centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 89

DATA : 28/04/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Lamberti

MATERIA : Elettrotecnica
Prof. Gilli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

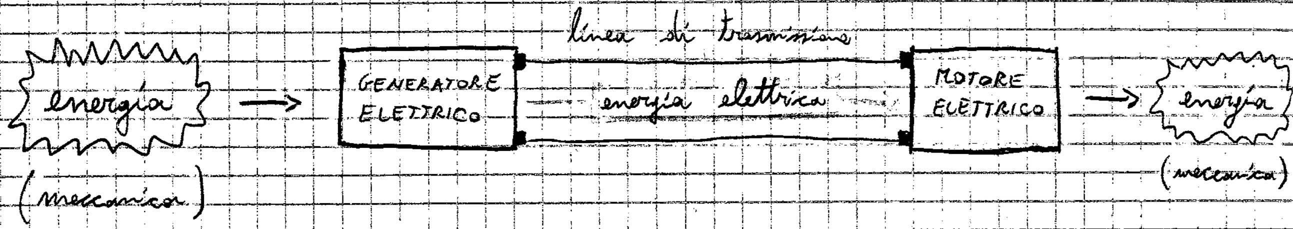
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 59

ELETTROTECNICA → applicazioni dell' ELETTROMAGNETISMO nei campi di

ENERGIA — INFORMAZIONE

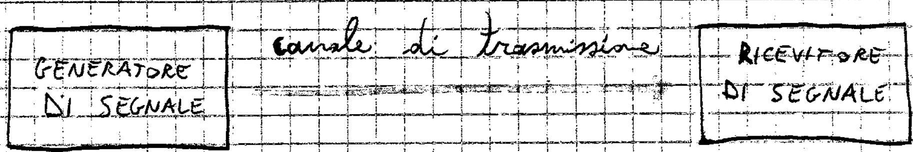
- PRODUZIONE
- TRASMISSIONE (distribuzione)
- UTILIZZAZIONE

} dell' energia elettrica



- PRODUZIONE
- TRASMISSIONE
- RICEZIONE

} di segnali elettrici



Differenza sostanziale:

- se parlo di energia, mi interessa il RENDIMENTO (quantità)
- se parlo di informazione, mi interessa la FEDELTÀ (qualità)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 59

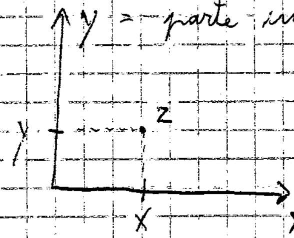
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 59

Ripasso sui NUMERI COMPLESSI

$z \in \mathbb{C}$

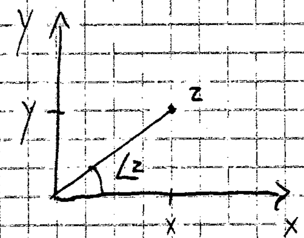
$$\boxed{z = x + jy} \qquad j = \sqrt{-1}$$

y = parte immaginaria $Im[z]$



RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

x = parte reale $Re[z]$



IN COORDINATE POLARI

↳ modulo di $z = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

angolo di z = fase di $z = \angle z$

$$tg \angle z = \frac{y}{x} \qquad \angle z = arctg \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} x = |z| \cos(\angle z) \\ y = |z| \, sen(\angle z) \end{cases}$$

$$z = |z| e^{j\angle z}$$

OPERAZIONI COI NUMERI COMPLESSI: $z_1 = x_1 + jy_1$

Somma

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Prodotto

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)}$$

Quoziente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)}$$

Complesso coniugato

$$z_1^* = x_1 - jy_1$$

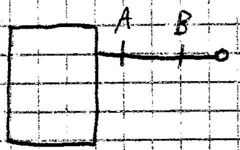
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 59

GRANDEZZE USATE NEI CIRCUITI

Intensità di corrente elettrica

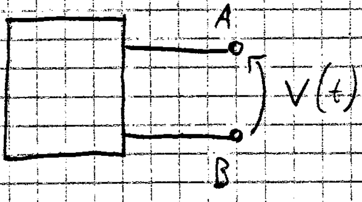
↳ dato un terminale di un generico multipolo e definite due sezioni A e B sul terminale, si dice INTENSITÀ DI CORRENTE elettrica $I_{A,B}(t)$ la quantità di carica elettrica che nell'unità di tempo transita nel terminale nella direzione che va da A verso B.



$[i]$ = Ampère A

Tensione elettrica

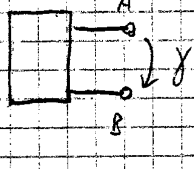
↳ dati due terminali di un generico multipolo si dice TENSIONE ELETTRICA $V_{A,B}(t)$ la quantità di lavoro che viene compiuto dal sistema elettromagnetico per spostare la carica elettrica unitaria positiva da A verso B.



→ NOTAZIONE ITALIANA

$$i_{A,B}(t) = \frac{dq_{A,B}(t)}{dt}$$ → QUANTITÀ DI CARICA

$$V_{A,B}(t) = \int_{A(\gamma)}^{B} \underline{e} \cdot \hat{\gamma}\, d\gamma$$



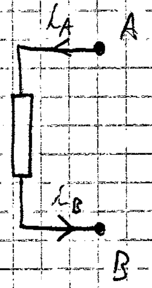
Se $\frac{d}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \int_A^B$ non dipende da γ con buona approssimazione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 59

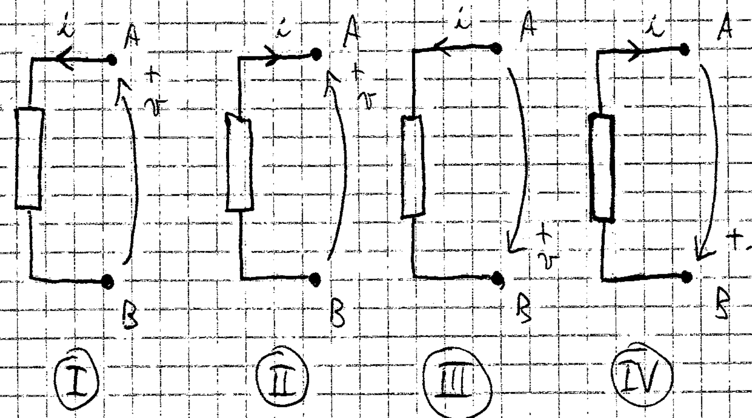
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 59

BIPOLI

↳ multipoli con 2 terminali



$-i_A + i_B = 0 \qquad i_A = i_B$



4 possibilità, ma I e IV sono uguali, come anche II e III

CONVENZIONE UTILIZZATORE

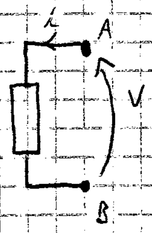
CONVENZIO GENERATOR

Il legame tra tensione e corrente definite tra i terminali del bipolo è quello che si chiama

RELAZIONE COSTITUTIVA DEL BIPOLO

POTENZA ELETTRICA

Con convenzione di utilizzatore:

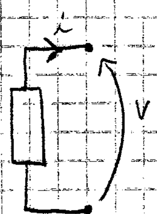


la potenza elettrica entrante nel bipolo è il prodotto tra tensione e corrente.

