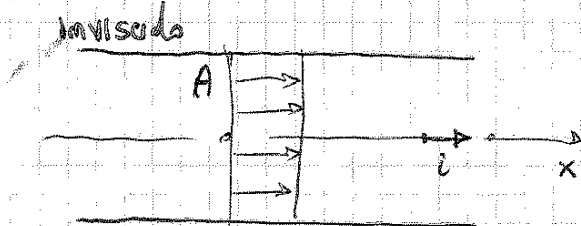
(Abbiamo TUTTI i DATI punto per punto, ma non la legge matematica...)

si basa sulle discretizzazione del campo di moto

## Flussi Unidimensionali

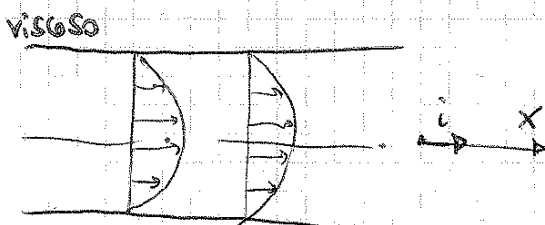
Sono flussi le cui proprietà del campo dipendono solo da una direzione, che è quella del moto!

es. flusso intimo/guidato (in un condotto)



$$\vec{V} = w \vec{i}$$

(se il fluido è inviscido queste velocità è le stesse in ogni punto dell'asse)  
 $\Rightarrow$  Anche sulle pareti...

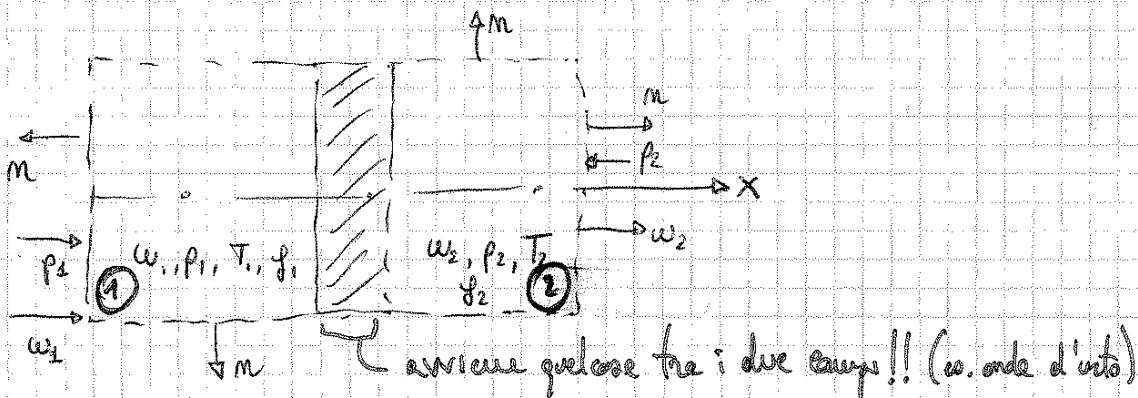


$\rightarrow$  è sempre Unidimensionale

Andiamo a considerare altre

- Forme Integrale
- Volume fisso  $\rightarrow$  equazioni nelle forme Euliane
- // Permeabile (cioè osserviamo solo particelle sempre divise)

Consideriamo un Volume di Controllo



Nel campo (1) le proprietà sono Uniformi! (anche in (2))

Il flusso è STAZIONARIO in entrambi i campi

Forze di campo  $\vec{f} = 0$

Sforzi Viscosi  $\mu = 0$

1) Continuità:

$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = \int_{S_1} (\dots) + \int_{S_2} (\dots) + \int_{S_{laterale}} (\dots)$$

$\vec{v} \cdot \vec{m} = -\omega_1$  (for  $S_1$ )       $\vec{v} \cdot \vec{m} = +\omega_2$  (for  $S_2$ )

$0$  (perché  $\vec{v} \perp \vec{m}$ ) (for  $S_{laterale}$ )

$$\Rightarrow \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = -\rho_1 \omega_1 A_1 + \rho_2 \omega_2 A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1 \omega_1 (-\omega_1) A + \rho_2 \omega_2 (\omega_2) A = -(-\rho_1 A + \rho_2 A)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 + \rho_1 \omega_1^2 = \rho_2 + \rho_2 \omega_2^2} \leftarrow$$

