NUMERO : 98

DATA : 16/05/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Rivello

MATERIA : Analisi 1 esercizi
Prof. Fagnani

Esercitazioni → Chiara Ravazzi

Es. 1 1) Si mostri che $\sqrt{n}$ non è razionale se n non è un quadrato perfetto (cioè se n non è del tipo $n = m^2$ per qualunque $m \in \mathbb{N}$)

Distinguiamo 2 casi:
- a) n non abbia fattori quadrati maggiori di 1
- b) n ha fattori quadrati ma non è un quadrato perfetto

Dimostrazione (a) Per assurdo: se n non ha fattori quadrati > 1 → $\sqrt{n}$ non è razionale

Per assurdo supponiamo che $\sqrt{n}$ sia razionale cioè

$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ con p e q primi tra loro → $(p, q) = 1$

$$n = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{con } (p,q) = 1$$

$$q^2 n = p^2 \quad (*)$$

Da qui deduciamo che p^2 è un multiplo di n
p è un multiplo di n

Per vederlo prendiamo la fattorizzazione di

$$p = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_r^{i_r}$$
$$p^2 = (p_1^{i_1} \dots p_r^{i_r})^2$$

Da $(*)$ so che $n \mid p^2$ ⇒ n può essere scritto come prodotto di primi nella fattorizzazione di p con esponente $= 1$ perché n non contiene fattori quadrati ⇒ $n \mid p$

$q^2 n = p^2$ ma $n \mid p$ ⇒ $p = kn$ con $k \in \mathbb{N}$

$$q^2 n = (kn)^2$$
$$q^2 n = k^2 n^2$$
$$q^2 = k^2 n$$

Deduciamo che
- q^2 è multiplo di n
- q è multiplo di n

Assurdo perché n divide sia p che q che però erano primi fra loro per ipotesi.

Esercizio = Dimostrare che $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Dimostrare che $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

$\Leftrightarrow \underbrace{-|x-y| \leq |x|-|y|}_{(**)} \leq |x-y|$ ← Cosa devo dimostrare

Perché $|x| \leq b \overset{(*)}{\Leftrightarrow} -b \leq x \leq b$

Consideriamo $|x| = |x-y+y|$ per $x, y \in \mathbb{R}$

Applico la diseguaglianza angolare $|x-y+y| \leq |x-y|+|y|$

$$|x|-|y| \leq |x-y| \quad (*) \text{ é verificato}$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x|$$

↑ Diseguaglianza angolare

$$|y|-|x| \leq |y-x|$$

$$|x|-|y| \geq -|y-x|$$

$$|x|-|y| \geq -|x-y| \quad (**)$$

Cosa
1) $\sqrt{2}$ non é razionale
2) $|x| = \max\{x; -x\}$
3) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

1) Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale cioé $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m e $n \in \mathbb{Z}$ e $(m,n)=1$

$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2 \Leftrightarrow m^2$ é quindi divisibile per 2 quindi $2|m$ perché

$$m^2 = (q_1^{i_1} \cdot q_2^{i_2} \cdots q_r^{i_r})^2 \quad \text{con } q_1, q_2 \cdots q_r \text{ numeri primi}$$

Quindi perché m^2 sia divisibile per 2 bisogna che uno dei suoi fattori primi sia 2 quindi anche m sarà divisibile per 2.

Se $2|m$ allora $m = 2k$ Quindi $2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2 = \frac{4k^2}{n^2}$

$\Leftrightarrow 2n^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$ Quindi $2|n^2$ e $2|n$

Se sia n che m sono divisibili per 2 allora non sono primi tra loro, però questo é assurdo perché avevamo ipotizzato che $(m,n)=1$ quindi $\sqrt{2}$ non é razionale.

Risolvere $|x| + |x+2| \geq -1$

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & se\ x+2 \geq 0 \iff x \geq -2 \\ -(x+2) & se\ x+2 < 0 \iff x < -2 \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} x < -2 \\ -x-(x+2) \geq 1 \end{cases} \cup \text{II} \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -x+x+2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\cup\ \text{III} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+x+2 \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} x < -2 \\ -x-x-2 \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -2 \\ -2x \geq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -2 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} ; x < -2\}$$

$$\text{II} \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 2 \geq 0 \end{cases} \qquad S_{II} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 0\}$$

$$\text{III} \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x \geq -1 \implies x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad S_{III} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0$$

$$S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = \mathbb{R}$$

La disequazione vale $\forall x \in \mathbb{R}$

Caso: Risolvere $|x-1| \leq |x+2|$

$$|x-1| - |x+2| \leq 0$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & se\ x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \\ -x+1 & se\ x-1 < 0 \iff x < 1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 236

Richiami = Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

- Un elemento $M \in A$ è massimo se $x \leq M \ \forall x \in A$
- A è detto superiormente limitato se $\exists\, L \in \mathbb{R}$
  $x \leq L \ \forall x \in A$
- Estremo superiore: L è estremo superiore di A se
  a) $x \leq L \quad \forall x \in A$
  b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in A \quad x \geq L - \varepsilon$

Esercizio = Consideriamo l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

Trovare estremo superiore e inferiore e dire se sono massimi o minimi.

Svolgimento: $A = \{0\} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[0, 1 - \frac{1}{3}\right] \cup \left[0, 1 - \frac{1}{4}\right]$

$\forall x \in A \quad x \geq 0$

0 è un minorante di A

$\inf A = \min A = 0 \quad$ perché $0 \in A$

$\forall x \in A \quad 0 \leq x < 1$

1 è maggiorante di A

Se $x \in A \quad x \leq 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ per un qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0$ deve esistere $x \in A : x \geq 1 - \varepsilon$

$$1 - \varepsilon \leq x \leq 1 - \frac{1}{\bar{n}}$$

$$1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{\bar{n}}$$

$$\frac{1}{\bar{n}} \leq \varepsilon \iff \bar{n} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \sup A = 1$ ma 1 non è massimo

Esercizio: Determinare il sup e l'inf di $A = \left\{ \frac{1}{10^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ specificando se sono max e min.

$\sup = \frac{1}{10} = \max \qquad \inf = 0$ ma non è il minimo

n ed m che soddisfino una condizione più restrittiva (tanto mi basta trovare m e n per cui (*) è vera). $m+n < n+n < \varepsilon\, m n$

$2n < \varepsilon\, m n$ $\quad \bar{n}_\varepsilon > \bar{m}_\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$ Allora effettivamente

è verificato che $0 = \inf A \neq \min A$ perché $0 \notin A$.

* Trovare i valori di $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} \geq x+1\}$
Cercare (se esistono) estremi sup e inf e eventualmente specificare se sono max A e min A.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} \geq x+1\}$$

$$\sqrt{x^2-1} \geq x+1$$
$$x^2 - 1 \geq x^2 + 2x + 1$$
$$0 \geq 2x + 2$$
$$0 \geq 2(x+1)$$
$$-2x \geq 2$$
$$2x \leq -2$$
$$x \leq -1$$

$\inf = -\infty$ e $\sup = -1 = \max$ perché $-1 \in A$
in effetti $\sqrt{(-1)^2 - 1} \geq -1 + 1$
$$0 \geq 0$$

* $A = \{p \in \mathbb{R} \mid p = 0{,}a_1 a_2 \dots \text{ con } a_k \in \{0,3,7\}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$
$0 < p < 1 \quad \forall p \in A$

Dim: $\inf A = 0$
Fisso $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \varepsilon \leq 1$
$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{10^{\bar{n}}} < \varepsilon$

$$\frac{1}{10^{\bar{n}}} < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$$

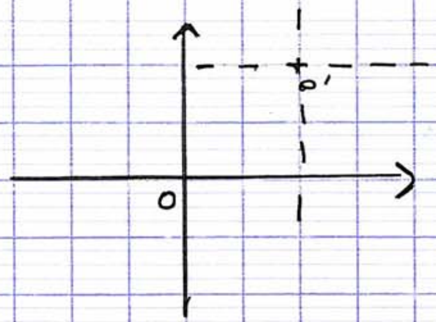
$$\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{7}{10^{\bar{n}+1}} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10^{\bar{n}}} < \frac{1}{10^{\bar{n}}} < \varepsilon$$

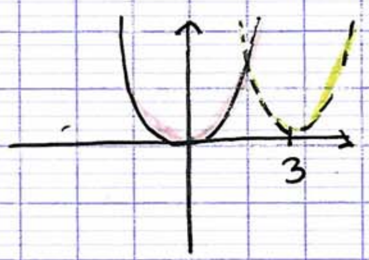
$\Rightarrow$ $\inf A = 0 = \min A$ dalla definizione $A = \ell \Leftrightarrow \exists\, x \in A$
$x < \ell + \varepsilon$

