NUMERO : 97

DATA : 16/05/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Rivello

MATERIA : Appunti Analisi 1
Prof. Fagnani

5/10/10 Seconda legge della dinamica → $F = ma$

x

$F(x) = ma$

sole

Corso di Analisi Matematica I

I. Numeri (insiemi, logica)

II. Successioni, limite

III. Funzioni, limiti, derivate

IV. Integrali = calcolo delle aree

V. Equazioni differenziali

capitolo I — I. Numeri

* Logica — La matematica é costituita da proposizioni logiche = enunciati che sono o veri o falsi. Nelle proposizioni logiche non ci devono essere ambiguità.

ex P: "$\frac{3}{4}$ é un numero intero" F

P: "$6 \geq 6$" V

* P é una proposizione, $\sim P$ é la sua negazione

P	$\sim P$
V	F
F	V

$\sim(\sim P) = P$

* Se P e Q sono due proposizioni logiche

$P \vee Q$ é vera quando P o Q sono vere o lo sono entrambe

$P \wedge Q$ é vera quando sono entrambe simultaneamente vere

* **Sottoinsieme** $A = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$

$A \subseteq \mathbb{N}$
↳ sottoinsieme di

Unire gli insiemi $A \cup B$

Intersecare gli insiemi $A \cap B$

ex: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divisibile per } 3\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divisibile per } 2\}$

$A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divisibile per } 2 \text{ o per } 3\}$

$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divisibile per } 2 \text{ e per } 3\}$

* **Insieme universo** Ω

$A \subseteq \Omega$

$A^c = \{a \in \Omega \mid a \notin A\}$ → A complementare

$A \cup A^c = \Omega$

$A \cap A^c = \emptyset$ → insieme vuoto

* A, B sono 2 insiemi, $B \setminus A = \{b \in B \mid b \notin A\}$
B meno A

Esercizi

1. Scrivere la tabella di verità di $(\sim(P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$
2. Dimostrare che se A, B e C sono degli insiemi, allora
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. Dimostrare che se A, B sono insiemi allora
$A \cup B = (A / B) \cup (A \cap B) \cup (B / A)$

1.

$\sim(P \vee Q)$	$P \wedge Q$	$\sim(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

* Libri → Caduto Tabacco

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

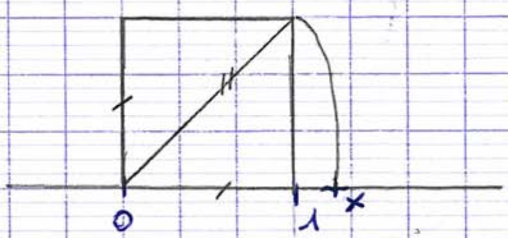
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

$\mathbb{N} \leq \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^+, n \neq 0\}$

$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ → Frazione impropria



$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

I. $\boxed{\text{Teorema}}$ → Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$

Dimostrazione per assurdo → Supponiamo $\exists$ (esiste) $x \in \mathbb{Q}^+$: (tale che) $x^2 = 2$. Allora $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ e m, n primi tra loro.

$x^2 = 2 \iff \frac{m^2}{n^2} = 2$

$(2) \iff m^2 = \underbrace{2n^2}_{\text{pari}}$ $\Rightarrow m^2$ è pari

$\Rightarrow m$ è pari

$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{N} : m = 2q$

Sostituiamo in (2) $\quad 4q^2 = 2n^2$

$2q^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ pari $\Rightarrow n$ pari

Quindi sia m che n sono pari ma questo è impossibile

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{10^i}$$

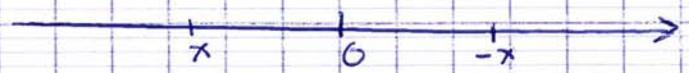
↑

Approssimante decimale per difetto all'ordine n di x

$$y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$x_n, y_n \in \mathbb{Q}^+$$

Si osservi che conoscendo l'intera sequenza dei k_n, si riesce ad "approssimare" il punto x "bene quanto vogliamo".
Definiamo il numero reale associato a x esattamente come la sequenza k_n che, convenzionalmente viene scritta come: $\underbrace{k_0, k_1 k_2 k_3 \dots k_n \dots}_{\text{Allineamento decimale associato a } x}$ → Numero reale



Per convenzione a x si associa l'allineamento decimale

$$-x = k_0, k_1 k_2 k_3 \dots$$
$$x = k_0, k_1 k_2 k_3 \dots$$

Ad ogni punto della retta adesso associato in maniera univoca un ben preciso allineamento decimale

<u>PROBLEMA</u>: Dato un allineamento decimale $k_0, k_1 k_2 \dots$ esiste sempre x punto della retta che ha come allineamento decimale questo sopra?

<u>Es</u>: $0,999\dots9\dots = 0,\bar{9}$

$x \in [0;1[$

$x \in [\frac{9}{10};1[$

$x \in [\frac{99}{100};1[$

$\nexists$ x punto della retta con questo allineamento.

Proposizione: Gli unici allineamenti decimali che non

$y = h_0, h_1 h_2 \dots$

$x + y = ?$

$$x_n = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{k_i}{10^i}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{h_i}{10^i}$$

$$x_n + y_n = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{k_i + h_i}{10^i}$$

$x_n + y_n$ sono gli approssimati decimali per difetto di un numero reale?

Osservazione Se $x = 0,\overline{8}$ e $y = 0,\overline{1}$

Allora $x_n = 0,\underbrace{888\dots8}_{n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{8}{10^i}$ | Approssimati decimali per difetto

$y_n = 0,\underbrace{111\dots1}_{n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{10^i}$

$x_n + y_n = 0,\underbrace{999\dots9}_{n}$ Che non è un numero reale!

Proprietà algebriche di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

- Associativo $\rightarrow x + (y+z) = (x+y) + z$
- $x + 0 = 0 + x = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) : x - (-x) = 0$

gruppo

- $x + y = y + x$ → cambiando d'ordine

Gruppo commutativo abeliano

- $x \cdot (y z) = (x y) \cdot z$
- $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1} : x x^{-1} = x^{-1} x = 1$
- $x \cdot y = y \cdot x$
- $x \cdot (y + z) = xy + xz$

Campo dei numeri reali ⇒ campo di tutti i numeri reali per cui valgono tutte queste proprietà.

Ordinamento → su $\mathbb{R}$ c'è un ordinamento naturale $x \leq y$

$x = k_0, k_1 k_2 \dots k_n \dots$

$y = h_0, h_1 h_2 \dots h_n \dots$

$x \leq y \iff k_0 = h_0 ; k_1 = h_1 ; \dots k_{n_0 - 1} = h_{n_0 - 1}$

e $k_{n_0} < h_{n_0}$

Proprietà dell'ordinamento

$x \leq y \iff x < y \vee x = y$

- $x \leq x$ Riflessiva
- $x \leq y , \; y \leq x \Rightarrow x = y$ Antisimmetrica
- $x \leq y , \; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ Transitiva

ordinamento

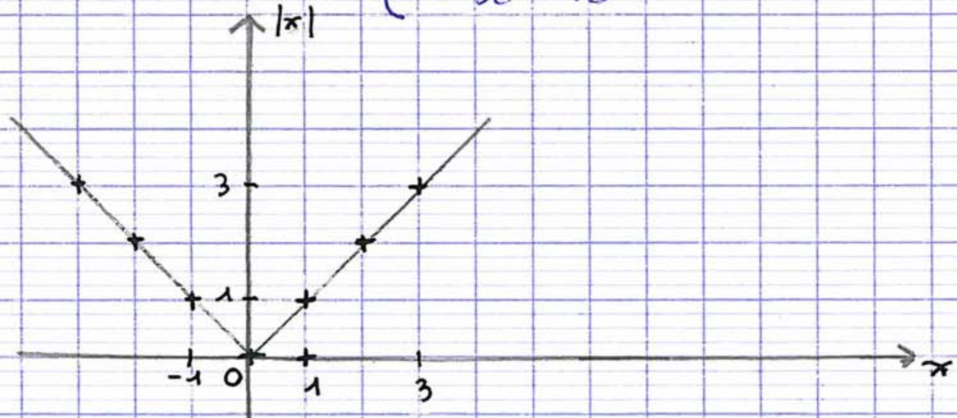
- $x \leq y , \; z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$
- $x \leq y , \; z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Altre proprietà che si deducono da queste sopra:

- $x \leq y , \; z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$
- $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}$

Valore assoluto

$x \in \mathbb{R} , \; |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Es: Sia $a \in \mathbb{R}$ e studiamo la diseguaglianza

$$|x| \leq a \quad (3)$$

Se $a < 0$ allora nessun x soddisfa (3)

Se $a \geq 0$ allora le soluzioni di (3) sono date da

$$[-a ; a] \iff (-a \leq x \leq a)$$

Correzione → Dobbiamo dimostrare che

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$|x \cdot y| = \begin{cases} xy \text{ se } xy \geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{(x \geq 0 \wedge y \geq 0)}^{1} \vee \overbrace{(x \leq 0 \wedge y \leq 0)}^{2} \\ -xy \text{ se } xy < 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x > 0 \wedge y < 0)}_{3} \vee \underbrace{(x < 0 \wedge y > 0)}_{4} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |y| = \begin{cases} y \text{ se } y \geq 0 \\ -y \text{ se } y < 0 \end{cases}$$

1 se $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \rightarrow |x| \cdot |y| = x \cdot y = |xy|$

2 Se $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \rightarrow |x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy = |xy|$

3 Se $x > 0 \wedge y < 0 \rightarrow |x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -xy = |xy|$

4 Se $x < 0 \wedge y > 0 \rightarrow |x| \cdot |y| = -x \cdot y = -xy = |xy|$

Proprietà di continuità o completezza di $\mathbb{R}$ che lo distinguono da $\mathbb{Q}$

$A \subseteq \mathbb{R}$

Def = Un numero $M \in A$ si dice il massimo di A se $M \geq x \quad \forall x \in A$.