PER FLUSSI INVISCIDI

### 3) Energie

$$\int_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS + \int_{Vol} \rho \dot{q} dVol$$

$$= \int_{S_1} (\dots) + \int_{S_2} (\dots)$$

$$= \rho_1 \left( e_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \right) (-\omega_1) A + \rho_2 \left( e_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) (+\omega_2) A$$

$$\bullet - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = -[-\rho_1 \omega_1 + \rho_2 \omega_2] A$$

$$\bullet \int_{Vol} \rho \dot{q} dVol = Q$$



Onde d'urto  $\rightarrow$   $\bar{\epsilon}$  DISSIPATIVO ma ADIBATICO

$\Rightarrow H = \text{cost}$  ( $\bar{\epsilon}$  l'unica quantità che si conserva)

Dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2 \\ p_1 + \rho_1 \omega_1^2 = p_2 + \rho_2 \omega_2^2 \\ q + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \end{array} \right.$$

① Urto Retto  $\downarrow$

L'onde d'urto si dice retto perché le superficie di discontinuità è  $\perp$  al moto!

Le variazioni di pressione sono molto elevate!!!

Introduciamo prima poi l'Onde Sonore  $\downarrow$

una sorgente genera fluttuazioni di pressione  $\Rightarrow$  Fronte d'onda che trasporta energia alle onde e si restituisce

$a$  = velocità del suono (del fronte d'onda)

Il fenomeno è ADIABATICO e REVERSIBILE  $\Rightarrow$  ISOENTROPICO

(le perturbazioni sono piccole)

es. TUONO  $\rightarrow$   $\bar{\epsilon}$  un'onda d'urto molecolare...

Colpo di FRUSTA

$$\Rightarrow dp = -2a \cdot y \cdot da - a^2 dy$$

$$\Rightarrow da = \frac{dp + a^2 dy}{-2ay} \quad \text{moltiplicando e dividendo per } dy$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dy} = \frac{\frac{dp}{dy} + a^2}{-2ay} \quad \parallel \quad \text{ma } \frac{da}{dy} = -\frac{a}{y}$$

$$\Rightarrow -a = \frac{\frac{dp}{dy} + a^2}{-2a} \Rightarrow 2a^2 = \frac{dp}{dy} + a^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = \left(\frac{dp}{dy}\right)_s}$$

(<sup>pschi</sup> II) suono è un processo Reversibile ADIABATICO  $\Rightarrow$  ISOENTROPICO  $\Rightarrow S = \text{cost}$ )

La Velocità del suono è indice della COMPRESSIBILITA' del GAS //

$$\left( \beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left. \begin{array}{l} \text{se } \frac{1}{a^2} \uparrow \text{ il GAS è COMPRESSIBILE (aumenta } \beta) \\ \text{se } \frac{1}{a^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{ il Fluido è INCOMPRESSIBILE (diminuisce } \beta) \end{array} \right\}$$

Così succede quando abbiamo

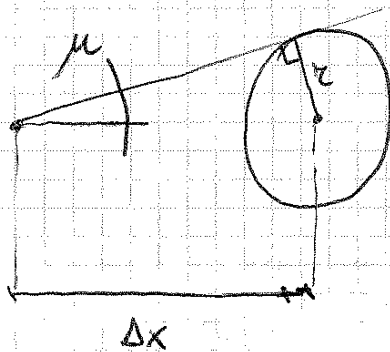
$$\text{- Sorgente Sonora } \left\{ \begin{array}{l} V=0 \\ V < a \\ V > a \\ V=a \end{array} \right.$$

Il suono propaga solo nel cono di Mach!

⇒ L'osservatore vede prima le sorgenti e poi il suono!!

Se facciamo una sezione del cono → visualizziamo le due linee generatrici (Linee di Mach)

Consideriamo:



$$\frac{r}{\Delta x} = \sin \mu$$

$$\begin{cases} r = a \Delta t \\ \Delta x = V \Delta t \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{\Delta x} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \mu = \frac{1}{M}}$$

Tanto più  $M \uparrow$  tanto più il cono si restringe!!!

es.