Traslazioni

$$\begin{cases} X = x + p \\ Y = y + q \end{cases}$$



Es. 1 Parabola



$y = x^2 = f(x)$

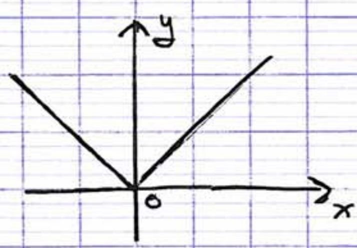
$y = (x-3)^2$

$y = f(x-3)$

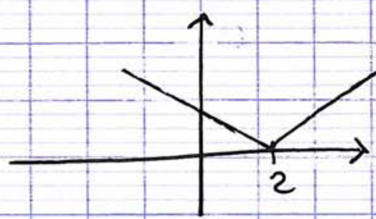
$y = f(x) - 3$

$y = (x+2)^2$

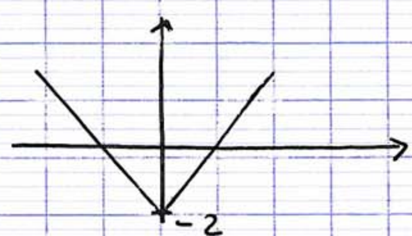
Es. 2: $y = |x|$



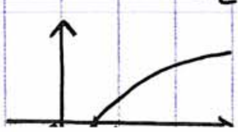
$y = |x-2|$



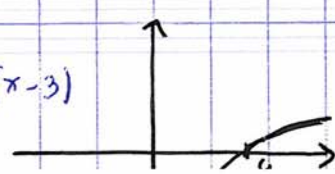
$y = |x| - 2$



Es 3: $y = \log x$



$y = \log(x-3)$



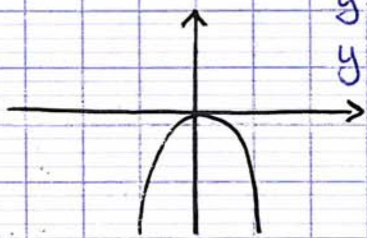
Simmetria asse x

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$$

$y = f(x)$

$y = -f(x)$

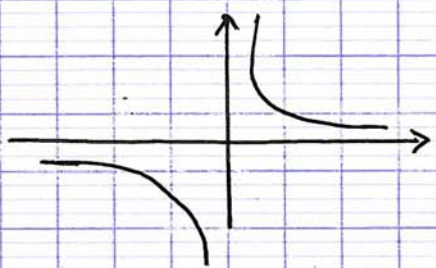
$y = -x^2$



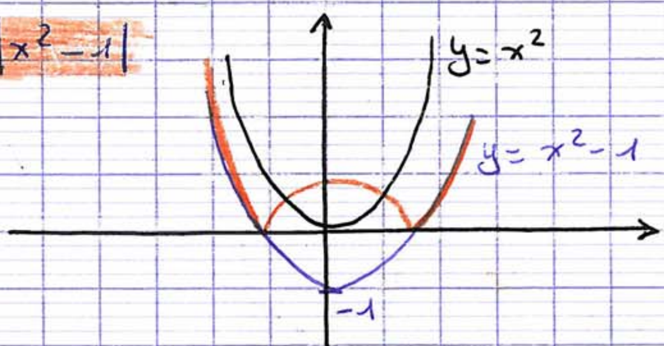
Funzione dispari → simmetrica rispetto all'origine

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases} \qquad f(-x) = -f(x)$$

$y = \frac{1}{x}$



$y = |x^2 - 1|$



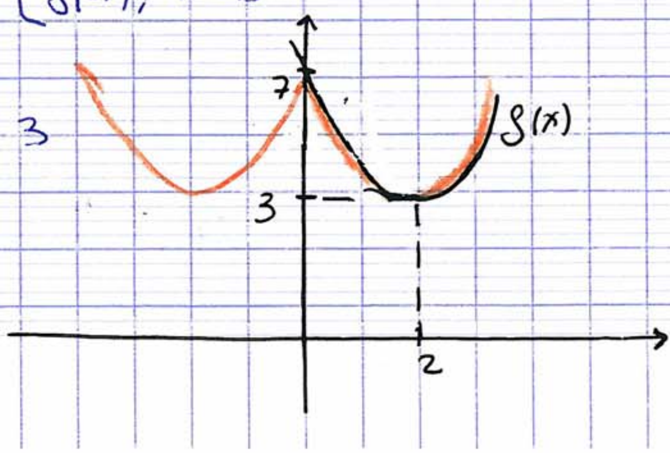
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

↓

PARI

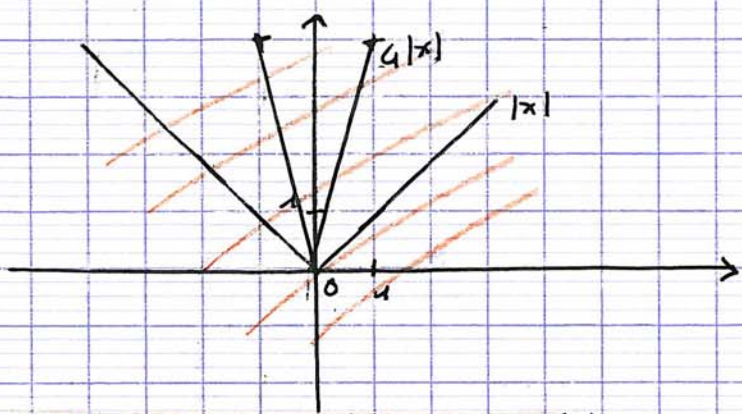
* $f(x) = (x-2)^2 + 3$

$f(|x|)$?



$x = 1 \pm \sqrt{2}$ $\qquad \alpha = 1-\sqrt{2}$ e $\beta = 1+\sqrt{2}$

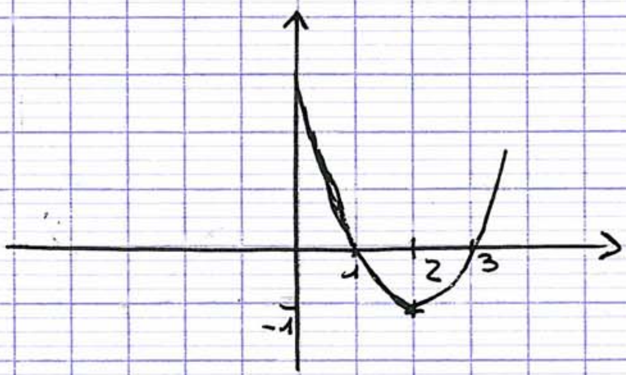
* $x^2 - 4|x| + 3 > 0$



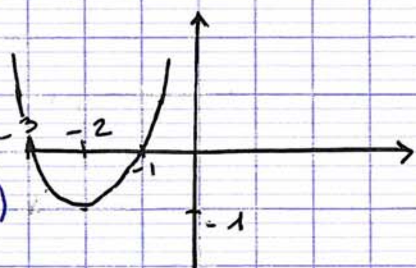
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 & \text{se } x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 - 4x + 3 > 0 & \text{se } x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $(x-2)^2 - 1 = 0$

$S_1 = [0 \ , 1) \cup (3 \ ; +\infty)$



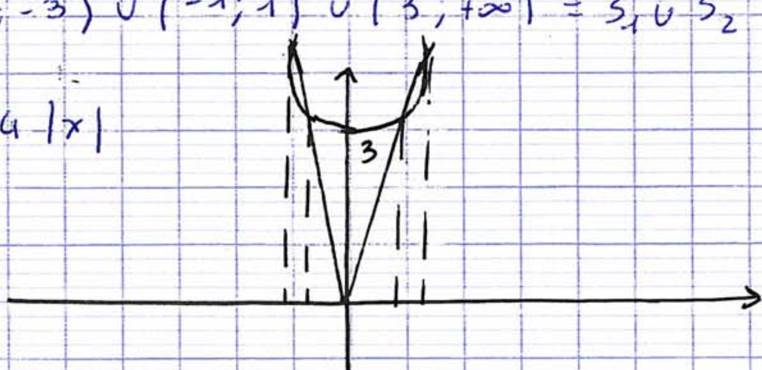
(2) $(x+2)^2 - 1 = 0$



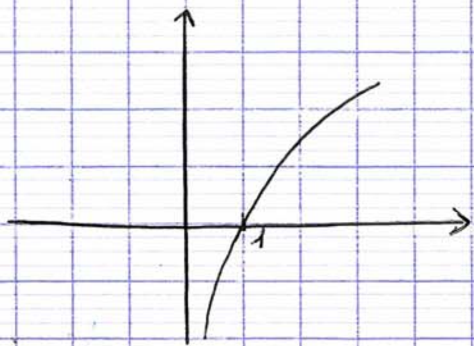
$S_2 = (-\infty, -3) \cup (-1 \ ; 0)$

$S = (-\infty \ ; -3) \cup (-1 ; 1) \cup (3 \ ; +\infty) = S_1 \cup S_2$

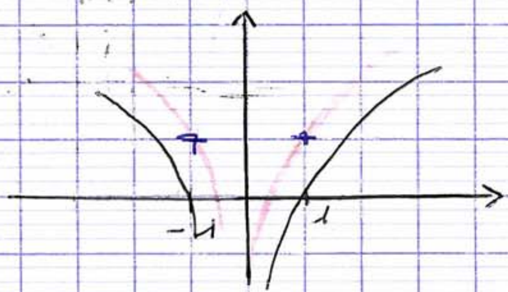
* $x^2 + 3 > 4|x|$



* $y = \log|x| + 1$



* $y = \log|x| + 1$



Esercizio = Risolvere $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

Dobbiamo cioè trovare l'insieme di positività della funzione $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

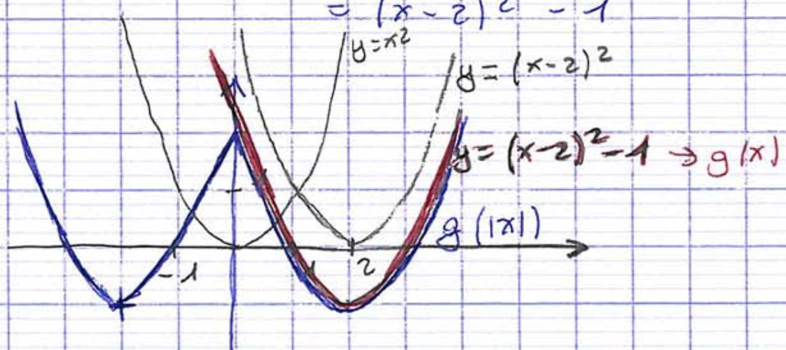
Notare che $f(x) = |x|^2 - 4|x| + 3$

Devo disegnare la funzione $g(|x|)$ con $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Alternativa = notare che $f(x)$ è una funzione pari quindi sarebbe sufficiente disegnare $f(x)$ $\forall x \geq 0$ e poi operare la simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

