NUMERO : 93

DATA : 28/04/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Pignato

MATERIA : Analisi 1
Prof. Serra

PREREQUISITI

• **INSIEMI** definito dagli elementi che lo compongono → $A = \{a, b, c\}$

A è contenuto/sottoinsieme di B → $A \subseteq B$ = $\{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

Proprietà degli elementi

$P(x)$ proprietà che x può avere $P(x)$ = x è pari $P(4)$ VERO
$P(5)$ FALSO

$\{x / P(x)\} = \{x : P(x)\} \rightarrow \{x / x \text{ è pari}\}$

INSIEME UNIVERSO

- Si pensa che tutti gli insiemi siano sottoinsiemi di un enorme insieme X

$A, B, C, \dots \subset X$

$\cup$ unione $A \cup B = \{x \in X / x \in A \overset{\vee}{\text{o}} x \in B\}$

$\cap$ intersezione $A \cap B = \{x \in X / x \in A \overset{\wedge}{\text{e}} x \in B\}$

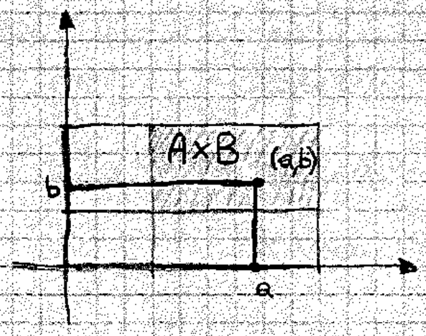
$\setminus$ differenza $A \setminus B = \{x \in X / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Es. dimostrare che
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

• prodotto cartesiano

$A \cdot B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$ (a, b) coppia ordinata
$\neq$
(b, a)

$A \subset X$
$B \subset Y$ $A \times B = \{(a, b) \in X \times Y / a \in A, b \in B\}$



$A \times B \times C = \{(a, b, c) / a \in A, b \in B, c \in C\}$

$P(x)$ proprietà

$P(x)$ $x > 3$ non è una proposizione

$P(5)$ vera $5 > 3$

$P(1)$ falsa $1 > 3$

$P(x)$??

QUANTIFICATORI

- **Universale** $\forall$ qualunque, per ogni
- **Esistenziale** $\exists$ esiste, per qualche

In ogni proposizione, le variabili devono essere precedute da un quantificatore

$\forall x$ $x > 3$ falsa

$\exists x$ $x > 3$ vera

es. $P(x,y)$ $x > y$

$\forall x \; \exists y$ $x > y$ vera

$\exists y \; \forall x$ $x > y$ falsa "esiste un numero che, per ogni x, è più piccolo"

Es. $P(x)$ $x > y$

$\exists x \; \exists y$ $x > y$

$\forall x \; \exists y$ $x > y$

$\exists x \; \forall y$ $x > y$

NEGAZIONE delle proposizioni quantificate

NOT $(\forall x \; P(x))$

$P(x)$ = il banco x è occupato

$\forall x \; P(x)$ tutti i banchi sono occupati

NOT $(\forall x \; P(x))$ almeno un banco è libero

esiste un banco non occupato

$\exists x$ NOT $P(x)$

NOT $(\forall x \; P(x)) \leftrightarrow \exists x$ NOT $P(x)$

NOT $(\exists x \; P(x)) \leftrightarrow \forall x$ NOT $P(x)$

SI SCAMBIANO I QUANTIFICATORI MA LE VARIABILI RIMANGONO

NOT $(\forall x \; \exists y \; \exists z \; P(x,y,z)) \leftrightarrow \exists x \; \forall y \; \forall z$ NOT $P(x,y,z)$

i numeri razionali hanno espansioni decimali finite o periodiche

$0 < r < 1$ $\quad 0{,}5 = \frac{1}{2}$ $\quad 0{,}25 = \frac{1}{4}$ $\quad 0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$

- numeri reali $\mathbb{R}$ "tutti i numeri con qualunque espansione decimale"

$+, \cdot, -, /, \sqrt{\ }$ ↘ quando $r \geq 0$

l'insieme dei numeri reali copre la retta

$\mathbb{R}$ corrispondenza biunivoca con i punti della retta

$0{,}9999\ldots = 1$

$x = 0{,}9999\ldots$ $\qquad 10x = 9{,}9999\ldots = 9 + 0{,}9999\ldots = 9 + x$

$9x = 9 \qquad x = 1$

- **VALORE ASSOLUTO**

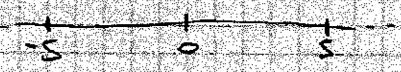
Dato $x \in \mathbb{R}$ definiamo "valore assoluto" di x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- $|4| = 4 \qquad |-4| = -(-4) = 4 \qquad |x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

- $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 \leq 0 \end{cases}$

$|x|$ è la distanza di x da zero



$|x-y|$ = distanza di x da y

es. $|5-3| = |2| = 2$

$|5+2| = |5-(-2)| = |7| = 7$

PROPRIETÀ

- $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \rightarrow |x^2| = |x| \cdot |x| = |x|^2$

- $x \leq |x|$
$-x \leq |x|$ $\quad$ chiamo $y = -x \qquad y \leq |-y| = |x| \qquad -|x| \leq x \leq |x|$

Fissiamo un numero x_0

sia $x-x_0 \geq 0$

$|x-x_0| \leq a$ soluzione $-a \leq x-x_0 < a$

$x_0-a < x < x_0+a$

IMPORTANTE

$\sqrt{4} = \pm 2$ NO $\rightarrow x^2=4 \quad x_{1,2}=\pm 2$

$\sqrt{4} = 2$ SI

$\forall b \geq 0 \ \exists$ un unico $a \geq 0 / a^2=b \rightarrow$ Questo a è $\sqrt{b}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

DEFINIZIONI di INTERVALLO

Es. Risolvere $2 \leq |x| < 5$

$$\begin{cases} |x|<5 \\ |x| \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -5<x<5 \\ x \leq -2 \cup x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} (-5,5) \\ (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) \end{cases}$$

SOLUZIONE

$(-5,5) \cap [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]$

SOLUZIONE

$(-5,-2] \cup [2,5)$

Es. $\frac{x \cdot \sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1 \geq 0$

VIUINA

$|x^2-4|$ è ≥ 0 $\qquad \underline{x \geq 0}$

1° caso

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ \frac{x \cdot \sqrt{x^2-4}}{x^2-4} - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x<-2, x>2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{---} \\ \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-\sqrt{x^2-4} \geq 0 \\ x<-2, x>2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 \geq x^2-4 \quad \forall x \\ x \geq 0 \\ x<-2, x>2 \end{cases}$$

$\downarrow$

SOLUZIONE $x>2$

2° caso

$$\begin{cases} x^2-4<0 \\ \frac{x \sqrt{4-x^2}}{-(4-x^2)} - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2<x<2 \\ \frac{x}{-\sqrt{4-x^2}} - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{---} \\ \frac{x+\sqrt{4-x^2}}{-\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{---} \\ x+\sqrt{4-x^2} \geq 0 \ \ldots \end{cases}$$

2) Supponiamo che esista $c \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in A,\ |a| \leq c$

$$\underset{\text{MINORANTE}}{-c} \leq a \leq \underset{\text{MAGGIORANTE}}{c}$$

— **Def.** $A \subset \mathbb{R}$

Si dice che A ha **massimo** se $\underline{\exists \alpha \in A} \,/\, \forall a \in A,\ a \leq \alpha$

Ha invece **minimo** se $\exists\, \underline{\beta \in A} \,/\, \forall a \in A,\ \beta \leq a$

es. $A = [0, 1)$ Non ha MAX:

Se c'è $\max A = \alpha$, $\alpha < 1 \rightarrow 0 \leq \alpha < 1$

Sia $\alpha < 1$ $\qquad \frac{\alpha+1}{2} < 1$, $\frac{\alpha+1}{2} > \alpha$

0 è minimo

— **DEFINIZIONE**

Sia A limitato dall'alto. Il più piccolo dei maggioranti di A si chiama

- **ESTREMO SUPERIORE** di A

sup A

- Il più grande dei minoranti si chiama **ESTREMO INFERIORE** di A

inf A

Caratterizzazione di sup A

1) $\forall a \in A,\ a \leq \sup A \rightarrow \sup A$ è maggiorante

2) $\forall t < \sup A \quad \exists x \in A \,/\, x > t$ $\qquad t \quad x \quad \sup A$ $\rightarrow t$ non è maggiorante

1+2) sup A è il più piccolo dei maggioranti

es. $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$

1) MAX non esiste:

per assurdo $\rightarrow$ se esistesse sarebbe un $\frac{m}{m+1}$ per qualche m

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leq \frac{m}{m+1}$ NO $n = m+1$

$\frac{m+1}{m+2} \leq \frac{m}{m+1} \rightarrow \cancel{m^2} + \cancel{2m} + 1 \leq \cancel{m^2} + \cancel{2m} \rightarrow 1 \leq 0$ FALSO $\nexists$ MAX

• FUNZIONI

X, Y insiemi

- **Def.** una funzione f da X in Y è una legge che a ogni elemento di X associa un unico elemento di Y

$$f : X \to Y$$

1) il sottoinsieme di X dove ha senso calcolare f si chiama DOMINIO di f
dom(f)

