



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1000

DATA: 01/07/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Elementi di Fisica Nucleare + Eserc.

Prof. Lavagno

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Introduzione

Per fisica moderna si intende tutto ciò che segue alle equazioni di Maxwell.

Un'onda è caratterizzata da lunghezza d'onda e frequenza!

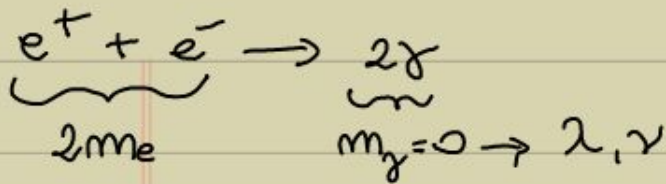
$\lambda v = c$ con c velocità della luce nel vuoto.

Le eq. di Maxwell ci dice anche nel mezzo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

L'onda e.m. porta un'energia, e ciò è legato alla sua natura corpuscolare. Questa energia è direttamente proporzionale alla FREQUENZA. Nel sistema e' energia è legata alla costante di Planck $\rightarrow E_f = h\nu$ (effetto fotoelettrico)

La scoperta degli effetti quantistici ha reso possibile un'interpretazione più corretta della realtà fisica (fenomeni microscopici), si è scoperto che le particelle subatomiche rispondono a leggi quantistiche (comportamento



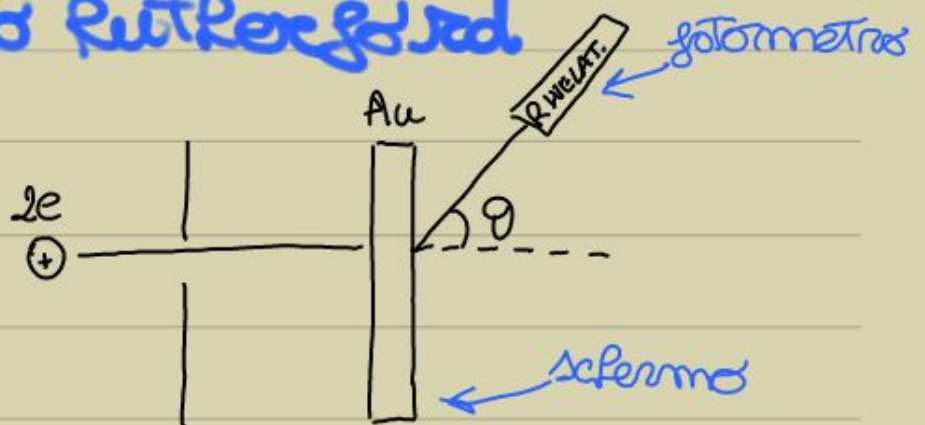
Si ottiene qualcosa senza massa, la massa viene convertita in ENERGIA ELETTROMAGNETICA (viene detta ANNICILIAZIONE), avviene per la conservazione dell'energia:

$$\Delta M \leftrightarrow \Delta E_K \quad (\text{equivalenza MASSA-ENERGIA})$$

è un effetto quantistico! Abbiamo una variazione di massa, che corrisponde ad una variazione di energia cinetica.

- Esame con teoria e esercizi, sede facoltativa.

Esperimento Rutherford



Permise di chiarire la struttura atomica e la massa del nucleo. Il primo modello fu quello di Thompson, dove venne definito il

grandi, addirittura tornano indietro!
 Quindi la deflessione non è uniforme
 e variare di θ , infatti alcune particelle
 (pochissime) tornano indietro colpendo un
 "muro", oltre l'angolo traiettoria rettilinea
 (non incontrano ostacoli), quindi deve
 esserci una regione di materia CONCENTRATA
 corrispondente al nucleo.

Analizzando statisticamente il numero di
 particelle deflesse totalmente o no, si può
 stimare la dimensione del nucleo.

$$\text{Se } d_A \approx 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 1 \text{ \AA} \text{ (ATOMO)}$$

$$d_N \approx 10^{-14} \text{ m} = 10^{-12} \text{ cm} \quad \text{(NUCLEO)}$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-13} \text{ cm}$$

1 fermi

Quindi la materia è concentrata in
 una dimensione dell'ordine del Fermi,
 il resto è SPAZIO VUOTO. Il nucleo ha

dimensione 4 ordini di grandezza inferiore
 alla dimensione totale dell'atomo!

Le particelle α possono essere identificate

altro, servono le TRASFORMATE DI GALILEO.

Si consideri un treno che si muove a velocità costante \vec{u} ; una persona sul treno lancia una palla con velocità \vec{v}' rispetto al treno. Una persona a terra vede la palla con velocità:

$$\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u} \quad \text{ipotizzando } \vec{v}' = v' \hat{u}_x, \quad \vec{u} = u \hat{u}_x$$

Si scelgono due sistemi di coordinate che, a $t=0$, coincidono nell'origine in $x_0 = x'_0 = 0$.

$$\vec{V} = \vec{v}' + \vec{u}$$

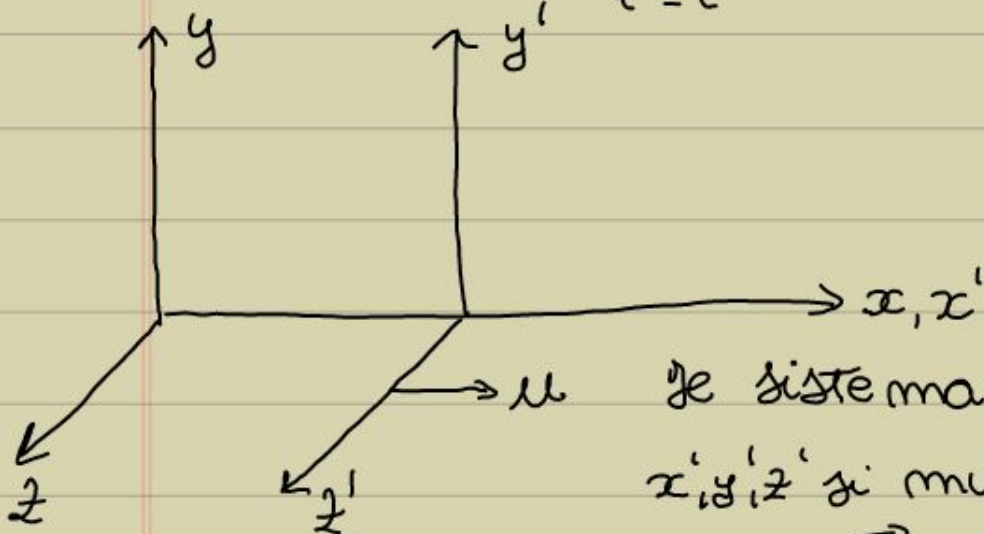


$$V_x = v'_x + u_x \qquad x = x' + ut$$

$$V_y = u_y = 0 \qquad y = y'$$

$$V_z = u_z = 0 \qquad z = z'$$

$$t' = t$$



Il sistema di rif. x', y', z' si muove con velocità \vec{u} rispetto al sistema x, y, z .

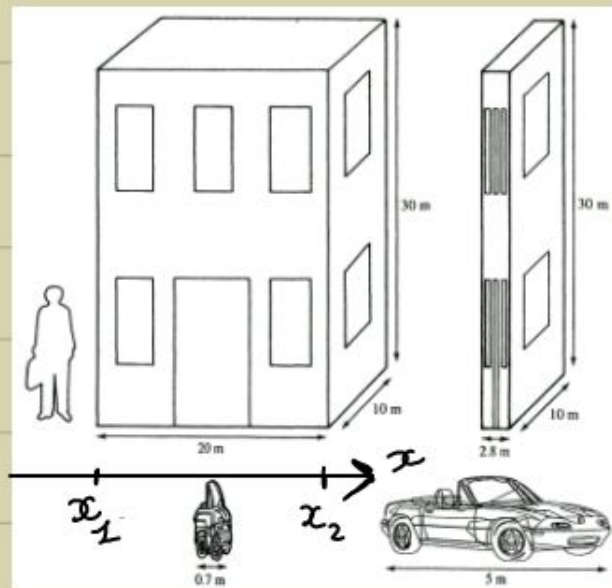
essere visualizzata una figura di interferenza sullo schermo se ci fosse differenza di fase tra i due raggi (questa differenza sarebbe dovuta al cammino ottico, infatti una delle due direzioni è concorde al moto della terra, e di conseguenza in quella direzione il cammino avrebbe lunghezza diversa).