$P_e(t) = v(t)\,i(t)$ P entrante

$P_u(t) = -P_e(t)$ P uscente

Con convenzione di generatore:



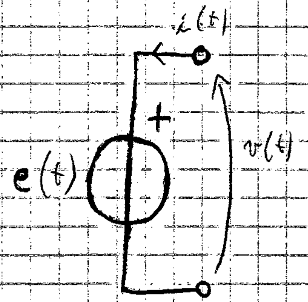
$P_u(t) = v(t)\,i(t)$

$P_e(t) = -P_u(t)$

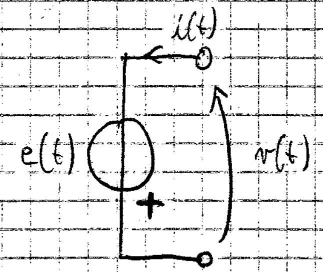
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 59

GENERATORE IDEALE DI TENSIONE



$$\boxed{v(t) = e(t) \quad \forall i(t)}$$



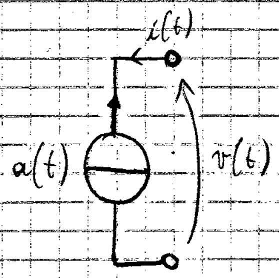
$$v(t) = -e(t) \quad \forall i(t)$$

Se $e(t) = \emptyset \implies v(t) = 0 \quad \forall i(t)$

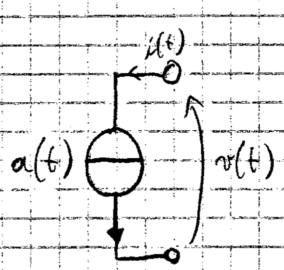
↳ CORTOCIRCUITO IDEALE

$P_e(t) = v(t)\, i(t) = e(t)\, i(t) \gtrless \emptyset \implies$ PUÒ EROGARE POTENZA

GENERATORE IDEALE DI CORRENTE



$$i(t) = -a(t) \quad \forall v(t)$$



$$\boxed{i(t) = a(t) \quad \forall v(t)}$$

Se $a(t) = 0 \implies i(t) = 0 \quad \forall v(t)$

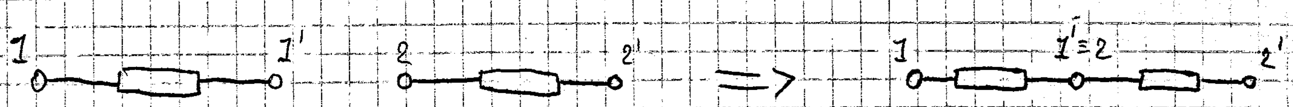
↳ CIRCUITO APERTO

$P_e(t) = v(t)\, i(t) = v(t)\, a(t) \gtrless \emptyset \implies$ PUÒ EROGARE POTENZA

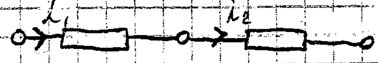
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 59

CONNESSIONE SERIE DI BIPOLI

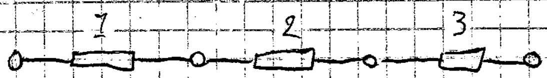


1) Hanno un terminale in comune
2) In corrispondenza del terminale in comune non è connesso alcun altro terminale della rete, eccetto al più un circuito aperto.



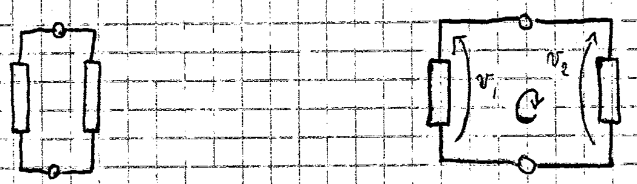
$\boxed{i_1 = i_2}$ ⇒ la corrente non cambia

Estensione del concetto di serie



$$\left.\begin{array}{l}\text{1 è in serie a 2} \\ \text{2 è in serie a 3}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{si "dice" che 1 è in serie a 3.}$$

CONNESSIONE PARALLELO DI BIPOLI

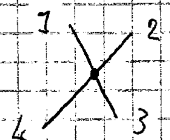


$v_1 - v_2 = 0$ $\boxed{v_1 = v_2}$

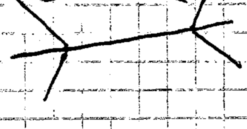
• Hanno entrambi i terminali in comune.

Due o più terminali si dicono IN COMUNE se:

- sono entrambi connessi al medesimo nodo



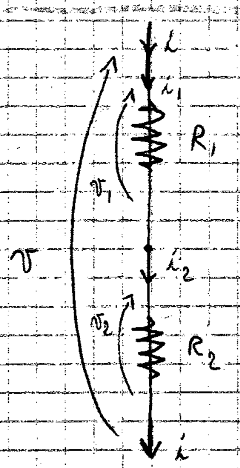
- sono connessi tramite un cortocircuito



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 59

CONNESSIONE SERIE DI RESISTORI



$v_1 = R_1 i_1$

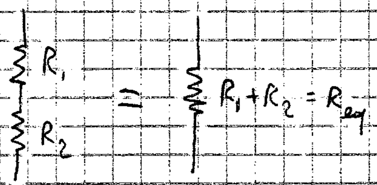
$v_2 = R_2 i_2$

VINCOLO TOPOLOGICO DELLA CONNESSIONE

$\boxed{i_1 = i_2 = i}$

$v - v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v = v_1 + v_2}$

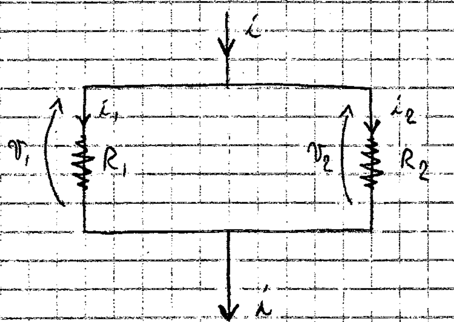
$v = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$



due resistori in serie (o più) si comportano come un unico resistore somma.