2) se $x \in \text{dom}(f)$, $f(x)$ è l'IMMAGINE di x
$\{f(x) / x \in \text{dom}(f)\} \to$ immagine di f, $\text{im}(f)$

- **Def.** "GRAFICO di $f : X \to Y$"

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))\ X \times Y / x \in \text{dom}(f)\}$$

es. $f(x) = x^2$ $(0;0)$ $(1;1)$ $(2;4)$ $(-3;9)$

IDENTITÀ

$f(x) = x$ funzione identica

3) Dato $B \subset Y$
$\{x \in X / f(x) \in B\}$ [redacted] di B $f^{-1}(x)$

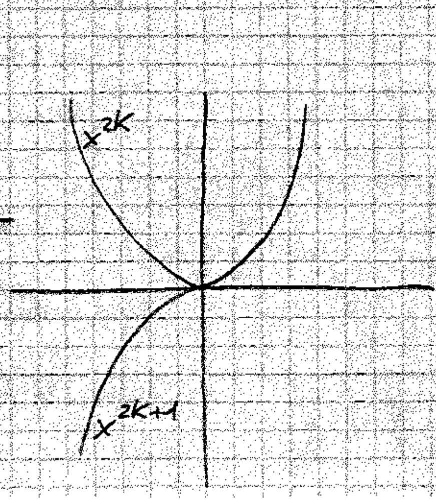
MASSIMO

$\exists x_M \in A / f(x_M) = \sup\limits_A f \to$ il sup "è raggiunto"

FUNZIONI ELEMENTARI es. VIVINA

• $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- se $\alpha > 0$: $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$
- se $\alpha \le 0$: $\text{dom}(f) = (0, +\infty)$

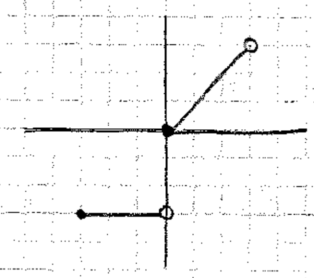


1) $\alpha = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$x, x^2, x^3, \dots x^n$ $\text{dom}(x^n) = \mathbb{R}$

$K > 0$ $\text{im}(x^{2K}) = [0, +\infty)$
$K \ge 0$ $\text{im}(x^{2K+1}) = \mathbb{R}$

<u>es.</u> Trovare l'immagine di $f: [-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1,0) \\ x, & x \in [0,1) \end{cases}$$



$$im(f) = \{-1\} \cup [0,1)$$

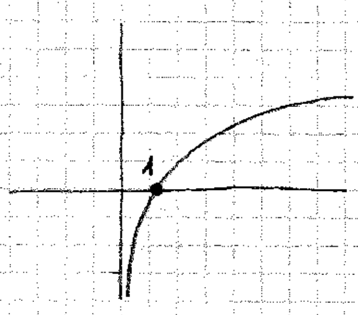
<u>es.</u> determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5}}$

$$g(x) = \log\left(\frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1\right)$$

$$h(x) = \log(\sin x - \cos x)$$

$f(x)$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ \sqrt{x-2} \geq \sqrt{2x-5} \end{cases} = \begin{cases} x \geq 5/2 \\ \\ x-2 \geq 2x-5 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 5/2 \\ \\ x \leq 3 \end{cases}$ $dom(f) = [\frac{5}{2}, 3]$

FUNZIONE LOGARITMO (base = e)



$\log_e : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$dom(\log) = (0, +\infty)$

$im(\log) = \mathbb{R}$

$g(x)$ 1° caso

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} — \\ \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} > 0 \end{cases} = \begin{cases} x<-2, x>2 \\ x > \sqrt{x^2-4} \end{cases} = \begin{cases} — \\ x \geq 0 \\ \cancel{x^2} > \cancel{x^2} - 4 \text{ SEMPRE VERO} \end{cases} \quad x > 2$$

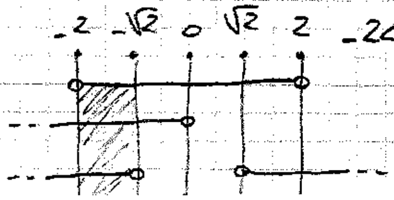
$\sqrt{x^2-4} > 0$

2° caso

$$\begin{cases} x^2-4<0 \\ \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{-(4-x^2)} - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} — \\ \dfrac{-x}{+\sqrt{4-x^2}} - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} — \\ \dfrac{-x-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2<x<2 \\ \\ -x > \sqrt{4-x^2} \end{cases} =$$

$\sqrt{4-x^2} > 0$

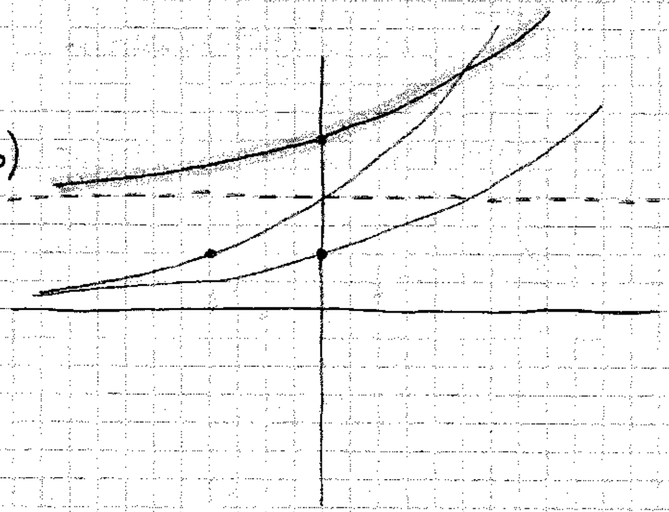
$$\begin{cases} -2<x<2 \\ -x>0 \\ x^2 > 4-x^2 \end{cases} = \begin{cases} — \\ — \\ \cancel{2}x^2 > \cancel{4}^2 \end{cases} = \begin{cases} -2<x<2 \\ -x>0 \\ x>\sqrt{2}, \ x<-\sqrt{2} \end{cases}$$



$-2<x<-\sqrt{2}$

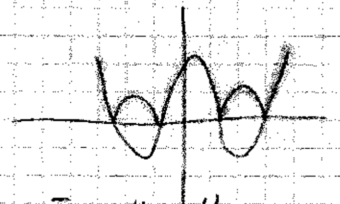
1) $f(x) = e^{x+2}$

$\text{im} f = (0, +\infty)$



2) $g(x) = e^x + 2$

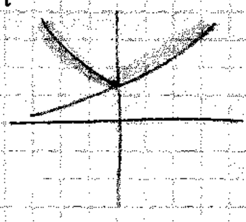
$\text{im}\, g\ (2, +\infty)$



$f(x) \to |f(x)|$ ribatto tutto quello che è sotto l'asse x e disegno la simmetrica sopra

$f(x) \to f(|x|)$ tutto quello che è a sinistra dell'asse y viene sostituito dal simmetrico di quello che c'è a destra

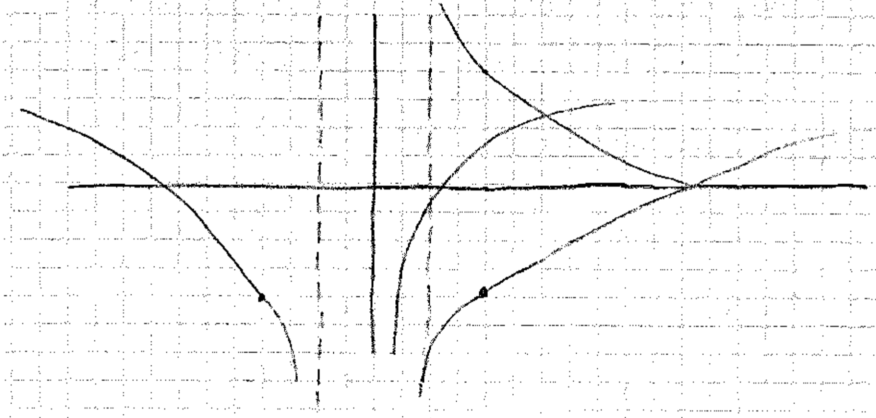
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



es. tracciare il grafico di

1) $f(x) = \log(|x| - 1) - 2$

2) $f(x) = |\log(|x| - 1) - 2|$



f iniettiva e suriettiva

$\downarrow$

FUNZIONE BIIETTIVA (f è una biezione)

es. dato y risolvere

$y = x^2 + x^3 - \sqrt[3]{x}$

si definisce $f(x) = x^2 + x^3 - \sqrt[3]{x}$

dato y vedere se $\exists x$ tale che $f(x) = y$

f è SURIETTIVA $\rightarrow$ eq. ha almeno una soluzione $\forall y$ (ESISTENZA)

f è INIETTIVA $\rightarrow$ eq. ha al più una soluzione $\forall y$ (UNICITÀ)