Tuttavia, Michelson e Morley non notarono alcuna differenza di cammino ottico nella figura di interferenza né con il movimento della Terra concorde al moto dell'aria, né discorde. Ne consegue

che la luce è un ONDA E-M che non richiede alcun mezzo di propagazione!

sarà visto con una delle sue 3
 • dimensioni "contratta", ovvero un
 oggetto in moto risulta contratto
 rispetto che in quiete (CONTRAZIONE
 DELLE LUNGHEZZE), solo nella direzione
 del moto! Per misurare questo effetto,
 si consideri un osservatore fermo all'angolo
 di una strada, e una macchina
 che si muove a velocità prossima a quella
 della luce:



L'osservatore vede la lunghezza in
 direzione x come $L_B = x_2 - x_1$. Un osservatore
 nell'auto vede la stessa lunghezza come
 $L'_B = x'_2 - x'_1$. Per calcolare questa lunghezza,
 dobbiamo calcolare x'_2 e x'_1 allo stesso

$\Delta t = t_2 - t_1$ tra due ticchettii, otteniamo con le trasformate di Lorentz:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t_2' - t_1' = \left(t_2 - \frac{ux_2}{c^2}\right)\gamma - \left(t_1 - \frac{ux_1}{c^2}\right)\gamma = \\ &= \left(t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}[x_1 - x_2]\right)\gamma \quad (\text{visto dal sistema } x')\end{aligned}$$

ma $x_2 = x_1$ perché l'orologio è fermo!

$$\Delta t' = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t$$

Quindi ne consegue che il tempo scorre più lentamente per un osservatore nel sistema di riferimento in movimento. Il tempo si DILATA (rallenta) per chi è nel sistema di riferimento dell'auto, rispetto a chi è fermo sul marciapiede.

- Come ultime equazioni della cinematica, sulla velocità dei due sistemi di riferimento che si muovono relativamente con velocità u , nella direzione x :

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{V_x \cdot u}{c^2}}, \quad V_y' = \frac{V_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{V_x \cdot u}{c^2}}$$

$$V_z' = \frac{V_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{V_x \cdot u}{c^2}}$$

e poi vengono catturati dall'atmosfera terrestre. Il termine raggi non è corretto, infatti queste particelle arrivano singolarmente e non in fasci come i raggi.

Possono essere di due tipi:

- 1) PRIMARI → generati da sorgenti extragalattiche
- 2) SECONDARI → generati da interazioni tra i raggi primari e il mezzo interstellare.

I raggi cosmici sono particelle relativistiche ad alta energia, quella da noi misurabile arriva fino a 10^{13} eV.

Come si distribuiscono nell'atmosfera?

35 Km slm → inizio atmosfera, prime interazioni protoni-nuclei dell'aria

20 ÷ 35 Km slm → avvengono processi, con presenza prevalente di protoni e nuclei, i PIONI decadono dando vita ai MUONI, a elettroni e raggi γ .

5 ÷ 20 Km slm → elettroni e raggi γ si convertono gli uni negli altri, moltiplicandosi

• Perché rappresentiamo un'evidenza importante?

Vengono generati a circa $L = 10^4$ m nell'atmosfera, serve un tempo:

$$T = \frac{L}{v} = 34 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 21,8 \cdot \tau_0$$

per arrivare al suolo, con $\tau_0 = 1,56 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ e' la VITA MEDIA dei muoni nel sistema di riferimento a riposo. Si ricava il rapporto di sopravvivenza:

$$\frac{I}{I_0} = 0,27 \cdot 10^{-6} \rightarrow \text{secondo la meccanica classica, solo } 0,3 \text{ muoni su}$$

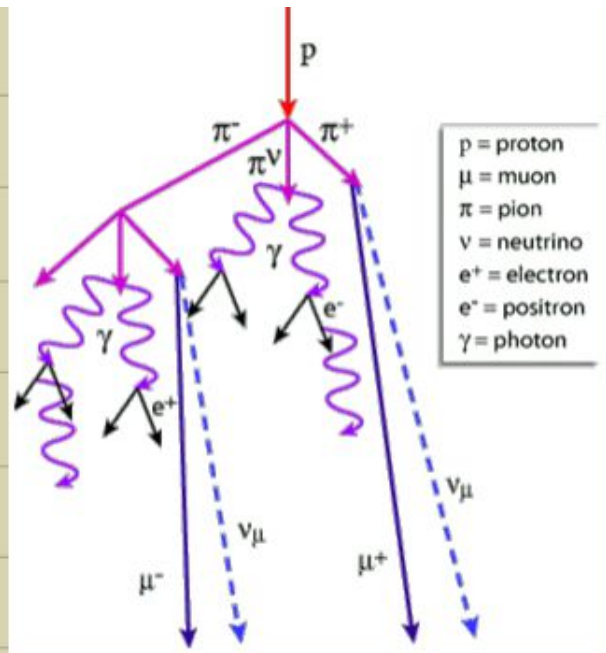
1.000.000 arriverebbero sulla Terra, e cio' e' negato dall'evidenza!

Usando la teoria relativistica della dilatazione dei tempi, il tempo di vita medio visto dall'osservatore a riposo e':

$$\tau = \gamma \tau_0 \text{ con } \gamma = 5$$

Il tempo di arrivo puo' essere scritto con τ :

$$T_T = \frac{L}{v} = 34 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4,36 \cdot \tau$$



Dynamic relativistica

È fondamentale nei fenomeni subatomici (soprattutto nel principio massa-energia). Abbiamo visto che la legge di Newton è invariante, mentre la velocità dipende nel moto descritto dalle trasformazioni di Lorentz. Quindi le grandezze fondamentali:

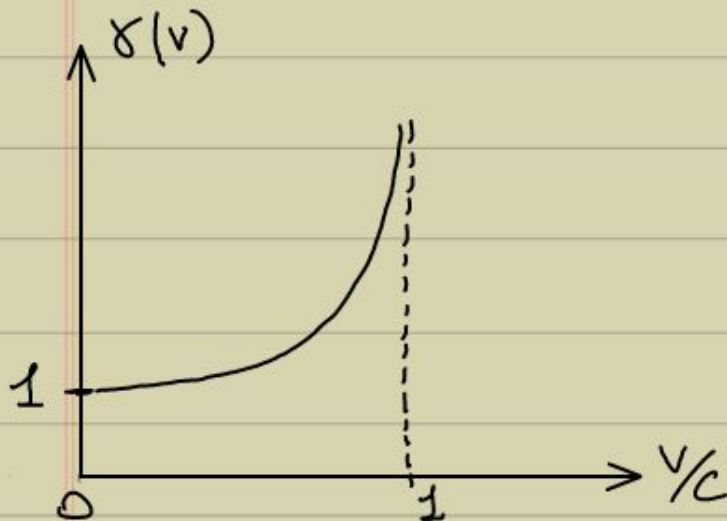
$$\left. \begin{aligned} E_k(v) &= \frac{1}{2} m v^2 \\ \vec{P}(v) &= m \vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_k(\vec{P}) = \frac{P^2}{2m} \quad \begin{array}{l} \text{dipendano} \\ \text{dalla} \\ \text{velocità} \end{array}$$

Abbiamo visto che se $\frac{v}{c} \ll 1$ non serve l'approccio relativistico, qui però tale limite non è soddisfatto. Inoltre qui vedremo una totale differenza tra stato iniziale e finale (decadimento). Qui entra in gioco il principio di scomparsa della massa presente allo stato iniziale, e della comparsa di pura energia nello stato finale. Einstein postulò l'esistenza di un'energia più complessiva, non puramente cinetica, che possa essere proporzionale alla

Si arriva a coprire:

$$\beta(v) = \gamma(v) = \gamma(v) !$$

La funzione cercata è $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
che fa l'fondamento;



Quindi l'energia:

$$\begin{cases} E = \gamma(v) mc^2 \\ \vec{p} = \gamma(v) m\vec{v} \end{cases}$$

Equazioni fondamentali
della dinamica relativistica

Si nota che l'energia si può anche scrivere $E = m(v)c^2$, con $m(v) = m\gamma(v)$ infatti la massa non è quella costante a basse velocità della dinamica newtoniana, ma è una massa DINAMICA, nel sistema di riferimento della particella. La "m" normale è nel sistema di riferimento a riposo

$$\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}_{\gamma(v)} \approx 1 - \alpha x + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

È del tipo $(1-x)^\alpha$! Quindi:

$$\lim_{\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0} K_R(v) = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right] = \frac{1}{2} mv^2$$

coincide giustamente con la funzione dell'energia cinetica non relativistica, cioè nel limite $\frac{v}{c} \ll 1$!

Abbiamo così visto le 3 relazioni fondamentali della dinamica relativistica.

- In una generica reazione da stato iniziale a finale: $i \rightarrow f$

$$E_i = E_f$$

$$m_i c^2 + K_i = m_f c^2 + K_f$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Rispetto al caso classico si tiene conto della variazione di MASSA.

$$(m_i - m_f) c^2 = K_f - K_i = Q$$

"Q" ci dice se la reazione può avvenire SPONTANEAMENTE (ad es. decadimento radioattivo) ($Q > 0$) o se è necessario fornire energia ($Q < 0$)

Com vari passaggi [sottrazione membro a membro di 1) e 3)]

$$p_c^2 c^2 = K^2 + 2mc^2 K$$

è l'espressione cercata, è quadratica!