1. Disegniamo $g(x) = x^2 - 4x + 3$

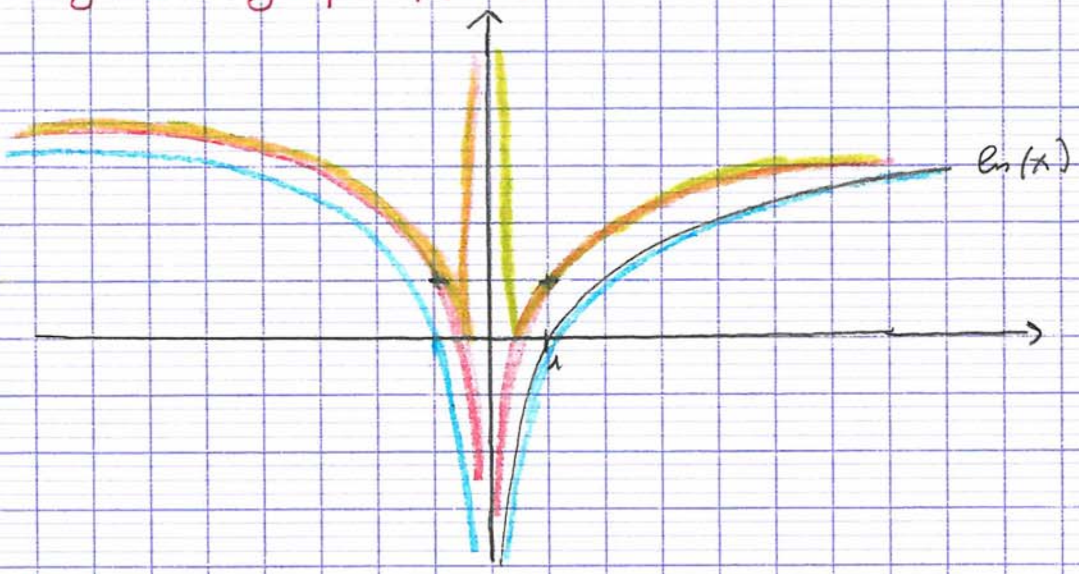
$$g(x) = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 =$$
$$= (x-2)^2 - 1$$



$f(x) = g(|x|) > 0 \quad \forall x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$

* Disegnare $y = |\ln|x| + 1|$

$y = \ln(x)$
↓
$y = \ln|x|$
↓
$y = \ln|x| + 1$
↓
$y = |\ln|x| + 1|$



* Richiami

$f : A \to B$

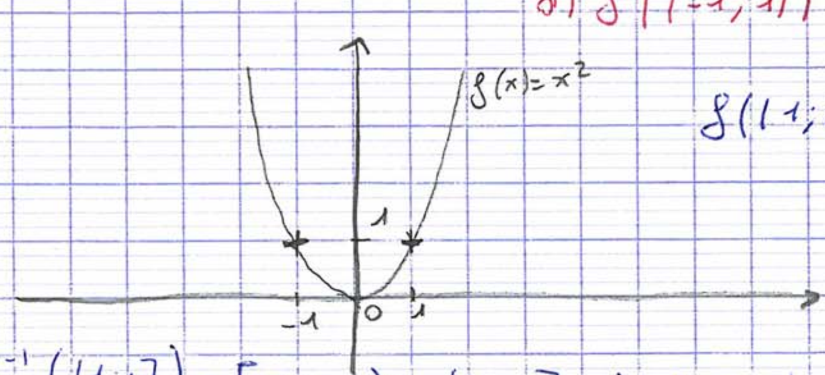
se $X \subseteq A$, si dice immagine di X secondo f l'insieme
$f(X) = \{b \in B : \exists\, x \in X,\ b = f(x)\}$

se $Y \subseteq B$, si dice controimmagine di Y secondo f
l'insieme $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$

Si dice che f è suriettiva se $Im(f) = B$
si dice che f è iniettiva se $\forall\, a, a' \in A \quad f(a) \neq f(a')$

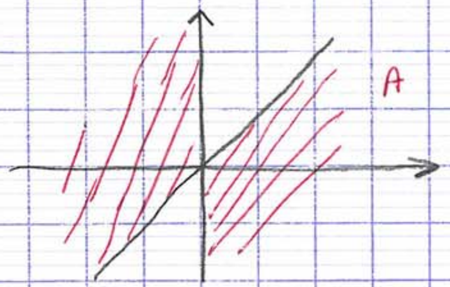
* Data $f(x) = x^2$ determinare
a) $f((1;2])$
b) $f^{-1}((1;4])$
c) $f^{-1}([-2;1))$
d) $f([-1;1))$

a)



$f((1;2]) = (1;4]$

b) $f^{-1}((1;4]) = [-2;-1) \cup (1;2]$ $\quad \forall A \subseteq dom f$
$A \subseteq f^{-1}(f(A))$



$$A = \{(x,y) : y \leq -2x^2 - x + 1,\ y > 1 - x\}$$

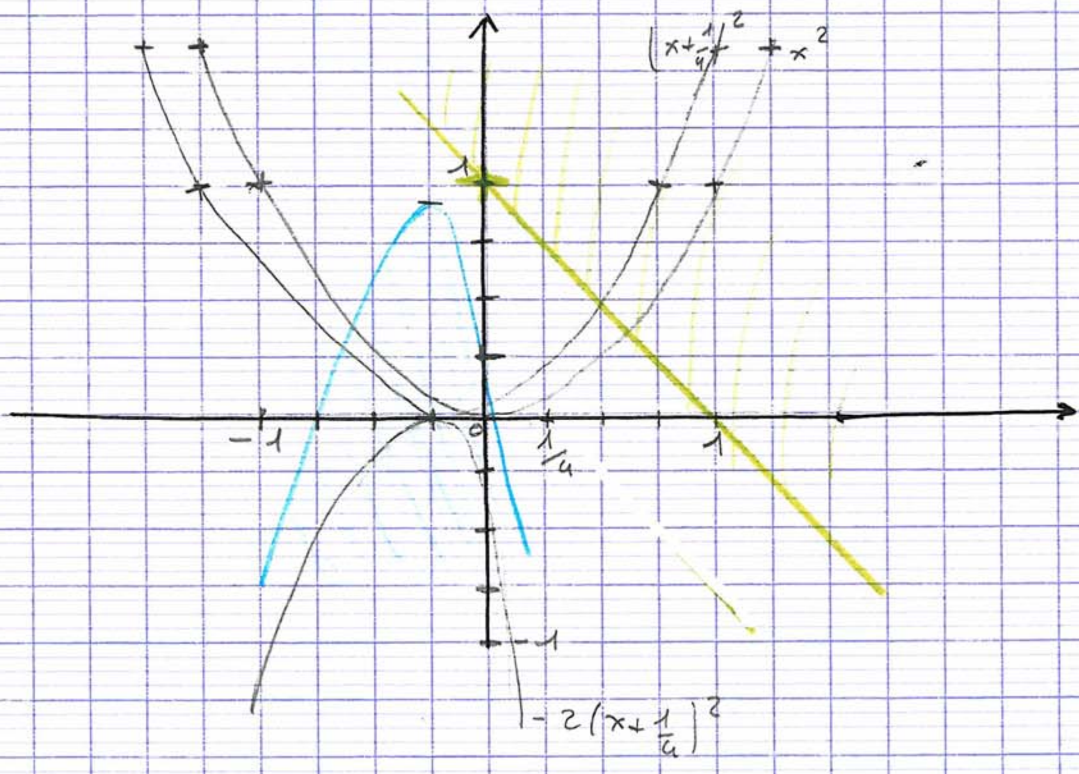
$y \leq -2x^2 - x + 1$

$$-2x^2 - x + 1 = -(2x^2 + x - 1) = -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1 = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} + 1 =$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$y \leq -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ e $y > 1 - x$



* Trovare il dominio delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log \sqrt{x(x-1)(x-2)}$$

$$g(x) = \log \sqrt{x} + \sqrt{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$$

1) $\text{dom}(f) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x(x-1)(x-2) \geq 0 \\ \sqrt{x(x-1)(x-2)} > 0 \end{array}\right\} \; x(x-1)(x-2) > 0$

$x(x-1)(x-2) > 0$

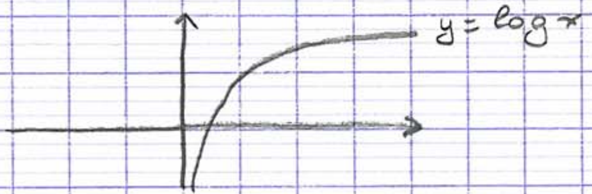
		0		1		2	
x	− − −		———		———		———
$x-1$	− − −		− − −		———		———
$x-2$	− − −		− − −		− − −		———
	−		+		−		+

$\text{dom}(f) = (0\,;1) \cup (2\,;+\infty)$

2) $\text{dom}(g) \Rightarrow g(x) = \log\sqrt{x} + \sqrt{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \log\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \log \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \log\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -\log x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \log x \leq 0 \end{cases} \qquad x \in (0\,;1]$$



* Data $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x-2}$ trovare $h_1 = g \circ f$ e $h_2 = f \circ g$ e dire dove sono definite.

$h_1 = [g \circ f](x) \Rightarrow \quad x \xrightarrow[f]{} \sqrt{x} \xrightarrow{g} \frac{1}{\sqrt{x} - 2} = h_1$

$h_2 = [f \circ g](x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$

$\text{dom}(h_1) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \qquad x \geq 0$ con $x \neq 4$

$\text{dom}(h_1) = [0\,;+\infty) \setminus \{+4\}$

Successioni

Lemma

$n \in \mathbb{N}$, se $n > \underbrace{[\alpha]}_{\text{parte intera di } \alpha} \Rightarrow n > \alpha$

Dimostrazione

1) Se $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\alpha] = \alpha$

L'enunciato è automaticamente modificato

$$n > [\alpha] = \alpha$$

2) $\alpha \notin \mathbb{Z}$

Sappiamo che $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$

$$\alpha < [\alpha] + 1 < \alpha + 1$$

Ora so che $n \in \mathbb{N}$, $n > [\alpha]$

$$\Rightarrow n \geq [\alpha] + 1 > \alpha$$

Es. 1 (Verifica di limite)

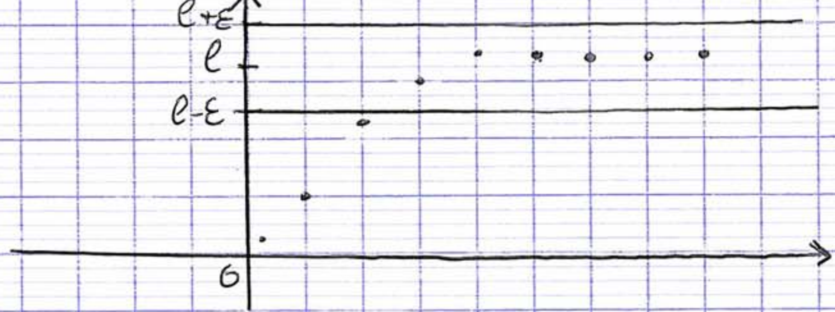
Verificare, attraverso la definizione che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{1}{2}$$