Definiamo una nuova funzione

$f: X \rightarrow Y$ iniettiva

$\forall y \in im(f), \exists! \, x / f(x) = y$

La funzione che manda $y \in im(f)$ nell'unico x tale che $f(x) = y$ si chiama

- FUNZIONE INVERSA di f

$f^{-1}(y) = x \longleftrightarrow f(x) = y$

PROPRIETÀ

$dom(f^{-1}) = im(f)$

$im(f^{-1}) = dom(f)$

es. $f(x) = x^3$ è invertibile? $f(a) \neq f(b)$

PER ASSURDO $f(a) = f(b) \rightarrow a^3 - b^3 = 0 \rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$

$(a-b)\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + (a+b)^2) = 0$

$\downarrow$

$= 0$

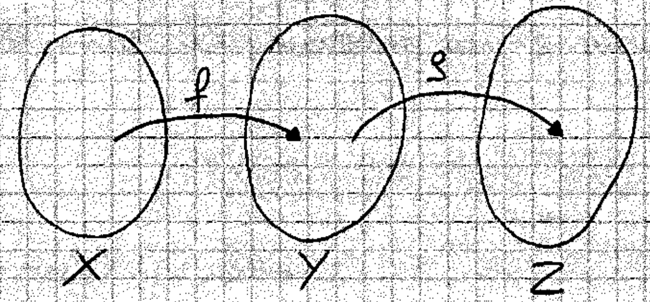
se e solo se $a - b = 0 \rightarrow a = b$ ASSURDO

• FUNZIONI COMPOSTE

X, Y, Z

$f: X \to Y$

$g: Y \to Z$



$x \in X$, calcolo $f(x) \in Y$

$g(f(x)) \in Z$

<u>Def.</u> $g \circ f : X \to Z$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>es.</u> $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x} \to g(y) = \dfrac{1}{y}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ → $g(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ → $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$dom(g \circ f)(x)$ $\quad f(x) = \dfrac{x+2}{|x-1|}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{x+2}{|x-1|}}$

1) $x \in dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $f(x) \in dom(g) = [0, +\infty)$

$\dfrac{x+2}{|x-1|} \in [0, +\infty) \to \dfrac{x+2}{|x-1|} \geq 0$ $\quad x \geq -2$ $\quad dom(g \circ f) = [-2, +\infty) \setminus \{1\}$

– se posso fare $g \circ f$ non sempre posso fare $f \circ g$!

in genere $g \circ f \neq f \circ g$

• LIMITE

1) Sia a_n una successione e sia $l \in \mathbb{R}$

Si dice che:
- a_n tende a l
- a_n converge a l
- il limite di a_n è l

se

Def. 1 (o)

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ tale che
$n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

$\lim_{n \to \infty} a_n = l$

$|a_n - l| < \varepsilon$ è vera per tutti gli n, tranne un numero finito di n

es. $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{2+5n^2} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \underline{\exists n_\varepsilon} \,/\, n \geq n_\varepsilon \rightarrow \left| \frac{3n}{2+5n^2} - 0 \right| < \varepsilon$

$\downarrow$

$\frac{3n}{2+5n^2} < \varepsilon \rightarrow \frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5n} < \varepsilon \rightarrow n > \frac{3}{5\varepsilon}$

$\downarrow$

se $n > \frac{3}{5n}$ allora $\frac{3n}{2+5n^2} < \varepsilon$

$\downarrow$

perché $\frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3n}{5n^2} < \varepsilon$

$+\infty$

2) $b_n = n^2 \rightarrow 0, 1, 4, 9, \ldots$

b_n diventa grande a piacere purché n sia grande

Si dice che:
- a_n diverge a $+\infty$
- a_n tende a $+\infty$

se

Def. 2 $(+\infty)$

$\forall M > 0, \exists n_M$ tale che
$n \geq n_M \rightarrow a_n > M$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

$-\infty$

3) Def. 3 $(-\infty)$

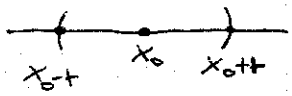
$\forall M > 0, \exists n_M$ tale che
$n \geq n_M \rightarrow a_n < M$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Def.

$x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

intorno di x_0 di raggio $r \longrightarrow I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\}$



$I_r(x_0)$ è un intervallo:
- aperto
- simmetrico rispetto a x_0

Al variare di $r \longrightarrow$ "famiglia degli intorni" di x_0

La proprietà $P(x)$ è vera in un intorno di x

$$\exists\, I_r(x_0) \text{ tale che } P(x) \text{ è vera } \forall x \in I_r(x_0)$$

PROPRIETÀ LOCALI

es. $f(x) = 2x - 1$
f è positiva in un intorno di $x_0 = 1$

APPLICAZIONE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

$$\forall \varepsilon, \exists n_\varepsilon \ , \ n \geq n_\varepsilon \longrightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$$

$$|a_n - 1| < \varepsilon \longleftrightarrow a_n \in I_\varepsilon(1)$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 \qquad \forall I(1), \exists I(+\infty) \ / \ n \in I(+\infty) \longrightarrow a_n \in I(1)$$

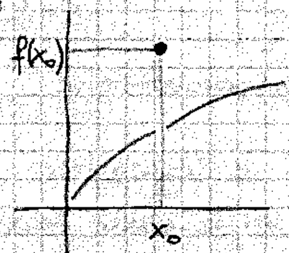
es. $\lim_{x\to 2} (2x+4) = 8$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-2| < \delta \to |f(x)-l| < \varepsilon = |2x+4-8| < \varepsilon$

$|2x+4-8| < \varepsilon \to |2x-4| < \varepsilon \to 2|x-2| < \varepsilon \to |x-2| < \varepsilon/2$ prendo $\delta = \varepsilon/2$

$0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \to 2|x-2| < \varepsilon \to |2x-4| < \varepsilon \to |2x+4-8| < \varepsilon \to |f(x)-8| < \varepsilon$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora i valori di $f(x)$, per x vicino a x_0, sono vicini ad l



Supponiamo che $x_0 \in dom(f)$

Def. CONTINUITÀ in un punto

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

si dice che f è continua in x_0

1) deve esistere il limite l

2) il limite deve coincidere con $f(x_0)$

f è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ tale che $|x-x_0| < \delta \to |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

es. $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \,/\, |x-2| < \delta \to |x^2-4| < \varepsilon$

$|x^2-4| < \varepsilon$?!?! $\to |x-2||x+2| < \varepsilon$ mi limito agli $x \in (1,3)$

$|x+2| < 5$ se $x \in (1,3)$

$|x-2|\underbrace{|x+2| < 5}_{si}|x-2| \to 5|x-2| < \varepsilon \to |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$

$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ $\quad x \,/\, |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \to |x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

A

Def. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0, \exists R > 0$ tale che $x > R \to f(x) > M$

es. VIVINA

FUNZIONI PARI, DISPARI e PERIODICHE

Def. PARI $f: dom(f)\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice pari se:

1) $\forall x \in dom(f)$, $-x \in dom(f)$
2) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in dom(f)$

Def. DISPARI 1) $\forall x \in dom(f)$, $-x \in dom(f)$
2) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in dom(f)$

PROPRIETÀ

Il prodotto di due funzioni dispari è pari

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) \to f(x) \cdot g(x) = -h(x)$

FUNZIONI COMPOSTE (COSENO e SENO IPERBOLICO)

$$\cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sen} h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

FUNZIONI PERIODICHE

$f: dom(f)\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è periodica di periodo T, se T è il minimo valore per cui:

1) se $x \in dom(f) \to x + KT \in dom(f), \forall K \in \mathbb{Z}$
2) $f(x + KT) = f(x)$, $\forall x \in dom(f)$

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE, MONOTONE, INVERTIBILI

es.

$f(x) = 3x+1$

Trovare dom(f) e im(f), verificare che è strettamente crescente, quindi iniettiva. Determinarne l'inversa e disegnare il grafico di f e f^{-1}

1) $dom(f) = \mathbb{R}$
2) $im(f) = \mathbb{R}$ (per ogni $y \in \mathbb{R}$, esiste $x \in dom(f) = \mathbb{R}$ / $f(x) = y$, $3x+1 = y$

$$3 = y-1$$
$$x = \frac{y-1}{3}$$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   - è suriettiva
   - iniettiva = $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

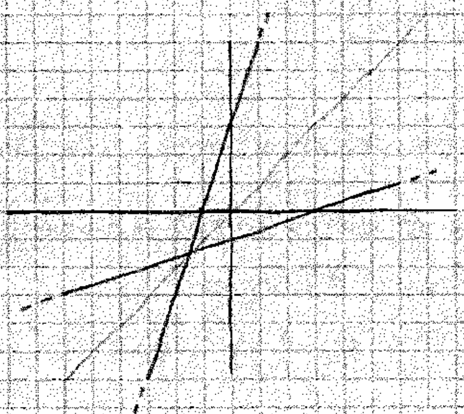
   è garantita dal fatto che $\begin{cases} x_1 < x_2 \to 3x_1 < 3x_2 \\ \to 3x_1+1 < 3x_2+1 \\ \to f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$

4) suriettiva + iniettiva $\to$ invertibile (biiettiva)