Si nota che se $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow K \ll mc^2$, si ottiene l'espressione classica dell'energia cinetica.

- Invece se $K \gg mc^2 \Rightarrow p_c^2 c^2 \approx K^2$ ($m \neq 0$)
 $K \approx pc$ (regime ULTRARELATIVISTICO)
- Sostituendo ancora nell'equazione sopra, troviamo che:

$$K = E - mc^2$$

$$p_c^2 c^2 = K^2 + 2mc^2 K = E^2 + m^2 c^4 - 2Emc^2 + 2Emc^2 - 2m^2 c^4$$

$$E^2 = p_c^2 c^2 + m^2 c^4, \quad E = \pm \sqrt{p_c^2 c^2 + m^2 c^4}$$

che è un'espressione quadratica dell'energia in funzione della quantità di moto.

Qual'è il significato della soluzione negativa?

Ha un significato fisico negli stati energetici della materia, lo vedremo.

- Quantifichiamo la velocità di una particella, dividendo le due eq. fondamentali:

$$E = \gamma(v) mc^2, \quad \vec{p} = \gamma(v) m \vec{v}$$

Effetto fotoelettrico

Chiarisce il concetto di $m=0$. Oggi questo effetto è usato in moltissime applicazioni! Una sorgente di luce incide su una parte metallica (una luce a freq. sufficiente), vengono strappati degli elettroni dal metallo. Questo si nota sperimentalmente collegando un circuito con amperometro alla targa metallica. L'effetto fotoelettrico è proprio questa sottrazione di elettroni!

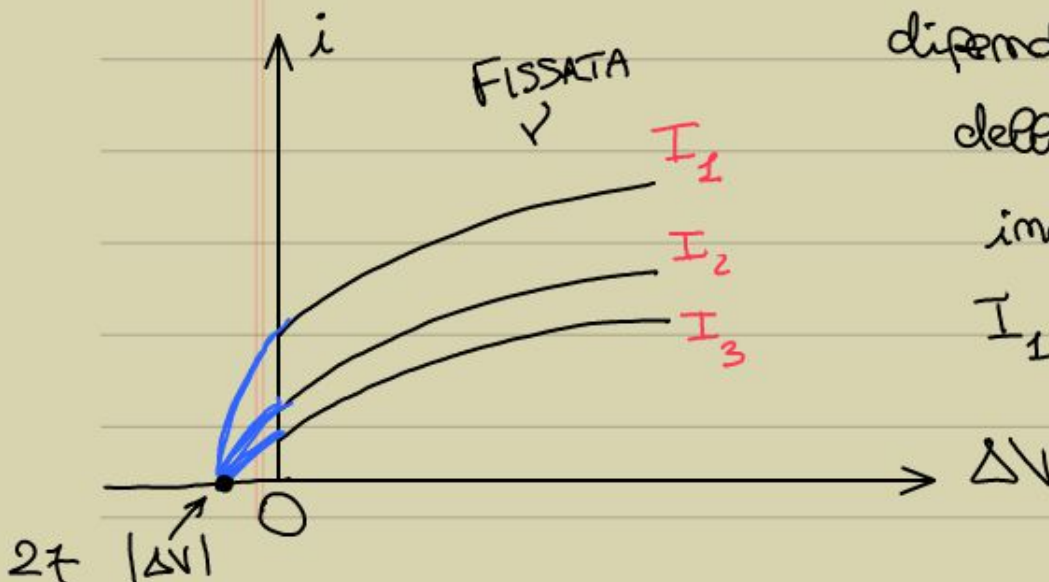


Con la batteria acceleriamo gli elettroni, e l'amperometro rileva la corrente generata.

La corrente generata

dipende dall'INTENSITA' della radiazione incidente!

$$I_1 > I_2 > I_3$$



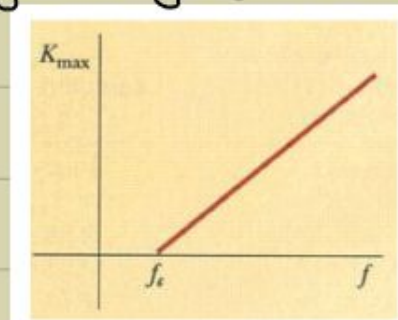
avviene solo per certi valori in FREQUENZA,
cioè avviene per $\nu > \nu_0$!

Per ogni valore di $\nu > \nu_0$ per cui avviene
l'effetto fotoelettrico, si fa una specifica
 $K_{i\text{MAX}}$, e quindi una specifica ΔV !

In particolare:

$$\text{se } \nu_1 > \nu_2 \Rightarrow K_{\text{MAX}}^{(\nu_1)} > K_{\text{MAX}}^{(\nu_2)}$$

- Questo effetto di dipendenza solo dalla
frequenza e non dall'intensità, è
spiegabile in termini di energia cinetica:
Prendiamo una sorgente a ν_1 , e calcoliamo
 $K_{\text{MAX}}^{(e)}$, facciamo lo stesso per una sorgente a
 $\nu_2 > \nu_1$, e così via per varie frequenze.
Graficando e unendo i punti, si ottiene una
retta con una "frequenza soglia" che
obteniamo chiamato ν_0 , per cui NON passa
corrente e non c'è effetto fotoelettrico.
Si nota che $K_{\text{MAX}} \propto \nu$!



metalli colpiti dai fotoni ricevono la loro
energia cinetica, vengono "saltati" dagli orbitali
e iniziano a fluire dando la corrente.
E' quindi un urto relativistico!

Questo spiega perché l'energia cinetica
massima non dipende dall'intensità, ma
solo dalla FREQUENZA, perché l'energia
trasportata dai fotoni dipende solo dalla
frequenza con la relazione vista.

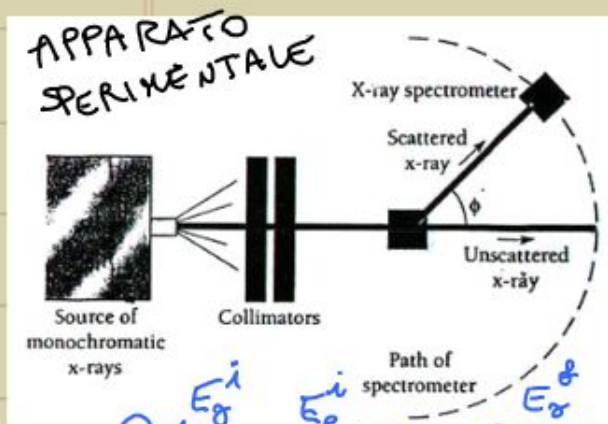
Effetto Compton

In un suo esperimento, Compton fece
incidere dei fotoni in banda X su un
bersaglio; dopo l'incidenza dell'onda si
osservano due petti di emissione, uno
ha la stessa frequenza f_0 della radiazione
incidente (modello classico), l'altro ha
invece frequenza f' minore (modello
quantistico);

secondo il modello classico gli elettroni
del bersaglio dovrebbero essere colpiti dai

come se l'energia persa nella collisione del fotone, venisse acquisita dall'elettrome come energia cinetica.

Quanto vale quindi la differenza di lunghezza d'onda tra il fotone incidente e il fotone diffuso? In termini classici,



vale la conservazione di energia e quantità di moto, per cui possiamo scrivere:

$$E_\gamma^i + E_e^i = E_\gamma^s + E_e^s \implies$$

$$\implies h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu' + m_e \gamma(v) c^2 \quad (\text{CONS. ENERGIA})$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \quad \left. \begin{array}{l} \text{composizione} \\ \text{sugli assi} \end{array} \right\} \frac{E}{c} = \frac{E'}{c} \cos\theta + p_e \cos\phi \implies \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + p_e \cos\phi$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta - p_e \sin\phi, \quad \text{con } p_e = m_e \gamma(v) v$$

Si sono quindi scritte le due quantità in termini relativistici. Inoltre, con alcuni passaggi si arriva a definire la differenza tra le lunghezze d'onda:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

λ' fotone scatterato
 λ_0 fotone incidente
 λ_c lunghezza d'onda Compton, dell'elettrome colpito

Spettro delle onde elettromagn.

Abbiamo visto la natura corpuscolare della luce, si può vedere come la sovrapposizione di corpuscoli di massa $m=0$, ognuno con una sua energia e quantità di moto. ($E_{\gamma} = hf$, $p_{\gamma} = \frac{E}{c}$).

La quantità di moto è legata quindi alla frequenza/lunghezza d'onda, e' una grandezza corpuscolare.

Un'onda elettromagnetica e' la luce!

L'ottica geometrica vale se l'onda si propaga in un mezzo per diffusione.