→ **Richiamo**: Una successione a_n si dice convergente a $\ell \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$



Occorre dimostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$$\left| \underbrace{\frac{n^2}{2n^2+5}}_{a_n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 5}{2(2n^2+5)} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n^2+5)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Quindi se scegliamo $n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ allora vale $\left|\frac{3n-5}{6n^2+9}\right| < \varepsilon$

Calcolare i limiti delle successioni seguenti

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2+1}{n-1} =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\cancel{2}}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} = +\infty$$

Per casa → verificare questo limite con la definizione

$\forall M > 0 \quad \exists n_0 : \forall n > n_0$

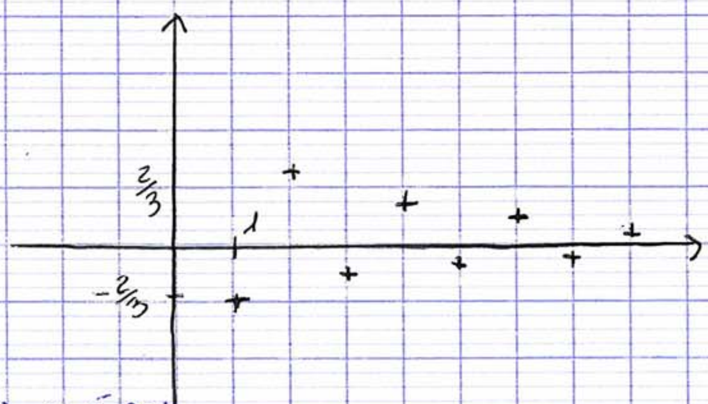
$$\frac{2n^2+1}{n-1} > M$$

$$\frac{2n^2+1}{n-1} > \frac{2n^2}{n} > M$$

$$n_0 > \frac{M}{2} \qquad o \quad n_0 = \left[\frac{M}{2}\right]$$

2) $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \text{ é pari} \\ -1\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$



Se n é pari

$n = 2k \qquad \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n + 2}{(-1)^{n+1} - 2}}_{a_n} =$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{-3} = -1 & \text{se } n \text{ é pari} \\ \frac{-1+2}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

$a_n = -1 \quad \forall n$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(3n-2)(3n-3)}{2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3n\left(1-\frac{2}{3n}\right) \cdot 3n\left(1-\frac{3}{3n}\right)}{2n^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{9\cancel{n^2}\left(1-\frac{2}{3n}\right)\left(1-\frac{3}{3n}\right)}{2\cancel{n^2}} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left((-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}\pi\right)$$

$$\cos\left((-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \pi\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n-1}{n+1}\pi\right) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \cos\left(-\frac{n-1}{n+1}\pi\right) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\cos\left(-\frac{n-1}{n+1}\pi\right) = \cos\left(\frac{n-1}{n+1}\pi\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{n-1}{n+1}\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{\cancel{n}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}}{\cancel{n}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}}\pi\right) =$$

$$= \cos(\pi) = -1$$

Esercizio 3.1 e 3.4 delle dispense

Svolti nel primo quaderno di esercizi di Analisi Matematica I.

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{4} = e^{4}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e}$$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+100} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}}_{1^{100}} = e$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+4}\right)^{n-3} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{2}}\right)^{n-3} =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{2}}\right)^{\frac{n+4}{2}\cdot\frac{2}{n+4}\cdot(n-3)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{2}}\right)^{\frac{n+4}{2}}\right]}_{e}^{\underbrace{\frac{2(n-3)}{n+4}}_{\to 2}} = e^{2}$$

Calcolo 1. limite dell'esponente esterno

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n-3)}{n+4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 2$$

Caso $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+5n}{n^3-3n+2}\right)^{7n^2+2n+3} =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+5n-3n+2+3n-2}{n^3-3n+2}\right)^{7n^2+2n+3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{8n-2}{n^3-3n+2}\right)^{7n^2+2n+3} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}}\right)^{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}}\cdot$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}}\right)^{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}\cdot\frac{8n-2}{n^3-3n+2}\cdot(7n^2+2n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}}\right)^{\frac{n^3-3n+2}{8n-2}}\right]}_{e}^{\frac{56n^3-14n^2+16n^2-4n-6}{n^3-3n+2}}$$

Esponente $= \frac{56n^3+2n^2-4n-6}{n^3-3n+2} = \frac{n^3\left(56+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}$

$\lim_{n\to+\infty} = 56$

$\left(\frac{n^3+5n}{\dots}\right)^{7n^2+2n+3} = e^{56}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)!}{[(n+1)!]^3} \cdot \frac{(n!)^3}{3n!} =$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\,\cancel{3n!}}{((n+1)\,n!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{\cancel{3n!}} =$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3\,\cancel{(n!)^3}} \cdot \cancel{(n!)^3} =$$

$$= \frac{3n\left(1+\frac{1}{n}\right)3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= \frac{(3n)^3\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}\overbrace{\left(1+\frac{2}{3n}\right)}^{\to 1}\overbrace{\left(1+\frac{1}{3n}\right)}^{\to 1}}{n^3+3n^2+3n+1} = 27 > 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} = +\infty$$

Casa → Verificare attraverso la definizione che il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$$

Devo dimostrare che $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n>n_0$ allora

$$\left|\frac{x^2+2x}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{2x^2}+4x-\cancel{2x^2}-1}{4x^2+2}\right| < \varepsilon$$

$4x-1$ è sempre positivo perché $x\to+\infty$

Quindi $\frac{4x-1}{4x^2+2} < \varepsilon$

$$\frac{4x-1}{4x^2+2} < 4x-1 < \varepsilon$$

$$4x-1<\varepsilon \iff 4x<\varepsilon+1$$

→ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} = 0$

→ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1}$ ⇒ Criterio del rapporto

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\underbrace{\frac{\sqrt{4}}{x^2+1}}_{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ 0}} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1}}_{\substack{x \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{x^2+1}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 0}$

→ $\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^4 - x^2}{x^2 - x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 \left(6 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)} =$ $\left(6 - \frac{1}{x^2}\right) \to 6$, $\left(\frac{1}{x} - 1\right) \to -1$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^4}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{-1} = -\infty$

Studiare $y = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$

- Dominio
- Positività
- Simmetrie
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
- $Im(f)$
- $\sup(Im(f)) \overset{?}{\leq} \max[Im(f)]$
- $Inf(Im(f)) \overset{?}{=} \min[Im(f)]$

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$

$x^2 + 1 \geq 1 > 0$

b) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) Simmetrie

$f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$ quindi $f(x)$ é pari

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0^+$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ perché la funzione é pari

e) Monotonia $\to$ studio $x \geq 0$ poi per simmetria per $x \leq 0$

se $x_2 > x_1$

$1 + x_2^2 > 1 + x_1^2$

$\dfrac{1}{1+x_2^2} < \dfrac{1}{1+x_1^2} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \quad \forall x_2 > x_1$

$f(x)$ decrescente per $x > 0$ e $f(x)$ é crescente per $x < 0$ (per simmetria)

f) $Im(f) = (0; 1]$

$0 < f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

g) $Sup[Im(f)] = 1 = \max[Im(f)]$

h) $Inf[Im(f)] = 0$ ma non é il minimo, 0 é estremo inferiore.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{y} \in Im(f) \quad \bar{y} < \varepsilon$

$\Delta < 0$ $\quad y > \frac{1}{2}$ oppure $y < -\frac{1}{2}$

$Im(f) = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$

➔ Studiare $y = \sin x^2$

▸ $Dom(f) = \mathbb{R}$

▸ Positività → $f(x) \geq 0 \iff \sin x^2 \geq 0$

$\sin x \geq 0 \rightarrow [0; \pi] \cup [2\pi; 3\pi] \cup [4\pi; 5\pi] \dots$

$= [0 + 2\pi k ; \pi + 2\pi k]$

▸ Simmetrie → $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2$

$f(x)$ é pari ⇒ simmetria rispetto alle ordinate

▸ Limiti → $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$

La funzione non ammette limiti, continua ad oscillare tra -1 e 1, per simmetria non ammette limite né in $+\infty$ né in $-\infty$.

▸ $Im(f) \rightarrow [-1; 1]$

$f(0) = \sin 0^2 = 0$

▸ $\sup[Im(f)] = 1 = \max[Im(f)]$

▸ $\inf[Im(f)] = -1 = \min[Im(f)]$

Zeri della funzione → studio per $x \geq 0$

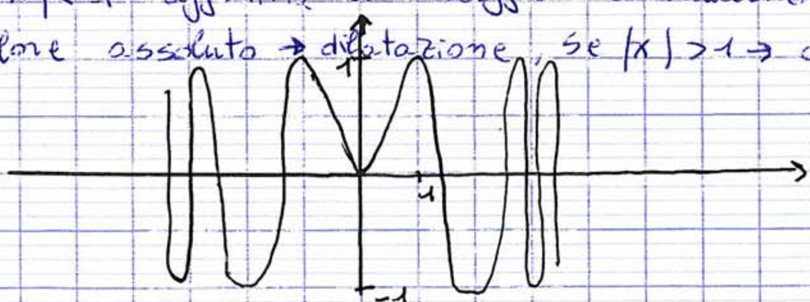
$\sin(x^2) = 0$

$x^2 = k\pi \qquad k \in \mathbb{N} \iff x = \pm\sqrt{k\pi}$

▸ $y = \sin(x^2) = \sin(x \cdot x)$ → coefficiente variabile

→ $|x| < 1$ affinità con coefficiente variabile più piccolo di 1

Valore assoluto → dilatazione, se $|x| > 1$ → compressione



Ampiezza rimane la stessa $Im\, f\, [-1; 1]$ cambia la frequenza

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 3x^2 - 4x + 5 = 12$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \alpha x - 2 = -\alpha - 2$$