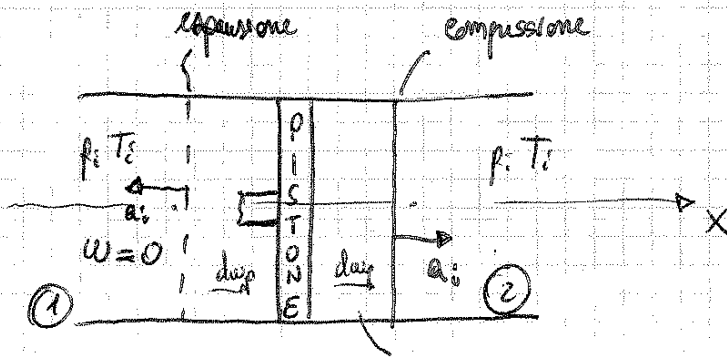
per  $M=1 \rightarrow \mu = \arcsin \frac{1}{M} \rightarrow \mu = 90^\circ$

per  $M=2 \rightarrow \mu = 30^\circ$

Cosa succede se le perturbazioni sono più grandi?

⇒ Si ha a che fare con le ONDE D'URTO ↓

12. tubo d'urto



(più veloce è la velocità di propagazione dell'onda più elevate sono le T a valle!!!)

a  $t=0$  tutto è fermo

a un certo istante diamo uno spostamento infinitesimo

$$a_i = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_i}$$

⇒ a destra si genera un'onda di compressione con velocità  $a_i$  (del suono)!!

⇒ a sinistra // // // espansione // // //

Ma le molecole d'aria avanzano TUTTE con il pistone, verso destra!!

Im (2)  $T$  aumenta  $\rightarrow T + dT$  e  $p$  aumenta  $\rightarrow p + dp$

Im (1)  $T$  diminuisce  $\rightarrow T - dT$  e  $p$  diminuisce  $\rightarrow p - dp$

Dando un altro impulso ⇒ si genera un'altra onda

Im (2) si genera un'altra onda di compressione con velocità RELATIVA =

$$= \sqrt{\gamma \frac{R}{M} (T_i + dT_i)} + dwp > a_i$$

velocità dell'aria che si muove a sinistra e destra del pistone

Im (1)  $= \sqrt{\gamma \frac{R}{M} (T_i - dT_i)} - dwp < a_i$

Ricordiamo che:

$$V_{at} \approx a \quad \left( V_{at} = \sqrt{3 \frac{R}{\mu} T} \right)$$

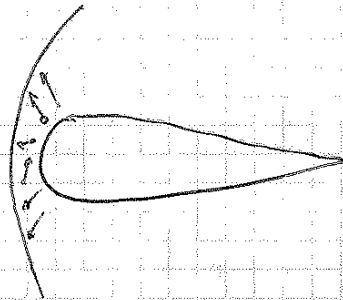
Le particelle (colpite dalle molecole) le riflette verso monte con velocità  $V_{at} \approx a$

$\Rightarrow$  si crea un FRONTE D'ONDA (che ce lo fa a risalire purché  $M_{\infty} < 1$ )

Nell'Incompressibile, il corpo fa sentire prima la sua presenza e devia le linee di corrente...

es. 2

$$\begin{array}{c} M_{\infty} > 1 \\ \longrightarrow \\ V > a \end{array}$$

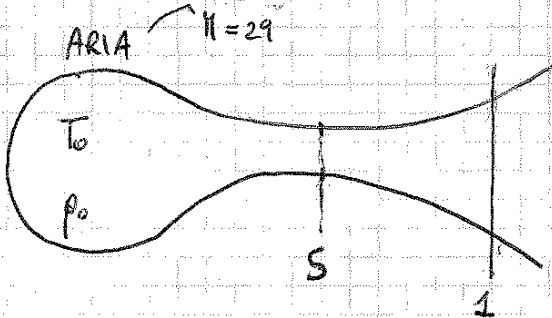


$V_{at} \approx a$  ma è minore di  $V_{\infty} \Rightarrow$  non ce lo fanno

Comportamento fronti d'onda  $\longrightarrow$  GENERAZIONE ONDA D'URTO



es.