FUNZIONE INVERSA

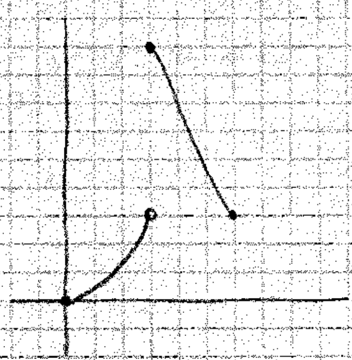
Vogliamo esprimere la relazione inversa di quella descritta da f

$$y = 3x+1 \leftrightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3} \qquad f^{-1}(x) = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$$



es.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0,1) \\ 5-2x & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$



1) $dom(f) = [0,2]$
2) $im(f) = [0,3] = [0,1) \cup [1,3]$

• cerchiamo l'im(f) $\quad \cosh(0) = 1$ valore minimo su $[0,+\infty)$

CONGETTURA: $f(x)$ non è limitata superiormente su $[0,+\infty)$

Dim. $\forall y \geq 1, \exists x \in [0,+\infty) / \cosh x = y$

$\text{im}(x) = [1,+\infty)$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow 2y = e^x + \frac{1}{e^x} \rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \rightarrow \underbrace{e^x}_{\geq 1} = \underbrace{y \pm \sqrt{y^2-1}}_{\geq 1}$$

quale dei 2 è accettabile

① $y - \sqrt{y^2-1} \overset{?}{\geq} 1 \rightarrow y - 1 \geq \sqrt{y^2-1} \rightarrow (y-1)^2 \geq y^2 - 1$

$\cancel{y^2} - 2y + 1 \geq \cancel{y^2} - 1 \rightarrow -2y \geq -2 \rightarrow \underline{y \leq 1}$

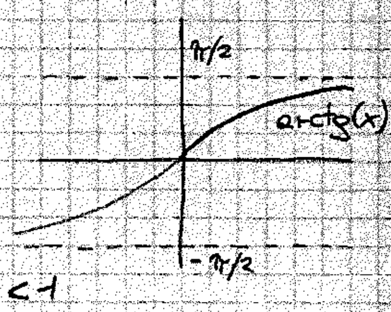
② $e^x = y + \sqrt{y^2-1} \rightarrow \underline{\underline{x = \log(y + \sqrt{y^2-1})}}$ $\rightarrow (\cosh)^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1})$

$\cosh x \; [0,+\infty) \rightarrow [1,+\infty)$ e quindi è invertibile

quindi $\forall y \geq 1, \exists! x \geq 0 / y = \cosh(x)$

es. Determinare la funzione inversa di f(x) specificandone il dominio

$$f(x) = \text{arctg}\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$



$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x \geq 1\} = [0,+\infty)$

$\text{im}(f) \subseteq [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow$ non solo perché guardando la radice la fraz. è sempre < 1

$\text{im}(f) \subseteq [0, \frac{\pi}{4})$

dimostriamo che $\forall \alpha \in (0,1), \exists x \in [0,1) / \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} = \alpha$

$$e^x - 1 = \alpha^2(e^x + 1) \rightarrow e^x(1 - \alpha^2) = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \rightarrow x = \log\left(\frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right)$$

$f : [0,+\infty) \rightarrow [0, \frac{\pi}{4})$ $\rightarrow$ a casa dim. l'iniettività es. $\lim_{x \to 2} 3x-5 = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |x-2| < \delta \to |3x-5-1| < \varepsilon$$

$$|3x-6| < \varepsilon \to |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

es. $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+1}{n-2} = 3$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \,/\, \forall n \geq n_\varepsilon, \left| \frac{3n+1}{n-2} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{3n}+1-\cancel{3n}+6}{n-2} \right| < \varepsilon \to \frac{7}{|n-2|} < \varepsilon \to n-2 > \frac{7}{\varepsilon} \to n > \frac{7}{\varepsilon} + 2$$

Def. LIMITE con gli intorni

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \quad r > 0 \to x \in I_r(x_0) \xrightarrow{\text{equivale a}} |x - x_0| < r$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

oppure

$$\forall I_\varepsilon(l), \exists I_\delta(x_0) \,/\, x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \to f(x) \in I_\varepsilon(l)$$

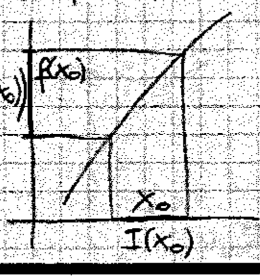
oppure

$$\forall I(l), \exists I(x_0) \,/\, x \in I(x_0) \to f(x) \in I(l)$$

Def. CONTINUITÀ con gli intorni

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \,/\, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

oppure



$$\forall I(f(x_0)), \exists I(x_0) \,/\, x \in I(x_0) \to f(x) \in I(f(x_0))$$

$$f(I(x_0)) \subset I(f(x_0))$$

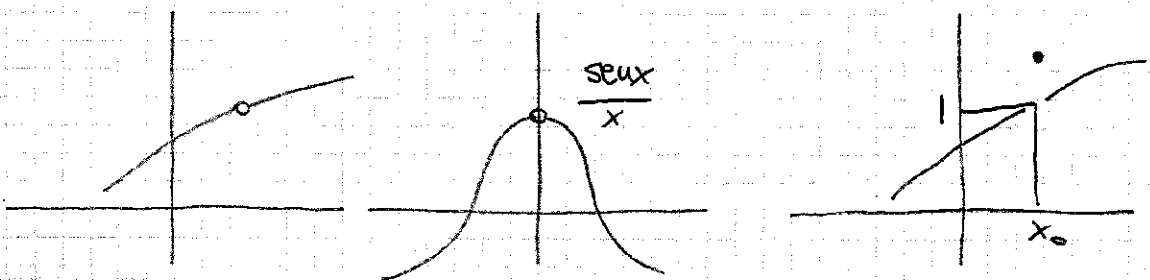
- CLASSIFICAZIONE delle DISCONTINUITÀ

1) eliminabile
2) prima specie
3) seconda specie

1) f in un intorno di x_0 (tranne eventualmente x_0)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

si dice che f ha in x_0 una discontinuità eliminabile



NUOVA FUNZIONE CONTINUA

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$\overline{f}$ è continua in x_0

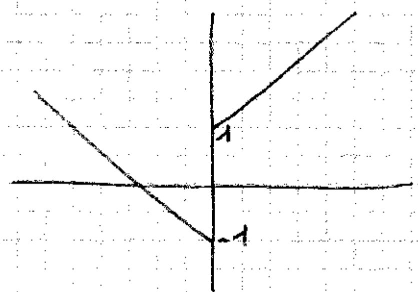
$$\lim_{x \to x_0} \overline{f}(x) = l = \overline{f}(x_0)$$

2) esistono finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ma sono diversi

f ha un SALTO

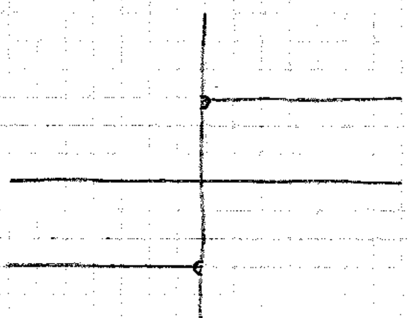
discontinuità a salto o di prima specie

es. $f(x) = \frac{x + x^2}{|x|} = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x > 0 \\ -1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$x_0 \notin \operatorname{dom}(f)$

es. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$x \notin \operatorname{dom}(f)$

se $x \in I(c) \cap I'(c) \setminus \{c\}$

$$f(x) \in I(l)$$
$$f(x) \in I'(l)$$

Allora $I(l) \cap I'l \neq \emptyset$ ASSURDO

TEOREMA di PERMANENZA del SEGNO

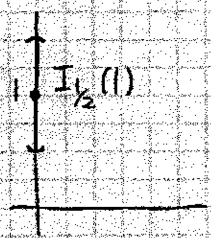
Supponiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = l \neq 0$ con $l > 0$ / $= +\infty$

Allora esiste un intorno di c $\exists I(c) / f(x) > 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$

__Dim.__

Nel caso $l > 0$ finito, prendiamo un intorno di l di raggio $1/2$

$I_{1/2}(l)$



$I_{1/2}(l) \subset (0, +\infty)$

Per def. di limite

$$\exists I(c) / x \in I(c) \setminus \{c\} \to f(x) \in I_{1/2}(l) \subset (0, +\infty) \qquad f(x) > 0$$

COROLLARIO

Supponiamo che esiste un intorno $I(c) \setminus \{c\} \to f(x) \geq 0$ (≤ 0)

se $\lim_{x \to c} f(x) = l$ allora $l \geq 0$ (≤ 0)

__Dim.__ per ASSURDO

sia $l < 0$ (oppure $l = -\infty$)

$\lim_{x \to c} f(x) = l < 0$

per il teorema di permanenza del segno

$$\exists I'(c) / x \in I'(c) \setminus \{c\} \to f(x) < 0$$

prendo $I(c) \cap I'(c)$ posso prendere $x \in I(c) \cap I'(c) \setminus \{c\}$

siccome $x \in I(c) \to f(x) \geq 0$

siccome $x \in I'(c) \to f(x) < 0$ ASSURDO prendo $I(c) \cap I'(c) \cap I''(c)$ è un intorno di c e lo chiamo $I^*(c)$

prendo $x \in I^*(c) \setminus \{c\}$

$$\underset{x \in I'(c)}{1-\varepsilon/2 < f(x)} \leq \underset{x \in I(c)}{g(x) \leq h(x)} < \underset{x \in I''(c)}{1+\varepsilon/2}$$