$\boxed{v = R_{eq} i}$

CONNESSIONE PARALLELO DI RESISTORI



$v_1 = R_1 i_1$

$v_2 = R_2 i_2$

$i_1 = G_1 v_1$

$i_2 = G_2 v_2$

VINCOLO TOPOLOGICO DELLA CONNESSIONE

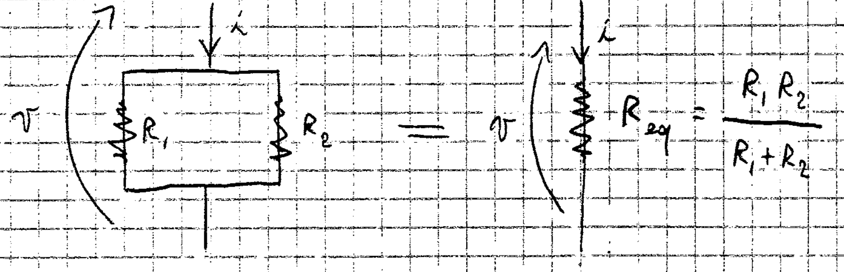
$v_1 = v_2$

$i = i_1 + i_2 = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2) v$

$\boxed{i = G_{eq} v}$

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 /\!/ R_2$$

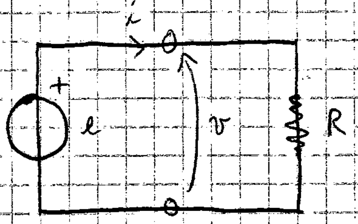


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 59

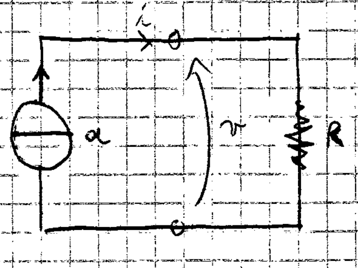
CIRCUITI ELEMENTARI

↳ costituiti da un GENERATORE e un RESISTORE



$e = v$

$i = \dfrac{e}{R}$ CONVENZ. UTILIZZATORE



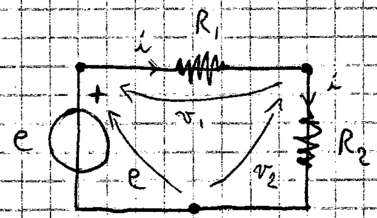
$a = i$

$v = Ra$ CONVENZ. UTILIZZATORE

CIRCUITI FONDAMENTALI

↳ costituiti da un GENERATORE e DUE RESISTORI

1) SERIE



legge di OHM

$i = \dfrac{e}{R_1 + R_2}$

$v_1 = R_1 i = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} e$

$v_2 = R_2 i = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} e$

REGOLA DEL PARTITORE DI TENSIONE

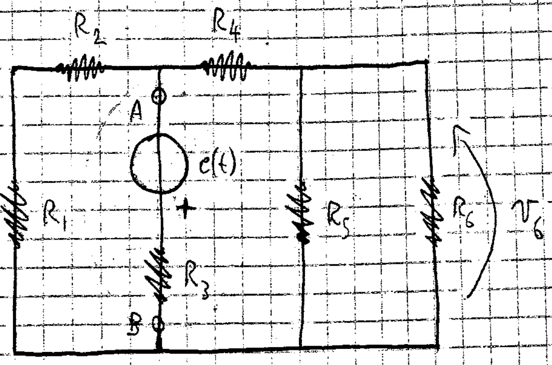
$\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$ = FATTORE DI PARTIZIONE
rapporto tra la resistenza su cui calcolo la tensione e la somma delle resistenze sulla maglia

OSSERVAZIONE: $v_1 + v_2 = e$

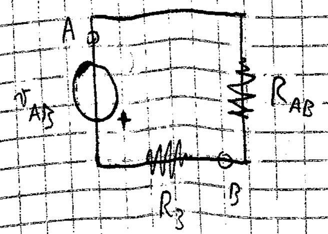
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 59

ES



v_6 ?



CIRCUITO PARTITORE DI TENSIONE

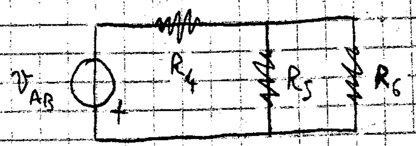
$$R_{AB} = (R_1 + R_2) // (R_4 + R_5 // R_6)$$

$$v_{AB} = e(t) \frac{R_{AB}}{R_3 + R_{AB}}$$ per regola partitore di tensione

noto che v_{AB} è la tensione sia della maglia $R_4 R_5 R_6$ che quella $R_1 R_2$ perché sono in parallelo.

$$v_6 = -v_{AB} \frac{R_5 // R_6}{R_4 + R_5 // R_6} \longrightarrow \text{perché } v_6 = v_5$$

PER REGOLA PARTITORE DI TENSIONE

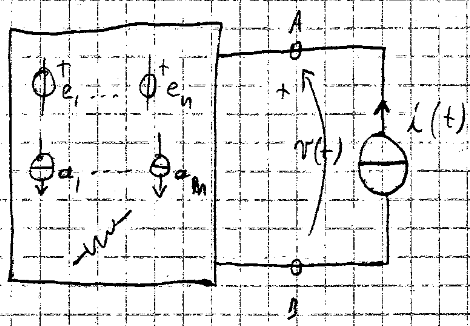


PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEL GENERATORE DI TENSIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 59

Se ho un bipolo di generatori e resistori: THEVENIN



$$v(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_n e_n(t) + \beta_1 a_1(t) + \dots + \beta_m a_m(t) + \gamma\, i(t)$$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$\parallel$

$v_{TH}(t)$

$\gamma = R_{TH}$

$\Downarrow$

$R_{TH}\, i(t)$

γ è dimensionalmente una resistenza [Ω]

TH = Thevenin

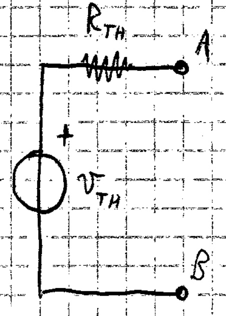
Quindi:

$$\boxed{v(t) = v_{TH}(t) + R_{TH}\, i(t)}$$

Se tra A e B ci fosse un CIRCUITO APERTO $\Rightarrow i(t) = 0 \Rightarrow v(t) = v_{TH}(t)$

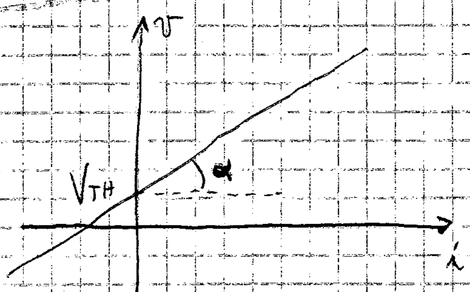
$v_{TH}(t)$ = tensione equivalente di Thevenin (o tensione a vuoto)
R_{TH} = resistenza equivalente di Thevenin.

Se annullo tutti i generatori nel bipolo $\Rightarrow v(t) = R_{TH}\, i(t)$



Rappresentazione (bipolo) equivalente di Thevenin
oppure...
Rappresentazione (bipolo) equivalente serie.

GRAFICO

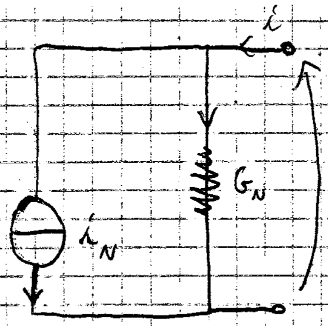


$R_{TH} = \tan\alpha$

caratteristica lineare affine

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 59

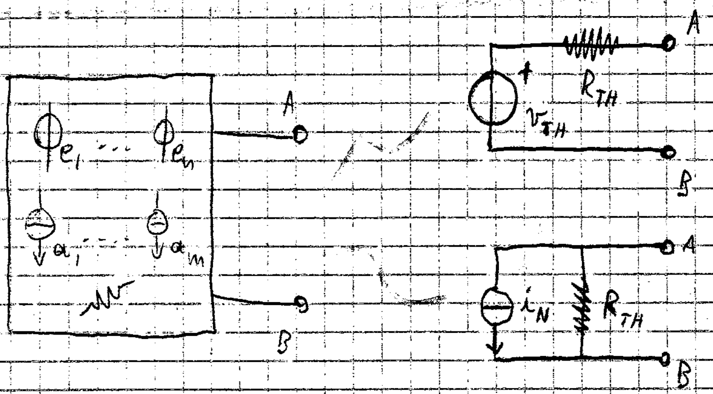
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 59



$$i_N(t) = i(t)\Big|_{v=0}$$

$$G_N = \frac{i}{v}\Bigg|_{\substack{e_1=e_2=\dots=e_n=0 \\ a_1=a_2=\dots=a_m=0}} \qquad G_N = \frac{i}{v} = \frac{1}{R_{TH}}$$

Schema riassuntivo



Generatore di tensione pilotato in tensione

$$\hat{e}(t) = \alpha\, v_p(t)$$

$v_p(t) \triangleq$ pilota

$\alpha \triangleq$ costante

Generatore di tensione pilotato in corrente

$$\hat{e}(t) = r_m\, i_p(t)$$

$i_p(t) \triangleq$ pilota

$r_m \triangleq$ resistenza mutua

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 59

2) Calcolo del pilota v_1

$$v_1 = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3} + \hat{\alpha}(t)\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \quad \text{(partitori)}$$

