NUMERO : 84

DATA : 28/04/2011

# A P P U N T I

STUDENTE : Alessio

MATERIA : Analisi Matematica 1
Prof. Chiadò - Piat

# ANALISI MATEMATICA

# I

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 376

Programma di Analisi Matematica I
I Facoltà di Ingegneria, I Corso (A-CAPE), Anno accademico 2008/9
Docente: Valeria Chiadò Piat
Testo di riferimento: C. Canuto, A. Tabacco, Analisi Matematica I. Teoria ed esercizi con complementi in rete, Springer (terza edizione, 2008).

Il programma d'esame include la conoscenza degli argomenti sotto elencati, con particolare riferimento a definizioni, enunciati di teoremi e proprietà, esempi e controesempi.

1. Elementi di logica matematica
2. Cenni di teoria degli insiemi
3. Insiemi numerici. I numeri reali
4. Funzioni
5. Limiti di funzioni reali di variabile reale e di successioni
6. Continuità per funzioni reali di variabile reale
7. Confronto locale di funzioni
8. Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale
9. Formula di Taylor ed applicazioni
10. Calcolo integrale per funzioni reali di variabile reale
11. Equazioni differenziali ordinarie (primo e secondo ordine)
12. Vettori del piano e dello spazio
13. Numeri complessi
14. Curve nel piano e nello spazio
15. Integrale di linea
16. Funzioni di più variabili reali: dominio, limiti, continuità, derivate parziali, gradiente.

Gli argomenti sono tutti trattati nel testo di riferimento indicato. Per alcuni argomenti sono disponibili complementi in rete dello stesso testo, alla pagina http:// calvino.polito.it/canuto-tabacco/analisi_1 .

Non sono stati trattati gli argomenti: calcolo combinatorio (Esempio 1.9), serie numeriche (§ 5.5), coordinate cilindriche e sferiche (seconda parte del § 8.1), l'integrale di Cauchy (§ 9.4), l'integrale curvilineo (§ 10.3). Per gli integrali impropri ci si è limitati alle sole definizioni 10.1, 10.13 ed esempi 10.4, 10.14.

E' richiesta inoltre la conoscenza delle dimostrazioni dei teoremi inclusi nel seguente elenco (la numerazione corrisponde al testo di riferimento Canuto - Tabacco, 2^ edizione).

- Proprietà 1.1 (la lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1 non è razionale) → vedi dim segnate su q.
- Formula (1.7) (caratterizzazione dell'estremo superiore)
- Proprietà 2.8 (f strettamente monotona implica f iniettiva)

- Teorema 3.9 (limite di successione monotona)
- Teorema 4.1 (unicità del limite)
- Teorema 4.2 (permanenza del segno)
- Corollari 4.3, 4.4, 4.7 e Teorema 4.5, 4.8 (teoremi del confronto)
- Teorema 4.10 (algebra dei limiti)

limiti

- Corollario 4.11 (continuità di somma, prodotto, quoziente di funzioni continue)
- Corollario 4.12 (continuità delle funzioni razionali)
- Teorema 4.23 (Esistenza degli zeri), Teorema 4.29 (Valori intermedi)
- Corollario 4.30 (Immagine di una funzione continua)

funz. continue

- Proprietà 5.5 e Corollario 5.6 (Eliminazione dei termini trascurabili) → o piccolo
- Proprietà 6.3 (continuità delle funzioni derivabili)
- Corollario 6.5 (linearità della derivata)
- Teorema 6.21 (Teorema di Fermat)
- Teorema 6.22 (Teorema di Rolle)
- Teorema 6.23 (Teorema di Lagrange)
- Proprietà 6.25 (funzioni con derivata nulla)
- Teorema 6.26 (monotonia e segno della derivata prima)

derivate

- Teorema 7.1 (con dim. solo per n=2) Taylor_p
- Proprietà 7.3 (Polinomio di McLaurin di una funzione pari o dispari) funz. pari → solo potenze pari
- Teorema 7.16 e 7.18 (studio del comportamento locale con la formula di Taylor) 1° derivata non nulla
- Teorema 9.8 (linearità dell'integrale)
- Teorema 9.10 (primitive per parti)
- Teorema 9.12 (primitive per sostituzione)
- Teorema 9.35 (Teorema della media integrale)
- Teorema 9.37 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)
- Corollari 9.38 e 9.39 (formula per il calcolo dell'integrale definito)
- Teorema 9.44 (integrale definito per parti)
- Teorema 9.45 (integrale definito per sostituzione)

integrali

- Capitolo 11 (metodi risolutivi delle equazioni differenziali) → eq. differenziali

