NUMERO: 501

DATA: 10/04/2013

A P P U N T I

STUDENTE: Caratto

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Lancelotti

ANALISI II

docente: Lancelotti Sergio
email: D2570 @ studenti. polito.it
web: http: // calvino.polito.it/~ lancelotti
telefono: 7536

testo consigliato:

- "Lezioni di Analisi Matematica II"
  ed. Celid di S. Lancelotti
- "Esercizi di Analisi Matematica II"
  ed Celid di S. Lancelotti

PS Esercizi Risolti e temi d'esame
http:// calvino. polito.it /~ lancelotti /didattica /analisi2_ new/ analisi2_ new. html

PS2: Consulenza se necessaria.

Questo "COMPENDIO" presenta:

1) Breve introduzione e richiami utili
2) Tutto ciò che serve sapere per l'Analisi II

schemi e formule risolutive — brevi spiegazioni e richiami

Ora, dato l'esame e superato con voto 27/30, posso aggiungere questo: seguire teoria ed esercitazioni con il prof. è utilissimo.
Usate questa dispensa come "fissaggio" e chiarimento.

Se $0 \in \mathbb{R}^n$

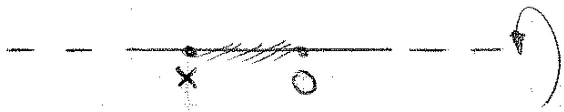
$0 = (0, \dots 0)$

$x - 0 = 0$

$\|x\| = \|x - 0\|$

- Con $n = 1$

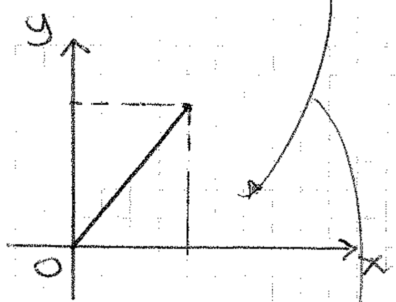
$\|x\| = |x| = \sqrt{x^2}$



La norma rappresenta la distanza

- Con $n = 2$

$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

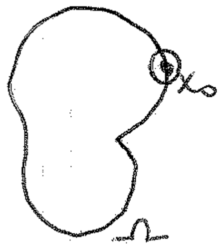


Con $n = 3$ o per $n \geq 3$ Analogamente

In $\mathbb{R}^n$ la <u>norma di x è la distanza di x dallo 0.</u>

- Punto interno

x_0 è punto interno perché esiste B_r (almeno uno) tutto dentro Ω

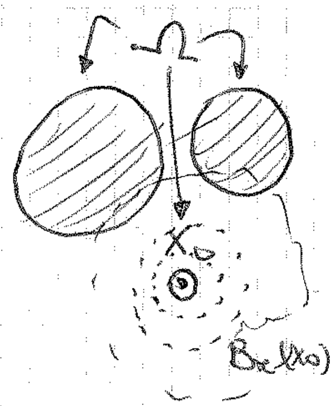


x_0 non è punto interno perché NON esiste B_r tutto dentro Ω

- Punto Isolato

cioè esiste una pallina talmente piccola che contiene solo x_0

$\rightarrow \Omega \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$
evidentemente $x_0 \in \Omega$



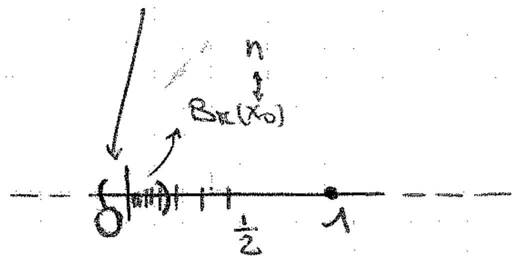
- Punto di accumulazione

cioè se in ogni intorno di x_0 ci sono punti di Ω diversi da x_0
Non è detto che x_0 appartenga ad Ω (es: $\frac{1}{n}$ .. $n>1$)

0 è il punto di accumulazione

esempio

$$\Omega = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$



Esempio

- $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}, \ 2x^2 + 3y^2 < 1 \}$

$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ continua

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ma $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 1 \}$