Notazione $M = \max A$

Def = Un numero $m \in A$ si dice il minimo di A se $m \leq x \quad \forall x \in A$

Notazione $m = \min A$

Es: Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ammettono Max e/o Min.

1. $A = \mathbb{R}$ non ammette né max né min.
2. $A = \mathbb{N}$ $\nexists$ Max ma Min $A = 1$
3. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$ $\nexists$ Min ma Max $A = -5$
4. $A = \emptyset$ $\nexists$ Max e Min

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente (o inferiormente) se $\exists L \in \mathbb{R} : L \geq x \quad \forall x \in A$

(se $\exists\, \ell \in \mathbb{R} : \ell \leq x \quad \forall x \in A$)

Gli elementi del tipo L si dicono maggioranti di A

Gli elementi del tipo ℓ si dicono minoranti di A

Indichiamo con A^+ l'insieme di maggioranti e A^- l'insieme di minoranti.

A é limitato superiormente $\Leftrightarrow A^+ \neq \emptyset$

A é limitato inferiormente $\Leftrightarrow A^- \neq \emptyset$

Osservazione $\rightarrow$ se $A = \emptyset$ allora $A^+ = \mathbb{R}$ e $A^- = \mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato é vero che $\exists \max A$?

Es: se $A = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$A^+ = [1; +\infty[$ e $A^- =]-\infty; 0]$

Max $A = 1$ e Min $A = 0$

Es: $A = [0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$

Sicuramente $[1; +\infty[\subseteq A^+$ d'altra parte se $0 < x < 1$ fosse un maggiorante $x = 0, k_1 k_2 \ldots$

$\exists\, k_i \neq 9$

Osservazione = Se A ammette Max allora $\operatorname{Max} A = \sup A$
Se A ammette Min $\Rightarrow \operatorname{Min} A = \inf A$

Convenzione = A non superiormente limitato $\sup A := +\infty$
A non inferiormente limitato $\inf A = -\infty$

Proprietà caratterizzanti i sup e inf.

$A \subseteq \mathbb{R}$ super. limitato . $M \in \mathbb{R}$

Sono fatti equivalenti:

(1) $M = \sup A$

(2) Valgono le seguenti proprietà

(a) $M \geq x \quad \forall x \in A$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$

Dimostrazione $1 \Rightarrow 2$ $M = \sup A$, sapendo che l'estremo superiore é il minimo maggiorante di A ciò implica che M é un maggiorante di A quindi $M \geq x \; \forall x \in A$ é verificata. Inoltre se per assurdo avessimo $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in A \quad x \leq M - \varepsilon$ allora $M - \varepsilon < M$ quindi M non sarebbe più il minore maggiorante come avevamo supposto.
(b) é quindi verificata

$2 \Rightarrow 1$

Si noti che la proprietà (a) dice che $M \in A^+$.
Se per assurdo M non é il minimo $A^+ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tale che $M - \varepsilon \in A^+$ ma questo contraddice (b) perché $M - \varepsilon \in A^+$ $\Rightarrow M - \varepsilon \geq x \quad \forall x \in A$. Quindi $M = \min A^+$

Proprietà: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sia $L \in \mathbb{R}$

Sono fatti equivalenti: (1) $L = \inf A$

(2) L gode delle seguenti proprietà

(a) $L \leq x \quad \forall x \in A$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A$
$x < L + \varepsilon$

Se $a < 1$ $\quad a^x := \inf \{a^q \mid q \in \mathbb{Q}^+, q \leq x\}$

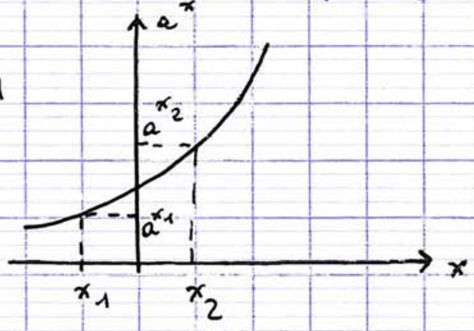
con queste definizioni le proprietà delle potenze si estendono al caso di P_1, P_2 reali qualunque.

a^x $\quad a > 0$, x qualunque ~~da~~ ha sempre senso

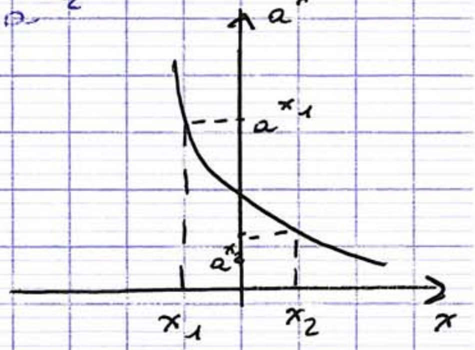
Se $a > 1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Se $a < 1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$a > 1$



$a < 1$



$a > 1$

$a^x = y \iff x = \log_a y$

L'unicità non è un problema però l'esistenza sì del logaritmo

Algoritmo per il calcolo approssimato di $\sqrt{2} \Rightarrow$ solo di $\sqrt{2}$

- Scegli $x: a_0 \in \mathbb{Q}$ $\quad a_0 \geq 2$
- Calcola $\quad y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$
- Ponete $x = y$
- Ricalcolate $\quad y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ e così via...

Esempio $\quad a_0 = 2$ $\qquad x = 2$, $\quad y = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2} = 1,5$

$x = \frac{3}{2}$, $\quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1,41\ldots$

$x = \frac{17}{12}$, $\quad y = \ldots$

Questo metodo converge in maniera esponenziale verso $\sqrt{2}$

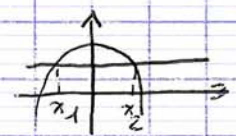
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 190

Verificare la surgettività

Sia $y \in \mathbb{R}$, vediamo se $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$

$$3x - 1 = y$$
$$3x = y + 1$$
$$x = \frac{1}{3}(y+1)$$ quindi la funzione è suriettiva

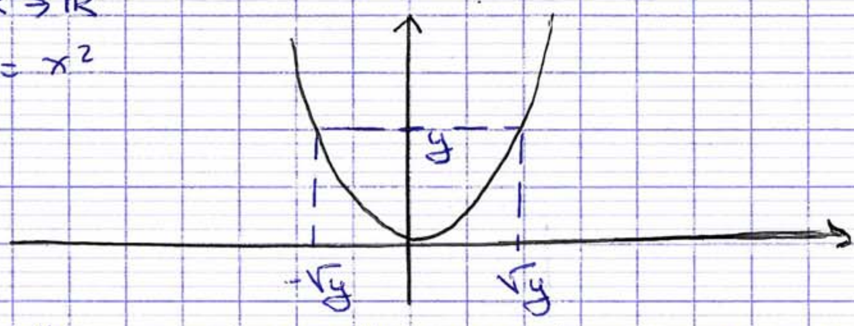
Graficamente →



Non è iniettiva

Quindi la retta y deve intersecare la funzione in un solo punto o in nessuno se è iniettiva.
Se è suriettiva → una retta orizzontale incontra sempre il grafico almeno una volta
Suriettività + iniettività → ogni retta orizzontale incontra il grafico una e una sola volta.

Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$



Non è iniettiva, né suriettiva perché se $y < 0$ non ha soluzioni.

→ A, B insiemi $f: A \to B$
$\forall\, b \in B$ consideriamo l'equazione $f(x) = b$ (1) $x \in A$
Iniettività → questa equazione non avrà mai più di una soluzione, suriettività → questa equazione avrà sempre almeno una soluzione.

- Se $\forall\, b \in B$, (1) ha al più una soluzione, f è iniettiva
- Se $\forall\, b \in B$, (1) ha almeno una soluzione, f è suriettiva.

Verifichiamo che converge a 0

Fissiamo $\varepsilon > 0$ qualunque e studiamo la diseguaglianza

$|a_n - 0| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Se scegliamo $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ e $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad x = k_0, k_1 k_2 \dots$ $\quad [x] = k_0$ = parte intera

ES: Sia (a_n) data da $\quad a_n = \frac{n}{n+2}$

$a_1 = \frac{1}{3}, \; a_2 = \frac{2}{4}; \; a_3 = \frac{3}{5}, \; a_4 = \frac{4}{6}$

Verifichiamo che converge a 1

Si considera la diseguaglianza $|a_n - 1| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 2}{n+2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n+2} < \varepsilon \iff \frac{n+2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n+2 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$\in \mathbb{N} \leftarrow n+2$

ε numero molto piccolo, maggiore di 0.

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$$

Verifichiamo che non converge a 2

$|a_n - 2| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n}{n+2} - 2\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{n - 2n - 4}{n+2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-n-4}{n+2}\right| < \varepsilon \iff \frac{n+4}{n+2} < \varepsilon$$

$$n+4 < \varepsilon(n+2) \iff n(1-\varepsilon) < 2\varepsilon - 4$$

Funzione inversa

$y = x^2 \quad x \in \mathbb{R}^+$

$x = \sqrt{y} \quad y \in \mathbb{R}^+$

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

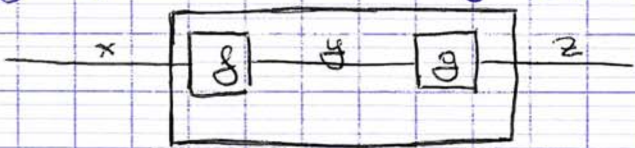
Quindi cambiando dominio e codominio cambiamo la funzione considerata e le sue proprietà.
La scelta del dominio cambia la definizione stessa della funzione.