**MODALITÀ PER GLI ESAMI DI ANALISI MATEMATICA I e II**
**corsi di laurea della Prima Facoltà di Ingegneria**
**Politecnico di Torino**

**Insegnamenti di Analisi 1 e di Analisi 2**
*corsi attualmente attivi*[1]

## Appelli

Gli esami dei corsi di Analisi Matematica 1 e 2 vengono sostenuti nei periodi degli appelli ufficiali previsti dalla guida dello studente, e con le modalità descritte sotto.

## Struttura dell'esame

L'esame consiste di una prova scritta e di una prova orale da **sostenersi nel medesimo appello della prova scritta.**

La prova scritta di Analisi Matematica 1 consta di due parti. L'accesso alla seconda parte è consentito solamente se la prima parte è stata superata.

La prima parte della prova scritta di Analisi Matematica 1 consiste nel rispondere a *cinque* domande a risposta multipla. Questa prova non dà punti, ma lo studente che non ha risposto in modo corretto ad *almeno quattro* di questi esercizi non è ammesso a sostenere la seconda parte della prova scritta. Questa prima parte della prova scritta potrà tenersi, a seconda degli appelli, immediatamente prima della seconda parte o in orario diverso.

La seconda parte della prova scritta di Analisi Matematica 1 e la prova scritta di Analisi Matematica 2 constano di 3-4 esercizi—eventualmente suddivisi in più punti—relativi a tutto il programma del corso.

La durata della prova è di due ore.

Sia nel caso dell'esame di Analisi Matematica 1 che di Analisi Matematica 2, l'ammissione all'orale è conseguita se il voto dello scritto è di almeno 15.

Il calendario delle prove orali verrà comunicato successivamente alla prova scritta.

E' possibile ritirarsi durante la prova scritta, dopo un'ora dall'inizio della prova stessa.

L'esame sarà registrato qualunque ne sia stato l'esito.

## Prenotazione

Gli studenti che intendono sostenere l'esame in un dato appello devono prenotarsi attraverso il Portale della Didattica, selezionando il nominativo del docente titolare dell'insegnamento.

[1]per le regole relative agli esami dei corsi spenti, contattare il docente

14/09/2000

# MATEMATICA

vedi sito poli

Studio di funz. < continuità / derivabilità / integrabilità

Eq. differenziali → x tradurre in calcolo delle leggi della fisica
l'incognita è 1 funz.
e nn 1 numero
nell'eq compaiono le derivate della funz. incognita

## LOGICA

1_ Proposizioni
2_ Connettivi logici
3_ Tautologie e contraddizioni
4_ Predicati
5_ Quantificatori

① Proposizioni = affermaz. di cui si può dire in modo certo se sono vere o false
↓
p, q, r, ... (lettere a partire da p)

② Connettivi logici
↓
e $\wedge$ congiunzione (e)
o $\vee$ disgiunzione (vel)
non $\neg$ negazione (non)
se... allora $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ implicazione (implica)
se e solo se $\Leftrightarrow$ doppia implicazione (equivale)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 376

$p \Rightarrow q$ è la struttura tipica di 1 teorema
↓
p : ipotesi
q : tesi

p condizione sufficiente (affinché valga q)
q condizione necessaria

• doppia implicazione
date 2 prop p, q la prop $p \Leftrightarrow q$ si esprime come $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | F | V |
| V | F | F |
| F | V | F |

$p \Leftrightarrow q$ è vera se p, q hanno lo stesso valore di valore (sono equivalenti da 1 pt. di vista logico)

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |

③ Tautologie = prop composte che sono sempre vere, qualunque sia il valore delle prop componenti

es. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

| $p$ | $\neg p$ | $\neg(\neg p)$ | $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| V | F | V | V |
| F | V | F | V |

(la doppia negaz. afferma)

le tautologie sono 1 altro modo × esprimere i teoremi.