Tutte le leggi valgono per il limite

$d \gg \lambda$, con d larghezza della fenditura.

Se invece $\lambda \approx d$ non vale l'ottica geometrica ma quella ondulatoria (leggi della diffrazione, interferenza..)

INTERFERENZA

Due onde generiche si propagano:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

quadrato dell'ampiezza risultante!

L'intensità totale è proporzionale a:

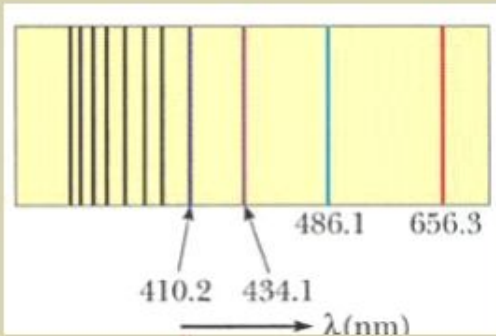
$$I_{\text{TOT}} \propto A'^2$$

quindi al quadrato dell'ampiezza risultante.

DIFFRAZIONE

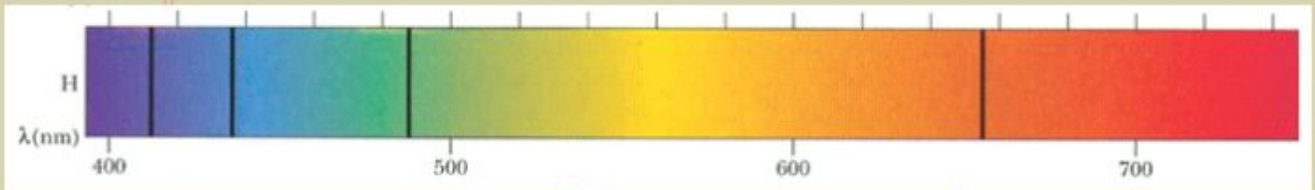
Nel caso di questa di Fraunhofer si hanno distribuzioni di massimi secondari e principali di intensità, sempre con lo stesso criterio dell'interferenza (quadrato dell'ampiezza risultante, che non è la somma algebrica).

Le applicazioni del reticolo di diffrazione sono sempre le stesse, calcolare λ a partire dai dati sperimentali, quindi si possono identificare gli atomi di un gas che emette radiazioni con λ tipica.



Spettro di emissione dell'atomo di Idrogeno.

Spettro di assorbimento di H



Modello di Bohr per l'Idrogeno

Fu proposto nel 1913 sui seguenti punti:

- 1) L'elettrone si muove su orbite circolari attorno al protone, sotto l'azione coulombiana.
- 2) Solo certe orbite sono stabili, su queste orbite l'elettrone non emette energia sotto forma di radiazione. Le orbite permesse sono tali per cui il momento angolare orbitale dell'elettrone rispetto al nucleo risulta essere un multiplo di h :

$$m_e v r = n \hbar$$

i momenti angolari variano solo per valori discreti ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$)

- 3) L'atomo di H emette o assorbe radiazione quando l'elettrone passa da uno stato iniziale a uno finale con diversa energia. La frequenza

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r}$$

usando $\vec{F} = m\vec{a} = m_e \frac{v^2}{r}$ (moto circolare, solo componente normale)
 $m_e \frac{v^2}{r} = k_e \frac{e^2}{r^2}$ (l'unica forza agente è quella elettrostatica)

$$m_e v^2 = k_e \frac{e^2}{r}$$

Quindi l'energia cinetica risulta essere la metà dell'energia potenziale! Quindi possiamo riscrivere:

$$E = \frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r} - k_e \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r}$$

Sostituendo il raggio:

$$E = -\frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{\frac{m^2 r^3}{m_e k_e e^2}} = -\frac{1}{2} \frac{k_e^2 e^4 m_e}{m^2 r} = -\frac{13,606 \text{ eV}}{n^2}$$

energia di 1^a ionizzazione

Sempre per $n = 1, 2, 3, \dots$ l'energia diminuisce!
 Il termine costante per l'atomo di idrogeno rappresenta l'energia di prima ionizzazione, cioè l'energia necessaria per estrarre un elettrone dallo stato fondamentale. Se $n \rightarrow \infty$ si hanno i cosiddetti STATI DEL CONTINUO l'elettrone è praticamente "libero" con una bassissima energia di legame (metalli).

Raggi X

Sono la parte dello spettro elettromagnetico con frequenza e lunghezza d'onda oltre il visibile. Scoperti da Röntgen, e accelerati in un tubo a vuoto possono attraversare il corpo umano.

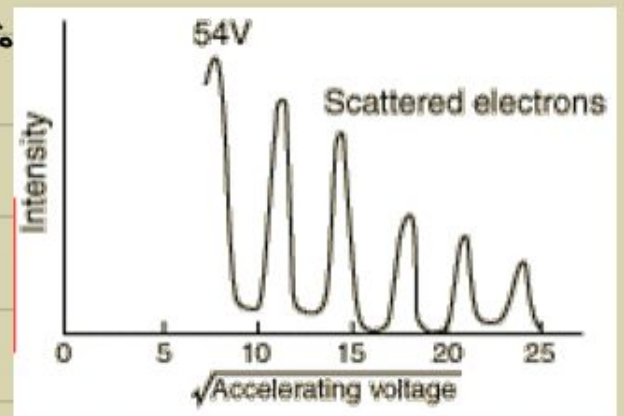
Sono applicati anche nello studio dei materiali, infatti i cristalli si comportano come reticoli di diffrazione. Grazie alla diffrazione si riesce a individuare i tipi di reticoli cristallini!

Onde di materia - De Broglie

Oltre alla luce, con corpuscoli di massa $m_0 \neq 0$, anche la materia con $m_0 \neq 0$ può avere natura ondulatoria, e viaggia con velocità $v < c$. Si avranno naturalmente energia e quantità di moto nelle loro espressioni non relativistiche. La natura ondulatoria della luce fare

come la luce nel reticolo di diffrazione!
 Elettroni e luce producono la figura di diffrazione. Si può quindi calcolare la lunghezza d'onda partendo dalla posizione di massimi e minimi sulla figura di diffrazione, tramite la legge di Bragg. La λ calcolata coincide da quella postulata da De Broglie!

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$



Nel grafico si vede l'intensità in funzione della tensione accelerante.

Quindi, così come la relazione relativistica $p = \frac{E}{c}$ passa la natura ondulatoria a quella corpuscolare, la relazione di De Broglie passa dalla materia all'onda!

- Come applicazione di questa scoperta abbiamo il microscopio elettronico! Per il

- Facciamo l'esperimento di Young con una sola delle due fenditure aperte; non si ha interferenza! La densità di probabilità di trovare elettroni sullo schermo sarà Gaussiana. Aprendo solo l'altra fenditura otteniamo una analogo distribuzione.

Se la natura fosse solo corpuscolare, con entrambe le fenditure aperte la distribuzione sarebbe la somma delle

probabilità in ampiezza:

$$P_1 = |\Psi_1(x)|^2 \quad (\text{Probabilità dell'elettrone della fenditura 1})$$

$$P_2 = |\Psi_2(x)|^2 \quad (\text{" " " 2})$$

Ci si aspetta che la probabilità totale sia la somma, invece non è così!

$$P \neq |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 \neq P_1 + P_2$$

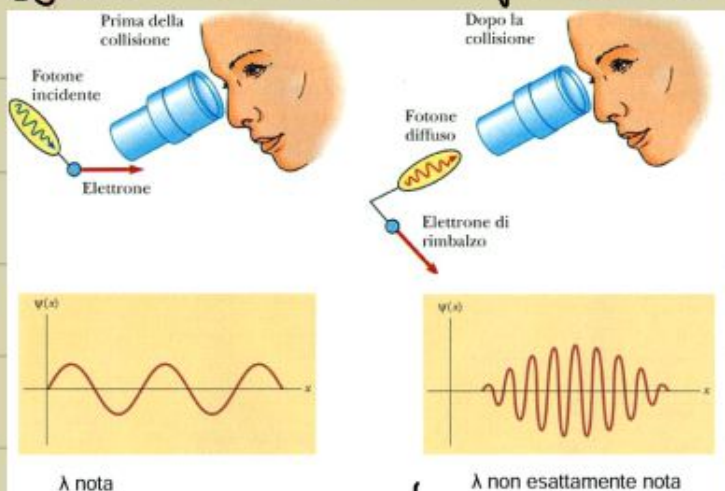
Due eventi non sono statisticamente indipendenti! La distribuzione P è quindi fatta così, con massimi e minimi!

Si può dire che la probabilità sta
 dell'intensità delle onde e.m.!

$$I \propto E^2 \propto N \rightarrow N \propto E^2$$

con N numero di fotoni che attraversa
 l'area nell'unità di tempo.