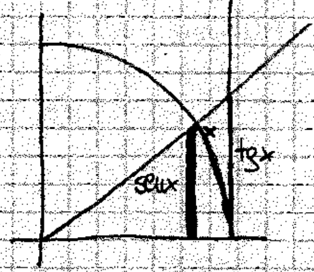
$$x \in I^*(c) \setminus \{c\} \rightarrow 1-\varepsilon/2 < g(x) < 1+\varepsilon/2$$

$$g(x) \in I_{\varepsilon/2}(1) \subset I_\varepsilon(1)$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = 1$$

- LIMITI NOTEVOLI 1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ divido per senx

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

$$\underset{f}{\cos x} < \underset{g}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} < \underset{h}{1} \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underset{\text{è continua}}{\cos x} = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ALGEBRA dei LIMITI

TEOREMA

Supponiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = l$, $\lim_{x \to c} g(x) = m$

allora:

1) $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = l + m$

2) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

3) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ purché $m \neq 0$ e $g \neq 0$ in un $I(c)$

Dim. 1) nel caso $l, m \in \mathbb{R}$

$\forall I(l+m), \exists I(c) / x \in I(c) \setminus \{c\} \to f(x) + g(x) \in I(l+m)$

Prendiamo un intorno di $l+m$

$I_\varepsilon(l+m)$

Poiché $\lim_{x \to c} f(x) = l$ allora $\exists I'(c) / x \in I'(c) \setminus \{c\} \to f(x) \in I_{\varepsilon/2}(l)$ $\to |f(x) - l| < \varepsilon/2$

" $\lim_{x \to c} g(x) = m$ " $\exists I''(c) / x \in I''(c) \setminus \{c\} \to g(x) \in I_{\varepsilon/2}(l)$ $\to |g(x) - m| < \varepsilon/2$

Se prendo $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$

$\forall x \in I(c) \setminus \{c\}$

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

COROLLARIO

Se f e g sono continue in x_0, allora $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sono continue in x_0

Dim. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$

es.

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - 3\cos x}{5 + x \operatorname{sen} x}$ $\quad f \;\; 2x - 3\cos x$ continua $\quad g \;\; 5 + x \operatorname{sen} x$ continua $\quad \frac{f}{g}$ = continua es. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{4x^2+x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = -\infty$

- LIMITI NOTEVOLI 2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\downarrow \, 1/2}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

TEOREMA di SOSTITUZIONE

Supponiamo che $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Sia g una funzione definita in un intorno di l (event. non in l)
Supponiamo che:

1) Se $l \in \mathbb{R}$, g sia continua in l

2) Se $l = \pm\infty$, esista $\lim_{y \to l} g(y)$

allora

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$$

Dim. $\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y) = g(l) = g \cdot \lim_{x \to c} f(x)$

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

COROLLARIO

Se f è continua in x_0
e g è continua in x_0 $\rightarrow$ allora $g \circ f$ è continua in x_0

Dim. $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$

③ $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$ Dim. $x = \frac{1}{y}$ se $x \to 0$, $y \to \infty$

$$\lim_{y \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

④ Per $a>0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} = \log_a e$$

Dim. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\log a}$

Per $a = e$ $\lim = 1$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ $y = a^x - 1$ se $x \to 0$, $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \log a$$

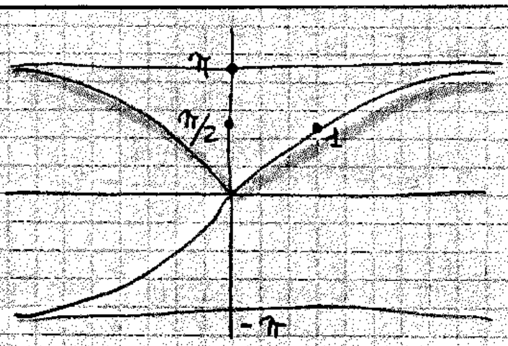
⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $1+x = e^y$ $y = \log(1+x)$

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{(e^\alpha)^y - 1}{y}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{y}{e^y - 1}}_{1} = \alpha$$

FORME INDETERMINATE ESPONENZIALI

- 0^0
- 1^∞ $0^\infty \to 0$
- ∞^0

$g \circ f = 2\,\text{arctg}\,x$



$h \circ f = |\text{arctg}\,x|$

$f \circ h = \text{arctg}|x|$

<u>es.</u>

$2\cos^2 x + 3\,\text{sen}\,x - 3 > 0 \qquad 2 - 2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}\,x - 3 > 0 \qquad 2\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\,x + 1 < 0$

$y = \text{sen}\,x$

$2y^2 - 3y + 1 < 0 \qquad y_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{sen}\,x < 1 & \forall x \notin \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{sen}\,x > \frac{1}{2} & \forall x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) \end{cases}$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$$

<u>es.</u>

$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + 3\cos x < 3 \qquad t = \text{tg}\,\frac{x}{2} \qquad \text{sen}\,x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sqrt{3}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right) + 3\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 3 < 0 \qquad \dfrac{2\sqrt{3}t + 3 - 3t^2 - 3 - 3t^2}{1+t^2} < 0$

$-6t^2 + 2\sqrt{3}t < 0 \qquad 3t^2 - \sqrt{3}t > 0 \qquad t(3t - \sqrt{3}) > 0 \qquad t_1 = 0 \quad t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad t < 0 \vee t > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} < 0 \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < 0 \qquad -\pi < x < 0$

$\cup \qquad x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{3} < x < \pi$

<u>es.</u>

$f(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{se } x \leq \frac{5}{2} \\ x^2 - 5x + 6 & \text{se } x > \frac{5}{2} \end{cases}$

f è continua in $\frac{5}{2}$?

$\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right)$

$\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} \ ; \ \lim_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = \dfrac{5}{2} + \alpha$

$\dfrac{5}{2} + \alpha = -\dfrac{1}{4} \qquad \alpha = -\dfrac{11}{4}$

$f(x)$ è continua per $\alpha = -\dfrac{11}{4}$

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x}{x+1}(e - e^{\text{sen}x})$ esiste il lim?

CRITERIO DI ESISTENZA del LIMITE

1) se $\exists\ a_n, b_n \ / \ \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$

$\longrightarrow \nexists \lim_{x \to \infty} f(x)$

2) e se $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(b_n)$

1) $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $\quad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$

$b_n = n\pi$

2) $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{a_n^2 - 5a_n}{a_n + 1}}_{\infty}(e - e^{\overset{1}{\text{sen}(a_n)}}) = 0$

$\downarrow$ 0

$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{(n\pi)^2 - 5n\pi}{n\pi + 1}(e - e^{\text{sen}(n\pi)}) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\cancel{2}}\left(\pi^2 - \frac{5\pi}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\pi + \frac{1}{n}\right)}(e - 1) = +\infty$

$\downarrow$

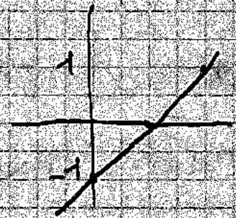
$\nexists \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x}{x+1}(e - e^{\text{sen}x})$

Quindi $f(c)=0$ Ho trovato uno zero di $f \rightarrow c \in (a,b)$

Se f è strettamente monotona $\rightarrow f$ è iniettiva $\rightarrow f^{-1}(0)$ è fatto di 1 solo punto

es. trovare gli zeri di

$f(x)=x^4+x^3-1$ f è continua su $\mathbb{R}$



$f(0)=-1$ $f(1)=1$

$[0,1]$ f è strettamente crescente ed esiste solo uno zero

es. $\cos x = x$ in $\mathbb{R}$

$f(x)=\cos x - x$ se $f(x_0)=0 \leftrightarrow \cos x_0 = x_0$

f è continua su $\mathbb{R}$

- Se $x>1 \rightarrow -x<-1$ $f(x)=\cos x - x < 1-1=0$
  se $x>1$ $f(x)<0 \rightarrow f$ non ha zeri in $(1,+\infty)$
- Se $x<-1 \rightarrow -x>1$ $f(x)=\cos x - x > -1+1=0$
  $f(x)>0 \rightarrow f$ non ha zeri in $(-\infty,-1)$

Se ci sono zeri sono in $[-1,1]$

$f(1)=\cos 1 - 1 < 1-1=0$

$f(-1)=\cos(-1)+1 > -1+1=0$

$\rightarrow \exists\, x / \cos x = x,\ x\in[-1,1]$

es. $f(x)=\log x + x$ in $[0,1]$
$(0,1]$

$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

$\exists\, \varepsilon>0$ dove $\log\varepsilon$ è piccolo a piacere
prendo $\varepsilon / \log\varepsilon < -1$

$[\varepsilon,1]$ $f(\varepsilon)=\log(\varepsilon)+\varepsilon < -1+\varepsilon < 0$