Contraddizioni = prop composte che sono sempre false, qualunque sia il valore delle prop componenti.

es. $\boxed{p \wedge (\neg p)}$

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge (\neg p)$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

→ $\neg(p \wedge (\neg p))$ principio di non contraddizione

$\rightarrow 6K = 2x + 1$ ; $6k - 2x = 1$ ; $\underbrace{2\,(\underbrace{3K - x}_{\text{num sicuramente intero}})}_{\text{num pari}} = 1$

$\downarrow$

$1$ è pari $\Rightarrow$ contraddizione $\Leftarrow$ (impossibile)

④ Predicati

[6 è pari] è 1 prop.

[n è pari] è 1 predicato $\rightarrow p(n)$

I predicati sono delle affermaz. contenenti delle variabili e sono tali che sostituendo le variabili con delle costanti si ottengono delle proposizioni.

altro es. $x + y = 0$ predicato in 2 variabili $\rightarrow p(x, y)$

$3 + (-3) = 0$ V

$3 + 2 = 0$ F

2° modo x trasformare predicati in prop.:

quantificare le variabili (dire come si scelgono le variabili MA senza sceglierle).

es. $p(n)$ : n è pari

⑤ Quantificatori $\forall n$ naturale n è pari $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \;\; p(n)$ (F)

($\forall \rightarrow$ quantificatore universale)

$\exists n \in \mathbb{N} : p(n)$ [: = tale che ; / = tale che]

($\exists \rightarrow$ quantificatore esistenziale) (V)

($\exists !$ = esiste ed è l'unico)

18/09/08

Se p è 1 predicato in più variabili, esso si trasforma in proposiz. in diversi modi:

- fissando tutte le variabili
- quantificando " " "
- fissando alcune var. e quantificandone altre.

$p(x, y)$ = lo studente x ha superato l'esame y

a) $\forall x \forall y \;\; p(x; y) \rightarrow$ tutti gli studenti hanno superato tutti gli esami

b) $\exists x \exists y \;\; p(x, y) \rightarrow$ esiste almeno 1 studente che ha superato almeno 1 esame

c) $\exists x \forall y \;\; p(x, y) \rightarrow$ esiste almeno 1 studente che ha superato tutti gli esami

d) $\forall x \exists y \;\; p(x, y) \rightarrow$ tutti gli studenti hanno superato almeno 1 esame.

- $[\exists x \exists y \; p(x,y)]$

  $\neg[\exists x \exists y \; p(x,y)] \Leftrightarrow [\forall x \; \neg[\exists y \; p(x,y)]] \Leftrightarrow [\forall x \forall y \; \neg p(x,y)]$

  nessuno studente ha superato esami

- $[\forall x \exists y \; p(x,y)]$

  $\neg[\forall x \exists y \; p(x,y)] \Leftrightarrow [\exists x \forall y \; \neg p(x,y)]$

  c'è 1 studente che non ha superato nessun esame

- $[\exists x \forall y \; p(x,y)]$

  $\neg[\exists x \forall y \; p(x,y)] \Leftrightarrow [\forall x \exists y \; \neg p(x,y)]$

  tutti gli studenti hanno almeno 1 esame da superare

$\Rightarrow$ in generale $\forall$ si sostituisce con $\exists$ e viceversa e si nega il predicato

$\boxed{\text{Esercizio}}$ $p(x,y)$ $\quad x+y=0$

1) quantificare in tutti i modi possibili con $x, y \in \mathbb{N}$
2) " " " " " $x, y \in \mathbb{Z}$

e stabilire se le prop. corrispondenti sono vere o false
Poi costruire le negazioni corrispondenti

1 $[\forall x \in \mathbb{N} \; \forall y \in \mathbb{N} \; p(x,y)]$ F

2 $[\exists x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} \; p(x,y)]$ V $\quad x=0 \; y=0$

3 $[\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} \; p(x,y)]$ F

4 $[\exists x \in \mathbb{N} \; \forall y \in \mathbb{N} \; p(x,y)]$ F

5 $[\forall x \in \mathbb{Z} \; \forall y \in \mathbb{Z} \; p(x,y)]$ F

6 $[\exists x \in \mathbb{Z} \; \exists y \in \mathbb{Z} \; p(x,y)]$ V $\quad x=-y$

7 $[\forall x \in \mathbb{Z} \; \exists y \in \mathbb{Z} \; p(x,y)]$ V $\quad x=-y$