$\downarrow$

$(-\infty, 1)$ → NB in $\mathbb{R}$ i numeri minori di 1 vanno da $-\infty$ a 1

$\downarrow$

lo chiamo A, intervallo aperto

Quindi

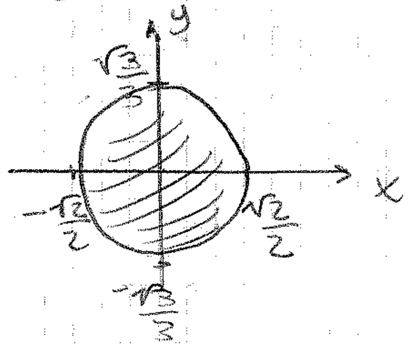
$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in A \} \to$ è APERTO

$\to f^{-1}(A)$ è aperto

PS $2x^2 + 3y^2$ è un ellisse

$2x^2 + 3y^2 < 1$

$\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} < 1$



- $\Lambda = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^4 < 1 \}$ da risolvere [aperto]

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 1 \}$

$\downarrow$

$(-\infty, 1)$: A aperto

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in A \}$

poiché A aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto

RICHIAMI di CALCOLO DIFFERENZIALE

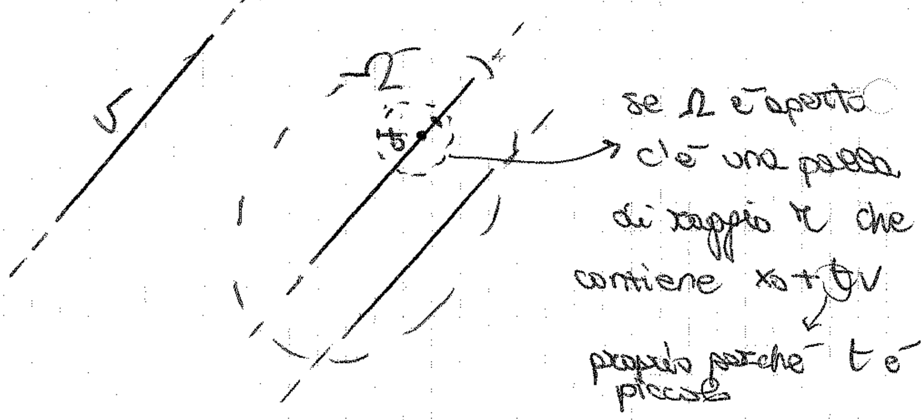
- f è derivabile in x_0 rispetto a v se esiste in $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$ rapporto incrementale

Si scrive $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ed è detto DERIVATA DIREZIONALE

NB Ω deve essere aperto perché deve starci

$x_0 + tv$ → piccolo



- f è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare tale che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x - x_0\|} = 0}$$

dove L è detto differenziale e si denota con

$\boxed{d f(x_0)}$ o $d_{x_0} f$

↓

è un'applicazione lineare! : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Posso scriverla come

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0) = o(\|x-x_0\|) \quad \text{per } x \to x_0$$

* esempi

perché lineare

$$dx_1(v) = dx_1(v_1 e_1 + v_2 e_2 \dots v_n e_n)$$
$$= v_1 dx_1(e_1) + \dots v_n dx_n(e_n)$$
$$= v_1 \underbrace{dx_1(e_1)}_{1} + v_2 \underbrace{dx_2(e_2)}_{0} + \underbrace{v_n dx_n(e_n)}_{0}$$
$$= v_1$$

$$dx_n(v) = v_n$$

$$\rightarrow df(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, dx_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\, dx_n\right](v)$$

DIFFERENZIALE di f COMPOSTA

con f diff in x_0
con g diff in $f(x_0)$

$\rightarrow$ allora $g \circ f$ è diff in x_0 e
$$d(g \circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x))$$
molto simile a
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

NB In forma matriciale
$df(x_0)$ associo $Jf(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$
$dg(x_0)$ " " $Jg(f(x_0)) \in \mathbb{R}^{k,m}$
$d\, g \circ f(x_0)$ " " $J_{g \circ f}(x_0) \in \mathbb{R}^{k,n}$

$$\downarrow$$

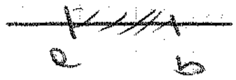
$$= J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$
$$\underbrace{k \times m \cdot m \times n}_{k \times n}$$