- Se guardassimo l'elettrone nella fenditura, il nostro apparato strumentale avrebbe delle difficoltà a rilevarlo; un fotone colpisce l'elettrone, come nell'effetto Compton, e il fotone diffuso colpito arriva alla strumentazione dicendoci la posizione dell'elettrone. Ma il fotone diffuso ci dà imprecisione sul risultato!



Se osserviamo l'elettrone e ne conosciamo
 la posizione, sarà impossibile sapere λ

Il principio di indeterminazione sulla posizione/quantità di moto si può spiegare come visto prima, osservando la posizione dell'elettrone in un dato momento, non possiamo conoscere con esattezza la lunghezza d'onda (abbiamo una grossa incertezza), e quindi non possiamo conoscere con esattezza la quantità di moto.

In termini matematici:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

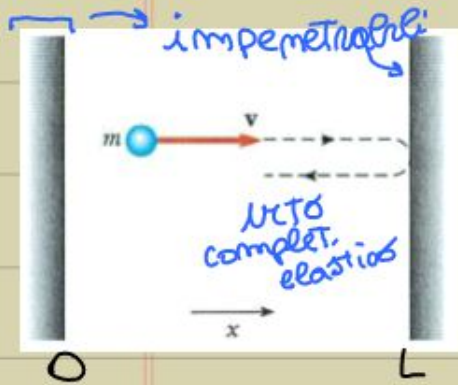
Le due grandezze sono quindi inversamente proporzionali. Il caso migliore di misurazione sull'incertezza è quando il prodotto $\Delta x \Delta p_x = \frac{h}{4\pi}$! Altrimenti sarà sempre maggiore. Si nota che se vogliamo conoscere con precisione assoluta la posizione dell'elettrone, $\Delta x \rightarrow 0$ (non c'è incertezza), ma $\Delta p_x \rightarrow \infty$! Se vogliamo precisione su una, l'altra diventa totalmente ignota.

In termini matematici:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}, \quad \Delta E \geq \frac{h}{4\pi \Delta t}$$

le due grandezze sono inversamente proporzionali, si fa quindi la stessa conseguenza del caso posizione / q. di moto se una delle due incertezze $\rightarrow 0$.

- Consideriamo ora il caso di una particella libera di muoversi in una scatola monodimensionale, di lunghezza L :



la probabilità di trovare la particella, è descritta come moto dell'equazione di Schrödinger, che fa come

soluzione una funzione del tipo:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A \sin(kx)$$

ONDA PIANA (written in blue next to the equation)

stessa funzione armonica che descrive i campi elettromagnetici (written in blue next to the equation)

Per risolverla, utilizziamo le condizioni al contorno $\psi(0) = 0, \psi(L) = 0$, infatti per $x < 0$ e $x > L$ ci sono delle pareti "impeneetrabili", e $\psi(x) = 0$, inoltre ψe^{-}

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \text{Poiché } n = 1, 2, 3, \dots$$

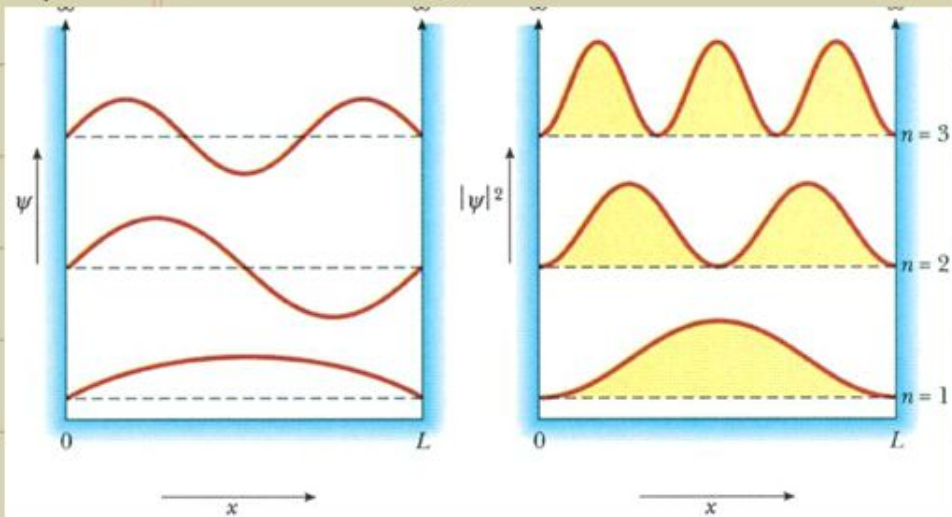
L'energia associata sarà:

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2, \quad \text{con } \underbrace{p}_n = \frac{\hbar}{\lambda} = \frac{n\hbar}{2L}$$

q. di moto ondulatoria

Dal grafico si vedono i valori di ψ per n crescente. $n=0$ non ha significato fisico perché si avrebbe probabilità nulla ovunque di trovare la particella.

Ad $n=1$ si ha il valore di energia più basso possibile (STATO FONDAMENTALE), e crescere di n la particella è sempre più eccitata, cioè sempre più energetica. Al crescere di n aumentano anche il numero di punti in cui si annulla ψ (detti NODI).



L'energia aumenta in maniera quadratica!

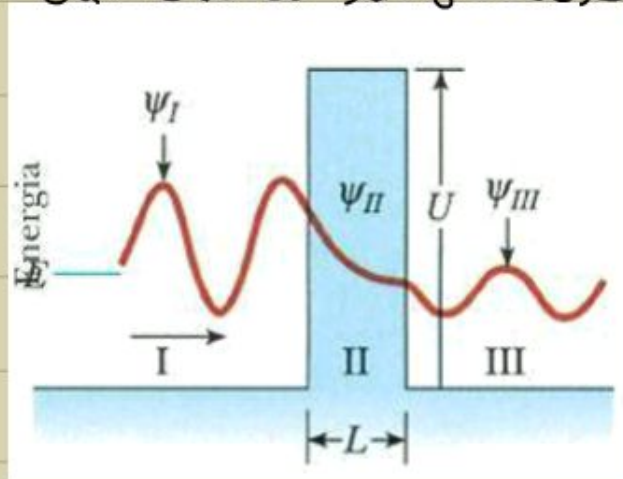
$$\begin{array}{l}
 E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \quad (m=1) \Rightarrow 0 \text{ modi} \\
 E_2 = 4E_1 \quad (m=2) \Rightarrow 1 \text{ modo} \\
 E_3 = 9E_1 \quad (m=3) \Rightarrow 2 \text{ modi} \\
 \vdots \\
 E_m = m^2 E_1 \Rightarrow m-1 \text{ modi}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Stato fondamentale nel modello Bohr} \\
 \text{valori} \\
 \text{quantizzati} \\
 \text{di energie} \\
 \text{cinetiche!}
 \end{array} \right\}$$

Sono i valori possibili di energia permessi dell'elettrone da cui Bohr ricava il postulato della quantizzazione nel suo modello!

Quindi la discretizzazione è tanto più marcata quanto più è ridotta la regione in cui è confinata la particella (elettrone nella regione atomica di raggio π nell'atomo di idrogeno).

Da ciò derivano anche la quantizzazione della quantità di moto e del momento angolare e delle energie cinetiche!

Nel caso microscopico da noi osservato, esiste una probabilità che la particella superi la barriera rettangolare, anche se la energia cinetica inferiore!



Questa probabilità è descritta dal coefficiente di trasmissione:

$$T = e^{(-2cL)}, \text{ con } c = \sqrt{\frac{2m(U-k)}{\hbar^2}}$$

L = base della barriera

U = altezza della barriera

k = energia cinetica dell'elettrone.

Il termine $(U-k)$ rappresenta la differenza dell'energia limite della barriera con l'energia dell'elettrone, è importante per applicazioni che prevedono il CONFINAMENTO di elettroni in certe regioni dello spazio.

Nel caso dell' esperimento Rutherford siamo nell' approssimazione non relativistica, con

$$K_e \approx 5 \div 6 \text{ MeV}$$

$$M_e c^2 \approx 4000 \text{ MeV}$$

Immagini lui non poteva accelerare gli elettroni fino al regime relativistico.

Arendo oggi degli acceleratori per esplorare l'interno del nucleo, possiamo avere delle energie cinetiche di valore elevato:

$$\alpha = \frac{hc}{K_e} \approx 1 \Rightarrow K_e \approx 200 \text{ MeV} \gg m_e c^2$$

miglior di M_e

Possiamo accelerare degli elettroni fino al regime ultrarelativistico, ci conviene usare l'elettrone invece delle particelle α con massa molto maggiore!