$f(1)=\log 1 + 1 = 1 > 0$

TEOREMA di WEIERSTRASS

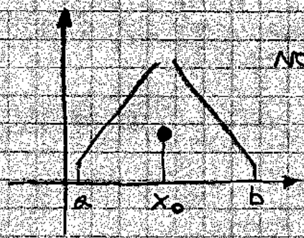
f continua in $[a,b]$

allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$

$\exists x_m \,/\, f(x_m) = \inf_{[a,b]} f$

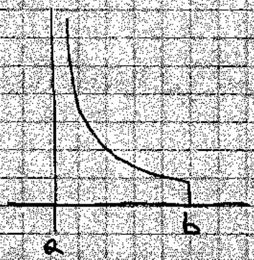
$\exists x_M \,/\, f(x_M) = \sup_{[a,b]} f$

<u>es.</u> 1) f non è continua in un punto



NON HA MAX

<u>es.</u> 2) $(a,b]$



$\frac{1}{x}$ su $(0,3]$ NON HA MAX

PROPOSIZIONE

Se f è iniettiva su un intervallo e f è continua

$\longrightarrow$ f è strettamente monotona

TEOREMA

Se f è continua su un intervallo I e f è invertibile su I
allora f^{-1} è continua

5) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \qquad g = o(f)$

6) se $f \overset{\smile}{\sim} g$ per $x \to c$

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l \cdot g(x)} = 1 \qquad f \sim l g$

PROPOSIZIONE

$f \sim g$ per $x \to c$ se e solo se $f = g + o(g)$

$f - g = o(g)$

Dim. $f \sim g \leftrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \leftrightarrow \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \leftrightarrow \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0$

$f - g = o(g) \rightarrow f = g + o(g)$

- $\alpha \neq 0 \quad o(f) \quad o(\alpha f) \quad \alpha\, o(f)$

verifica che $g = o(f) \leftrightarrow g = o(\alpha f)$ $\qquad \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g}{f} = 0 = \lim_{x \to c} \frac{g}{\alpha f}$

es. $f = o(1)$ $x \to c$ vuol dire $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1} = 0$

es. $f = O(1)$ f è limitata in un intorno di c

$\left| \frac{f(x)}{1} \right| \leq K \qquad |f(x)| \leq K$

es. f continua in x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \qquad f(x) - f(x_0) = o(1)$

$f(x) = f(x_0) + o(1)$

es. per $x \to 0$

$x^n = o(x^m)$ se $n > m$

$x^4 = o(x^2) \qquad \frac{x^4}{x^2} \to 0 \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \to 0$

per $x \to +\infty$

$x^n = o(x^m)$ se $m > n$

$x^2 = o(x^4) \qquad \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \to 0$

- LIMITI NOTEVOLI (con gli "o")

- $\operatorname{sen} x \sim x \quad x \to 0$
- $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad x \to 0$
- $\log(1+x) \sim x \quad x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ "
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ "

$$f \sim g \leftrightarrow f = g + o(g)$$

- $\operatorname{sen} x = x + o(x)$
- $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$

NON HA SENSO DARGLI UN SEGNO

es. $x \cdot \operatorname{sen}(2x) \quad x \to 0$

$\operatorname{sen} t = t + o(t)$

$\operatorname{sen}(2x) = 2x + o(x) \longrightarrow x \operatorname{sen} 2x = x\left(2x \cdot o(x)\right) = 2x^2 + x\, o(x) = 2x^2 + o(x^2)$

$$x \operatorname{sen} 2x \sim 2x^2$$

TEOREMA

se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$ per $x \to c$

allora:

- $\lim_{x \to c} \frac{f}{g} = \lim_{x \to c} \frac{f_1}{g_1}$ posso sostituire funzioni equivalenti (più semplici)
- $\lim_{x \to c} f \cdot g = \lim_{x \to c} f_1 \cdot g_1$

Dim. $\lim_{x \to c} f \cdot g = \lim_{x \to c} \frac{f}{f_1} \cdot \frac{f_1}{g_1} \cdot g_1 \cdot g = \lim_{x \to c} \underbrace{\left(\frac{f}{f_1}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{g}{g_1}\right)}_{\to 1} \cdot f_1 \cdot g_1 = \lim_{x \to c} f_1 \cdot g_1$

FUNZIONI INFINITE in c

$f \asymp g$ f e g sono infiniti dello stesso ordine

$f = o(g)$ f è infinito di ordine inferiore a g in c

es.

in $x = 0$

- $e^x - 1$ e x sono infinitesimi dello stesso ordine
- $\operatorname{sen} x^2$ è infinitesimo di ordine superiore a x

$$\frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = x \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}}_{\to 1} \to 0 \qquad \operatorname{sen} x^2 = o(x) \text{ in } 0$$

CONFRONTO FRA INFINITESIMI (e INFINITI)

Se ci interessano funzioni infinitesime per $x \to 0$ è naturale usare

- x, $|x|$
- $x \to x_0$ $x - x_0$, $|x - x_0|$

INFINITESIMO (o INFINITO) CAMPIONE

Def. Sia φ infinitesimo per $x \to c$

[redacted] $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora si dice che f è infinitesimo di ordine α rispetto a φ

cerco $\alpha \neq 0$ / $f \asymp \varphi^\alpha$ $x \to c$

se α esiste, è unico

Dim.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\beta} = \lim_{x \to c} \underbrace{\frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha}}_{l \neq 0} \cdot \frac{\varphi(x)^\alpha}{\varphi(x)^\beta} = \lim_{x \to c} \varphi(x)^{\alpha - \beta} \qquad \varphi \to 0 \quad \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$$

a meno che $\alpha = \beta$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l \neq 0 \longrightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{l \cdot \varphi(x)^\alpha} = 1$$

$$f \sim l \cdot \varphi^\alpha \longrightarrow f(x) = l \cdot \varphi^\alpha + o(l \cdot \varphi^\alpha) \longrightarrow f(x) = l \cdot \varphi(x)^\alpha + o(\varphi(x)^\alpha)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \qquad m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = q$$

ES. VIVINA

PARTE INTERA

$\lim_{x\to 1^{\pm}} [x^3 - x]$ studiamo quindi il segno di $x^3 - x$ quando x si avvicina a 1

$x^3 - x = x(x^2 - 1)$ → • se $x \to 1^+$, $x^2 - 1 > 0$ e quindi $x^3 - x > 0$

• se $x \to 1^-$, $x^2 - 1 < 0$ e quindi $x^3 - x < 0$

CONCLUSIONE

$$\lim_{x\to 1^+} [x^3 - x] = 0$$

$$\neq \quad \rightarrow \nexists \lim_{x\to 1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} [x^3 - x] = -1$$

LIMITI FONDAMENTALI

- $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad a > 0,\ a \neq 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad a > 0$

es. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\log(x/2)}$ $\qquad \frac{x}{2} = y \qquad x \to 2 \quad y \to 1$

$$\lim_{y\to 1} \frac{2y - 2}{\log y} = 2 \cdot \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\log y} \qquad y - 1 = z \qquad y = z + 1 \qquad y \to 1 \quad z \to 0$$

$$2 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log(z+1)} = 2 \cdot 1 = 2$$

es. Determinare $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot (\sqrt{x+1} - 1)}{\operatorname{tg} x^2} & \text{se } x > 0 \\ a 2^x + 3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua in $\operatorname{dom}(h)$

se $\underline{x \neq 0}$ la funzione è continua (dove definita) perché composizione di funzioni continue

in $\underline{x = 0}$ $\quad h(0) = a + 3 \quad$ vogliamo che $\lim_{x \to 0} h(x) = a + 3$

ovvero

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = a + 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot (\sqrt{x+1} - 1)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} \cdot \underbrace{\frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}}_{1} \cdot \sqrt{x+1} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$a + 3 = \frac{1}{2} \longrightarrow \underline{a = -\frac{5}{2}}$$

es. Trovare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \begin{cases} |x|^{\beta} \cdot \cos(1/x) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^{\alpha} \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$

- se $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ $f(x)$ è continua
- in $x = 0$ $\quad f(0) = 0 \quad$ vogliamo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

① $\lim_{x \to 0^-} (-x)^{\beta} \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \to \nexists$ ma è limitata

$$\lim_{x \to 0^-} (-x)^{\beta} \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \longleftrightarrow \beta > 0 \longrightarrow \lim_{x \to 0^-} (-x)^{\beta} = 0$$

② $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot x^2 \quad$ vogliamo $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha+2} = 0 \quad \alpha + 2 > 0$

$\alpha > -2$

es. estendere a funzioni continue in 0

$$h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + 2 \qquad \operatorname{dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lim_{x \to 0} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} + 2 = 2 \quad$ posso estendere h ad una funzione $\overline{h}$ definita e continua su $\mathbb{R}$ ponendo $\overline{h}(0) = 2$

Def.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ se esiste ed è finito si dice che f è DERIVABILE in x_0

Il valore del limite si può scrivere: $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$

↓

derivata prima di f in x_0

$x-x_0=h$

$x \to x_0 \quad h \to 0$

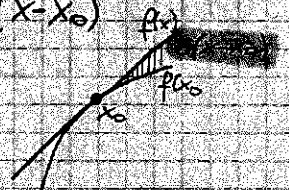
$x = x_0+h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