Composizione di funzione

$f : A \to B \qquad g : C \to D \qquad e \quad f(A) \subseteq C$

Allora si può considerare la funzione composta

$g \circ f : A \to D \qquad (g \circ f)(a) = g(f(a))$



$f : A \to B$ invertibile

$f^{-1} : B \to A$

Funzione identità

$id_A : A \to A$

$id_A(a) = a \quad \forall a$

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} \circ f = id_A \\ f \circ f^{-1} = id_B \end{array}}$$

Ritorniamo alle successioni

Una successione (reale) è una qualunque funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

In generale invece di usare il tipico simbolo funzionale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si usano le notazioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Es: $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n$ in questo modo ho definito una successione (a_n)

⚠ Sinonimo di $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ é definitivamente nella definizione di limite, di convergenza.

Riformulazione: $\forall \varepsilon > 0,\ |a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente

Teorema del confronto = Siano (a_n), (b_n), (c_n) successioni tali che (a) $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

(b) $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora, $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Dimostrazione = Fissiamo $\varepsilon > 0$ qualunque. Per la (a)

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente
$\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente | Saranno vere da un certo n in poi

Per la (b) $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n$

Quindi: $\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente vera cioé da un certo n in poi

$\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente

Es: Sia $x \in [0, 1[$ e si consideri la successione (a_n) data da $a_n = x^n$ x é un numero fissato

Verifichiamo che tende a 0

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $|a_n - 0| < \varepsilon$

$$x^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$$ ← Risolviamolo senza usare il concetto di logaritmo

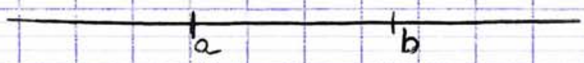
$$\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 + \delta \qquad \delta > 0$$

$$(1 + \delta)^n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (2)$$

$(1+\delta)^n \Rightarrow$
$n = 1 \qquad 1 + \delta$
$n = 2 \qquad 1 + 2\delta + \delta^2$
$n = 3 \qquad 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3$

Successione limitata

Def: Una successione (a_n) si dice <u>limitata</u> se la sua immagine è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, cioè se $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq a_n \leq b \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$



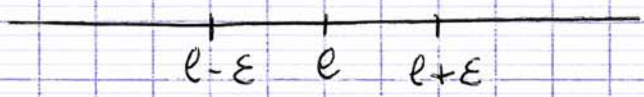
La limitatezza riguarda solo l'immagine

<u>Osservazione</u> → Esistono successioni limitate che non ammettono limite.

<u>Es:</u> $a_n = (-1)^n$

<u>PROPOSIZIONE:</u> Se una successione (a_n) ammette limite, allora è limitata

<u>Dimostrazione</u>: Supponiamo che $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$



Fissiamo $\varepsilon = 1$, allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$
$\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$

Quindi $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid 1 \leq n < n_0\} \cup \{a_n \mid n \geq n_0\}$

limitato perché l'insieme è finito

limitato perché sta tra $\ell-1$ e $\ell+1$

Convergenza verso $+\infty$

<u>Def</u>: Sia (a_n) successione. Si dice che a_n tende a $+\infty$ (o $-\infty$) quando $n \to +\infty$ se $\forall\, H \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0\ \forall_n \geq 0$ $a_n > H$ (o $a_n < H$). <u>Not.</u>: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ ($-\infty$) $\quad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

<u>Es:</u> Sia (a_n) data da $a_n = n^2 - n$ e (b_n) $\quad b_n = n^2$

Verifichiamo che $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Sia $H \in \mathbb{R}$ e consideriamo $b_n > H$
$$n^2 > H$$

Se $H < 0 \quad n^2 > H$ è sempre vera

Es: $a_n = n^3 - 2n + 1$

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$?

Es: Sia (a_n) data da $a_n = x^n$ dove $x > 1$ è un numero reale fissato. $x = 1 + \delta$ con $\delta > 0$ perché $x > 1$

$x^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta$

Poiché $(1 + n\delta) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (Esempio precedente)

per confronto anche $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Es: Sia (a_n) dato da $a_n = a \cdot n + b$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

Verifichiamo che $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Fissiamo $M \in \mathbb{R}$ e studiamo $a_n > M$

$a \cdot n + b > M$

$a n > M - b$

$n > \dfrac{M-b}{a}$ Quindi vera definitivamente

Teorema del confronto ($a \pm \infty$)

Siano (a_n) e (b_n) successioni tali che $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Allora, (i) Se $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

(ii) Se $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

$$x^n \begin{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 & \text{se } x \in [0; 1[\\ \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 & \text{se } x = 1 \\ \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty & \text{se } x > 1 \\ \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ (*) & \text{se } x \in]-1; 0[\\ \text{limite non esiste} & \text{se } x = -1 \\ \text{limite non esiste} & x < -1 \end{cases}$$

(6) $\ell_1 = 0$ e $a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty$

Dimostrazione → (a_n) e (b_n) successioni

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ ← Ipotesi

Tesi → $a_n b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \ell_2$

Si tratta di far vedere che $\forall\ \varepsilon > 0$, $|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$ definitivamente.

$|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| = |a_n b_n - a_n \ell_2 + a_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2| =$

$= |a_n(b_n - \ell_2) + \ell_2 (a_n - \ell_1)| \leq |a_n (b_n - \ell_2)| + |\ell_2 (a_n - \ell_1)| =$

$= |a_n| |b_n - \ell_2| + |\ell_2| |a_n - \ell_1|$ (1)

~~Studiamo ora~~ Vogliamo mostrare ora definitivamente

$|a_n| |b_n - \ell_2| + |\ell_2| |a_n - \ell_1| < \varepsilon$ (1*)

→ Cerchiamo di far vedere questo, mostrando che (2) $|a_n| |b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ definitivamente e (3) $|\ell_2| |a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ definitivamente.

Consideriamo (3): Se $\ell_2 = 0$ si ha $0 < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre vero

Se $\ell_2 \neq 0$ (3) é equivalente a $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$ (4)

Perché $\frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} > 0$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ quindi (4) é vera definitivamente, quindi (3) é vera definitivamente

→ Veniamo a (2), poiché a_n ammette limite essa é limitata, quindi $\exists\ M > 0$ tale che $|a_n| \leq M\ \forall n$

Quindi $|a_n| |b_n - \ell_2| \leq M |b_n - \ell_2|$ (5)

Consideriamo ora $M |b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ (6)

Es: ① (a_n) $\quad a_n = n$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Perché $a_n > M \iff n > M$

② (a_n) $\quad a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{tende a } 0}$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

③ (a_n) $\quad a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\text{limitata}}$

Per l'osservazione precedente

④ $a_n = n^3 - n^2 + n = \underbrace{\underbrace{(n^3+n)}_{+\infty} + \underbrace{(-n^2)}_{-\infty}}_{\text{Indeterminazione}}$

$$n^3 - n^2 + n = \underbrace{n^3}_{+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{1}_{1} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)}_{\to 1}$$

$$n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Quindi $n^3 - n^2 + n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

⑤ Sia $P(x) = p_0 + p_1 x^1 + \dots + p_k x^k$ polinomio con $p_k \neq 0$

Consideriamo la successione (a_n) data da

$$\boxed{a_n = P(n) = p_0 + p_1 n + \dots + p_k n^k}$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} p_k n^k = \begin{cases} +\infty \text{ se } p_k > 0 \\ -\infty \text{ se } p_k < 0 \end{cases}$

In effetti $a_n = p_k n^k \left(\underbrace{\frac{p_0}{p_k n^k}}_{0} + \underbrace{\frac{p_1}{p_k n^{k-1}}}_{0} + \underbrace{\frac{p_2}{p_k n^{k-2}}}_{0} + \dots + \underbrace{1}_{1}\right)$

La parte in parentesi tende a 1 per le proprietà algebriche

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$1! = 1$
$2! \; 1 \cdot 2$ } Non c'è mai lo stesso numero di fattori.

$(a_n) \qquad a_n = n!$

$\underset{\downarrow +\infty}{n!} \geq \underset{\searrow +\infty}{n}$

$n!$ non è un polinomio perché si continuano ad aggiungere fattori all'aumentare del grado.

$\frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Esercizio → $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{75}+1}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{75}}{n!} = 0$

$n^{75} + 1 = n^{75}\left(1 + \frac{1}{n^{75}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} n^{75}$

* (a_n) dato da $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \underset{\downarrow 0}{\left(\frac{1}{n}\right)} (-1)^n$ → limitata

Non si possono usare le proprietà algebriche dei limiti per dimostrare che $a_n \to 0$

D'altra parte $|a_n| = \frac{1}{n}$

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff a_n - \ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff |a_n - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\ell = 0 \qquad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff |a_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Quindi $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* (a_n) dato da $a_n = \frac{\sin n}{n} = \underset{\to 0}{\left(\frac{1}{n}\right)} (\sin n)$ → limitata

Come fare?

Proposizione = Se (a_n) successione tale che $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ e

(b_n) successione limitata $\Rightarrow a_n b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Osservazione = Se (a_n) è crescente è sempre inferiormente limitata. $\min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a_1$
Segue da (i) della proposizione precedente che se (a_n) è superiormente limitata, allora $\exists$ finito $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
Analoghe considerazioni si possono fare nel caso decrescente.