Sappiamo quindi solo che esiste una regione con cariche positive e negative che interagiscono, ma non sappiamo nulla di tale interazione. Quindi conviene usare solo degli elettroni che interagiscono con la nota forza coulombiana, invece

e bersaglio:

$$R = \dot{N} = \frac{dN}{dt} = \phi_a \cdot N_b \cdot \sigma$$

flusso di proiettili
 area della sezione di particella bersaglio
 m² di particelle bersaglio
 numero di particelle che hanno interagito nell'unità di tempo

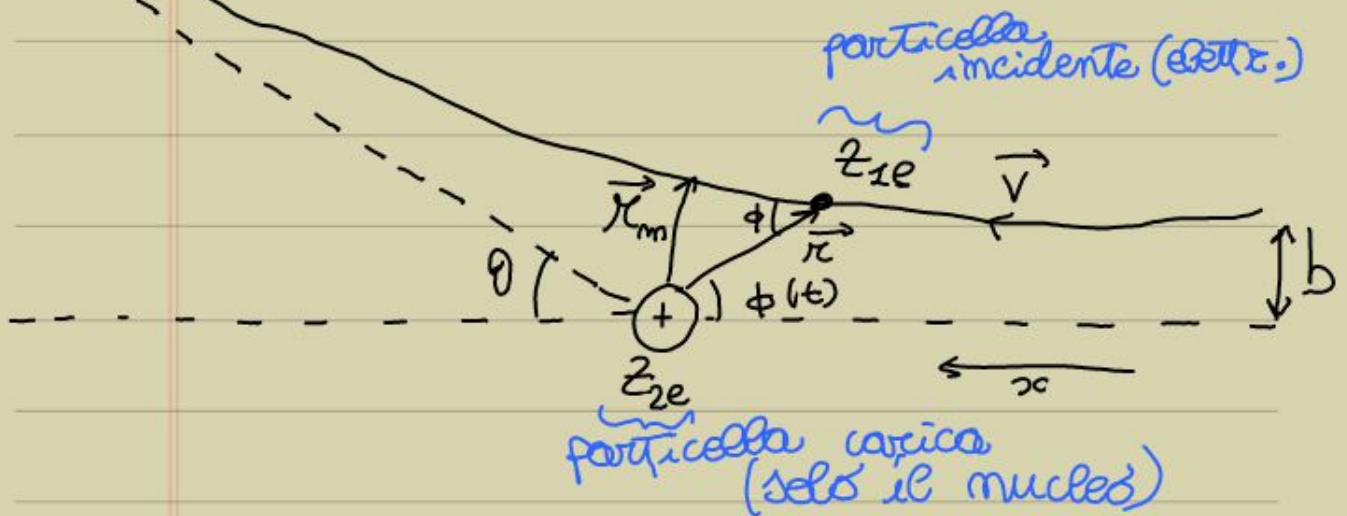
Si nota che è proporzionale alla quantità di bersagli, di proiettili e alla geometria del sistema. La "σ" è la sezione d'urto! È dato sperimentalmente misurato è R (numero di interazioni), il resto è noto, si ricava la sezione d'urto.

$$\sigma_{Tot} = \frac{\dot{N}}{\phi_a \cdot N_b} \quad [m^2] = \frac{\Delta N}{N_a N_b / A}$$

tiene conto dell'area "A", quindi è più generica

Ci dice quindi la probabilità che avvenga un'interazione! Infatti è un bilancio tra i proiettili e i bersagli, fa le dimensioni di un'area, dove avvengono le interazioni (urti). Se σ è grande, la probabilità che avvenga interazione è grande!

Sezione d'urto Rutherford



È dovuta all'interazione tra due cariche puramente coulombiana. È una sezione d'urto differenziale, la particella carica ha anche la forza internucleare, ma non ne teniamo conto, in prima approssimazione si considera solo l'interazione tra le singole cariche che compongono la materia, puramente coulombiana.

Possiamo dire che la deviazione di z_1 è dovuta solo all'interazione col nucleo di z_2 (nucleo pesante in quiete), gli elettroni attorno al nucleo sono trascurati.

della posizione, che dipende da ϕ , angolo tra il vettore \vec{r} e l'asse x .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Possiamo dire che ϕ dipende dal tempo

Dobbiamo risolvere questa eq. differenziale:

$$d\vec{v} = k_e \frac{z_1 z_2 e^2}{m r^2} d\phi \hat{u}_r$$

L'equazione contiene tutti i parametri necessari a definire la sezione d'urto.

$$\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = \int_0^{\pi-\vartheta} k_e \frac{z_1 z_2 e^2}{m r^2} d\phi \hat{u}_r$$

$\frac{d\phi}{dt} = \omega$ è un mom. angolare! $L = I\omega$

Molto prima dell'interazione ($t \rightarrow -\infty$), $\phi_i \rightarrow 0$, mentre quando la particella si è allontanata dopo l'interazione e ritorna in moto uniforme ($t \rightarrow +\infty$), $\phi_f \rightarrow \pi - \vartheta$, che sono le condizioni iniziali e finali su ϕ . Il termine a denominatore è COSTANTE perché il momento angolare è conservato (forza centrale). Possiamo quindi scrivere il

$$\text{Posto } C = \frac{k_e z_1 z_2 e^2}{m v b}$$

$$C \int_0^{\pi-\theta} (\cos\phi \hat{u}_x + \sin\phi \hat{u}_y) d\phi = C \left[\sin\phi \Big|_0^{\pi-\theta} \hat{u}_x - \cos\phi \Big|_0^{\pi-\theta} \hat{u}_y \right]:$$

$$= C [\sin\theta \hat{u}_x + (\cos\theta + 1) \hat{u}_y]$$

Compare θ anche
in questo termine

Da entrambi i lati abbiamo θ , ma da un lato c'è $\frac{\theta}{2}$, usiamo quindi le formule di trigonometria:

$$\sin\theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\theta = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

quindi:

$$\sin\theta \hat{u}_x + (\cos\theta + 1) \hat{u}_y = 2 \cos\frac{\theta}{2} \left(\sin\frac{\theta}{2} \hat{u}_x + \cos\frac{\theta}{2} \hat{u}_y \right)$$

\hat{u}_y

quindi diventa uguale vettorialmente al secondo membro, possiamo uguagliare i moduli!

$$\frac{k_e z_1 z_2 e^2}{m v b} \cdot 2 \cos\frac{\theta}{2} = 2 \sin\frac{\theta}{2}$$

Abbiamo così trovato una relazione con θ , l'energia cinetica, e le cariche!

Riordinando in funzione di b :

$$b = \frac{k_e z_1 z_2 e^2}{m v^2} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{k_e z_1 z_2 e^2}{\text{K} \rightarrow \frac{1}{2} m v^2} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

di b , Δm sezione :

L'area della corona è quella interessata agli urti!



Si ha un cono di deflessione per le particelle.

$$\pi (b+db)^2 - \pi b^2 = \pi (b^2 + 2b db + db^2) - \pi b^2 = 2\pi b db$$

avendo approssimato al primo ordine.

Ad una variazione di " db " corrisponde una variazione di superficie di interazione, ed una conseguente variazione dell'angolo di deflessione $d\theta$.

$$2\pi b db = 2\pi \left(\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) db$$

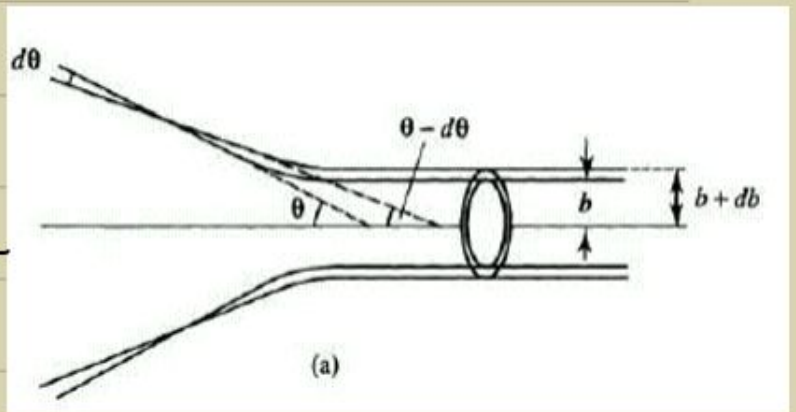
$b \rightarrow b+db$
 $\theta \rightarrow \theta - d\theta$
Se b aumenta, θ diminuisce!

$$\text{ma } db = \frac{db}{d\theta} d\theta = \frac{a}{2} \frac{d(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2})}{d\theta} = \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$2\pi b db = 2\pi \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \left| \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right| d\theta$$

Possiamo fare ora

il rapporto tra l'area della corona circolare (incremento di db) e l'area totale :



$$\frac{2\pi b db}{A} = \frac{2\pi a}{A} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left| \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right| d\theta =$$

che contiene b :

$$\frac{2\pi}{A} \frac{a^2}{8} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta = \frac{d\Omega \cdot a^2}{16A \sin^4(\theta/2)}$$

Avendo usato $\cos(\theta/2) = \frac{\sin \theta}{2 \sin(\theta/2)}$.