$12 = -\alpha - 2$

$\alpha = -14$

2) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+\alpha) & \text{con } x < 0 \\ 1 & \text{con } x \geq 0 \end{cases}$$

È continua in $\mathbb{R}$, se $x > 0 \to f(x)$ è continua perché la funzione costante $y = 1$ è continua su tutto $\mathbb{R}$
se $x < 0$ $f(x)$ è continua perché $y = \sin(x+\alpha)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Andiamo a imporre la continuità nel punto di raccordo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \sin(x+\alpha) = \sin(\alpha)$$

$\sin(\alpha) = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

3) Verificare che $\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$

- $a > b$ $\max(a;b) = a$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$$

- $a < b$ $\max(a,b) = b$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$$

- $a = b$ $\max(a,b) = a = b$

$$\frac{a+b}{2} + \cancel{\frac{|a-b|}{2}} = \frac{a+b}{2} = a = b$$

2) $\lim_{x \to \pi/2} \sin x \cdot \cos x = f(\pi/2) = 1 \cdot 0 = 0$

$f(x) = \sin x \cos x$
funzione continua

3) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{4}$$

4) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21} = \frac{23}{0} = +\infty$$

5) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x-1)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{\sqrt{x} - 2}}{(x-1)\cancel{(\sqrt{x} - 2)}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{12}$$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{1+x}}^{a} - \overbrace{\sqrt[3]{1-x}}^{b}}{x}$$

(Sfruttare $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$$

$$\left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 + x - (1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

9/11/10

* $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{2x^2+5x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{(x^2+3x)(2x^2+5x)} \cdot (x^2+3x) =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{x^2+3x} \cdot \frac{x^2+3x}{2x^2+5x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x^2+3x)}{x^2+3x}}_{1 \text{ perché}} \frac{x(x+3)}{x(2x+5)} = \frac{3}{5}$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

* In questo caso $\log_e e = 1$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2+3x)}{2x^2+5x+1} = 0$

* Determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+\lambda} + x\right) = 2$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+\lambda} + x)}{\sqrt{x^2+\lambda} - x} \cdot \left(\sqrt{x^2+\lambda} - x\right) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}\,(x^2+\lambda-x^2)}{\sqrt{x^2+\lambda} - x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+\lambda} - x} =$

$= \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{\lambda}{x^2}\right)} - x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{x}{x^2}} - x} =$

$= \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{x}{x^2}} - x} = \lambda \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-x\left(\sqrt{1+\frac{\lambda}{x^2}} + 1\right)} = \frac{\lambda}{2}$

$\frac{\lambda}{2} = 2 \rightarrow \lambda = 4$

* Confrontare localmente funzioni nell'intorno di un punto x_0

$f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

* $f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Per esempio $f \sim g \quad x \to x_0 \leftrightarrow f - g = o(g)$

* Infiniti e infinitesimi campione

$(1+x)^{\beta} - 1 \sim \beta x \quad x \to 0 \Rightarrow (1+x)^{\beta} \sim 1 + \beta x \quad x \to 0$

$(1+x)^{\beta} = 1 + \beta x + o(x)$

In particolare $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) \quad x \to 0$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\log(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$

$\log(1+x) \sim x \quad x \to 0$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$e^x - 1 \sim x \quad x \to 0$

$e^x \sim 1 + x \quad x \to 0$

Principio di eliminazione dei termini trascurabili:

se $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g) \quad x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esercizio: Determinare ordine di infinito di $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$

Verifichiamo che $f(x)$ sia infinito per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} + \sqrt{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} + \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} + \sqrt{x} = +\infty$$

ora calcolo l'ordine di infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = c \neq 0 < +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} + \sqrt{x}}{x^{\alpha}} \underset{\alpha = \frac{1}{2}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} + 1 = 1$$

$f(x)$ è un infinito di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \underbrace{\sqrt{x}}_{P.P.} \quad x \to +\infty$$

Es: Calcolare la P.P per $x \to +\infty$ di $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ con $x \to +\infty$

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{b} = (*)$

Sfruttiamo la differenza di cubi $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$$

$$(*) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1}} = 0$$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ Voglio calcolare la parte principale di $f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x)$$

Voglio determinare α in modo che $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = c < +\infty$ $c \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \frac{2}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{x^{2/3}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{2}{3}$$

$\alpha = \frac{2}{3}$

$$f(x) \sim \frac{2}{3} x^{2/3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} \qquad x \to +\infty$$

$$* \; f(x) = \frac{x\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sin x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \qquad x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{x}\overset{\to 0}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \overset{\to 0}{\sin x}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}} = \frac{x\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x\sqrt{x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}}{x^1}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}$$

perché $\sqrt{x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \underset{\to 0}{x} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1}$

Continuità e Teoremi

* Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \arccos(x) + \alpha & -1 < x < 1 \\ (x-\beta)^2 & x \leq -1 \end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$

- se $x \geq 1$ $f(x)$ è continua perché restrizione di una funzione continua ($y = x^2$ funzione polinomiale che sappiamo essere continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare su $x \geq 1$)
- se $x \leq -1$ (analogo al ragionamento di $x \geq 1$)
- se $-1 < x < 1$ $y = \arccos(x) + \alpha$ quindi $f(x)$ è continua perché inversa di una funzione continua ($y = \cos x$ continua, quindi $y = \arccos x + \alpha$ è continua perché traslazione di una funzione continua)

→ Imponiamo la continuità nei punti di raccordo $x = \pm 1$

* $\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x)$

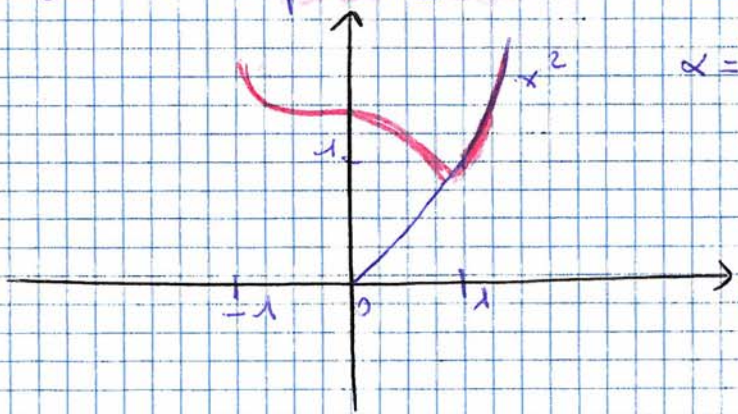
$\arccos(1) + \alpha = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

* $\lim_{x \to -1^-} y(x) = \lim_{x \to -1^+} y(x)$

$(-1-\beta)^2 = \lim_{x \to -1^+} \arccos x + 1 = \pi + 1$

$(\beta + 1)^2 = \pi + 1 \Rightarrow \beta = -1 \pm \sqrt{\pi + 1}$

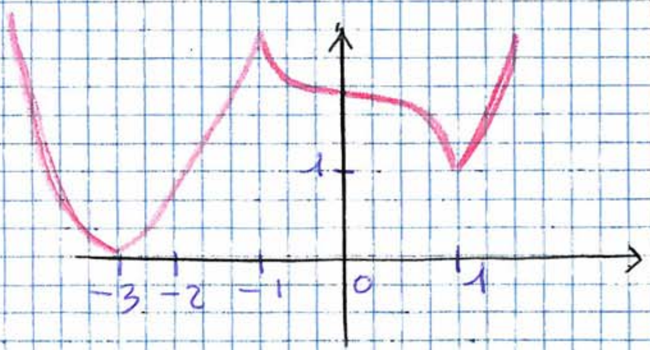
Disegno



$\alpha = 1$ e $\beta = -1 + \sqrt{1+\pi} > 0$

se $\alpha = 1$ e $\beta = -1 - \sqrt{1+\pi} < 0$

⇐ Continua



$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ (Per simmetria $= 1$ anche per $x \to -\infty$)

Teorema di composizione dei limiti

Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Sia g una funzione definita in un intorno di ℓ tale che 1) se ℓ è finito g è continua in ℓ
2) se ℓ è $= \pm\infty$, $\exists$ lim (finito o ∞)

Allora $\exists$ lim $x \to x_0$ della funzione $g \circ f$ e vale $\lim_{y \to \ell} g(y) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$

Es: Dire se vale

$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{\pi} \arctan x\right] = \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\pi} \arctan x\right] \to$ NO!

Vediamo se si può applicare il teorema della composizione prendendo il 1° limite.

$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x \qquad g(y) = [y]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\pi} \arctan x = 1$

$g(y)$, però, non è continua in $y = 1 \to$ Non posso applicare il teorema di composizione!