Esempio: (a_n) successione data da

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } n \leq 47 \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 48 \end{cases}$$

Si osservi che $a_n = \frac{1}{n}$ definitivamente quindi $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Questa successione è definitivamente decrescente

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1; +1; \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \dots\}$

$\text{Inf} = \min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -1$
$\text{Max}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$
$\lim a_n \neq \min\{a \mid n \in \mathbb{N}\}$
(a_n) è soltanto definitivamente decrescente!

Es: (a_n) data da $\quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$a_1 = 2, \qquad a_2 = \frac{9}{4} = 2,25$
$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$
$a_n \uparrow$ (crescente)
Fissiamo uno dei due n in $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\nearrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ $\searrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^n$

a_n è collegata al calcolo dell'interesse composto.

Interesse composto $\rightarrow$ Supponiamo di prendere in prestito una somma x da una banca con interesse del 100% annuo
$(1+1)x \rightarrow$ cifra da restituire dopo 1 anno
$\left(1+\frac{1}{2}\right)x \rightarrow$ cifra da restituire dopo 6 mesi
$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)x \rightarrow$ cifra da restituire dopo 1 anno se non abbiamo pagato dopo 6 mesi $\rightarrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 x \leftarrow$ capitalizzazione semestrale

Es. $\dfrac{n^{75}+1}{n!} = \dfrac{n^{75}}{n!} + \dfrac{1}{n!}$

$a_n = \dfrac{n^{75}}{n!} > 0$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{75}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^{75}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{75} \dfrac{n!}{(n+1)!} =$

$= \underbrace{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{75}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{\downarrow \, 0}$ Perché $(n+1)! = (n+1)\,n!$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

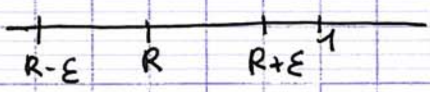
(a_n) è definitivamente decrescente e $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Es. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^k}{n!} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dimostrazione (2)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = R < 1$

Sia $\varepsilon > 0 : R + \varepsilon < 1$



$R - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < R + \varepsilon$ definitivamente

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ definitivamente

$a_{n+1} < a_n$ definitivamente

Quindi monotona decrescente definitivament

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

$\Rightarrow$ (a_n) è definitivamente decrescente $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$$

$n^n \geq n!$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = ?$$

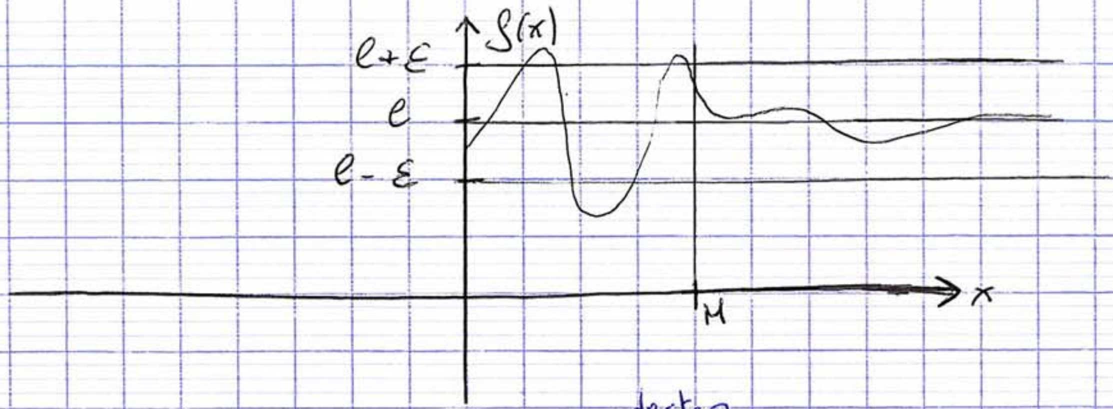
$$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n\cdot n\cdot n \ldots \cdot n}^{n \text{ volte}}}{\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(3)\cdot 2\cdot 1}_{n \text{ fattori}}} = 1 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{3} \cdot \frac{n \cdot n}{2} \geq$$

$\geq 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} \geq \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Quindi secondo il teorema del confronto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

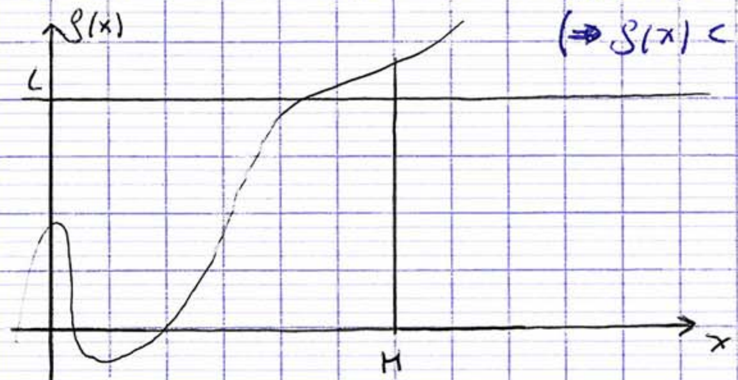


f ha come asintoto orizzontale destro la retta $y = l$

<u>Notazione</u> = $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

$f : [a ; +\infty[\to \mathbb{R}$
si dice che f tende a $+\infty$ $(-\infty)$ quando x tende a $+\infty$ se

$\forall\ L \in \mathbb{R}\ \exists\ M \geq a$ tale che $x \geq M \Rightarrow f(x) > L$
$(\Rightarrow f(x) < L)$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ (-\infty)$

$f :]-\infty ; a] \to \mathbb{R}$
si dice che f tende ad $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a $-\infty$
se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M \leq a$ tale che $x \leq M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

26/10/10 **Funzioni monotone**

$f: D \to \mathbb{R}$

$D \subseteq \mathbb{R}$ si dice monotona crescente (decrescente)

se $\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$(\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

se valgono le diseguaglianze strette sopra si parla di funzioni strettamente crescenti (o decrescenti)

Esempio → $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = mx + q \quad (m, q \in \mathbb{R})$

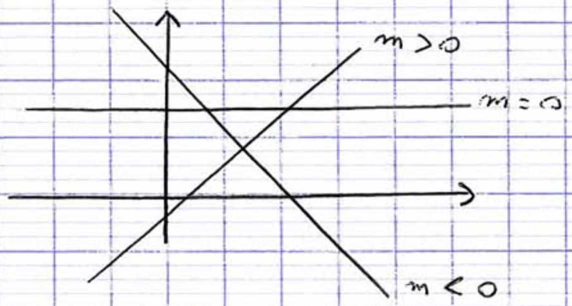
$m = 0 \quad f(x) = q$, costante → sia crescente che decrescente

$m > 0 : x_1 < x_2 \Rightarrow mx_1 < mx_2 \to mx_1 + q < mx_2 + q$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ strettamente crescente

$m < 0 : x_1 < x_2 \to mx_1 > mx_2 \Rightarrow mx_1 + q > mx_2 + q$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ strettamente decrescente



Esempio → $f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non é monotona

Però $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é monotona crescente

$f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ é monotona decrescente

Esempio → $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ con $a > 0$

→ se $a > 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ → strettamente crescente

→ se $a < 1$ e $x_1 < x_2$ allora $a^{x_1} > a^{x_2}$ → strettamente decrescente

Osservazione = $f: D \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0 \ \forall x \in D$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, H$ tale che se $x > H$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Si osservi che $f(x) \leq l < l + \varepsilon \quad \forall\, x > a$ (1) perché l è l'estremo superiore

Per la proprietà caratterizzante del sup $\exists\, \bar{x} > a$ tale che

$l - \varepsilon < f(\bar{x}) \quad (\leq l) \quad (2)$

D'altra parte poiché f è crescente segue che $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall\, x \geq \bar{x} \quad (3)$

(2) e (3) $\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \quad \forall\, x \geq \bar{x} \quad (4)$

(1) e (4) $\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \forall\, x \geq \bar{x}$ $(=H)$

Caso (b) = Si tratta di far vedere che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cioè che per $\forall\, H \in \mathbb{R} \quad \exists\, \bar{x} > a : \forall\, x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > H$

Poiché f è superiormente non limitata, H non è un maggiorante e quindi $\exists\, \bar{x} > a$ tale che $f(\bar{x}) > H$.

D'altra parte poiché f è crescente $f(x) \geq f(\bar{x}) > H \quad \forall\, x > \bar{x}$

Esempio → $a > 1 \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = a^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$?

$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty \Rightarrow (a^n)$ non è superiormente limitata $\Rightarrow f$ non è superiormente limitata $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$a < 1 \qquad f(x) = a^x \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$

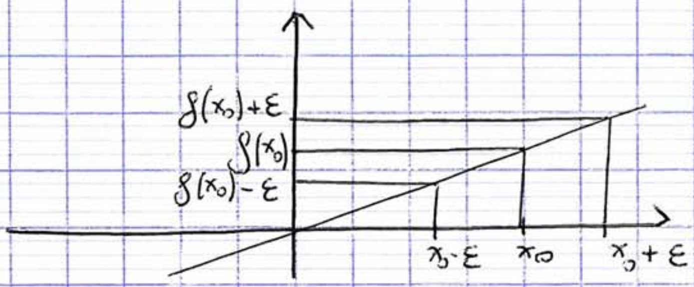
$\frac{1}{a} > 1$ quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x \to +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0$

Proposizione → $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$

(1) f crescente $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x < a \}$

(2) f decrescente $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x < a \}$

Esempio → $a > 1 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$



→ $f : I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, si dice che f é continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I \ |x - x_0| < \delta$ si ha che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Riformuliamo il concetto di continuità.