3) $\hat{\alpha} = g_m v_1$

$$v_1 = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3} + g_m V_1 \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_3+R_2}$$

$$v_1 = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3-g_m R_1(R_2+R_3)}$$ equazione di primo grado con V_1 incognita

4) Principio di sostituzione:

$\hat{\alpha} = g_m V_1$ è ora noto

$$i_3 = \frac{e(t)}{R_1+R_2+R_3} - \hat{\alpha}\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3} = \frac{e(t)}{R_1+R_2+R_3} - g_m \frac{e(t)\,R_1}{R_1\left[1-g_m(R_2+R_3)\right]+R_2+R_3}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$i_3 = \frac{e(t)}{R_1+R_2+R_3}\left(1 - \frac{g_m R_1^2}{R_1\left[1-g_m(R_2+R_3)\right]+R_2+R_3}\right)$$

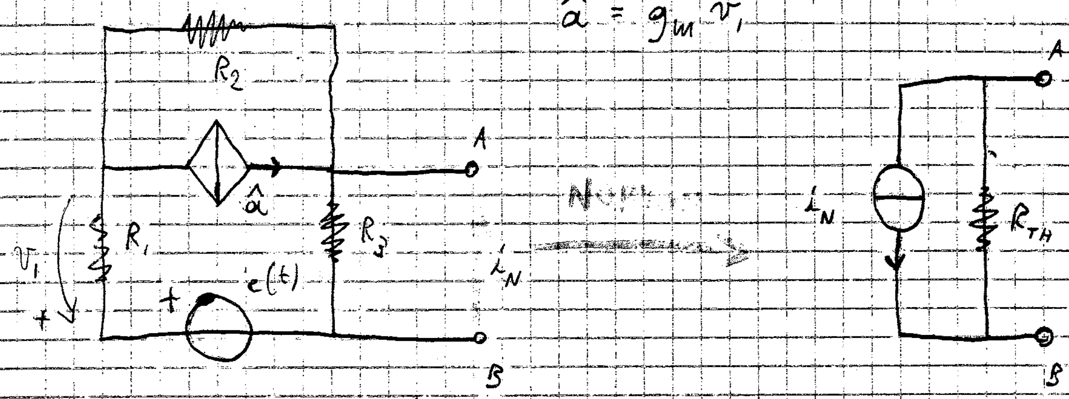
Per controllare se il risultato è giusto si può fare una verifica della dimensione $[i]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 59

ES (tipo esame)

$\hat{a} = g_m v_1$



1) ...

2) $v_1 = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2} + \hat{a}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (R_3 è parallelo con il cortocircuito NORTON)

3) $\hat{a} = g_m v_1$

$$v_1 = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2} + g_m V_1\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = e(t)\frac{R_1}{R_1+R_2-g_mR_1R_2}$$

4) $i_N = \frac{-v_1}{R_1} = \frac{e(t)}{R_1+R_2-g_mR_1R_2}$

R_{TH} ?

1) ...

2) $V_1 = \hat{a}\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}R_1 + i\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}R_1$

3) $V_1 = g_m V_1\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} - i\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}$

$$V_1 = -i\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3-g_mR_1R_2}$$

4) Riapplico la sovrapposizione degli effetti

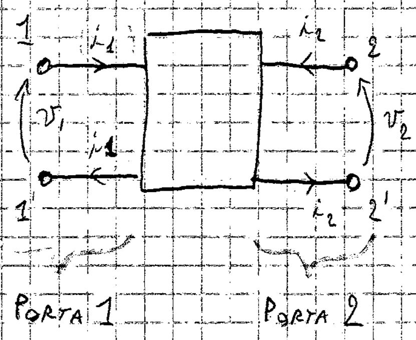
$$v = i\frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3} + \hat{a}\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}R_3$$

$$v = i\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}\left[R_1+R_2-\frac{g_mR_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3-g_mR_1R_2}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 59

DOPPIO BIPOLO

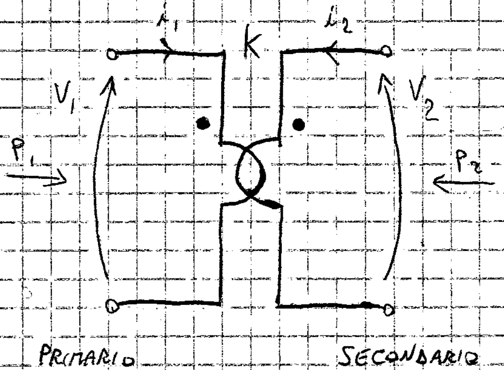


Un doppio bipolo ha la caratteristica di avere coppie di terminali, chiamate PORTE, con i uguale.

Si userà sempre la convenzione utilizzatore da ora in avanti...

ES di doppio bipolo.

TRASFORMATORE (ideale)



$$\begin{cases} v_1 = k v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{k} i_2 \end{cases}$$

$$p(t) = \underbrace{v_1(t)\, i_1(t)}_{p_1(t)} + \underbrace{v_2(t)\, i_2(t)}_{p_2(t)}$$

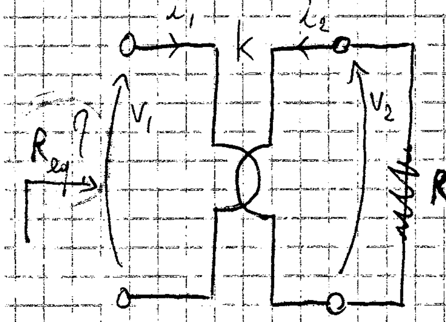
$$\Downarrow$$

$$p(t) = k v_2 \left(-\frac{1}{k} i_2\right) + v_2 i_2 = -v_2 i_2 + v_2 i_2 = \emptyset$$

$$p(t) = \emptyset \implies p_1(t) = -p_2(t)$$

LA POTENZA ENTRANTE È UGUALE ALLA POTENZA USCENTE

ES R equivalente



$$\begin{cases} v_1 = k v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{k} i_2 \\ v_2 = -R i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = -\frac{v_2}{R} \qquad i_1 = \frac{v_2}{kR}$$

$$v_2 = -kR i_1$$

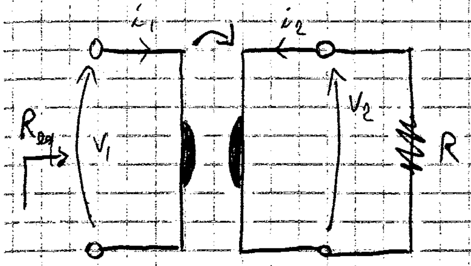
$$v_1 = k v_2 = k^2 R i_1$$

$$R_{eq} = \frac{v_1}{i_1} = k^2 R$$

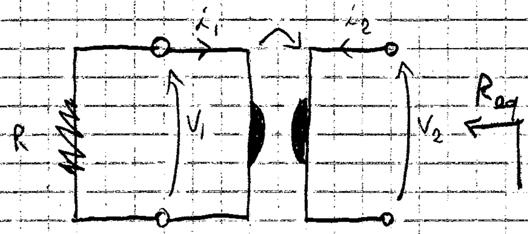
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 59

R equivalente



$$R_{eq} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{1}{g_m^2}\frac{1}{R}$$



$$R_{eq} = \frac{V_2}{i_2} =$$

RAPPRESENTAZIONI CANONICHE DEI DOPPI BIPOLI

1. RAPPRESENTAZIONE ATTRAVERSO LA MATRICE delle RESISTENZE $\underline{\underline{R}}$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

2. MATRICE DELLE CONDUTTANZE $\underline{\underline{G}}$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

giratore $\begin{cases} i_1 = g_m V_2 \\ i_2 = g_m V_1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & g_m \\ g_m & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{G}}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