Devo calcolare separatamente i limiti

1) $\left[\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2}{\pi} \arctan x}_{\searrow 1}\right] = [1] = 1$

2) $0 < \frac{2}{\pi} \arctan x < 1 \to \left[\frac{2}{\pi} \arctan x\right] = 0$

$\hookrightarrow 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

$0 < \frac{2}{\pi} \arctan x < 1$

$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{\pi} \arctan x\right] = 0$

Es: $\lim_{x \to 3} 2^{\cos \frac{\pi}{3} x} = \lim_{y \to -1} 2^y = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ Teorema

$f(x) = \cos \frac{\pi}{3} x$

$\hookrightarrow$ Ambedue continue

$g(y) = 2^y$

$\left.\right\} \lim_{x \to 3} g(f(x)) \to \lim_{y \to \ell} g(y)$

$\lim_{x \to 3} f(x) = -1$ $\qquad g(y)$ continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare in $y = -1$

Caso $= \lim_{x \to 1} \log_2 (1 + \sin(\pi x))$

LIMITI TRIGONOMETRICI

* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)^2 x \sin x} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)^2 = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(y)}{y^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \underbrace{\sin x \cdot \frac{1}{x}}_{\to 0} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2}\sin x \qquad y \to 0 \\ \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \cdot \frac{\sin x + \tan x}{\sin x + \tan x}$

* $\frac{\sin x}{x} = 1 \quad x \to 0$

* $\frac{tg(x)}{x} = 1 \quad x \to 0$

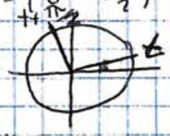
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x^3(\sin x + \tan x)} \sim \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^3(\sin x + \tan x)} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{x^2}{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^2}}{x^3(x+x)} = \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{-\left(-x^2+\frac{1}{4}x^4\right)}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x^2}{1-x^2+\frac{1}{4}x^4}}_{\frac{0}{-1}=0} \right] \cdot \underbrace{\frac{1}{2x^4}}_{0}$$

* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \qquad t = x - \frac{\pi}{2} \to x = t + \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(t)}{t} = -1$$

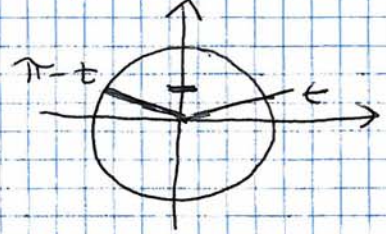
Archi associati:
$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$



* $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \frac{0}{0} \qquad t = \pi - x \to x = \pi - t$

$x \to \pi \quad \to t \to 0$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi - t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi - t)}{t} = 1$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 236

* $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$ $\quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 0$$

$f(x) \to 0$ per $x \to 0$

Devo determinare α tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = C < +\infty$, $C \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \frac{x^{2-\frac{1}{2}}}{x^\alpha} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{3}{2}$

$f(x) \sim \frac{1}{2} x^{3/2}$ $\quad x \to 0$

oppure $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{3/2}$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad x \to 0$

* $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+3x+1)}{2x^2+5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+3x+1)}{x^2+5x} \cdot \frac{(x^2+3x)}{(x^2+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(x^2+3x+1)}{x^2+3x}}_{\to 1} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2+5x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x^2+3x}{x^2+5x} = \frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}(2x+5)} = \frac{3}{5}$$

Secondo metodo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+3x}{x+o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3$$

Perché $\frac{1}{2}x^2 = o(x) \quad x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0$$

$$o(x^2) = o(o(x)) = o(x)$$

Osservazione → Per il calcolo $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}$ lo stesso procedimento non funziona.

$$\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}x^2}+o(x^2)-\frac{1}{2}x^2}{x^4}$$

Non posso applicare il principio di termini trascurabili.

calcolare direttamente il $\lim_{x\to 0}$ Vedremo poi con gli sviluppi di Taylor che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{1}{24}$

Es: Calcolare la parte principale di $f(x)=\sin x$ per $x\to\pi$

a) $f(x)\to 0 \quad x\to\pi$

Quindi $f(x)$ é un infinitesimo per $x\to\pi$

b) Confronto $f(x)$ con $(x-\pi)$ in un intorno di π

$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)}{(x-\pi)^\alpha} =$ Voglio determinare α in modo che il limite sia finito e diverso da 0.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)^\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{t^\alpha} = -1 \qquad \alpha=1$$

$t=x-\pi$
$x=t+\pi$

$\sin(t-\pi) \sim -t \quad t\to 0$

$\Rightarrow \sin(x) \sim -(x-\pi) \quad x\to\pi$

$\sin x \sim \pi - x$

Alternativa → $f(x)=\sin x \quad x\to\pi$

$t=x-\pi$

$f(t)=\sin(t+\pi) = -\sin t \sim -t$

* Calcolare la parte principale di $f(x)=1-\sin x$ per $x\to\frac{\pi}{2}$

$t=x-\frac{\pi}{2} \to$ se $x\to\frac{\pi}{2} \quad t\to 0$

$g(x) \to 0 \qquad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^3+5} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \underset{\alpha=2}{\uparrow}= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{3x^3+5} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = \frac{2}{5}$$

* Calcolare la P.P. di $e^{\sqrt[3]{1+2x^2}} - e = g(x)$ per $x \to 0$

⚠ $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+2x^2} = 1 \neq 0$

Non posso applicare direttamente il processo di prima.

$$e\, e^{\sqrt[3]{1+2x^2}-1} - e = e\left(e^{\sqrt[3]{1+2x^2}-1} - 1\right) \sim e\left(\cancel{1} + \sqrt[3]{1+2x^2} - \cancel{1} - 1\right)$$

$$\sim e\left((1+2x^2)^{1/3} - 1\right) \qquad x \to 0$$

$$\sim e\left(1 + \frac{1}{3}2x^2 - 1\right) \qquad \text{perché } (1+f(x))^\alpha = 1 + \alpha f(x) + o(f(x))$$

se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$$\sim \frac{2}{3} e\, x^2$$

$$g(x) \sim \frac{2}{3} e\, x^2 \qquad x \to 0$$

$$g(x) = \frac{2}{3} e x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

Es: Calcolare la P.P. di $h(x) = \log(\sqrt{x^2+9}) - \log 3$ per $x \to 0$

Ricordiamo che $\ln(1+f(x)) = f(x) + o(f(x))$ se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$$h(x) = \log\sqrt{x^2+9} - \log 3 = \log(x^2+9)^{1/2} - \log 3 = \frac{1}{2}\log(x^2+9) - \log 3$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\right) - \log 3 = \cancel{\frac{1}{2}\log 9} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{9}\right) - \cancel{\log 3}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{9}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{9} = 0 \qquad \log\left(1+\frac{x^2}{9}\right) \sim \frac{x^2}{9} \qquad x \to 0$$

$$h(x) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{9} = \frac{1}{18}x^2 \qquad x \to 0$$

$$h(x) = \frac{1}{18}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

* Calcolare P.P. di $\log\sqrt[7]{3x+2} - \log\sqrt[7]{5}$ per $x \to 1$

$\lim_{x\to 1}$ è un infinitesimo $f(x) \to 0$

Metodo 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^{\underset{\text{trovare } \alpha}{\uparrow}\alpha}} = c < +\infty \quad \text{con } c \neq 0$$

Metodo 2 $\quad \log(1+x) = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0$

$t = x - 1 \qquad$ quando $x \to 1 \qquad t \to 0$

$x = t + 1 \qquad f(t) = \log\sqrt[7]{3(t+1)+2} - \log\sqrt[7]{5}$

Calcolo la P.P. di $f(t) \qquad t \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{7}\log(3t+5) - \frac{1}{7}\log(5)$$

$$f(t) = \frac{1}{7}\log\left(5\left(\frac{3}{5}t+1\right)\right) - \frac{1}{7}\log(5) = \frac{1}{7}\log 5 + \frac{1}{7}\log\left(1+\frac{3}{5}t\right) - \frac{1}{7}\log 5$$

$$= \frac{1}{7}\log\left(1+\frac{3}{5}t\right) \sim \frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}t \qquad t \to 0$$

$$f(t) \sim \frac{3}{35}t \qquad t \to 0$$

$$f(x) = \frac{3}{35}(x-1) + o(x-1) \qquad x \to 1$$

* $\lim_{x \to e} \frac{\log x - 1}{x - e}$

Pongo $y = x - e$ $\quad x \to e$

$x = y + e \quad y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(y+e) - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\log e\left(\frac{y}{e} + 1\right) - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{1} + \log\left(\frac{y}{e} + 1\right) \cancel{- 1}}{y} = \frac{1}{e}$$

ES: Sia $f(x) = x^7 + x$

Verificare che f é invertibile e verificare che la funzione inversa é derivabile e calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 7x^6 + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ é monotona crescente

$\Rightarrow f(x)$ é invertibile

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f'(x)$ non si annulla mai quindi la funzione inversa é derivabile

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{7(f^{-1}(0))^6 + 1} = 1$$

$\hookrightarrow f^{-1}(0) = 0$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{7(f^{-1}(2))^6 + 1} = \frac{1}{7+1} = \frac{1}{8}$$

$\hookrightarrow f^{-1}(2) = 1$

$x^7 + x = 2$

ES: Sia $f(x) = (x-1)e^{x^2} + \mathrm{arctg}(\log x) + 2$

Dimostrare che f é invertibile sul suo dominio e determinare $\mathrm{Im}(f)$

calcoliamo $f'(x) = 1e^{x^2} + (x-1)2xe^{x^2} + \dfrac{1}{1+(\log(x))^2} \cdot \dfrac{1}{x} =$

$$= \underbrace{e^{x^2}(2x^2 - 2x + 1)}_{>0 \text{ per } \forall x} + \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(\log(x))^2}}_{>0 \text{ grazie al dominio}}$$

$\mathrm{Dom}(f) = (0; +\infty)$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ é strettamente crescente e invertibile.

Notare che $f(x)$ é continua in $x \in \mathrm{dom}(f)$ perché somma e composizione di funzioni continue.

$$\mathrm{Im}(f) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)e^{x^2} + \mathrm{arctg}(\log x) + 2 = -1 + 2 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = (1 - \frac{\pi}{2}; +\infty)$

23/11/10

Es: Verificare che si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione: $f(x) = \arcsin(x)$

Nel suo dominio $[a; b]$ e determinare i punti di Lagrange cioè i punti c tali che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(x) = \arcsin(x)$ $\quad$ $\text{dom}(f) = [-1; 1]$

1) $f(x)$ continua perché inversa di una funzione continua per $x \in [-1; 1]$

2) $f(x)$ è derivabile su $(-1; 1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ → le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte → $\exists\, c : f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\arcsin(1) - \arcsin(-1)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi/2 + \pi/2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi} \iff 1 - c^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$c = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)} \qquad c_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$$

$$c_2 = -\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$$

Es: Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$

1) $\text{dom}(f)$ → $x^2 - 4 = 0$ $\quad$ $x = \pm 2$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

2) Simmetrie $\quad f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 - 4} = -f(x)$

La funzione è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine

→ Posso studiare $f(x)$ per $x \geq 0$ e poi disegnare il grafico per simmetria

3) Positività della funzione

$f(x) \geq 0$

$f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 4}$

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui

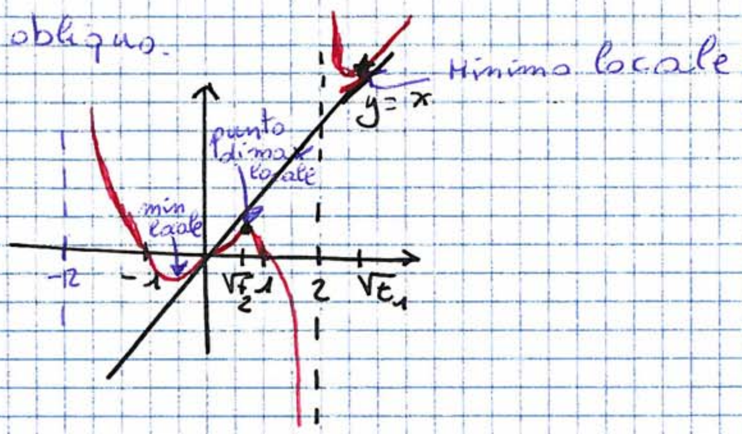
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = 1$$

$f(x) \sim x \qquad x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x}{x^2-4} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}-x-\cancel{x^3}+4x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{+3x}{x^2-4} = 0$$

$y = x$ è asintoto obliquo.