Supponiamo che $I =]a, b[\quad x_0 \in I$

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ si dice che f tende ad ℓ per x che tende a x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ con $|x - x_0| < \delta$ vale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

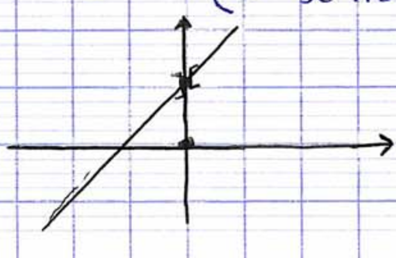
Not. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Osservazione = Si noti che con il concetto appena introdotto si può riformulare la continuità come segue.

f é continua in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esempio → Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$

Quindi la funzione non é continua

Proprietà algebriche dei limiti

$f, g :]a; b[\to \mathbb{R} \qquad x_0 \in]a, b[$

Proposizione → Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

Allora: (1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \ell_1 \ell_2$

(3) se $g(x) \neq 0 \ \forall x$ $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Cor: Se f e g sono continue in x_0 allora, $f \pm g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0 e se $f(x) \neq 0 \ \forall x$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in x_0

Dimostrazione → $f + g$ continua in x_0

In base alla proposizione precedente:

$\exists \lim (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$

* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = mx + q$ continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

Es: I polinomi sono continui su tutto $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

In quanto ogni potenza x^k è continua su $\mathbb{R}$, in quanto prodotto di k fattori x tutti continui

Poiche le costanti sono continue ($m = 0$)

$a_k x^k$ sono tutte funzioni continue.

Infine $f(x)$ é continua su $\mathbb{R}$ essendo somma degli monomi che sappiamo essere continui su $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{\underbrace{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}_{b(x)}}$$

Teorema di limitatezza locale

se $f\ ]a;b[\ \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in\ ]a,b[$
tale che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Allora $\exists\ \delta > 0$ tale che $\{f(x) \mid x \in\ ]a;b[\ ; |x - x_0| < \delta\}$

é un insieme limitato, in altri termini:
$\exists\ L > 0$ tale che $|f(x)| < L \quad \forall\ x \in\ ]a;b[\ : |x - x_0| < \delta$

Proposizione → $f, g\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in\ ]a,b[$ tali che (1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

(2) g é una funzione limitata
Allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$

Monotonia

$f :]a;b[\ \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in\ ]a,b[$ $\quad f$ é crescente $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = ?$

Es: la funzione segno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$

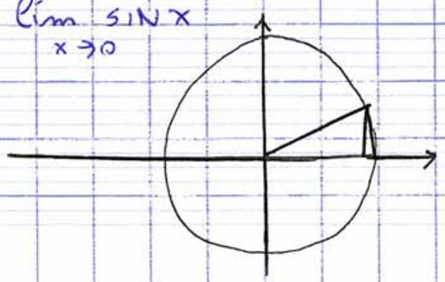
é crescente ma ha un salto in 0! Il limite non esiste

Prop: Sia $f :]a, b[\ \to \mathbb{R}$. f motona crescente, allora
$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in\ ]a;b[\}$

$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in\ ]a;b[\}$

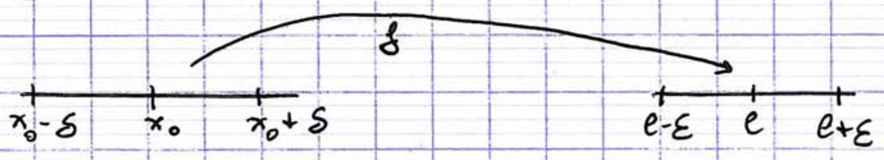
Es: $\lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\text{continua e tende a 0}} \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0$

Es: $\lim_{x \to 0} \sin x$



$0 \leq \sin x \leq x$ per $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
$\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$ per confronto

Per la (1) noi sappiamo che $\exists\ \delta > 0$: se $x \in]a;b[- \{x_0\}$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
D'altra parte $a_n \in]a;b[\setminus \{x_0\}\ \forall n$ e poiché $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$
segue anche che $|a_n - x_0| < \delta$ definitivamente



Quindi definitivamente si ha $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$
utilizzo di questo teorema per dimostrare i vari risultati sulle funzioni enunciate precedentemente
$f, g :]a;b[\to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in]a;b[$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

Dimostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \ell_1 \ell_2$

Sia $(a_n) : a_n \in]a,b[\setminus \{x_0\}$ tale che $a_n \to x_0$
Mostro che $f(a_n)\, g(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1 \ell_2$ $(*)$
D'altra parte noi già sappiamo che $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1$ e $g(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_2$

Per le proprietà algebriche dei limiti di successione si ha dunque $(*)$. Si noti quindi che per $f(x)\, g(x)$ vale la condizione (2) del teorema $\Rightarrow$ TES. con $\ell = \ell_1 \ell_2$
Teorema di composizione dei limiti
$f :]a;b[\to]c;d[$
$g :]c;d[\to \mathbb{R}$
$x_0 \in]a,b[$ supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in]c,d[$ e supponiamo che g sia continua in ℓ. Allora $\exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$
Cor.: $f :]a;b[\to]c,d[$ e $g :]c;d[\to \mathbb{R}$
$x_0 \in]a;b[$ $\quad f$ é continua in x_0
g é continua in $f(x_0)$
Allora $g \circ f$ é continua in x_0

$h(x) = \sin \frac{x - x_0}{2}$

$x \xrightarrow{f(x)} \frac{x - x_0}{2}$

$t \xrightarrow{g(t)} \sin t$

$h(x) = (g \circ f)(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad g$ é continua in 0

$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(0) = 0$

$\lim_{x \to x_0} \sin \frac{x - x_0}{2} = 0$

$\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1 \rightarrow \lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$

* $\cos x = \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x \longrightarrow x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\sin} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos x$ é continua su tutto $\mathbb{R}$ in quanto composizione di funzioni continue.

* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ continua sul suo dominio di definizione

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

* $f(x) = \sin(x^2)$ continua sempre (su tutto $\mathbb{R}$)
* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\rightarrow$ composizione di funzioni continue

* $a > 0 \qquad f(x) = a^x \qquad x \in \mathbb{R}$

Mostriamo che é continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

caso $a > 1 \rightarrow x_0 = 0$ si tratta di far vedere che

$\lim_{x \to 0} a^x = 1$

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$$

$$\lim_{x \to x_0} a^{x-x_0} = a^0 = 1$$

continuità di a^x in $x_0 = 0$ + composizione dei limiti

Quindi per le proprietà algebriche dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0$$

$0 < a < 1$ $\quad f(x) = a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ $\quad \dfrac{1}{a} > 1$

$\left(\frac{1}{a}\right)^x$ continua su $\mathbb{R}$ perché $\frac{1}{a} > 1$ e quindi f continua su $\mathbb{R}$

* $\dfrac{3^{\sin x - \frac{x^2}{2}}}{x^2 + 1}$ è continua ovunque

* $\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$

Teorema di composizione dei limiti

* $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$? Non esiste

Idea per dimostrarlo = Costruire due successioni (a_n), (b_n)

$a_n > 0$ e $b_n > 0$

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\sin \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1$ e $\sin \frac{1}{b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

$\boxed{\sin \frac{1}{x} = 0}$ $\quad \frac{1}{x} = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{n\pi}$

$a_n = \frac{1}{n\pi}$ con $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sin \frac{1}{a_n} = 0 \ \forall n$

$\boxed{\sin \frac{1}{x} = 1}$ $\quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ con $n \in \mathbb{Z}$

$b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ con $n \in \mathbb{N}$

$b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ e $\sin \frac{1}{b_n} = 1 \ \forall n$

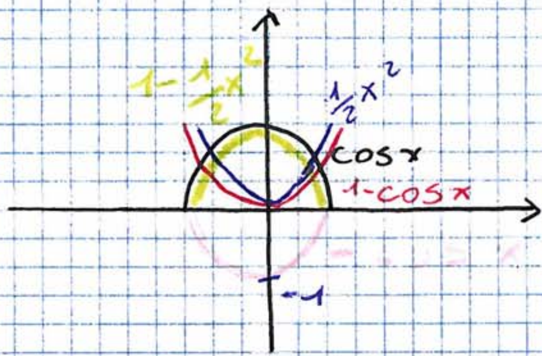
Questo dimostra che il limite non esiste

Quindi per confronto $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Poiché la funzione è pari

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

5/11/10 * $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $\qquad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$



$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$

$1-\cos x$ é "simile" a $\frac{1}{2}x^2$

$\cos x - 1$ é "simile" a $-\frac{1}{2}x^2$

$\cos x$ é "simile" a $1-\frac{1}{2}x^2$

* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0$

* $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ → Proposizione

Dimostrazione → $[x]$ parte intera di x

$$[x] \leq x \leq [x]+1$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{[x]+1}}\right)}_{\to 1 \text{ perché ho inserito } +\infty}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 190

Quindi $\lim_{x \to 0^+} \log_a (1+x)^{1/x} = \log_a e$

* $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^x} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x} = \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{\xrightarrow{x\to+\infty} e}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}_{\to 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

* $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Pongo $x = -t$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}$$