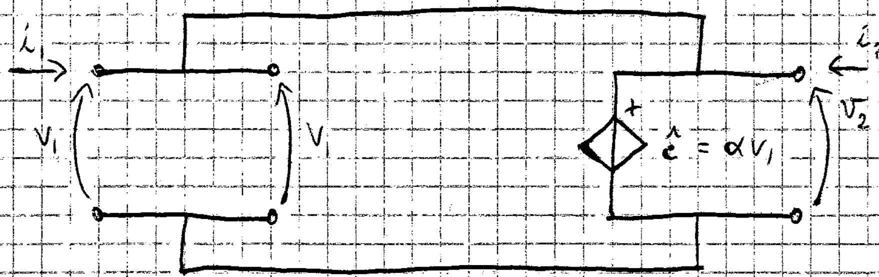
Se $\exists\ \underline{\underline{R}}$ e $\underline{\underline{G}} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 59

Generatore di Tensione Pilotato in Tensione



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \hat{e} = \alpha v_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Gen. tensione pilotato in corrente

$$\hat{e} = r_m i_1$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \hat{e} = r_m i_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Gen. corrente pilotato in tensione

$$\hat{a} = g_m v_1$$

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g_m v_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Gen. corrente pilotato in corrente

$$\hat{a} = \beta i_1$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 59

RECIPROCITÀ DEI DOPPI BIPOLI

Siano $\underline{v}', \underline{i}'$ e $\underline{v}'', \underline{i}''$ due generiche coppie di tensioni e correnti che soddisfano la relazione costitutiva del doppio bipolo

Un doppio bipolo si dice RECIPROCO se e solo se per ogni $(\underline{v}', \underline{i}')$ $(\underline{v}'', \underline{i}'')$ che soddisfa la relazione costitutiva del doppio bipolo risulta:

$$(\underline{v}')^T \underline{i}'' = (\underline{v}'')^T \underline{i}'$$

Se il doppio bipolo ammette matrice $\underline{\underline{R}}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \underline{v}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{i}' \\ \underline{v}'' = \underline{\underline{R}}\, \underline{i}'' \end{cases} \Longrightarrow (\underline{\underline{R}}\, \underline{i}')^T \underline{i}'' = (\underline{\underline{R}}\, \underline{i}'')^T \underline{i}'$$

$$(\underline{i}')^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i}'' = (\underline{i}'')^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i}'$$

SONO SCALARI $\Longrightarrow (\underline{i}')^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i}'' = \left[(\underline{i}')^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i}''\right]^T$

$$= (\underline{i}'')^T \underline{\underline{R}}\, \underline{i}'$$

$$(\underline{i}'')^T \underline{\underline{R}}\, \underline{i}' = (\underline{i}'')^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i}'$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \Longrightarrow \text{simmetrica}$$

NEI BIPOLI

La condizione di reciprocità diventa $\underline{v}' \underline{i}'' = \underline{v}'' \underline{i}'$

NEI RESISTORI

Un resistore è SEMPRE RECIPROCO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 59

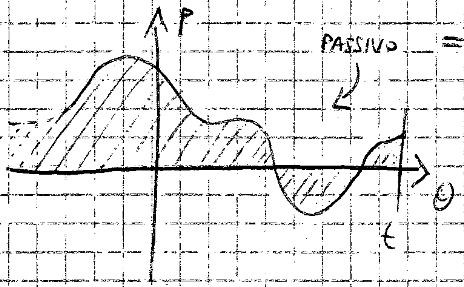
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 59

PASSIVITÀ

Un doppio bipolo si dice passivo se $\forall(\underline{v}, \underline{i})$ che soddisfa la relazione costitutiva

$$\forall t \quad \int_{-\infty}^{t} p(\theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{t} \underline{v}^T(\theta)\, \underline{i}(\theta)\, d\theta \geq 0$$

Stessa definizione per bipoli



PASSIVO $\Rightarrow$ in ogni istante t, l'area positiva per ora coperta è sempre > di quella negativa

In doppi bipoli $\rightarrow$ $p(t) \geq 0$ $\quad p(t) = \underline{v}^T \underline{i} = (\underline{\underline{R}}\, \underline{i})^T \underline{i} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{i} = \underline{i}^T \underline{\underline{R}}\, \underline{i}$

$\underline{i}^T \underline{\underline{R}}\, \underline{i} \geq 0$

$\Downarrow$

forma quadratica

$\underline{\underline{R}}$ può scriversi come somma di parte simmetrica e parte antisimmetrica

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^S + \underline{\underline{R}}^U = \begin{pmatrix} R_{11} & \frac{R_{12}+R_{21}}{2} \\ \frac{R_{12}+R_{21}}{2} & R_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_{12}-R_{21}}{2} \\ \frac{R_{21}-R_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

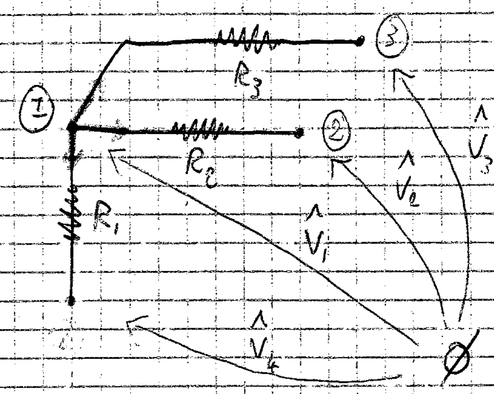
$$\geq 0$$

$$\underline{\underline{R}}^S \geq 0 \iff \begin{cases} R_{11} \geq 0 \quad \wedge \\ R_{22} \geq 0 \quad \wedge \\ R_{11} R_{22} - \left(\frac{R_{12}+R_{21}}{2}\right)^2 \geq 0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 59

- Nodo (5) è riferimento $\equiv \emptyset$
- Considero uno SPACCATO del nodo (1)



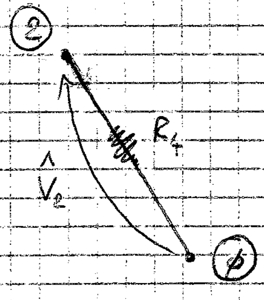
- Scrivo le LEGGI DI KIRCHOFF delle intensità uscenti da (1)

$$\frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_4}{R_1} + \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_2}{R_2} + \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_3}{R_3} = \alpha_1 - \alpha_2$$

SOMMA CORRENTI USCENTI

SOMMA CORRENTI ENTRANTI NEI GENERATORI

- Considero uno spaccato del nodo (2)



$$\frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_1}{R_2} + \frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_3}{R_6} + \frac{\hat{V}_2}{R_4} = \emptyset$$

- Considero nodo (3)

$$\frac{\hat{V}_3 - \hat{V}_2}{R_6} + \frac{\hat{V}_3 - \hat{V}_4}{R_3} = \alpha_2 - \alpha_3$$

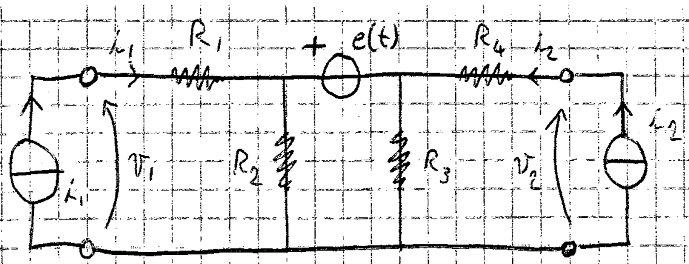
- Considero nodo (4)

$$\frac{\hat{V}_4 - \hat{V}_1}{R_1} + \frac{\hat{V}_4}{R_5} = -\alpha_1 - \alpha_4$$