$$\begin{array}{l} T_0 = 300^\circ \text{K} \\ p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ M_1 = 2 \\ T_{01} = T_{02} = T_0 \end{array}$$

Andiamo prima a considerare le grandezze effettive:

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = 166,7^\circ \text{K}$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu_{aria}} T_1} = 258,7 \text{ m/s}$$

Se potessimo  $M_1 = 40$  quanto verrebbe  $M^*$ ?

$$a_1 = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_1} = 19,37 \text{ m/s}$$

perché:  $T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = 0,935^\circ \text{K} \approx 0 \quad (V \approx V_e)$

$$\Rightarrow V = M \cdot a = 776,7 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow M^* = \frac{V}{a^*} = 2,446$$

(a\*) è lo stesso di prima!

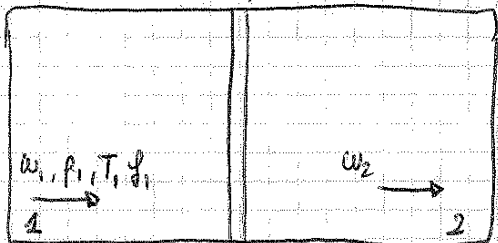
Sappiamo infine che

$$\text{per } M \rightarrow \infty, \quad M^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 2,449 //$$

Dunque a  $M_{\text{sch}} = 40$  siamo quasi in condizioni simili a  $M \rightarrow \infty$ !!!

Dobbiamo ora scrivere le Equazioni per l'onda d'urto normale

onde d'urto  $\rightarrow$  è una superficie di discontinuità!!



Il flusso evolve isentropicamente fino all'onda d'urto.

Il problema è calcolare le condizioni nel campo 2

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{\gamma w_1} - \frac{a_2^2}{\gamma w_2} = w_2 - w_1$$

me:

$$e_p T - \frac{w^2}{2} = \text{cost} \longrightarrow \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{w^2}{2} = \text{cost} = \frac{a^{*2}(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}$$

$$\Rightarrow a^2 = \left[ a^{*2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} - \frac{w^2}{2} \right] (\gamma-1) \quad \text{e lo scriviamo per i due campi:}$$

$$a_1^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_1^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} w_1^2$$

me  $a_1^* = a_2^*$

$$a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_2^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} w_2^2$$

perché il processo è Adiabatico

$$\left( h + \frac{w^2}{2} = \text{cost} = e_p T_0 \right)$$

Le temperature Totali nell'orto è COSTANTE

$$T_{01} = T_{02} \longrightarrow T_1^* = T_2^*$$

$\Rightarrow$  Lo sarà anche  $T^*$

$$\Rightarrow a_1^* = a_2^*$$

Sostituendo:

salto di velocità attraverso l'orto

$$\Rightarrow \left( \frac{\gamma+1}{2} \frac{a_1^{*2}}{\gamma w_1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} w_1 \right) - \left( \frac{\gamma+1}{2} \frac{a_2^{*2}}{\gamma w_2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} w_2 \right) = w_2 - w_1$$

Raccogliendo denominatori

facendo il minimo comune multiplo

e dividendo per  $w_2 - w_1$

Infatti se l'onda fosse instazionaria  $\Rightarrow$  in movimento con una  $V_{sw}$



$$V_{sw} > a^*$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow H \neq \text{cost} //$$

L'onda d'urto si muove SEMPRE a Velocità Supersonica

Legame tra  $M_1^*$  e  $M_2^*$

$$a^{*2} = \omega_1 \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_1 \omega_2}{a^{*2}} = 1 \quad \text{ma } M^* = \frac{V}{a^*}$$

$$\Rightarrow 1 = M_1^* \cdot M_2^*$$

Le mappe causali  $M^* = f(M) \iff M = f(M^*)$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2^* = f(M_1) \\ M_1^* = f(M_2) \end{array} \right.$$

lasciamo a trovare il legame tra  $M_1$  e  $M_2$

$$M^* = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \rightarrow \text{si parte da: } \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2}$$

$$M_2 = f(M_1)$$

$$\Rightarrow M_2^2 = \frac{1 + \left[ \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2 \right]}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