5) Calcolo di derivate (massimi e minimi locali e globali)

$$f'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2-4)-2x(x^3-x)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4-12x^2-x^2+4-2x^4+2x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{x^4-11x^2+4}{(x^2-4)^2} \qquad f'(0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

6) $\exists\, \bar{x} : f'(\bar{x}) = 0$?

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ continua su } [0,1] \\ f(x) \text{ è derivabile su } [0,1] \\ f(0) = f(1) \end{array}\right.$$

Rolle $\to \exists\, \bar{x} \in (0,1) \quad f'(\bar{x}) = 0$

$f'(\bar{x}) = 0$

$$\frac{x^4-11x^2+4}{(x^2-4)^2} = 0$$

$x^4 - 11x^2 + 4 = 0$

$t = x^2 \qquad t^2 - 11t + 4 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-16}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2} = \begin{cases} \frac{11+\sqrt{105}}{2} = t_1 > 0 \\ \frac{11-\sqrt{105}}{2} = t_2 > 0 \end{cases}$$

$x^2 = t_1 = \frac{11+\sqrt{105}}{2} \qquad\qquad x^2 = t_2 = \frac{11-\sqrt{105}}{2}$

$x = \pm\sqrt{t_1} \qquad\qquad x = \pm\sqrt{t_2}$

26/11/10 $g(x) = e^{f(x)}$ dove $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$

1) dom $(g) =$ dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

2) Simmetrie? $f(-x) = -f(x)$

$$g(-x) = e^{f(-x)} = e^{-f(x)} \neq \begin{cases} -g(x) \\ g(x) \end{cases}$$

La simmetria é persa

3) Comportamento asintotico:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{f(x)} = +\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{f(x)} = 0$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} e^{f(x)} = +\infty$$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} e^{f(x)} = 0^+$$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} e^{f(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 0^+$$

4) Insieme di positività di $g(x)$

$g(x) = e^{f(x)} > 0 \quad \forall x \in \text{dom } g(x)$

5) Monotonia

$g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$

$g'(x) \geq 0 \iff \underbrace{e^{f(x)}}_{\geq 0} f'(x) \geq 0$

$f'(x) \geq 0$

$\to g(x)$ é monotona crescente per $x \in (-\infty; -\sqrt{t_1}) \cup (-\sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}) \cup (t_2; +\infty)$

Casa $\to$ Data $f(x) = \log x - \dfrac{1}{\log x}$

Determinare il più grande intervallo contenente $\frac{1}{2}$ ove $f(x)$ é invertibile e scrivere esplicitamente $f^{-1}(x)$. Calcolare $(f^{-1})'(0)$.

$\boxed{a < 0}$

$6x^2 \geq a \qquad \forall x \in dom(f)$

$\Rightarrow f(x)$ é strettamente crescente per $x \in dom(f)$

$\Rightarrow f(x)$ é continua per $\forall x \in dom(f)$ perché composizione di funzioni continue

1) $\exists !$ soluzione a $f(x) = 0$

2) $f(x)$ é anche invertibile per $a < 0$ perché funzione strettamente monotona crescente.

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))}$$

$f^{-1}(3) = t \qquad 3t^2 - a \log t = 3$

$t = 1 \qquad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{6-a}$

$\boxed{a > 0}$

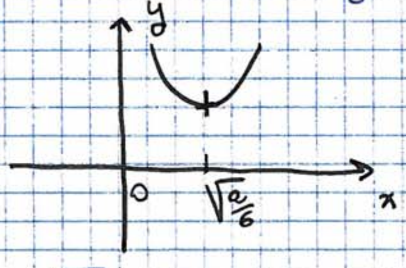
$f'(x) = 6x - \frac{a}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2 \geq a$

$x^2 \geq \frac{a}{6}$

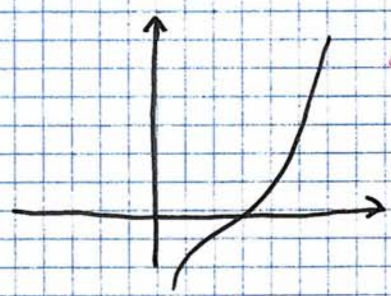
$x \geq \sqrt{\frac{a}{6}}$ oppure $x \leq -\sqrt{\frac{a}{6}}$

$a > 0$ quindi radice definita

$f'(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt{\frac{a}{6}}$



a>0



a<0

$x = \sqrt{\frac{a}{6}}$ é un punto di minimo globale

1) Quante soluzioni $f(x) = 0$?

se $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) > 0 \Rightarrow$ no soluzioni a $f(x) = 0$

se $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 0 \Rightarrow$ Una soluzione

se $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) < 0 \Rightarrow$ Due soluzioni di $f(x) = 0$

$f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 3 \cdot \frac{a}{6} - a \log \sqrt{\frac{a}{6}} \gtrless 0$

$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \log \frac{a}{6} \gtrless 0$

$= \frac{a}{2}\left(1 - \log \frac{a}{6}\right) \gtrless 0$

Richiami: Sviluppi di Taylor

Per una funzione $y = f(x)$ derivabile n volte in un punto x_0 si dimostra che $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}_{} + o((x-x_0)^n)$

Polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0

cioè $f(x)$ è decomposto (in un intorno di $x = x_0$) come somma di un polinomio di grado n più un certo errore infinitesimo di ordine n.

Quando $\boxed{x_0 = 0}$ allora si parla di sviluppo di McLaurin.

Sviluppi notevoli di McLaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

ES: $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x)^{-1}\right) = +(1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = +2(1-x)^{-2} = \frac{2}{(1-x)^2} \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 2(+3)(1-x)^{-4} = 2\cdot 3(1-x)^{-4} \qquad f'''(0) = 2\cdot 3$

$f^{(n)}(x) = 2\cdot 3 \cdots n(1-x)^{(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$

$$\frac{1}{1-x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{2\cdot 3}{3!}x^3 + \dots + \frac{n}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \quad x \to 0$$

Es: $\log(1+x) = f(x)$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

Es: $f(x) = \sin^2 x$ Calcolare lo sviluppo di Mc Lavin $(x \to 0)$ di ordine 6

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^2)\right)^2 = \left(x^2 + \frac{x^6}{(3!)} + o(x^6) - 2\frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} \cdot 2\right) =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{5!}\right)x^6 + o(x^6)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3}\right)x^6 + o(x^6) \quad x \to 0$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60}\right)x^6 + o(x^6) \quad x \to 0$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \quad x \to 0$$

Es: Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ di ordine 4:

$$f(x) = \log(1 - \sin^2 x)$$

$$f(x) = \log(1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x - \frac{1}{2}(-\sin^2 x)^2 + o(x^4)$$

$$f(x) = -\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \quad x \to 0$$

$$f(x) = -x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x^4 + o(x^4)\right)$$

$$f(x) = -x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) = \log(1 - \sin^2 x) \quad x \to 0$$

* Sviluppo di e^x fino all'ordine n in $x_0 = -1$

a) Applichiamo la definizione

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{e^{x_0}(x - x_0)^n}{n!} + o(x - x_0)$$

$x_0 = -1$

$$e^x = e^{-1} + e^{-1}(x+1) + \frac{e^{-1}(x+1)^2}{2!} + \dots \frac{e^{-1}(x+1)^n}{n!} + o\left((x+1)^n\right) \quad x \to -1$$

Altro metodo

$e^x = f(x) \qquad x \to -1$

$t = (x+1) \qquad x = t - 1 \qquad t \to 0$

$$e^{t-1} = e^{-1} e^t = e^{-1}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o\,t^n\right) \quad t \to 0$$

$$e^x = e^{-1}\left(1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!} + o(x+1)^n\right)$$

ES: $f(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3$ Ordine 2 in $x_0 = 1$

$f(1) = 2 + 1 + 3 - 3 = 3$

$f'(x) = 1 + 6x - 3x^2$ $f'(1) = 4$

$f''(x) = 6 - 6x$ $f''(1) = 0$

$f(x) = 3 + 4x + o(x^2)$

$t = x - 1 \rightarrow x = t + 1$
cambiamento di variabile

$P(t) = 2 + (t+1) + 3(t+1)^2 - (t+1)^3$
$= 3 + t + 3(t^2 + 1 + 2t) - (t^3 + 1 + 3t^2 + 3t)$
$= 3 + t + 3t^2 + 3t^2 + 3 + 6t - t^3 - 1 - t^2 - 3t = 5 + 4t - t^3$
$P(t) = 5 + 4t + o(t^2)$
$P(x) = 5 + 4(x-1) + o((x-1)^2)$

ES: $f(x) = e^x \sin x$ $f(0) = 0$

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$

$f''(0) = 2$

$f'''(x) = 2 \cdot (e^x \cos x - e^x \sin x)$ $f'''(0) = 2 \cdot (1 - 0) = 2$

$f^{IV}(x_0) = 2(e^x \cos x - e^x \sin x - (e^x \sin x + e^x \cos x)) = -2 e^x \sin x$

$f^{IV}(0) = -2$

$f^{V}(x_0) = -2(e^x \sin x + e^x \cos x)$ $f^{V}(0) = -2 \cdot 1 = -2$

$\boxed{30/11/10}$

→ Studiare $f(x) = \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \begin{cases} \log \frac{1+x}{1-x} & \text{se } \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ \log \left(-\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{se } \frac{1+x}{1-x} < 0 \end{cases}$

1) dom $f(x)$ → $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$\left|\frac{1+x}{1-x}\right| > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + x \neq 0$ $x \neq -1$

dom $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

2) $f(-x) = \log \left| \frac{1 + (-x)}{1 - (-x)} \right| = \log \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = -\log \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{-1} = -\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

$= -f(x)$ → Simmetria rispetto all'origine (o equivalentemente $f(x)$ si dice dispari).