INTEGRALI MULTIPLI

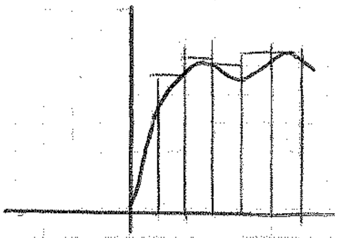
integrali n(≥2) variabili

• n = 1 → integrale semplice (di Riemann)

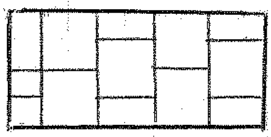
$\int_a^b f(x)\,dx$



INTERVALLO

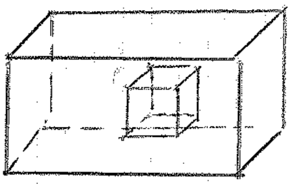


• n = 2 → integrale multiplo



suddivido in rettangolini

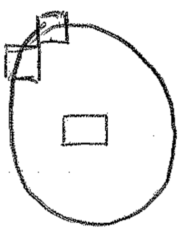
• n = 3



suddivido in parallelepipedini

Come integrare un cerchio, una sfera, cioè una superficie non "dritta"?

↳ come rettangolo, parallelepipedo



DOVE POSSO "PIASTRELLARE"?

↓

integrare

SU UN INSIEME MISURABILE, cioè un insieme che mi permette di calcolarne l'area

PS. calcolo di integrali multipli, non definizione!

- Integrale di linea

! Rappresenta il lavoro compiuto per portare un corpo da "a" a "b"

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

γ è la linea con $a \leq \gamma \leq b$ e F è un campo vettoriale

- Integrale di superficie (di funzione reale)

funzione continua

$$\int_G f = \int_{\underline{\underline{K}}} f(G(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du dv$$

Si dice $G: A \to \mathbb{R}^3$ superficie parametrica, il suo sostegno è $\Sigma = G(A)$ (in $\mathbb{R}^3$). PER QUANTO RIGUARDA INTEGRALE di SUP:

K è un COMPATTO di $\mathbb{R}^2$, il cui BORDO è il sostegno di una curva parametrica e $G: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare

- Flusso di un campo vettoriale F

$$\int_G F \cdot n = \int_K F(G(u,v)) \cdot N(u,v) \, du dv$$

è l'integrale di superficie dove " f è F, un campo e lo scalare avviene con il VETTORE NORMALE (non la sua norma) "

$$\boxed{\underline{NB} \quad N(u,v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial G}{\partial v}(u,v)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_3}{\partial u} \\ \frac{\partial G_1}{\partial v} & \frac{\partial G_2}{\partial v} & \frac{\partial G_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Parametrizzare delle curve

$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$
↑ dedotti dal grafico

- RETTA

$\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A))$

con $\gamma: [0,1]$ FISSO $\to \mathbb{R}^2$

- CIRCONFERENZA

verso antiorario

$\gamma(t) = (\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t)$

ρ ← raggio

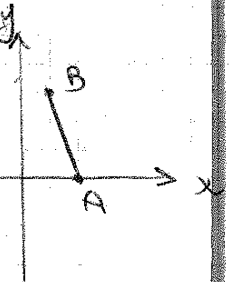
con $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
(se è tutta la circonf)

verso orario

$\gamma(t) = (\rho \cos t, -\rho \operatorname{sen} t)$

la retta va sempre parametrizzata così! $[0,1] \to \mathbb{R}^2$

es parametrizzare γ
$A(2,0)$ $B(1,3)$



$\overline{AB}$: $\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A))$
$= (2 + t(1-2),\ 0 + t(3-0))$
$= (2 - t,\ 3t)$

$\to \int_A^B F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \int_0^1 \dots dt$

- ELLISSE

$\gamma(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ con eq $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
↑ verso antiorario

$\gamma(t) = (-a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ con $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
↑ verso orario
(se è tutta l'ellisse)

- $\int \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = +\frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 (2\theta) \, d\theta$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(t - \operatorname{sen} t \cos t\right)\right)$