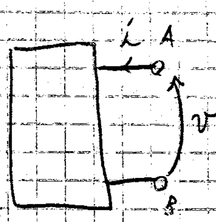
NOTA: abbiamo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 59



$\Longrightarrow$



$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

$$v_1 = (R_1 + R_2 /\!/ R_3)\, i_1 + (R_2 /\!/ R_3)\, i_2 + \frac{e(t) R_2}{R_2 + R_3}$$

$$v_2 = (R_2 /\!/ R_3)\, i_1 + (R_2 /\!/ R_3 + R_4)\, i_2 - \frac{e(t) R_3}{R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{TH_1} \\ v_{TH_2} \end{pmatrix}$$

$R_{11} = R_1 + R_2 /\!/ R_3$

$R_{12} = R_{21} = R_2 /\!/ R_3$

$R_{22} = R_2 /\!/ R_3 + R_4$

$v_{TH_1} = \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}\, e(t)$

$v_{TH_2} = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}\, e(t)$

$$\boxed{\underline{v} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{i} + \underline{v_{TH}}}$$ Relazione di Thevenin per doppi bipoli

Rappresentazione più generale possibile di un doppio bipolo lineare:

$\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\underline{\underline{N}} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\underline{v}, \underline{i}, \underline{s} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{M}}\, \underline{v} + \underline{\underline{N}}\, \underline{i} + \underline{s}(t) = \underline{\emptyset} \qquad \underline{s} = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}$ è invertibile $\Rightarrow$ $\underline{v} = \underbrace{-\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{N}}}_{\underline{\underline{R}}}\, \underline{i} \underbrace{- \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{s}}_{\underline{v_{TH}}}$

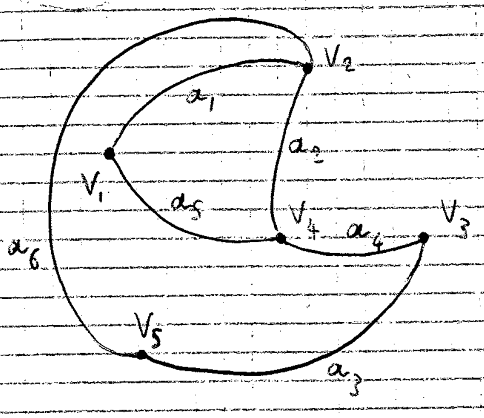
$\underline{\underline{N}}$ è invertibile $\Rightarrow$ $\underline{i} = \underbrace{-\underline{\underline{N}}^{-1} \underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{G}}}\, \underline{v} + \underbrace{\left(-\underline{\underline{N}}^{-1} \underline{s}\right)}_{\underline{i_N}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 59

Teoria dei Grafi

Grafo: insieme di vertici (nodi) e archi (lati)

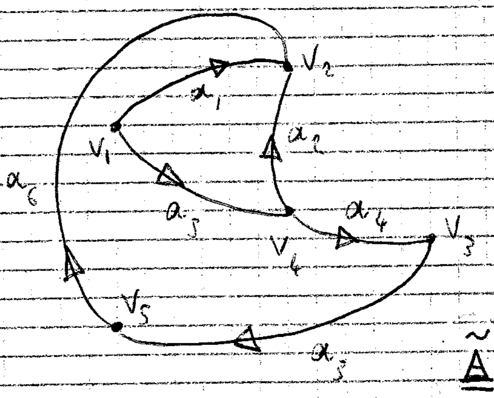


$$\mathcal{V} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$$

$$g = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		×		×	
v_2	×			×	×
v_3				×	×
v_4	×	×	×		
v_5		×	×		

Un grafo si dice ORIENTATO se sugli archi è definito un VERSO



Può essere definito tramite una MATRICE D'INCIDENZA:

$$\underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Metto +1 se l'arco esce da quel vertice, −1 se entra.

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{kl} = \begin{cases} +1 & \text{se arco } l \text{ è uscente da vertice } k \\ -1 & \text{se arco } l \text{ è entrante da vertice } k \\ 0 & \text{se arco } l \text{ non è collegato con vertice } k \end{cases}$$

La matrice ha rango "numero di vertici" − 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 59

Se $\underline{i} = (i_1\ i_2 \dots i_n)$

allora $\underline{\underline{\tilde{A}}} \cdot \underline{i} = \underline{\emptyset}$ $\Rightarrow$ LEGGI DI KIRCHOFF

Dato un circuito (rappresentato da un grafo orientato) con N nodi e L lati e detta $\underline{\underline{A}}$ la matrice d'incidenza ridotta del grafo, ALLORA le KCL del circuito si scrivono

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = \underline{\emptyset}} \quad \begin{cases} \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{N-1,L} \\ \underline{i} = (i_1\ i_2 \dots i_L)^T \end{cases}$$

KCL

$\underline{\underline{A}}$ ha rango massimo $\Rightarrow$ sono tutte L.I.

VETTORE DELLE TENSIONI DI LATO

$$\underline{v} = (v_1\ v_2 \dots v_L)^T$$

VETTORE DELLE CORRENTI DI LATO

$$\underline{i} = (i_1\ i_2 \dots i_L)^T$$

VETTORE DELLE TENSIONI NODALI

Si assume un nodo di riferimento e si considerano le tensioni tra gli altri nodi e quello di riferimento.

$$\underline{e} = (e_1\ e_2 \dots e_{N-1})^T$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{e} = \underline{v}} \quad \text{KVL}$$

Dato un circuito (grafo) e detta $\underline{\underline{A}}$ la matrice d'incidenza ridotta, le leggi KCL e KVL si scrivono:

LE LEGGI DI OHM SUI SINGOLI PEZZI

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{i} = \emptyset & N-1 \text{ equazioni} \\ \underline{v} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{e} & L \text{ equazioni} \end{array}\right\} (N-1)+L \text{ equazioni}$$

e ci sono $2L + N - 1$ incognite

$\underline{\underline{\tilde{M}}}, \underline{\underline{\tilde{N}}} \in \mathbb{R}^{L,L}$

$$\text{R.C.}\quad \boxed{\underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{v} + \underline{\underline{\tilde{N}}}\,\underline{i} + \underline{\tilde{s}} = \emptyset} \quad \underline{\tilde{s}} \in \mathbb{R}^L$$

$\Rightarrow$ MANCANO L equazioni $\Rightarrow$ le relazioni COSTITUT.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 59

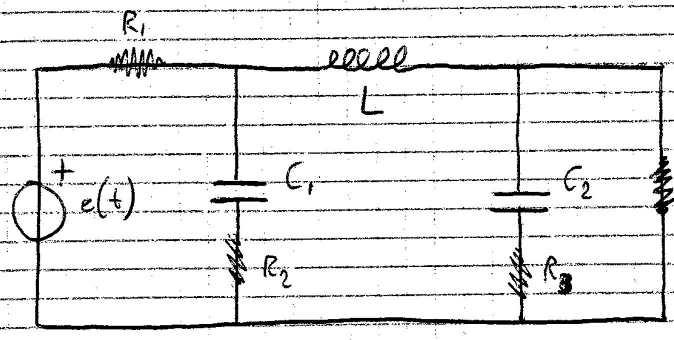
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 59

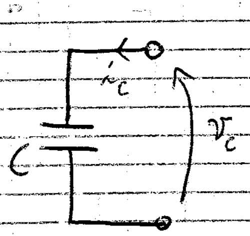
RETI DI ORDINE SUPERIORE

L'ordine di una rete è pari (a meno di eccezioni) alla somma del numero di condensatori e induttori.