Possiamo ora definire la sezione d'urto, basta prendere la relazione appena trovata (prob. di una singola particella nell'angolo solido / un singolo nucleo bersaglio nell'area) e moltiplicarla per l'intensità del fascio (flusso di proiettili nell'unità di tempo) e per i bersagli totali, così si tiene conto di entrambe le quantità.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{d\Omega \cdot a^2}{16A \sin^4(\theta/2)} \cdot \boxed{I_a} \cdot N_b$$

$\phi_a \cdot A$

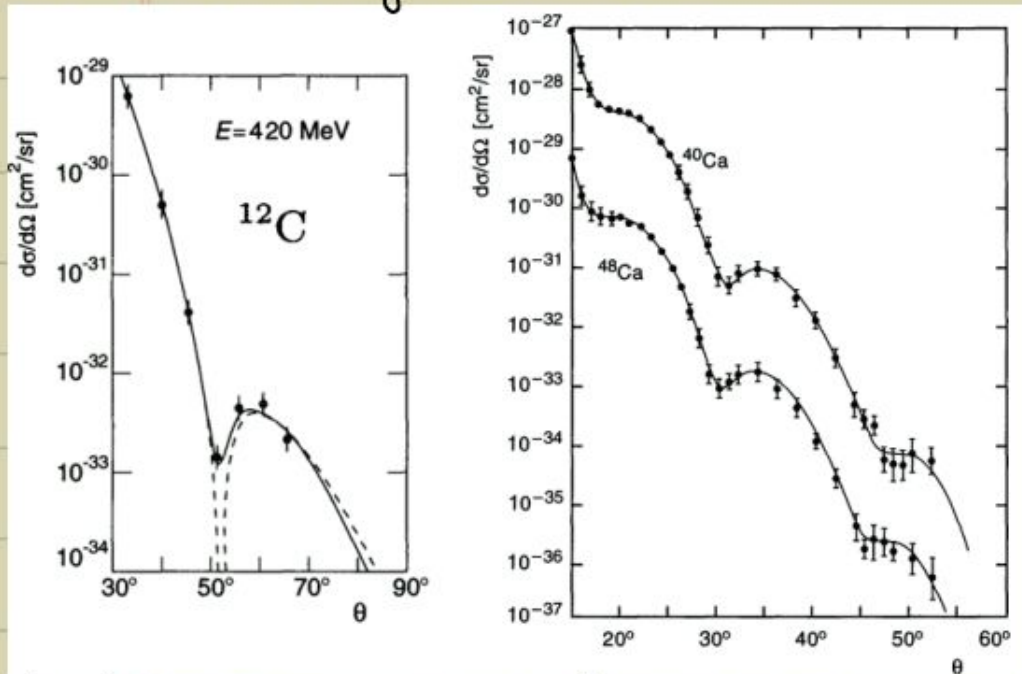
La definizione di sez. d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta N / \Delta t}{I_a \cdot N_b / A \cdot \Delta \Omega} = \frac{a^2}{16 \sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{4k} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

che fa le giuste dimensioni della sezione d'urto! ci dà quindi il numero di

alcuni valori, poi decresce linearmente.

- Invece questi grafici riportano la sezione d'urto in funzione di θ :



ci si aspetta un andamento monotono come $1/\sin^4(x)$, invece si fanno massimi e minimi, non segue l'andamento della sezione d'urto Rutherford!

L'elettrone si comporta come un'onda che "sonda" una regione spaziale dell'ordine della sua lunghezza d'onda. L'elettrone va dentro al nucleo, che ha una sua distribuzione di carica positiva, con una DENSITA' di carica $\rho(r)$, che non è concentrata in un punto. Se fosse

che una carica compiome dell'esterno di una sfera di carica omogenea, essa sente un campo come se la carica distribuita fosse concentrata al centro; invece dell'interno della sfera, la carica di prova sente un campo diverso in base alla posizione! Così si nota già una motivazione della discrepanza tra la sezione

d'urto R_{tot} (carica esterna) e i risultati sperimentali (come lung. d'onda degli elettroni incidenti all'interno del nucleo), che fanno emergere effetti puramente quantistici di diffrazione. Tenendo conto degli effetti quantistici (oltre k), la sezione d'urto diventa:

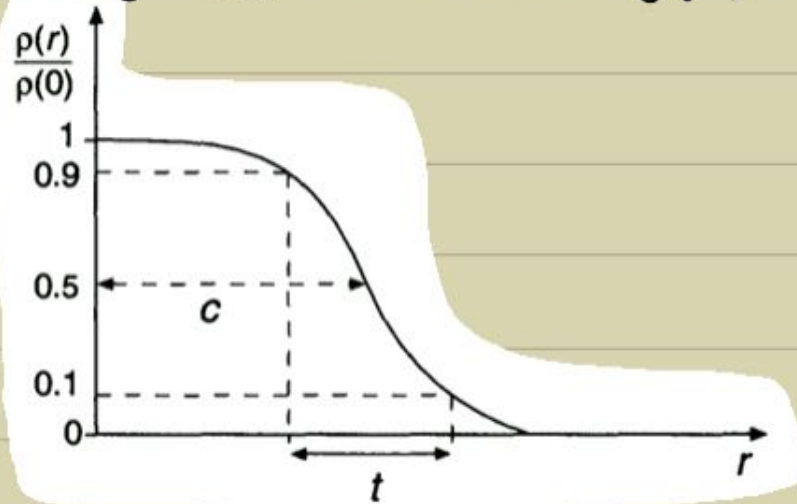
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{exp}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{R_{\text{tot}}} \cdot |F(\theta, k)|^2$$

dipende da un fattore $F(\theta, k)$ "correttivo", detto FATTORE DI FORMA

$$\text{con } F(\theta, k) = \int \rho(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} dr$$

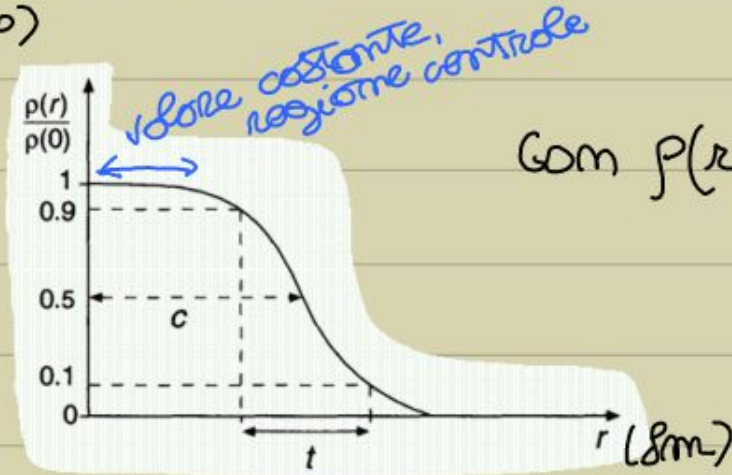
trasformata di Fourier 3D.

che vengono determinati in modo sperimentale, in modo che i valori delle sezioni d'urto coincidano (sperimentale e di Rutherford), calcolando $f(r)$ a ritroso.



Si nota che per alcuni elementi, la distribuzione centrale ($r=0$) è pressoché uguale! cioè per i nuclei medio-pesanti. La distribuzione di Fermi approssima bene la carica nel nucleo, con una distribuzione di "sfera diffusa" e non rigida. Cosa rappresentano i due parametri nella relazione? Parametro c → ci dice per quale valore di r , la densità di carica è dimezzata, cioè quando $r=c$, ed è un valore costante in tutti i nuclei medio-pesanti.

Si può quindi determinare un grafico con $\frac{\rho(r)}{\rho(0)}$ sulle ordinate



$$\text{con } \rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$$

Cosa sappiamo del raggio del nucleo?

È una legge che va come la radice

cubica:

$$R = r_0 A^{1/3} = 1,21 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

dove r_0 è determinato sperimentalmente, A è il numero di massa. Questa relazione è ricavata dal modello di Fermi, a partire dal raggio quadratico medio della distribuzione, ed è un'approssimazione della distribuzione ad una sfera rigida di raggio R , coincidente col raggio del nucleo; nella realtà non si può parlare di sfera rigida come distribuzione, perché ρ andrebbe a zero con un gradino netto.