$= \frac{1}{8}\left(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta\right)$

NB $x^2+y^2+z^2 = R^2$ sfera

CAMBIANDO COORDINATE viene

$\rho^2(\underbrace{\ldots + \ldots + \ldots}_{=1})$

$= 1$ come per quelle polari di $\mathbb{R}^2$

conseguentemente

$= \int \rho^2(\underset{1}{\underset{\downarrow}{\ldots}}) \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

$= \int \rho^4 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

dove $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

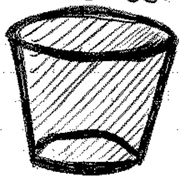
DUBBI e PERPLESSITÀ

- Integrale di linea con parametrizzazione γ che è bordo di superficie di $\mathbb{R}^3$

- Ricorda sempre la differenza tra

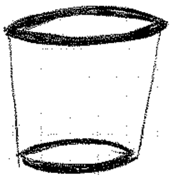
in viola i rispettivi bordi

* SOLIDO COMPLETO di $\mathbb{R}^3$



$\partial\Omega$ → interno

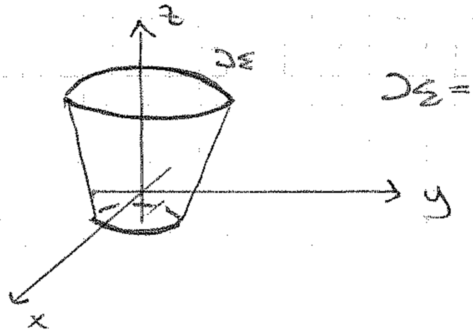
* SUPERFICIE di $\mathbb{R}^3$



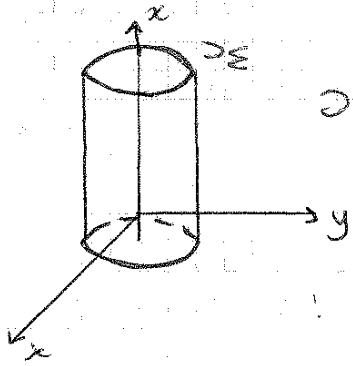
$\partial\Sigma$ → superficie

SUPERFICI

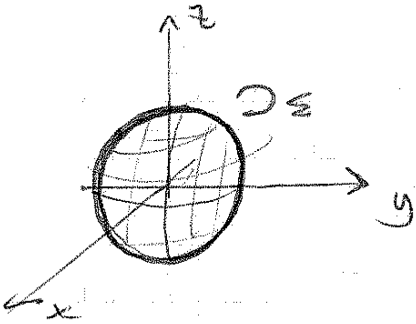
ATTENZIONE! per questo gruppo di figure, il bordo è questo: —



$\partial\Sigma = \gamma_1 + \gamma_2$



$\partial\Sigma = \gamma_1 + \gamma_2$



PERCHÉ stai PARLANDO di BORDO di SUPERFICIE, non di solido completo

scelgo P interno e sostituisco (x, y, z) vedo dov'è rivolto

NB fai attenzione al verso. se dice:

1. verso uscente (/entrante) rispetto a vettore normale fai così:

a) ti poni sull'asse di riferimento verso cui è posto il solido

Integrali di Linea
- PASSI DI SVOLGIMENTO -

1. F è continua? γ regolare a tratti?
2. Parametrizzazione di γ
   → DISTINGUI i casi

$\mathbb{R}^2$: $\gamma(t) = (x, y)$

$\mathbb{R}^3$: $\gamma(t) = (x, y, z)$
↓
γ parametrizza il bordo di una superficie Σ

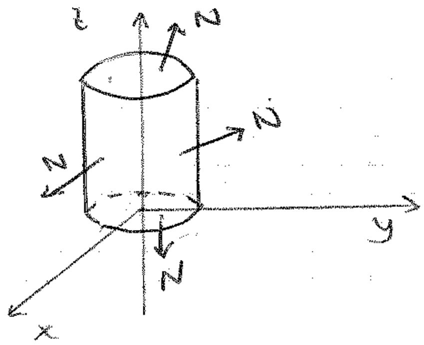
↓

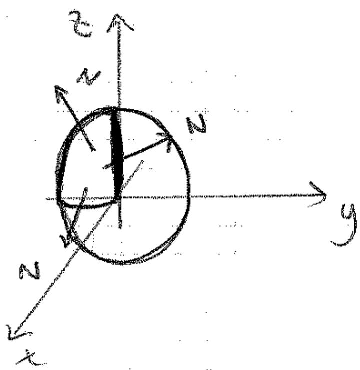
Attenzione al verso di percorrenza!