- $M_1 > 1 \Rightarrow M_2 < 1 //$
- $M_1 \rightarrow 1 \Rightarrow M_2 \rightarrow 1$   
(è un urto molto debole, senza dissipation)

Le conute e velle è tanto più subsonica quanto più elevato è  $M_1$  ( $M_{1, \text{max}} = 6$ )

$$M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (\text{in Area } M_2 \rightarrow 0,378)$$

altrimenti si sono problemi di riperforazione etc.



$$\Rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right)$$

POSSIAMO RICAVARE  $\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

NON È ISOENTROPICA!!!  $\neq \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost}!!!$

Relazioni di  
Rankine Hugoniot

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

Come si legano tali relazioni con il numero di Mach?

$\rho w = \text{cost}$  ( $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$ )

ma:  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_1}{w_1} = \frac{w_1^2}{a_2^2 w_1^2} = \frac{w_1^2}{a^2} = M_1^{*2} = f(M_1^2)$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}$$

per  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$   
(es. Arse = 6)

Sostituendo in Hugoniot:

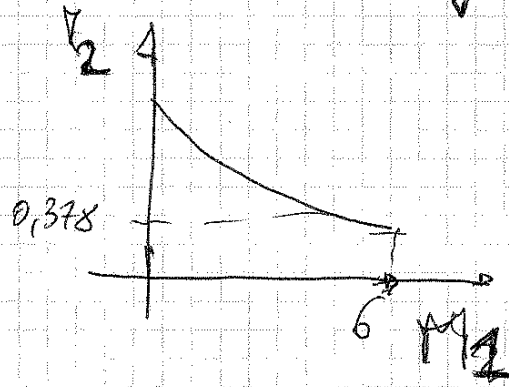
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

per  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty$

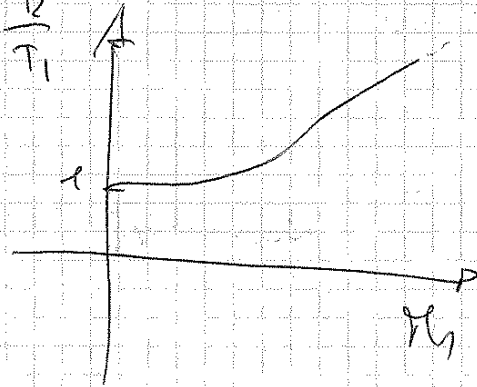
degradano (e vanno di tech) tutti i rapporti...

$\mu_1$	$\mu_2$	$f_2/f_1$	$\bar{T}_2/T_1$	$f_2/g_1$	$f_{o2}/f_{o1}$	$\frac{s_2 - s_1}{c_p}$
1						per esistenza autoeccitazione

TABELLA 6  
URTO RETTO

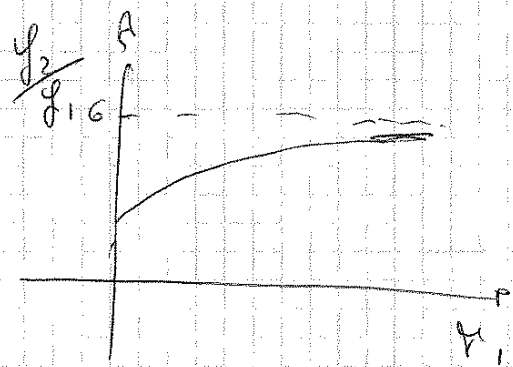
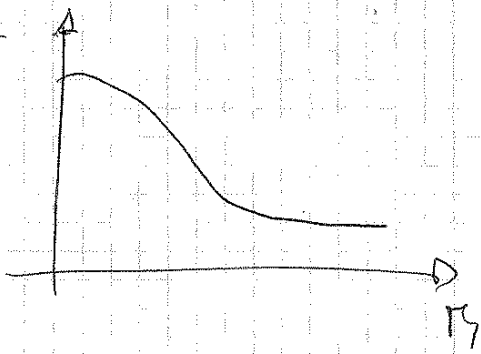


$f_2/f_1$  /  $\frac{\bar{T}_2}{T_1}$



NSW

$$\frac{f_{o2}}{f_{o1}} = \frac{f_{o2}}{f_{o1}}$$



$$\frac{s_2 - s_1}{c_p}$$