Studiamo la funzione per $x \geq 0$

3) Limiti → $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ ✱ $= \lim_{x \to +\infty} \log \frac{1+x}{x-1} = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log \left(\frac{|1+x|}{x-1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) \end{array}\right\}$ li otteniamo per simmetria e in $x=0$ ci sarà un punto di flesso.

Calcolo di limite con Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

La stessa cosa vale per gli sviluppi di Taylor.

→ Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^5}{5!}} + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

→ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}{\cancel{1} + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^5) - \left(\cancel{1} + x^3 + o(x^5)\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1$$

Casa =
$$\lim_{x \to 0} \frac{2 + \cos(3x) - 3\cosh x}{\log(1 + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{(3x)^4}{4!} + o(x^5) - 3\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{\dots} = \lim_{x \to 0} \frac{-12x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -6$$

Ordine di infinitesimo è 5

P.P. di $f(x) = \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!5}\right) x^5$

Casa = Calcolare la formula di Taylor arrestata all'ordine n di centro $x_0 = 3$ di $f(x) = \log x$ (→ Cambiamento di variabile)

$t = x - 3$ $\quad x = t + 3$ $\quad$ Cambiamento di variabile

$$f(t) = \log(t+3) = (t+3-1) - \frac{(t+3-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(t+2)^n}{n} + o((t+2)^n) =$$

$$= (t+2) - \frac{(t+2)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(t+2)^n}{n} + o((t+2)^n) =$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + o((x-1)^n)$$

$f(3) = \log 3$

$f'(3) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

$f''(3) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{9}$

$f'''(3) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} = \frac{2}{27}$ $\qquad f(x) = \log(3) + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{1}{81}(x-3)^3$

→ Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine massimo possibile della funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x - \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Determinare $f'(0)$, $f''(0)$ e dire se esiste in $x=0$ la derivata terza.

$x \geq 0$

$f(x) = \sin x - \log(1+x) \qquad x \to 0^+$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) + o(x^5) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$x < 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!}\right) - \frac{1}{2} + o(x^6) \quad x \to 0^-$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

Sviluppo di McLaurin di ordine massimo → Il polinomio di McLaurin (se ∃ è unico!), quindi gli gli sviluppi di McLaurin destro e sinistro devono coincidere.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

3/11/10

→ Calcolare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) = xe^{1/x}$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}; 5]$

dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

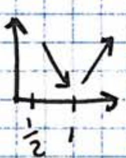
$f(x)$ é continua e derivabile sul suo dominio → $f(x)$ é continua e derivabile nella restrizione $[\frac{1}{2}; 5]$

Per Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo perché $f(x)$ é continua nell'intervallo chiuso e limitato (compatto) $[\frac{1}{2}; 5]$

calcoliamo $f'(x) = e^{1/x} - xe^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = \underbrace{e^{1/x}}_{>0}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$

$$1 - \frac{1}{x} > 0$$

$$1 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > 1$$



$x = 1$ → minimo globale

$f(1) = e$

$\frac{1}{2}e^2 = f(\frac{1}{2})$ $\qquad f(5) = 5e^{1/5}$

$f(\frac{1}{2})$ massimo globale perché $f(\frac{1}{2}) > f(5)$

Calcolo approssimato

Approssimare il valore numerico e. Cosa significa?

a) Trovare un numero sufficientemente vicino a e

b) Stimare l'errore che si commette

Idea: Usare lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange della funzione $f(x) = e^x$

Formula di Taylor con resto di Lagrange centrato in $x_0 = 0$

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Con $c \in (0; x)$ (o $c \in (x, 0)$ a seconda del segno di x)

$x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left| \frac{e^c}{n+1!} \right|$$ ← Errore che commetterei se approssimassi e con la somma dei primi n termini dello sviluppo di Taylor.

$c \in (0, 1)$

$$\frac{e^0}{n+1!} \le \frac{e^c}{n+1!} \le \frac{e^1}{n+1!}$$

$$\frac{1}{n+1!} \le \frac{e^c}{n+1!} < \frac{3}{n+1!}$$

* $f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ é sempre derivabile

* $f(x) = \min\left\{x^2 ; \frac{1}{x^2}\right\}$ Dom $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \min\left\{2x ; \frac{-2x}{x^4}\right\} = \min\left\{2x ; \frac{-2}{x^3}\right\}$$

$f(x)$ é derivabile su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ studiare $f(x) = \dfrac{|e^x - 1|}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{1+x} & \text{se } e^x - 1 \geq 0 \text{ e } x \geq 0 \\ & e^x \geq 1 \to x \geq \ln(1) \to x \geq 0 \\ \dfrac{e^x-1}{1-x} & \text{se } e^x-1 \geq 0 \text{ e } x<0 \\ & \to x \geq 0 \to \text{Mai verificabile} \\ \dfrac{1-e^x}{1+x} & \text{se } e^x - 1 < 0 \text{ e } x \geq 0 \\ & x < 0 \text{ e } x \geq 0 \text{ mai verificab} \\ \dfrac{1-e^x}{1-x} & \text{se } e^x - 1 < 0 \text{ e } x < 0 \\ & x < 0 \end{cases}$

a) Dominio → $\mathbb{R}$

b) Simmetrie → $f(-x) = \dfrac{|e^{-x}-1|}{1+|-x|} = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}-1}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1-e^{-x}}{\ldots} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Minimo in $x = 0$ è 0 e non esiste massimo

4) Intervalli di convessità e flessi

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x + xe^x)\cdot(1+x)^2 - (xe^x+1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{(e^x(x-2)+e^x)\cdot(1-x)^2 - (e^x(x-2)+1)\cdot(2\cdot(-1)\cdot(1-x))}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{x \geq 0}$

$$f''(x) = \frac{(1+x)(e^x + xe^x) - 2(xe^x+1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x + \cancel{xe^x} + \cancel{xe^x} + x^2e^x - \cancel{2xe^x} - 2}{(1+x)^3} =$$

$$= \frac{e^x + x^2e^x - 2}{\underbrace{(1+x)^3}_{>0}}$$

$e^x + x^2e^x - 2 \geq 0$

$e^x(1+x^2) - 2 \geq 0$

$\underbrace{e^x(1+x^2)}_{>0} \geq 2$

Quindi $\ln[e^x(1+x^2)] \geq \ln(2)$

$\ln e^x + \ln(1+x^2) \geq \ln(2)$

$x + \ln(1+x^2) \geq \ln(2)$

7/12/10

Calcolo di primitive

$F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ con $F(x)$ continua e derivabile.

Metodi di integrazione:

▶ **Integrazione per parti** = Sfruttiamo la regola di derivazione del prodotto di due funzioni:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$k + f(x)\,g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f'g(x) = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

▶ **Integrazione per sostituzione**

Consideriamo una funzione continua $f(x)$ e una sua primitiva $F(x)$.
Introduciamo la variabile t legata a x tramite la relazione

$x = \phi(t)$ di classe C^1

$$\frac{d}{dt}\left(F(\phi(t))\right) = F'(\phi(t))\,\phi'(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int F'(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

$$[x = \phi(t)]$$

✱ Calcolare $\int \sin(\beta x)\,dx \overset{\circledast}{=}$

$t = \beta x \qquad dt = \beta\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{\beta}\,dt$

$$\overset{\circledast}{=} \int \sin(t)\,\frac{1}{\beta}\,dt = \frac{1}{\beta}\int \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{\beta} + c =$$

$$\Rightarrow \int \sin(\beta x)\,dx = -\frac{\cos(\beta x)}{\beta} + c$$

Per casa = $\int \cos(\beta x)\,dx = \circledast \qquad t = \beta x$

$dt = \beta\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{\beta}\,dt$

$$\circledast = \int \cos(t)\,\frac{1}{\beta}\,dt = \frac{1}{\beta}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{\beta}\sin t + c = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$$

➡ Calcolare $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

$t = \cos x$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x \qquad dt = -\sin x\,dx$

* Calcolare $= \int x^\alpha \ln x \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln|x| - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln|x| - \frac{1}{(\alpha+1)} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln|x| - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c$

* Calcolare $= \int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|\underbrace{1+x^2}_{>0}| + c =$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

* $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} - \int -\frac{\cos \beta x}{\beta} \alpha e^{\alpha x} dx =$

$= -\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta} \int \cos(\beta x) e^{\alpha x} dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta} \cdot e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\sin \beta x}{\beta} e^{\alpha x} \right.$

$\left. - \int \frac{\sin \beta x}{\beta} \alpha e^{\alpha x} dx \right) = -\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\sin \beta x}{\beta} e^{\alpha x} -$

$\frac{\alpha^2}{\beta^2} \int \sin \beta x \, e^{\alpha x} dx$

$\int \sin \beta x \, e^{\alpha x} dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \beta x \, e^{\alpha x} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \sin \beta x$

$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \beta x \, e^{\alpha x}$

$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha} \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \beta x \, e^{\alpha x} \right)$

$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{\beta e^{\alpha x}}{\beta^2 + \alpha^2} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} \sin \beta x \, e^{\alpha x} =$

$= \frac{\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x - \beta e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2 + \alpha^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) + c$

* Per casa → $\int \sin(nx) \sin(mx) \, dx$

$\int \cos(nx) \cos(mx) \, dx$

$\int \sin(nx) \cos(mx) \, dx$ tale che $m \neq n$

* $\int \underbrace{\sin(nx)}_{g(x)} \underbrace{\sin(mx)}_{f'(x)} dx =$

$= m \sin(nx) \cos(mx) + \int \cos(nx) \cos(mx) \, dx$