3. Sostituzione nella formula

- VERSORI NORMALI USCENTI

non ce n'è uno solo in tutto!
sono tanti e ti servono per capire il verso di percorrenza
perché ti devi disporre come loro per poi trovare
i punti interni alla tua sinistra





Uno per ogni faccia!
NB non contribuiscono sempre tutti!
dipende dal problema

- Insiemi dati dall'unione di due o più

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \ y \le \operatorname{sen} x \right\}$$

$z = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y^2$ sta per i fatti suoi, indica che l'integrale che voglio fare è di superficie

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y \le \operatorname{sen} x$

individuano un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$
→ come scriverlo nella forma

$$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dots, \ y = \dots \} ?$$

→ TROVI CASI
quando si verificano insieme $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y \le \operatorname{sen} x \end{cases}$?

$0 \le \operatorname{sen} x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$?

① **Sì** → $y \le \operatorname{sen} x$

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le \operatorname{sen} x \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

② **No** → $0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

questo caso ha le soluzioni "opposte"

↓

$$\begin{cases} 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{4} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

nel nostro caso π perché la condizione iniziale diceva $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Integrali di Superficie

- passi di svolgimento -

1. Chi è Σ? interessa il bordo di SUPERFICIE
2. Parametrizzo $G(x,y) : K \to \mathbb{R}^3$
   ↓
   attenzione ai dati del problema
3. Scrivo il compatto K e calcolo $N(x,y) = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \times \frac{\partial G}{\partial y}\right)$
4. Uso formula

Integrali di Flusso

- passi di svolgimento

1. chi è D? com'è fatto?
   ↳ un INSIEME
   ↓
   interessa il BORDO di un INSIEME
2. Parametrizzo $G(x,y) : K \to \mathbb{R}^3$
   $= (x, y, z)$

   NB può accadere che non sia sempre $z = f(x,y)$! → negli altri casi ti riferisci ai cambi di coordinate!
3. Riconoscimento di K e calcolo di $N(x,y)$
4. Formula

es $G(\theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ ($\rho = 1$)

NB Scrivi TUTTI i passaggi e le relative FORMULE!

Uso del Teorema di Green

- Solo su $\mathbb{R}^2$ quando γ parametrizzo il bordo di un insieme

$$\int_{\gamma=\partial A} F\cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy$$

- Se il bordo è formato dall'unione di più curve, fregatene: l'importante è che F sia C^1, in tal caso puoi ancora usare Green

NB Con la definizione avresti

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP$$

Con Green NON consideri la SEPARAZIONE di γ

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy$$

una volta definito $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dots\}$
calcoli l'integrale
doppio ed è OK

Uso del teorema di Gauss

- Solo su $\mathbb{R}^3$, per calcolo del FLUSSO di un CAMPO

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$\partial D \downarrow$ BORDO di un INSIEME!

dove $\operatorname{div} F(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$.

→ Ricorda anche che una proprietà dei campi conserv. permette il calcolo di un integrale di linea.

PS In genere l'es fornisce

$$F(x, y \dots)$$
$$\gamma(t) \qquad \Big\} \text{ ma } \gamma \text{ non è il bordo di } \Sigma$$
$$[a, b]$$

poiché $\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

dove f è <u>UN POTENZIALE</u>

↳ <u>devi</u> cercarlo con il metodo delle INTEGRAZIONI INDEFINITE

PROPRIETÀ dei CAMPI CONSERVATIVI

- L'INTEGRALE di LINEA non DIPENDE dal percorso

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

inoltre $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso per archi, dire

① F CONSERVATIVO

② $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

③ $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

è la stessa cosa: le tre affermazioni sono equivalenti

CONDIZIONI di CONSERVATIBILITÀ

- CONDIZIONE NECESSARIA

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1

Se F è conservativo, allora $\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$