$t = -x$

$x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{1/e} = e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

utilizzando quest'ultimo risultato si ottiene anche che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$$

se $\boxed{a = e}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ $\qquad a^x - 1 = t \iff a^x = 1+t \iff x = \log_a(1+t)$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{t}{\log_a(1+t)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

se $\boxed{a = e}$ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$

Es: $f(x) = x^\alpha$ $\quad x \in]0;+\infty[$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Sono continue su $]0;+\infty[$

$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln(x)}$ è continua come composizione di funzioni continue

$\alpha > 0$ $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$

$\alpha > 0$ $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 190

* $f \asymp f \ (x \to x_0)$

$f \asymp g \Rightarrow g \asymp f \ (x \to x_0)$

$f \asymp g,\ g \asymp h \Rightarrow f \asymp h \quad (x \to x_0)$

* $f = o(g),\ g = o(h) \ (x \to x_0) \Rightarrow f = o(h) \quad x \to x_0$

Dim:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\downarrow 0} = 0$$

Es: * $\sin x \sim x$ per $x \to 0$

* $1-\cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$

* $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$

* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$ per $x \to \pi/2$

$\sin x \asymp x$ per $x \to \pi/2$ ma $\sin x \not\sim x$ per $x \to \pi/2$

$\sin x = o(x)$ per $x \to \pi$

* $e^x - 1 \sim x \quad x \to 0$

* $\ln(1+x) \sim x \quad x \to 0$

Proposizione = $f, g:]a,b[\to \mathbb{R} \quad x_0 \in]a;b[$

Sono equivalenti (1) $f \sim g$ per $x \to x_0$

(2) $f = g + \underbrace{o(g)}_{\text{Funzione } h:\ \frac{h}{g} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0}$ per $x \to x_0$

dimostrazione: (1) $\Rightarrow$ (2) Si tratta di far vedere che $f - g = o(g)$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 1 - 1 = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Esempio = $\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

Altre proprietà dei simboli di Landau

* $f = o(1)$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) \asymp l \ (x \to x_0)$

$f(x) \sim l \ (x \to x_0) \Leftrightarrow f(x) = l + o(l) \ (x \to x_0)$

11/11/10 **Derivate**

$f:]a;b[\to \mathbb{R}$

$x_0 \in]a;b[$

*Calcoliamo il coefficiente angolare della secante

$m = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Rapporto incrementale di f tra x_0 e x

Equazione retta secante $y - f(x_0) = m(t - x_0)$ Non dobbiamo coinvolgere x come variabile indipendente poiché l'abbiamo fissato in x_0, variabili indipendenti: t e y

Def: f si dice derivabile in x_0 se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ finito.

Tale limite è detto la derivata di f in x_0 e indicato in uno dei modi seguenti: $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (Leibnitz lo introdusse)

Osservazione: Geometricamente possiamo interpretare la derivata come il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

Anzi possiamo definire la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ come la retta $y - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0)$

$$\left(y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\right)$$

Se f è derivabile in ogni punto $x_0 \in]a;b[$, si dice derivabile su $]a;b[$. In tal caso si può parlare di funzione derivata $f':]a;b[\to \mathbb{R}$

$f'(x)$ derivata nel punto x

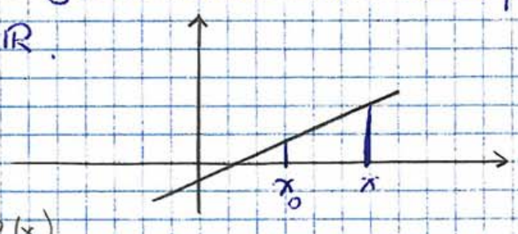
Esempio $f(x) = mx + q$ $x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{mx + q - (mx_0 + q)}{x - x_0} = \frac{m\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = m$$

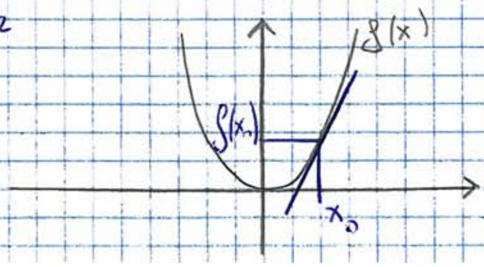
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

Quindi $f(x)$ è derivabile ovunque e $f'(x_0) = m$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.



Es. $f(x) = x^2$

$x_0 \in \mathbb{R}$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

(3) Se inoltre $g(x) \neq 0 \ \forall x$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

ES: $f(x) = c \quad \forall x \qquad f'(x_0) = 0 \quad \forall x$

➡ Sia $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile in x_0

$(cf)'(x_0) = 0 + cf'(x_0) = cf'(x_0)$

La derivata è un'operazione lineare → gli scalari escono dall'operazione

ES: $f(x) = x^3 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x \cdot x^2 \qquad f'(x_0) = 1 \cdot x_0^2 + x_0(2x_0) = 3x_0^2$

ES: $f(x) = x^4 = x \cdot x^3 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 \cdot x_0^3 + x_0 \cdot 3 \cdot x_0^2 = 4x_0^3$

* $f(x) = x^n \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

x^{n-1} → derivata $= (n-1)x_0^{n-2}$

$f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1}$

$f'(x_0) = 1 \cdot x_0^{n-1} + x_0 (n-1) x_0^{n-2} = n x_0^{n-1}$

Suppongo che al passo $n-1$ la formula sia vera.

* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ Derivabili ovunque

$f'(x_0) = 0 + a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2 + \dots + n a_n x_0^{(n-1)}$

12/11/10 $f, g:]a; b[\to \mathbb{R}$

$x_0 \in]a; b[$

f e g derivabili in x_0

Allora $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Dimostrazione (Formula di Leibnitz)

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ f(x_0)}} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ g'(x_0)}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ f'(x_0)}} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{\substack{\downarrow x \to x_0 \\ g(x_0)}}$$

perché f è derivabile quindi continua in x_0

Quindi $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

ES = $f(x) = \sin x$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\xrightarrow{x\to x_0} 1} \cdot \underbrace{\cos\frac{x+x_0}{2}}_{\xrightarrow{x\to x_0} \cos x_0}$$

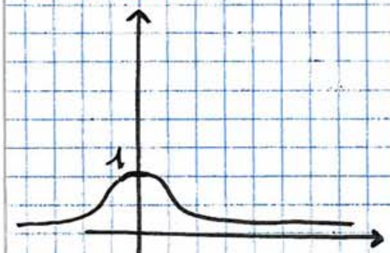
Quindi $\sin x$ è derivabile in x_0 e la sua derivata è $\cos x_0$

ES: $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$

$$x \xrightarrow{f} x + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y \longrightarrow \sin y$$

$\cos x$ è derivabile in x_0 essendo la composizione di funzioni derivabili e $f'(x_0) = \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x_0$

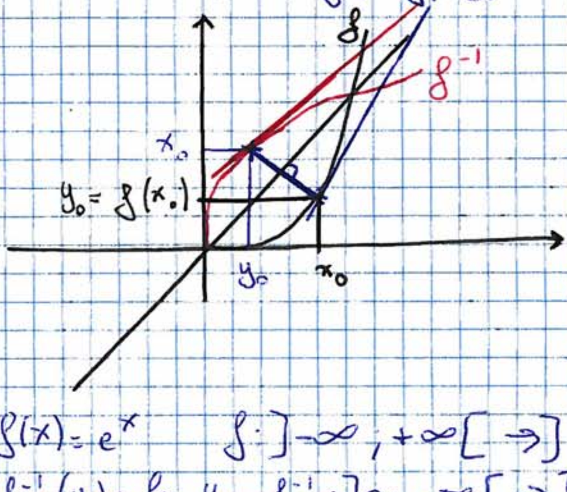
ES: $f(x) = e^{-x^2}$



$$x \to -x^2$$
$$y \longrightarrow e^y = e^{-x^2}$$
$$f'(x_0) = e^{-x_0^2} \cdot (-2x_0) = -2x_0 e^{-x_0^2}$$

* Una funzione pari derivata su tutto $\mathbb{R}$ diventa una funzione dispari e viceversa.

Proposizione = $f:]a;b[\to]c;d[$ strettamente monotona e surgettiva. Sia $x_0 \in]a;b[$ supponiamo f derivabile in x_0 con $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$. Allora, f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$



ES: $f(x) = e^x$ $\quad f:]-\infty; +\infty[\to]0; +\infty[$

$f^{-1}(y) = \ln y$ $\quad f^{-1}:]0; +\infty[\to]-\infty; +\infty[$

$y_0 \in]0; +\infty[$ $\quad x_0 : e^{x_0} = y_0$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$$

Proposizione $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ derivabile su $]a;b[$ Allora,

(1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ è crescente su $]a;b[$

(2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ è decrescente su $]a;b[$

(3) $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ è strettamente crescente

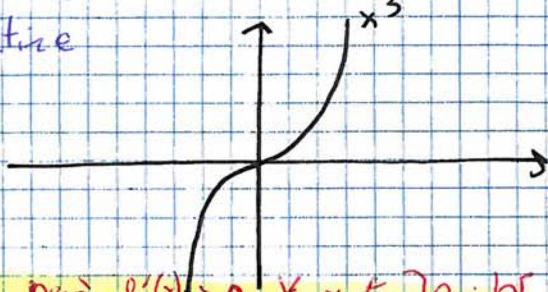
(4) $f'(x) < 0 \ \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ è strettamente decrescente

$\boxed{\text{Attenzione}}$ (3) e (4) non si possono invertire

Es: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ perché $f'(0) = 0$



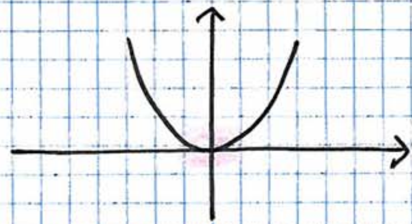
⚠ Una funzione può essere strettamente crescente però $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a;b[$