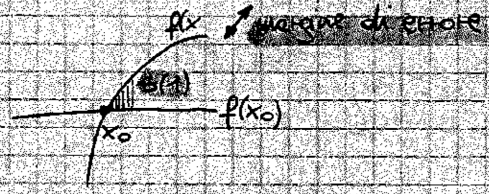
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = o(1) \quad x \to x_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(1)\cdot(x-x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$$



① se f è DERIVABILE in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$



② se f è CONTINUA in x_0

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad x \to x_0$$

↓ in funzione di $h = x-x_0$

① $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h) \quad h \to 0$

Def. la retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

si chiama RETTA TANGENTE al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$f(x) = g(x) + o(x-x_0)$ la retta tg è l'unica di eq. $y = g(x)$ tale che

$$f - g = o(x-x_0)$$

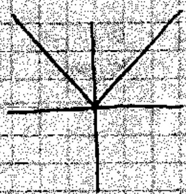
Dim. 2

f è derivabile $f(x) = \underset{\downarrow \atop f(x_0)}{\lim_{x\to x_0} f(x_0)} + \underset{\downarrow \atop 0}{f'(x_0)\cdot(x-x_0)} + \underset{\downarrow \atop 0}{o(x-x_0)}$ f è CONTINUA

Esistono f continue ma non derivabili

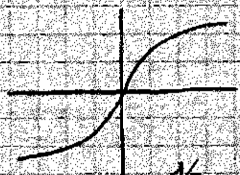
es. 1

$f(x) = |x|$ in $x=0$



$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1 \end{cases}$$

es. 2

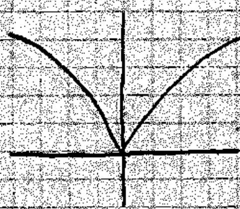


$f(x) = x^{1/3}$ in $x=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^{1/3} - 0^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

$x^{1/3}$ non è derivabile in 0

es. 3



$f(x) = x^{2/3}$ in $x=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^{2/3} - 0^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \pm\infty$$

ESTENSIONE

Se $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste ed è finito, si dice che f è derivabile da destra in x_0 $f'_+(x_0)$

Dim. 2) 1° METODO

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}$$

$$\frac{+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}=$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

2° METODO

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$f(x)g(x)=\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)\cdot\big(g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)=$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)\,(x-x_0)+o(x-x_0)+f(x_0)g(x_0)$$

COROLLARIO (LINEARITÀ DELLA DERIVATA)

se f e g sono derivabili in x_0, e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$D(\alpha f+\beta g)(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

Dim.

$$D(\alpha f+\beta g)(x_0)=D(\alpha f)(x_0)+D(\beta g)(x_0)=\cancel{\alpha' f(x_0)}^{0}+\alpha f'(x_0)+\cancel{\beta' g(x_0)}^{0}+\beta g'(x_0)=$$

$$=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

DERIVATA come OPERATORE

$X\xrightarrow{F}Y$ $\quad X,Y$ insiemi di funzioni $\quad X=f$ derivabili

$Y=$ funzioni

F

$D: X\to Y$

$D(f)=f'\qquad D(x^2)=2x\qquad$ OPERATORE

$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\left(\overbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}^{\to 1}\right) = \cos x$$

$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

2) $f(x) = \cos x$ $\quad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad D(\operatorname{tg} x) = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

- ESPONENZIALI

$f(x) = a^x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \log a$$

$$D(a^x) = a^x \cdot \log a$$

$$D(e^x) = e^x$$

- LOGARITMI

$f(x) = \log_a x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}$$

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \log a}$$

$$D(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$D(\log|x|) = \frac{1}{x}$$

- IPERBOLICHE

$$(f(-x))' = f'(x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

$$f(x) = \operatorname{sen}h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2}(-e^{-x}) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

es. VIVINA

Determinare gli ordini di infinitesimo e la parte principale per $x \to \pm\infty$ $\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = l \neq 0$ vogliamo determinare α

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{tg\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}}$ poniamo $y = \frac{1}{x} \longrightarrow \lim_{y \to 0} \frac{tg(3y^2)}{y^\alpha}$ ma $tg(3y^2) \sim 3y^2$

$\lim_{y \to 0} \frac{3y^2}{y^\alpha} = 3$ se $\alpha = 2$ l'ordine di $g(x)$ è 2 e la p.p. $= l \cdot \varphi^\alpha = \frac{3}{x^2}$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha \cdot \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^2+2-x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}} =$

$= \lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha \cdot \frac{3}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^\alpha}{|x| \cdot \left(\sqrt{1+2/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^\alpha}{x \cdot 2} = \frac{3}{2}$ se $\alpha = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^\alpha}{-x \cdot 2} = -\frac{3}{2}$ se $\alpha = 1$

la p.p. è

$+\infty$: $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$-\infty$: $-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = -\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

3) $K(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^4+1} - x^2\right)$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^4+1} - x^2 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^4}+1-\cancel{x^4}}{\sqrt{x^4+1}+x^2} = 0$

$\frac{\operatorname{sen} y}{y} \xrightarrow{y \to 0} = 1$ quindi: $K(x) \sim \sqrt{x^4+1} - x^2$ per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 \cdot \left(\sqrt{1+1/x^4}+1\right)} =$

$= \frac{1}{2}$ se $\alpha = 2$ (ORDINE) la p.p. di $K(x)$ è $\frac{1}{2x^2}$ e $K(x) = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

• OBLIQUO

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (mx+q) = 0$$

m ① $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-x-2}{2x^2+3x} = 1$ $y = x+q$

q ② $\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{2x^2}-x-2-\cancel{2x^2}-3x}{2x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x-2}{2x+3} = -2$

$y = x-2$ è asintoto orizz. per $x \to -\infty$

es. DERIVATE

1) $D\left(4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + 5\right) = 12x^2 - 7x + 4$

2) $D\left(\frac{x^2-3x+1}{x+1}\right) = \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2}x^2-x-3-\cancel{x^2}+3x+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

3) $D(x \operatorname{sen} x) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x\cos x$

4) $D\left(\log\left(\frac{e^{-x}+3e^x}{4}\right)\right) = \frac{\cancel{4}}{e^{-x}+3e^x} \cdot \frac{1}{\cancel{4}}\left(-e^{-x}+3e^x\right) = + \frac{3e^x-e^{-x}}{3e^x+e^{-x}}$

DERIVATE

PROPRIETÀ

1) f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e sono uguali

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

2) f sia continua in un intorno I di x_0 e sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

f è derivabile in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ esiste ed è finito

in tale caso è $f'(x_0)$

<u>Def.</u> Sia f derivabile in x_0, se $f'(x_0)=0$ si dice che x_0 è un punto critico per f

In x_0 critico la tangente al grafico di f è orizzontale

• **TEOREMA di FERMAT**

Sia f definita in un $I(x_0)$
se x_0 è un estremo di f e f è derivabile in x_0, allora x_0 è critico
$f'(x_0)=0$

<u>Dim.</u>

Sia per esempio x_0 un MAX locale per f:

$$\exists\, I(x_0) \,/\, f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in I$$

1) Per $x \in I$, $x > x_0$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \longrightarrow \le 0 \longrightarrow \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \qquad f'_+(x_0) \le 0$$

2) Per $x \in I$, $x < x_0$

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad f'_-(x_0) \ge 0$$

Ma f è derivabile in x_0 $\longrightarrow$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$

x_0 è critico

Gli estremi <u>interni</u> al dom(f) vanno ricercati fra i punti critici (se f è derivabile)

Gli estremi di una funzione si cercano fra:

1) PUNTI CRITICI

2) PUNTI di NON DERIVABILITÀ

3) ESTREMI di dom(f)

- TEOREMA di ROLLE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ supponiamo che

1) f sia continua in $[a,b]$
2) f sia derivabile in (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists c \in (a,b)$ critico per $f \to f'(c) = 0$

Dim. f continua su $[a,b]$
Per il teorema di Weierstrass, f ha MIN x_m e MAX x_M in $[a,b]$

1) Se x_m e x_M cadono entrambi agli estremi di $[a,b]$ / $f(x_m) = f(x_M)$

$\to$ f è costante e ogni punto è critico

2) Almeno uno fra x_m e x_M è interno ad $[a,b]$
Sia per esempio $x_m \in (a,b)$

x_m è un estremo ed è interno

f è derivabile $\xrightarrow{\text{FERMAT}} f'(x_m) = 0$

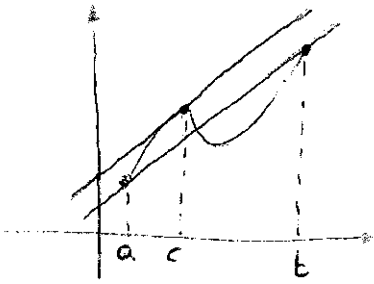
- TEOREMA di LAGRANGE (VALOR MEDIO)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

supponiamo che:

1) f è continua in $[a,b]$
2) f è derivabile in (a,b)

Allora $\exists c \in (a,b)$ / $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$



TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE delle f COSTANTI)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$

f è costante se e solo se $f'(x)=0 \quad \forall x \in I$

Dim. $\to$ OK

$\leftarrow$ Se $f'(x)=0 \ \forall x \in I \to f$ è costante

Sia $x_0 \in I$ fissato

Sia $x \in I$

su $[x_0, x]$ f è continua (perchè derivabile)

su (x_0, x) f è derivabile

Applico Lagrange su $[x_0, x]$

$\exists c \in (x_0, x)$ dove

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$$

$$f(x) = f(x_0)$$

Cambiamo $x \to x_1$ $\quad f(x_1) = f(x_0) \quad$ f è costante

CARATTERIZZAZIONE delle f COSTANTI

f è costante su I se e solo se

$f'(x)=0 \quad \forall x \in I$

es.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x$$

$f'(x)=0$??? COSTANTE? No, f è costante su ogni intervallo che non contiene zero

$[x_1, x_2]$ è derivabile in tutti i punti

$\downarrow$ per LAGRANGE

$$\exists c \in (x_1, x_2) \;/\; \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$$

$$x_2 - x_1 > 0 \longrightarrow f(x_2)-f(x_1) \geq 0 \qquad f(x_1) \leq f(x_2)$$

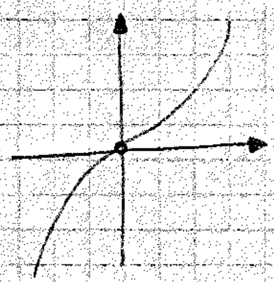
2) $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0$$

$$f(x_2)-f(x_1) > 0 \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

f è strettamente crescente $\not\longrightarrow$ $f' > 0$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$



COROLLARIO

Sia f derivabile su I

sia x_0 critico $(f'(x_0) = 0)$

$$\text{se } \begin{cases} f'(x) \leq 0 & x < x_0 \\ f'(x) \geq 0 & x > x_0 \end{cases} \longrightarrow x_0 \text{ è un MINIMO}$$

$$\text{se } \begin{cases} f'(x) \geq 0 & x < x_0 \\ f'(x) \leq 0 & x > x_0 \end{cases} \longrightarrow x_0 \text{ è un MASSIMO}$$

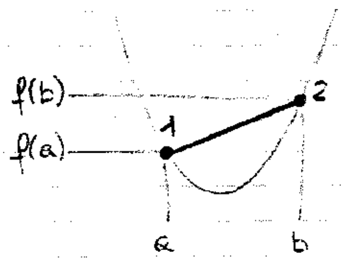
$C^{\infty}(I)$, f derivabili ∞ volte

Tutte le funzioni elementari e le loro combinazioni sono $C^{\infty}(I)$

- FUNZIONI CONVESSE

Def. f è convessa su I se

$\forall a,b \in I$ il grafico di f sta sotto il segmento di estremi $(a,f(a)),(b,f(b))$



retta per 1-2 $\quad y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

$\forall a,b \in I$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

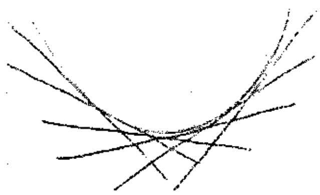
Se f è derivabile

f è convessa se il grafico di f sta sopra alla tangente

TEOREMA 1)

Sia f derivabile in I

f è convessa se e solo se f' è crescente in I



f' cresce

TEOREMA 2) Sia f derivabile 2 volte su I

f è convessa su I se e solo se $f'' \geq 0$ su I

es. 1) o piccoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x+o(x)-1+2x+o(x)}{5x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x+o(x)}{5x+o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

2) De l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{5\cos(5x)} = \frac{4}{5} \longrightarrow = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{sen}(5x)}$$

Se $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ è ancora $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ posso riapplicare il teorema

$$\longrightarrow \lim_{x\to c} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

es.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3-\frac{3}{\cancel{2}}(1+2x)^{1/2}\cdot \cancel{2}}{x\cos x+\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{\cancel{2}}(1+2x)^{-1/2}\cdot\cancel{2}}{\cos x - x\operatorname{sen} x+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3}{\sqrt{1+2x}}}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = -\frac{3}{2}$$

- LIMITI NOTEVOLI

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha \cdot e^x = 0 \quad \infty\cdot 0$$

L'ESPONENZIALE VINCE SEMPRE

Dim. caso $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \quad \text{HÔPITAL} \longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

- STUDIO di FUNZIONE

① DOMINIO e SIMMETRIE (pari, dispari, periodica)

② COMPORTAMENTO agli ESTREMI del DOMINIO
LIMITI

es. $f(x) = \dfrac{\log(x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}$ ① dom(f) $x-2>0$ (log)
$x^2-2x \geq 0$ (radice)
$x^2-2x \neq 0$ (denom.)

dom(f) $= (2, +\infty)$
estremi: $2, +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)}{\sqrt{x^2-2x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-2)\nearrow^{-\infty}}{\sqrt{x^2-2x}\searrow_{0^+}} = -\infty$$

$x=2$ asintoto verticale destro

③ PUNTI di CONTINUITÀ
CLASSIFICAZIONE DISCONTINUITÀ

④ DERIVABILITÀ, CALCOLO di f', INTERVALLI di MONOTONIA, MIN e MAX (SEGNO di f')

⑤ CONVESSITÀ, STUDIO di f''

es. studiare $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$

1) dominio, limiti agli estremi, asintoti
2) intervalli di monotonia, min e max
3) grafico

<u>es.</u> $f(x) = \left| \frac{e^x - 1}{3 - e^x} \right|$

1) dom, asintoti
2) continuità, derivabilità
3) min e max
4) grafico

1) <u>dom(f)</u> $= \mathbb{R} \setminus \{\log 3\}$

$3 - e^x \neq 0 \quad e^x \neq 3 \quad x \neq \log 3$

$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{e^x - 1}{3 - e^x} \right| = 1$ asint. orizz.

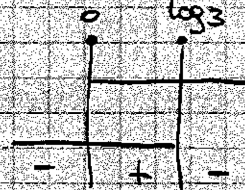
$\lim_{x \to -\infty} \left| \frac{e^x - 1}{3 - e^x} \right| = \frac{1}{3}$ $y = 1$ e $y = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to \log 3} \left| \frac{e^x - 1}{3 - e^x} \right| = +\infty$ $x = \log 3$ ASINT. VERT.

$x \neq \log 3$ f è continua in dom(f)

$x = \log 3$ discontinuità di 2ª specie

SEGNO $\frac{e^x - 1}{3 - e^x} \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} e^x - 1 \geq 0 \\ 3 - e^x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \log 3 \end{cases}$



$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{3 - e^x} & \text{se } x \in [0, \log 3) \\ \frac{e^x - 1}{e^x - 3} & \text{altrimenti} \end{cases}$

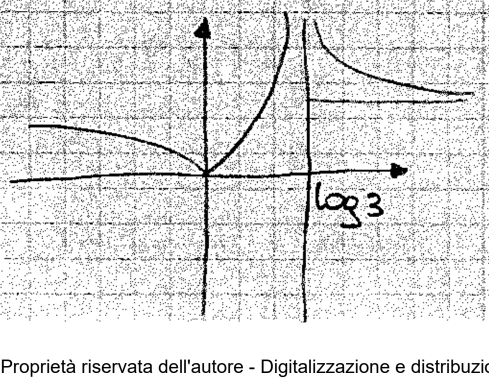
$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(3 - e^x)^2} & x \in [0, \log 3) \\ \frac{-2e^x}{(3 - e^x)^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f')$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$

$x = 0$ PUNTO ANGOLOSO



1) $R_1(x) \to 0 \quad x \to x_0$

$f(x_0) = mx_0 + q \qquad q = f(x_0) - mx_0$

$f(x) = mx + f(x_0) - mx_0 + R_1(x)$

$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = R_1(x)$

2) $R_1 = o(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{x - x_0}} = \frac{R_1(x)}{x - x_0} \to 0$$

$f(x) = mx + q + o(x - x_0)$

$\downarrow$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

derivabilità

- $f(x) = |x|$ approssimato in $x_0 = 0$ con un polinomio di grado 1

$\nexists\ mx + q \ / \ |x| = mx + q + R_1(x)$

$R_1(x) = o(x)$

1) f continua in x_0

$f(x) = f(x_0) + R_0(x) \qquad R_0(x) = o(1) \quad x \to x_0$

2) f derivabile in x_0

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x) \qquad R_1(x) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$

3) f non derivabile in x_0

NON si può scrivere $\quad f(x) = mx + q + o(x - x_0)$

TEOREMA di TAYLOR

Sia f derivabile n volte in x_0

1) $\exists!\ P_n$ di grado $\leq n$ / $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ $\quad x \to x_0$

2) $P_n(x) = T_n(x)$

Dim. 2)

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$f(x) - T_2(x) \overset{?}{=} o((x-x_0)^2)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f-T_2}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}$$

de l'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} \to \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-f''(x_0)}{2} = 0$$

$\downarrow$

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ $\quad$ con $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ $\quad x \to x_0$

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

Formula di Taylor di ordine n con resto di Peano

TEOREMA

Sia $f \in C^n(I)$ $\quad$ I intorno di x_0

esiste $f^{(n+1)}$ in $I \setminus \{x_0\}$

Allora $\exists\, c \in (x_0, x)$ / $f(x) = T_n(x) + \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$

Formula di Taylor di ordine n con resto di LaGrange $\quad$ perchè

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\cdot} = f'(c) \longrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$