La carica viene deflessa e descrive una traiettoria curva, con un suo raggio; scrivendo la legge di Newton:

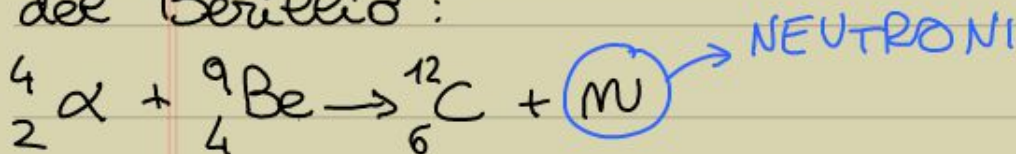
$$qVB' = m \frac{v^2}{R} \rightarrow \text{c. normale}$$

Le carica impressionando una lastra fotografica, permettendoci di calcolare il RAGGIO della curvatura, e di conseguenza:

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB'} = \frac{E}{RBB'} \Rightarrow \text{Possiamo misurare la massa dello ione!}$$

- Possiamo misurare ad esempio la massa dell'Idrogeno (elemento più leggero), M_H .
 An un elemento più pesante, vale la relazione $M_n \simeq A M_H$, A numero atomico.
 Si nota che M_H viene identificata come la massa del PROTONE (l'Idrogeno ha $Z=1$, tutto l'elettrome rimane un protone), quindi un generico elemento ha "A volte" la massa M_H , cioè è circa un multiplo del singolo protone.
- Quindi il nucleo sembra essere composto

un certo valore di R e quindi di Δx ($\approx 10 \text{ fm}$). Si ottiene $\Delta p \approx \frac{h \cdot c}{\Delta x} \approx 10 \div 20 \text{ MeV}$ ma per l'elettrone, $m_e c^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$, sono dei corpuscoli, e' difficile pensare che siano confinati in una piccola regione come i nuclei con massa molto superiore; infatti la loro elevata k li scalzerebbe facilmente fuori dalla regione del nucleo. Il problema fu risolto grazie ad esperimenti sul decadimento radioattivo del Berillio:



Si scopre un nuovo elemento di carica NEUTRA, il neutrone, di massa simile a quella del protone (difficile da misurare)! Quindi non ci sono elettroni nel nucleo. A questo punto torna la massa, perché "A" sarebbe la somma di protoni e neutroni: $M_N \approx N A M_p \approx N A M_n$ perché la loro massa è simile, e torna la carica, perché $Q_N = +Ze$, $N = N_p$

di MASSA, perché $A = N + Z \Rightarrow \rho_A = \rho_p + \rho_n \approx 2\rho_p \approx 2\rho_n$, dato che fanno massa comparabile.

- Torniamo alla distribuzione di Fermi, alla distribuzione centrale ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{A}{V} \approx \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \approx \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} \approx 0,17 \frac{\text{nucleoni}}{\text{fm}^3}$$

come ci si aspetta, è COSTANTE perché non compare A , per un "campo" di elementi. Questo è sorprendente, perché il raggio atomico (raggi quadratico medio sugli orbitali elettronici) non cambia sensibilmente, aumenta invece il raggio del nucleo con la legge vista, e aumenta ovviamente il volume del nucleo. Cosa ci dice il fatto che la densità centrale sia costante? Perché i nucleoni sono compattati in una regione "piccola" rispetto all'atomo, nonostante le repulsioni tra protoni?

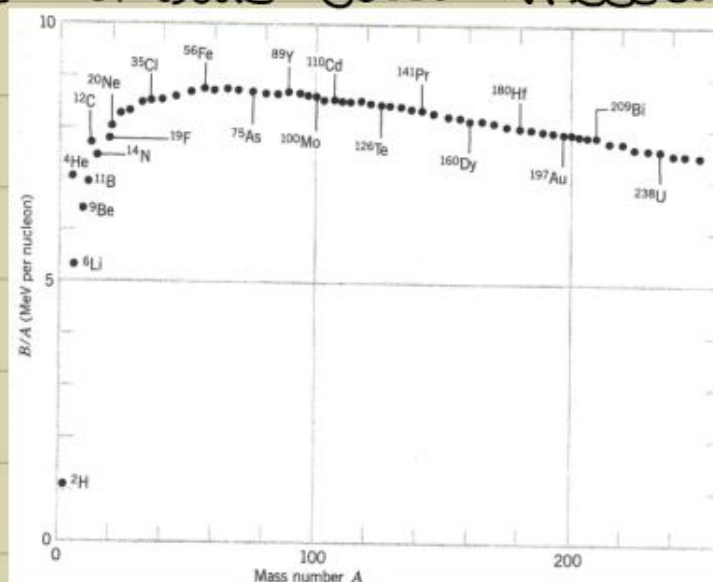
- Questa forza attrattiva arriva a definire un'energia di legame, ovvero una misura dell'energia netta dovuta alla risultante delle forze nel nucleo:

$$\frac{B.E.}{c^2} = \underbrace{M_N(A, Z)}_{\text{massa nucleo}} - (NM_m + 2Mp) = M_A(A, Z) - (NM_m + 2Mp) + \underbrace{2m_e}_{\text{massa elettr. a riposo}}$$

ENERGIA DI LEGAME TOTALE

è quindi una grandezza negativa, che aumenta o diminuisce del numero di massa, dove il contributo della massa dell'elettrone è quasi trascurabile.

Ci dovrebbe essere anche l'energia di legame degli elettroni sugli orbitali (energia da sottrarre alla totale), ma ha un peso molto piccolo, anche minore del peso dovuto alla massa degli elettroni.



- Come possiamo esprimere matematicamente questa energia di legame?

Tramite un modello fenomenologico che ci dia anche qualche informazione sull'interazione nucleare.

$$B.E.(A, Z) = -b_{vol} \cdot A + b_{sup} \cdot A^{2/3} + b_{coul} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} + b_{simmi} \cdot \frac{(N-Z)^2}{A}$$

↑ termine attrattivo
 ↑ termine di tensione superficiale
 ↑ termine di rep. coulombiana
 ↑ termine di simmetria (diff. tra neutroni e protoni)

FORMULA SEMIEMPIRICA DI MASSA

La scriviamo in modo che sia in accordo con i dati sperimentali, scomponendo tutti i termini della forza. Il primo elemento ha il segno negativo (termine di volume) perché è attrattiva, dove b_1 non è ancora noto e rappresenta il massimo sperimentale sul ferro, ed è rappresentativo del corto raggio d'azione. Ora dobbiamo regolare gli estremi della retta che sono i rami ascendente e discendente della curva sperimentale.

RAMO DISCENDENTE \Rightarrow alti valori di A , come

$$R^2 \text{ (superficie sferica)} \Rightarrow (A^{1/3})^2 \Rightarrow A^{2/3}$$

è una spesa energetica per tenere insieme la "bolla" di particelle.

Nonca solo un termine sulle forze nucleari, che dica perché i nuclei sono stabili se $N=Z$. Viene detto di SIMMETRIA, che è vantaggioso se $N=Z$, e svantaggioso se $N \neq Z$. Le possibili interazioni nel nucleo sono p-p, p-n, n-n, quella più energetica è p-n (sperimentale), quindi questo termine deve tener conto del numero di coppie n-p che possiamo formare.

Ognuno dei termini costanti ha un valore dei 15 ÷ 25 MeV! Spesso nei testi si trova un ulteriore termine detto Δ_{PAIRING} :

$$\Delta_p = \begin{cases} -\delta \text{ (attrattivo)} & \rightarrow \text{ se } A \text{ e } \begin{cases} N \text{ pari} \\ Z \text{ pari} \end{cases} \\ 0 & \rightarrow \text{ se } A \text{ è dispari} \\ +\delta \text{ (repulsivo)} & \rightarrow \text{ se } A \text{ e } \begin{cases} N \text{ dispari} \\ Z \text{ dispari} \end{cases} \end{cases}$$

Andiamo a calcolare il Q :

$$Q = \underbrace{[M_u + M_m]}_{M_i} - \underbrace{[M_{Xe} + M_{Sr} + M_{2m}]}_{M_f}] c^2 = K_{Xe} + K_{Sr} +$$

$$+ \underbrace{K_{m_1} + K_{m_2}}_{\text{neutroni finali}} - \underbrace{K_{m_i}}_{\text{neutroni iniziali}} > 0$$

rappresenta l'energia che viene liberata, se > 0 la reazione è spontanea!

Conosciamo le masse, quindi possiamo calcolarlo. Viene positiva!

possiamo quindi scrivere:

$$|B.E.|_{Xe} + |B.E.|_{Sr} - |B.E.|_u = B.E.|_u - B.E.|_{Xe} - B.E.|_{Sr}$$

(quella dei neutroni non c'è perché non sono legati nella reazione).

Calcoliamo singolarmente i contributi:

$$|B.E.| = [54 \cdot M_p + 86 M_m - M_N(Xe)] c^2$$

$$|B.E.| = [38 \cdot M_p + 56 M_m - M_N(Sr)] c^2$$

$$|B.E.| = [92 \cdot M_p + 143 M_m - M_N(U)] c^2$$

Sommando o sottraendo nella relazione

completa si ottiene:

$$[+ M_m + M(u) - M(Xe) - M(Sr)] c^2 = Q$$