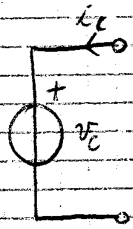
ES

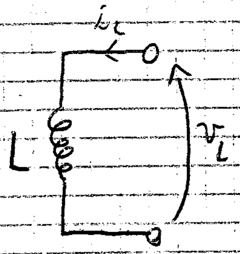
Circuito di ordine III



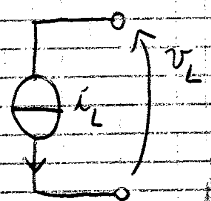


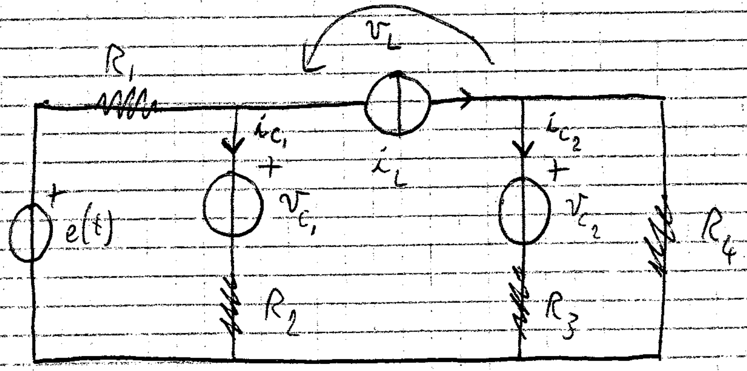
$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} \Longrightarrow$$





$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow$$





$$i_{C_1} = \frac{-v_{C_1}}{R_1+R_2} - i_L\frac{R_1}{R_1+R_2} + \frac{e(t)}{R_1+R_2}$$

$$v_L = \frac{v_{C_1}R_1}{R_1+R_2} - \frac{v_{C_2}R_4}{R_3+R_4} - i_L\left(R_1//R_2 + R_3//R_4\right) + e(t)\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_{C_2} = \frac{-v_{C_2}}{R_3+R_4} + i_L\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

$$i_{C_1} = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} \qquad i_{C_2} = C_2\frac{dv_{C_2}}{dt}$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 59

3 Si calcola lo stato coniugato

$$\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} i_{C_1} \\ \vdots \\ i_{C_{N_C}} \\ v_{L_1} \\ \vdots \\ v_{L_{N_L}} \end{pmatrix}$$

4) Si tiene conto della relazione tra $\underline{x}$ e $\underline{\hat{x}}$

$$i_{C_1} = C_1 \frac{d v_{C_1}}{dt} \quad \ldots\ldots \quad i_{C_{N_C}} = C_{N_C} \frac{d v_{C_{N_C}}}{dt}$$

$$v_{L_1} = L_1 \frac{d i_{L_1}}{dt} \quad \ldots\ldots \quad v_{L_{N_L}} = L_{N_L} \frac{d i_{L_{N_L}}}{dt}$$

5) Si ottiene un sistema di equazioni differenziali di ordine $N_C + N_L$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t)}$$

NOTA

Tra il passo 2 e il passo 3 occorre verificare che il tableau sparso $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ della rete ottenuta sostituendo ai condensatori e induttori i generatori di tensione e corrente sia INVERTIBILE.

Se $\exists\, \underline{\underline{\tilde{T}}}^{-1}$ la rete si dice NON DEGENERE e si procede al passo 3.

Se $\nexists\, \underline{\underline{\tilde{T}}}^{-1}$ la rete si dice DEGENERE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 59

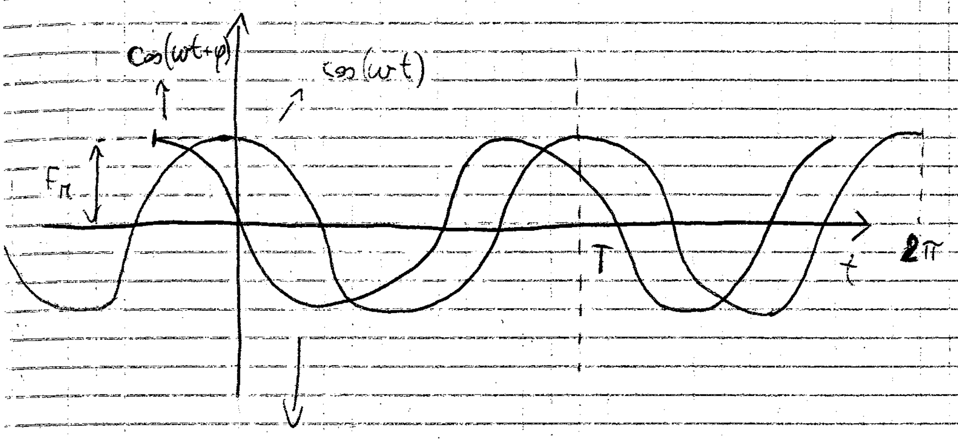
SEGNALI SINUSOIDALI

$$\boxed{f(t) = F_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_F)}$$

$F_M \triangleq$ ampiezza

$\omega \triangleq \frac{2\pi}{T}$ pulsazione (frequenza angolare)

$\varphi_F \triangleq$ fase



Se poniamo $\varphi_F > 0$

$\Downarrow$

$\cos(\omega t + \varphi_F) = 1$

$\Downarrow$

$\omega t + \varphi_F = 0$

$t = -\frac{\varphi_F}{\omega}$

è in ANTICIPO DI FASE rispetto $\cos(\omega t)$

FASORE

$j = i = \sqrt{-1}$ $\qquad \omega = 2\pi f$ è generalmente nota

$F_M, \varphi_F \in \mathbb{R}$

$f(t) = F_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_F) \xrightarrow[\text{OPERATORE FASORE}]{\mathcal{F}} F = F_M e^{j\varphi_F}$

$|F| = F_M \qquad \angle F = \varphi_F$

$\mathcal{F}$ è un operatore LINEARE che opera tra due spazi vettoriali

Dim

$f_1 = F_{1M} \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad f_2 = F_{2M} \cos(\omega t + \varphi_2)$

$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{F}(f_1) + c_2 \mathcal{F}(f_2) \qquad \mathcal{F}(\phi) = \phi$

Ricordando che: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$$\begin{aligned} & c_1 F_{M_1} \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 F_{M_2} \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ & = c_1 F_{M_1} (\cos\omega t \cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\varphi_1) + c_2 F_{M_2} (\cos\omega t \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\varphi_2) \\ & = \underbrace{(c_1 F_{M_1} \cos\varphi_1 + c_2 F_{M_2} \cos\varphi_2)}_{A} \cos\omega t - \underbrace{(c_1 F_{M_1} \operatorname{sen}\varphi_1 + c_2 F_{M_2} \operatorname{sen}\varphi_2)}_{B} \operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

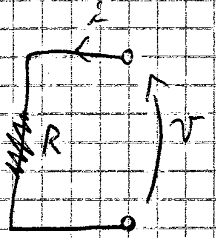
$A \cos\omega t + B \operatorname{sen}\omega t = F_M \cos(\omega t + \varphi) \qquad F_M = \sqrt{A^2+B^2}$

$\varphi = -\arctan B/A$

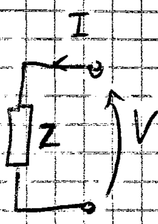
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 59

SOSTITUZIONE RESISTENZA – IMPEDENZA (e CONDUTTANZA – AMMETTENZA)