Es: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$f'(0) = 0$

$\text{Im} f = [0; +\infty[$

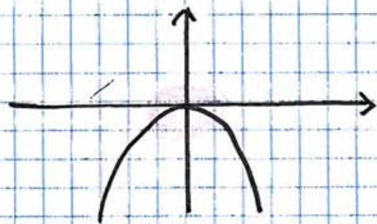
$0 = \text{Min Im} f$
$\ \ \|$
$f(0)$



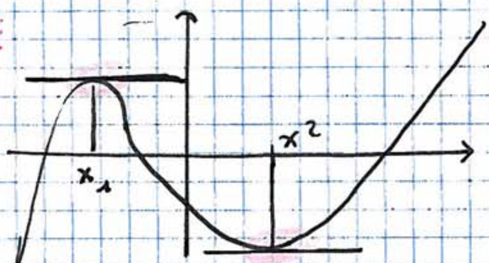
Es: $f(x) = -x^2$

$\text{Im} f =]-\infty; 0]$

$0 = \text{Max Im} f$
$\|$
$f(0)$



Es:

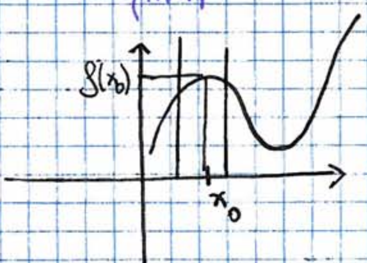


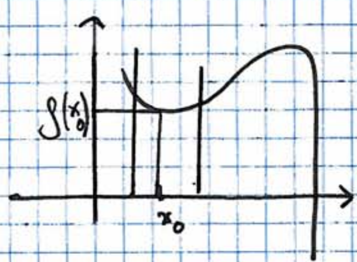
Massimo e minimo locale

Sia $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a;b[$ x_0 è detto punto di massimo (minimo) locale per f se $\exists\ \delta > 0$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in]a;b[\\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$
$$(\geq)$$

Equivalentemente $\underset{(\text{Min})}{\text{Max}} \{ f(x) \mid x \in]a;b[, |x - x_0| < \delta \} = f(x_0)$





Se x_0 è tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in]a;b[$
$(\geq)$

Allora x_0 è detto punto di max globale
(min)

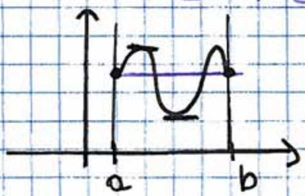
Teorema (Weierstrass)

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$
Allora f ammette max e min globale
cioè $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$
cioè x_2 è punto di max globale e x_1 è punto di min globale

$f(x_2) = \text{Max}\, f$
$f(x_1) = \text{Min}\, f$

Teorema (Rolle)

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a,b[$ tale che $f(a) = f(b)$
Allora $\exists\, x_0 \in]a;b[: f'(x_0) = 0$



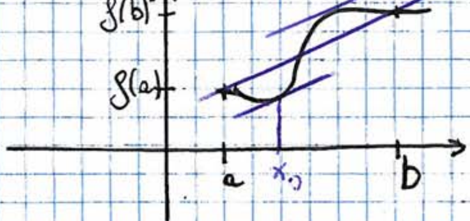
Dimostrazione = Per Weierstrass $\exists\, x_1, x_2 \in [a;b]$
x_2 punto di max globale
x_1 punto di min globale
Se uno di questi due punti sta in $]a;b[$ abbiamo concluso. Rimane da considerare il caso in cui $x_1, x_2 \in \{a;b\}$
$\Rightarrow f$ costante su $[a;b]$ (poiché $f(a) = f(b)$) e quindi in tal caso
$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a;b[$

18/11/10 Teorema di Rolle

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$ e tale che $f(a) = f(b)$ Allora $\exists\, x_0 \in]a;b[$ tale che $f'(x_0) = 0$

Teorema di Lagrange

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$ Allora
$\exists\, x_0 \in]a;b[$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Osservazione = Rolle è un caso particolare di Lagrange quando $f(b) = f(a)$
Dimostrazione (Teorema di Lagrange)
consideriamo la funzione ausiliaria $g : [a;b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

g continua su $[a;b]$ e derivabile su $]a;b[$
$g(a) = f(a)$
$g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$

Derivate di ordine superiore

Sia $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ derivabile su $]a;b[$, $f':]a;b[\to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in]a;b[$. Se f' è derivabile in x_0. Si dice che f ammette derivata seconda in x_0 e si scrive:

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Si può continuare così e definire derivate di ogni ordine: $f'', f''', f^{IV}, f^{V}, f^{VI}$ o $f^{(n)}$ derivata di ordine (n)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$f^{j}(x) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1) a_k x^{k-j} \quad \text{con } 0 < j \le n$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{n} (k)(k-1)\dots(k-(n-1)) a_k x^{k-j} = n(n-1)\dots 1 a_n = n! a_n$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0 \quad \forall x$$

$$f^{(j)}(x) = 0 \quad \forall x \quad \forall j \ge n+1$$

$$f^{(j)}(0) = j(j-1)\dots(j-(j-1))\, a_j = j!\, a_j$$

$$\boxed{a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}}$$

$$* f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \to \text{Traslazione}$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-(j-1))\, a_k (x-x_0)^{k-j}$$

$$f^{(j)}(x_0) = j!\, a_j$$

<u>Notazione</u> - Se f è derivabile n volte su $]a;b[$ e $f^{(n)}$ è continua su $]a;b[$ si dice che f è una funzione di classe C^n

Funzione di classe $C \to$ continua

$C^1 \to$ derivabile e continua

$C^n(]a;b[)$ = insieme di tutte le funzioni di classe C^n su $]a;b[$

f è $C^{+\infty}$ se ammette derivate di ogni ordine come:

- polinomi
- $\sin x$
- $\cos x$
- e^x

Poiché ε è stato scelto arbitrario ne segue anche che $\ell = f(x_0)$ → perché se così non fosse $\exists\, \varepsilon$ tale che la disequazione $f(x_0)-\varepsilon \leq \ell \leq f(x_0)+\varepsilon$ non varrebbe.

Osservazione: Il fatto che il dominio sia un intervallo chiuso e limitato è cruciale per la validità del Teorema.

In effetti: ① se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

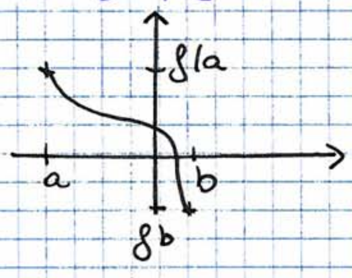
$f(x) = x$ $\quad$ $Im\, f = \mathbb{R}$ non ha né max né min

② $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $f:]0;1] \to \mathbb{R}$ $\quad$ $Im\, f = [1; +\infty[$ il max non esiste.

Teorema dell'esistenza degli zeri

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$

→ $\exists\, x_0 \in [a;b]$ tale che $f(x_0) = 0$



Per dimostrare → utilizzare il metodo di bisezione

Divido l'intervallo, 2 possibilità: • il punto centrale è lo zero

• mi rimangono 2 intervalli uno con sempre lo stesso segno e l'altro con una parte positiva e una negativa → e continuo a dividere questo intervallo fino a trovare lo 0.

Corollario (Teorema dei valori intermedi)

$f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a;b]$

Poniamo $M = Max\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$

$m = Min\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$

Allora $Im\, f = [m; M]$ cioè $\forall\, m \leq \ell \leq M$ $\exists\, x_0 \in [a;b]: f(x_0) = \ell$

Dimostrazione del corollario → Siano $x_1, x_2 \in [a;b]$ tale che

$f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$

Consideriamo f ristretto all'intervallo $[x_1, x_2]$ (per semplicità ipotizzo $x_1 < x_2$). Fissiamo ora $m < \ell < M$ e consideriamo $g(x) = f(x) - \ell$

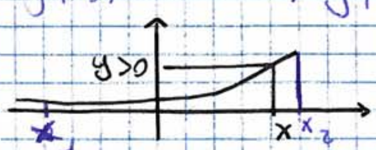
$g(x_1) = f(x_1) - \ell = m - \ell < 0$

$g(x_2) = f(x_2) - \ell = M - \ell > 0$

→ $\exists\, x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x_0) = 0$ → $f(x_0) = \ell$

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ $\quad a > 1$



$x = \log_a y$

cioè $Im\, f =]0; +\infty[$

→ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Fissato $y > 0$ $\quad \exists\, x_1 < x_2$ → $a^{x_1} < y < a^{x_2}$

Quindi $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Es $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x \qquad f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to x_0$

Es $f(x) = e^x \qquad x_0 = 1$

$f(1) = f'(1) = f''(1) = e$

$P_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$

$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o(x-1)^2 \qquad x \to 1$

Es $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \to 1 \qquad e^x = 1 + x + o(x)$

$e^x - 1 - x = o(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^x-1-x}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}$

Indeterminato!