Se non vale quella condizione, F NON è conservativo

- CONDIZIONE SUFFICIENTE

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Ω è semplicemente connesso

SERIE NUMERICHE

Si dice <u>serie di a_n</u>, la scrittura $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Si di <u>SOMMA PARZIALE</u> di a_n, la scrittura S_n dove

$$S_n = S_{n+1} - a_n$$
$$= S_{n-1} + a_n$$

Ciò che interessa è trovare la

1. <u>CONVERGENZA</u> se $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
2. <u>DIVERGENZA</u> se $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

!

3. <u>INDETERMINATEZZA</u> se non esiste $\lim_{n\to\infty} S_n$

dove $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$

Alcune serie NOTEVOLI da ricordare

- serie <u>GEOMETRICA</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1<a<1 \\ \text{diverge } + & \text{se } a\geq 1 \\ \text{indeterm.} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

- Serie <u>ARMONICA</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p>1 \\ \text{diverge}+ & \text{se } p\leq 1 \end{cases}$$

CRITERI di CONVERGENZA

- PER TUTTE le SERIE

a) Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge, elimina o modifica un numero finito di termini

NB può cambiare la SOMMA PARZIALE (S_n) !

b) Valgono le stesse proprietà dei limiti di successione

es converge + diverge = diverge
converge + converge = converge
λ converge = converge
[...]

CONDIZIONE NECESSARIA (per convergenza)

$$\boxed{\text{se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge allora } \lim_{n} S_n = 0}$$

NON vale il viceversa.

Va da sé che se $\lim_{n} S_n \neq 0$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge

D'ora in avanti i criteri proposti sono da considerarsi in aggiunta a quelli di questa pagina.

PS la condizione necessaria è sempre da verificar perché dà un'informazione importante (se il calcolo del limite è rapido)

Per gli altri casi, si usano altri criteri.

se non converge?
Essendo a termini positivi può solo divergere
(per il caso "~")

③ CRITERIO ~~della~~ RADICE

↳ si applica nel caso la serie presenti degli esponenti, del tipo $\Sigma [\ldots]^n$

Si suppone che esista $\boxed{\lim_n \sqrt[n]{a^n} = \ell}$ con $\ell \geq 0$ op $+\infty$

- Se $\ell < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- Se $\ell > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Se $\ell = 1$ non si sa → cambia metodo

④ CRITERIO del RAPPORTO

↳ si applica in presenza di fattoriali

Si suppone che esista $\boxed{\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell}$ con $\ell \geq 0$ op $+\infty$

- Se $\ell < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- Se $\ell > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

proprio come per la "radice"

Se $\ell = 1$ non si sa → cambia metodo

⑤ CRITERIO di McLAURIN (che schifo di criterio)

Sia $f(n) = a_n$ con $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa e decrescente.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

SERIE di FUNZIONI

Analogamente alle serie di numeri reali, si introducono quelle relative alle funzione.

Si dice serie di funzioni $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}$ → dipende da una variabile

e S_n la relativa SOMMA PARZIALE.

NB $\boxed{\text{Si noti che se } f_n(x) = \text{costante, esso è uguale al } a_n \text{, dunque SERIE f REALI = SERIE f}}$

Richiamando le nozioni delle successioni di funzioni, si definiscono:

- CONVERGENZA PUNTUALE se $\lim_n |S_n(x) - f(x)| = 0$ ($S_n(x) \leftrightarrow f_n(x)$ per successioni di funzioni ✓)
- CONVERGENZA ASSOLUTA se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente
- CONVERGENZA UNIFORME se $\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0$ ($S_n \leftrightarrow f_n$ per successione di funzioni ✓)

  con $\|S_n - f\|_\infty$ = norma infinito di S_n $= \sup (S_n(x) - f(x))$

- CONVERGENZA TOTALE se converge $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ *

NB Per le funzioni costanti (= serie numeriche)