$v(t) = R\,i(t)$



$V = Z I$

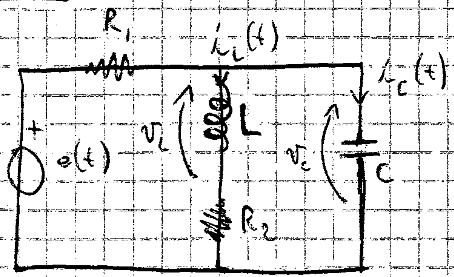
	Z	Y
R	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R} = G$
L	$Z = jX_L \quad (X_L = \omega L)$	$Y = jB_L \quad \left(B_L = \frac{1}{\omega L}\right)$
C	$Z = jX_C \quad \left(X_C = \frac{-1}{\omega C}\right)$	$Y = jB_C \quad (B_C = \omega C)$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{\underline{A}}t}\left(\underline{x}(0) - \underline{x}_r(0)\right)}_{\emptyset} + \underline{x}_r(t)$$

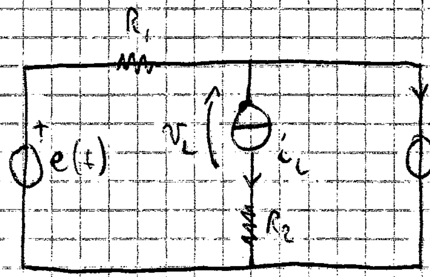
$\Uparrow$ λ_i autovalori di $\underline{\underline{A}}$

$\forall i \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

ES



$\Longrightarrow$



$$\begin{cases} i_C(t) = \dfrac{-v_C(t)}{R_1} - i_L(t) + \dfrac{e(t)}{R_1} \\ v_L(t) = v_C(t) - R_2 i_L(t) \end{cases}$$

$i_C(t) = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$v_L(t) = L\dfrac{di_L}{dt}$

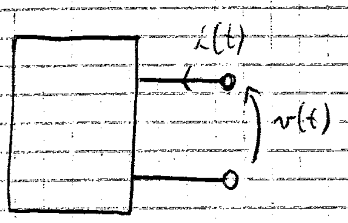
$$\begin{cases} e(t) = 5\,\mathrm{sen}(4t) \\ R_1 = 2\,\Omega \\ R_2 = 1\,\Omega \\ L = 0{,}5\,H \\ C = 0{,}25\,F \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ \emptyset \end{pmatrix} e(t)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 59

Regime Sinusoidale – Potenze



$p(t) = v(t)\, i(t)$

$v(t) = \mathrm{Re}\left(V e^{j\omega t}\right)$

$i(t) = \mathrm{Re}\left(I e^{j\omega t}\right)$

$v(t) \longleftrightarrow V \qquad i(t) \longleftrightarrow I$

$$p(t) = \mathrm{Re}\left(V e^{j\omega t}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(I e^{j\omega t}\right) = \frac{\left(V e^{j\omega t}\right) + \left(V e^{j\omega t}\right)^*}{2} \cdot \frac{\left(I e^{j\omega t}\right) + \left(I e^{j\omega t}\right)^*}{2}$$

$w = x + jy$

$\mathrm{Re}(w) = \dfrac{w + w^*}{2}$ → complesso coniugato

In regime sinusoidale:

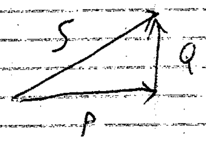
$v(t) = |V| \cos(\omega t + \angle V) \Rightarrow V = |V| e^{j\angle V}$

$i(t) = |I| \cos(\omega t + \angle I) \Rightarrow I = |I| e^{j\angle I}$

$\langle p(t) \rangle = \dfrac{1}{2} |V||I| \cos(\angle V - \angle I) = P$ pot. attiva = pot. media

$\dfrac{1}{2} |V||I| \sin(\angle V - \angle I) = Q$ pot. reattiva

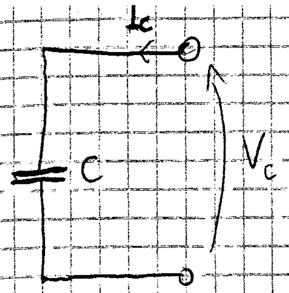
$S \triangleq \dfrac{1}{2} V I^*$ Potenza complessa $\qquad S = P + jQ$



$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \dfrac{1}{2} |V||I| = A$ Pot. apparente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 59

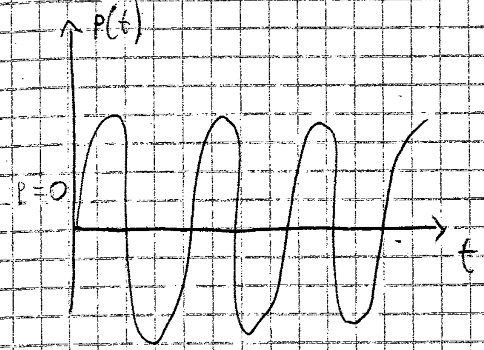
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 59



$P=0$

$Q_c = \frac{1}{2} X_c |I_c|^2 < 0$

$X_c = -\frac{1}{\omega c}$



$w_c(t) = \frac{1}{2} c V_c^2(t)$

$\langle w_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T w_c(t)\,dt = \frac{1}{4} c |V_c|^2$

$Q_c = \frac{1}{2} X_c |I_c|^2 = \frac{1}{2} X_c \frac{|V_c|^2}{|X_c|^2} = \frac{1}{2}\frac{|V_c|^2}{X_c}$

$$\frac{Q_c}{\langle W_c \rangle} = \frac{\frac{1}{2}\frac{|V_c|^2}{X_c}}{\frac{1}{4} c |V_c|^2} = \frac{2}{c X_c} = \frac{2}{c\left(\frac{-1}{\omega c}\right)} = -2\omega$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 59

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 59

$$I_2 = \frac{\ldots}{jX_{L_2} + (R_2 + jX_{C_2}) // R_1} = \frac{\ldots}{5 + 8j}$$

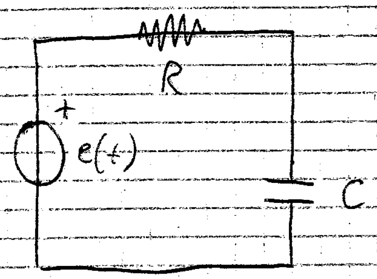
$$|I_2| = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{89}} = 1,68$$

$$\angle I_2 = \pi - \mathrm{arctg}\, 1/3 - \mathrm{arctg}\, 8/5 = 103,57$$

$$i_2(t) = 1,68 \cos(3t + 103,57°)\ A$$

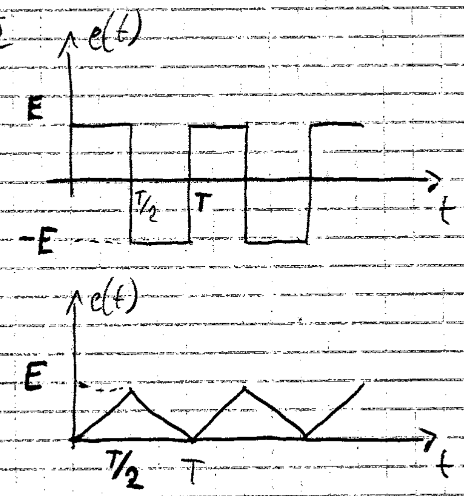
$$i(t) = 3,71 \cos(2t + 191,14°) + 1,68 \cos(3t + 103,57°)\ A$$

Considero un circuito RC



e(t) sia un generico segnale periodico di periodo T

Es



$$v_C(t) = e^{-t/\tau}\left(v_C(0) - v_{C_r}(0) + v_{C_r}(t)\right) \qquad \tau = RC$$

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E'_n \cos(n\omega_0 t) + E''_n \,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)$$

$$E_0 = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt \qquad E'_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$E''_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 59