Applico il polinomio di Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$

Es $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} \to$ con lo sviluppo di grado 2 non possiamo risolvere il limite perchè troviamo $\frac{o(x^2)}{x^3}$

Supponiamo sia f di classe C^n su $]a;b[$; $x_0 \in]a,b[$ e cerchiamo un polinomio $P_n(x)$ di grado n tale che (*) $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ con $k = 0, 1, \dots, n$

$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-x_0)^j$

$P_n^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$

Quindi (*) implica che $a_j = \frac{P_n^{(j)}(x_0)}{j!} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0

* $f(x) = \cos(x)$ $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f(0) = 1$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f'(0) = 0$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0$

$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \forall n$

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x) \quad \forall n$$

23/11/10

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Teorema → $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ derivabile una volta su $[a;b]$ con f' continua e derivabile due volte su $]a;b[$. Allora $\exists\, c \in]a;b[$ tale che

(1) $$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f''(c)}{2} \quad (2)$$

Lagrange: $$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Osservazione → a e b possono essere invertiti

Dimostrazione: Sia $$K = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}$$

e consideriamo la seguente funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - K(x-a)^2$$

g ha le stesse proprietà di regolarità di f su $[a;b]$
↳ continuità, derivabilità

$g(a) = 0$

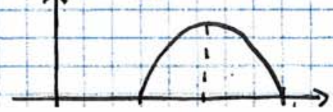
$g(b) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - K(b-a)^2 = 0$

$g'(x) = f'(x) - f'(a) - 2K(x-a)$

$g''(x) = f''(x) - 2K$

Per Rolle $\exists\, c_1 \in]a;b[$ tale che $g'(c_1) = 0$. Poiché $g'(a) = 0$

Applicando di nuovo Rolle a g' su $[a;c_1]$ si ottiene che esiste $c \in]a;c_1[$ tale che $g''(c) = 0$



Quindi, $f''(c) - 2K = 0 \to K = \dfrac{f''(c)}{2}$

$x_0 < c(x) < x$ $\qquad \lim_{x \to x_0} c(x) = x_0$

$\downarrow \qquad \searrow$

$x_0 \qquad x_0$

Applicazione della formula di Lagrange

$\boxed{\text{Convessità}}$

$f : [a;b] \to \mathbb{R}$

Se f è derivabile si può definire la convessità su $[a;b]$ come

$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x_0, x \in [a,b]$

[un insieme del piano si dice convesso se congiungendo 2 punti ∈ all'insieme la retta si trova sempre dentro l'insieme.

In una funzione → la funzione deve sempre stare sopra la retta tangente

Proposizione → Se f è derivabile due volte su $[a;b]$ e f è tale che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a;b]$ Allora f è convessa su $[a;b]$.

Dimostrazione $= x_0 \in [a;b]$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}\, + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x$

$\boxed{\text{Un punto di flesso}}$ è un punto x_0 tale che passando da sinistra a destra di x_0 f cambia da convessa a concava (o viceversa).

Proposizione: Sia $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e sia $x_0 \in]a;b[$ punto di flesso. Allora $f''(x_0) = 0$

$\boxed{25/11/10}$ $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ con $x_0 \in]a;b[$

f di classe C^n su $]a;b[$ $\quad \boxed{f'(x_0) = 0}$

$f''(x_0) > 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \to \text{perché } f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{=0} + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$$

$\boxed{f'(x_0) > 0}$ $\quad f'$ continua

$\exists\, \delta > 0$ tale che $f''(x) > 0 \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$

Ma se $|x - x_0| < \delta$

$\downarrow$

$|c - x_0| < \delta \to f'(c) > 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x : (x - x_0) < \delta$

$\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale

Abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto:

Proposizione → $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ con $x_0 \in]a,b[$

$n=3$

$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{1}{720}$$

$n=4$

$$\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320}$$

Es: Calcolare le prime dieci cifre decimali di e $\quad x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot x^n$$

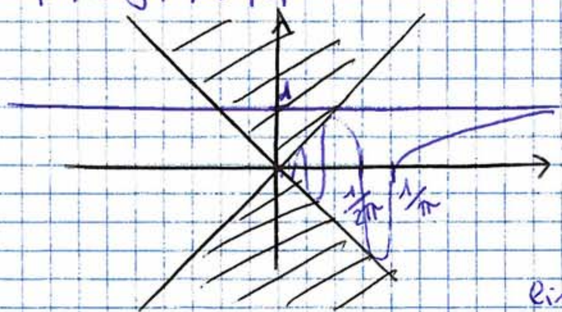
$$e^1 = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$e^1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \qquad$ pari

$$|f(x)| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le x$$

$$-|x| \le f(x) \le |x|$$



$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Estensione continua in 0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1$$

$\frac{1}{x} = k\pi \qquad x = \frac{1}{k\pi}$ con $k \ne 0$ zeri della funzione.

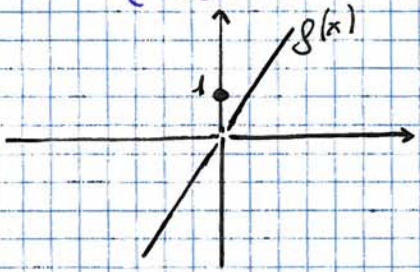
Poiché $\lim_{x \to x_0} c(x) = x_0$ $\quad c(x) \neq x_0 \quad \forall x$

Ne segue che $\lim_{x \to x_0} f'(c(x)) = \ell$

Quindi $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$

Osservazione = La continuità in x_0 é fondamentale!

Es: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$f'(x) = 1 \quad \forall x \neq 0$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$

Ma f non é derivabile in 0!

Teorema di l'Hôpital

$f, g \;]a;b[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabile su $]a;b[\setminus \{x_0\}$ tale che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{0; +\infty; -\infty\}$

Allora, se esiste $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (1)$

Esiste anche $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (2)$

⚠ Ma se (1) non $\exists$ non vuol dire che (2) non esiste

Osservazione = l'Hôpital si estende anche a limiti destri e sinistri.

⚠ Si può applicare solo alle forme indeterminate.

Osservazione = Il tappabuchi é un caso particolare di l'Hôpital

$$\frac{f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0}{x - x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \ell \rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

Es: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} \rightarrow \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \rightarrow \dfrac{-\sin x}{6x} \rightarrow \dfrac{-\cos x}{6}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{-\cos x}{6} = -\dfrac{1}{6} \rightarrow$ Per l'Hôpital $\lim_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{6x} = -\dfrac{1}{6}$

$\rightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = -\dfrac{1}{6} \rightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$

* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + K \qquad x>0$

$\int \frac{1}{x} = \ln(-x) + K \qquad x<0$

In effetti $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

→ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + K \qquad x \neq 0$

Cosa vuol dire? È vero che le uniche funzioni in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ che siano primitive di $\frac{1}{x}$ sono $\ln|x| + K$? No!

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 7 & x>0 \\ \ln(-x) + 5 & x<0 \end{cases}$$

È una primitiva di $\frac{1}{x}$ su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

La formula è giusta guardando a destra o a sinistra (per $x>0$ o $x<0$) ma non per la globalità della funzione perché $x \neq 0$

$\boxed{2/11/10}$

Regole di integrazione

Prop. $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$

Ipotizziamo che siano integrali (cioè che abbiano primitive). Allora dati due qualunque numeri reali $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ anche la funzione $\lambda f + \mu g$ ammette primitive e vale $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$

Dimostrazione = Sappiamo che $\int f(x)\,dx = F(x) + K$

$\int g(x)\,dx = G(x) + K$

si tratta di far vedere che $\lambda F(x) + \mu G(x)$ è una primitiva di $\lambda f(x) + \mu f(x)$ e questo segue dal fatto che $\frac{d}{dx}(\lambda F(x) + \mu G(x)) = \lambda \frac{d}{dx}F(x) + \mu \frac{d}{dx}G(x) =$

$= \lambda f(x) + \mu f(x)$

Es: $\int (3x^2 + 2e^x)\,dx = 3\int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = 3\left(\frac{1}{3}x^3 + K_1\right) + 2(e^x + K_2) =$

$= x^3 + 2e^x + 3K_1 + 2K_2 = x^3 + 2e^3 + K$

Osservazione → 1. $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ derivabile

$\int f'(x)\,dx = f(x) + K$

2. $f]a,b[\to \mathbb{R}$ integrabile

Allora $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

* Regola di integrazione per parti

Per dimostrarla utilizzo la formula per derivare un prodotto $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

Siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$(f\cdot g)' = f'g + f g'$

$f'g = (fg)' - fg'$

$\int e^{-7x}dx = \int e^{t}$

$dx = \phi'(t)\,dt = -\frac{1}{7}dt$

$$\int e^{-7x}dx = \int e^{t}\left(-\frac{1}{7}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{7}e^{t} + K = -\frac{1}{7}e^{-7x} + K$$

$$\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + K \quad (\alpha \neq 0)$$

Es: $\int x \sin(x^2)\,dx$

Per sostituzione → $\phi(x) = x^2$ $\quad t = \phi(x)$

$\int x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \sin\phi(x)\,\phi'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + K =$

$= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + K$

Metodo più facile → $t = \phi(x) = x^2$ → Però non è molto rigoroso perché la funzione non è invertibile.

$\frac{dt}{dx} = 2x \qquad dt = 2x\,dx$

$\int x\sin(x^2)dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \dots$

Es: $\int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad x > 0$

Integriamo per parti $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + K$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x}dx$$

$$2\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \ln(x)^2 + K$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + K$$

Integriamo per sostituzione $\quad \ln x = t \qquad x = e^{t}$

$\frac{dx}{dt} = e^{t}$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{t}{e^{t}}e^{t}\,dt = \frac{1}{2}t^2 + K = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + K$$

Osservazione → $\int (\phi(x))^{k}\phi'(x)\,dx = \frac{1}{k+1}(\phi(x))^{k+1} + C$

$k \neq -1$

$$\int x^{k}dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$$