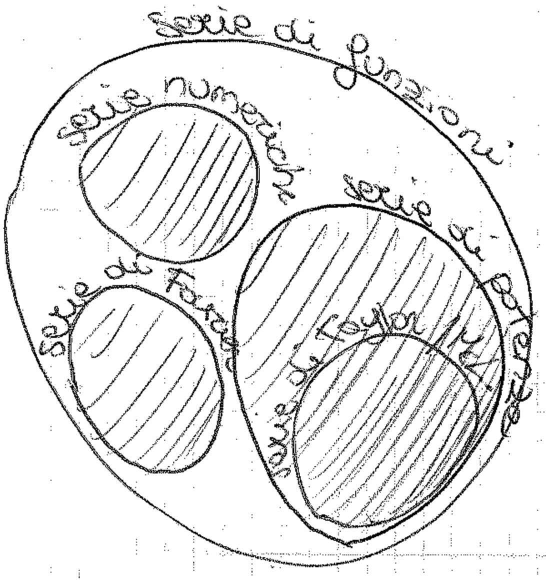
CONVERGENZA UNIFORME ⟷ CONVERGENZA PUNTUALE

CONVERGENZA TOTALE ⟷ CONVERGENZA ASSOLUTA

Ricorda

es $\frac{(-1)^n}{n}$	$\frac{x^n}{n}$	x^n
SERIE NUMERICA	SERIE di FUNZIONE	SUCCESSIONE di FUNZIONI
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	Non è una SERIE
		NON HA ! $\cancel{\sum_{n=0}^{\infty}}$!

NB



- Quando ci sono sen, cos etc e va studiata la CONVERGENZA ASSOLUTA ricorda che

$$\boxed{|\operatorname{sen}(\dots)| \le 1}$$

NB

Ricorda

Limite Notevole (Analisi I)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

NB $$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2} =$$

$$\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\right)^{n} = e^{-3 \lim_n n} = 0$$

! Per vedere se hai studiato bene il carattere della serie, sostituisci un po' di valori e vedi che fa!

Ricorda

Alcuni casi particolari potrebbero richiedere lo sviluppo in serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} \qquad \text{NB } \operatorname{sen}(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + o(\alpha^3)$$

PS Quando passi alle funzioni associate (per verificare con Leibniz il punto 2), ricordati che

$\sum_{n=1}^{\infty}$ allora f è decrescente $\forall x \ge 1$

$\sum_{n=28}^{\infty}$ " " $\forall x \ge 28$ etc

TEOREMI per calcolare R

- teorema della RADICE

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$$

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

- teorema del RAPPORTO

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in [0, +\infty]$$

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

NB In entrambi i casi se i limiti non esistono, non si può concludere nulla

TEOREMI FONDAMENTALI

- DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

$\forall x \in (-R, R)$ $\quad D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

dove entrambe le serie di potenze hanno STESSO $R \in [0, +\infty]$

- INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE

$\forall x \in$ all' intervallo di convergenza

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

- Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze

TEOREMA

con $\begin{cases} 0 < R < +\infty \quad e \\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases} \quad \forall x \in (-R, R)$

allora f è analitica in $x_0 = 0$ (nel centro) e il suo sviluppo di McLaurin è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

verificare che sono C^∞

SERIE di TAYLOR "notevoli"

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$f(x) = \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

pari / dispari

$R = +\infty$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

→ è dispari ma non ha il fattoriale

$R = 1$

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

dall'analisi I era: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

NB $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ → presenta diversi casi al variare di α

- CONVERGENZA QUADRATICA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{continua a tratti in } [-\pi, \pi] \\ \text{di periodo } 2\pi \end{cases}$

converge a

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 \, dx = 0$$

- CONVERGENZA PUNTUALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{continua a tratti in } [-\pi, \pi] \\ \text{di periodo } 2\pi \end{cases}$

Se esistono le pseudoderivate (destra e sinistra) la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

e se è continua in x_0, a $f(x_0)$

- CONVERGENZA UNIFORME

(a tratti)

Ipotesi come prima
La serie converge uniformemente in ogni intervallo $[-k, k] \subseteq (\alpha, \beta)$ se f è C^1 in (α, β)

Se è C^1 a tratti in $[-\pi, \pi]$, allora converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

NB I tre tipi di convergenza dipendono solo da f: non è fondamentale conoscerne la serie.