8 $[\exists x \in \mathbb{Z} \; \forall y \in \mathbb{Z} \; p(x,y)]$ V $\quad x=-y$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 376

$\mathbb{Q} = \{\text{numeri razionali}\} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\}$

$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\}$ $i$

## Teoria degli insiemi

insieme = collezione di elementi

lettere maiuscole — lettere minuscole

$\in$ simbolo di appartenenza → x descrivere 1 insieme

Descrizione di 1 insieme:

- per elencazione $A = \{0, 1, 2\}$
- mediante 1 caratterizzazione $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 3\}$

Relazioni tra insiemi:

- uguaglianza $A = B$ (insiemi uguali)

  $\forall x \quad x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ (elementi uguali)

- disuguaglianza $A \neq B$ (insiemi diversi)

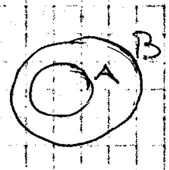
  es. $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 0\} = \{0\}$

  $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + x = 0\} = \{0, -1\}$

  $x^2 + x = 0 \qquad x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

- inclusione → 1 insieme è sottoinsieme di 1 altro / incluso in esso quando tutti i suoi elementi sono anche elementi dell'altro insieme. $A \subseteq B$

  $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

diagrammi 

$\boxed{\text{Esercizio}}$ $A = \{x \in \mathbb{R} : ||x-1| - 1| = 0\}$

$B = \{0; 1\} \qquad C = \{0, 2\}$

discutere uguaglianza e inclusione con A, B, C

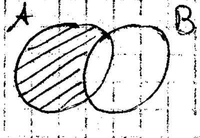
→

Insieme vuoto $\emptyset$ è l'insieme privo di elementi

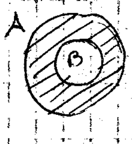
$$\emptyset = \{x : p(x) \wedge \neg p(x)\}$$

- differenza tra insiemi A e B $\rightarrow$ l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$




Se $B \subseteq A$ allora $A \setminus B$ si chiama anche il complementare di B in A




[altre notazioni $A-B$ se A è chiarito dal contesto]

$(A \subseteq B \quad A \setminus B = \emptyset)$

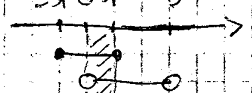
$\boxed{\text{Esercizio}}$ $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+1} = 1-x\}$

Calcolare $\mathbb{R} - A$ e confrontarlo con $C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+1} > 1-x\}$
Sono uguali? Vale 1 inclusione?

$\sqrt{x+1} = 1-x \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+1 = 1 + x^2 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ x = 3 \text{ nn. acc.} \end{matrix}$

$\Rightarrow A = \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$\sqrt{x+1} > 1-x \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+1 > 1 + x^2 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$




$0 < x \leq 1 \Rightarrow C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

$\rightarrow$

## Proprietà della teoria degli insiemi

Dati $A, B, C$ sottoinsiemi di $X$, allora:

- $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, $A \cup (X \setminus A) = X$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ proprietà associativa
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ " "
- $\cup, \cap$ hanno la proprietà commutativa
- proprietà distributiva di $\cap$ rispetto a $\cup$ e di $\cup$ rispetto a $\cap$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ $\boxed{\text{leggi di Morgan}}$
  (idem scambiando $\cup$ e $\cap$)
- prodotto cartesiano di insiemi
  dati $X, Y$ insiemi
  dati $x \in X$, $y \in Y$ con il simbolo $(x, y)$
  indichiamo la coppia dove $x$ si chiama prima componente e $y$ seconda componente.
  ( diversamente $\{x, y\} = \{y, x\}$ )
  $\{x, x\} = \{x\}$ invece nella coppia qst nn si fa $\rightarrow (x, x)$



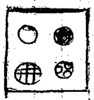
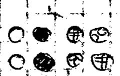
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 376

Fattoriale di 1 numero naturale

$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$n!$ fattoriale di $n$

| | |
|---|---|
| $n = 1$ | $n! = 1$ |
| $n > 0$ | $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ |
| $n = 0$ | $0! = 1$ |

es.  n oggetti distinti 

permutazioni
$\downarrow$
conta l'ordine

| | | |
|---|---|---|
| 1ª estraz. | 4 | scelte possibili |
| 2ª " | 3 | " " |
| 3ª " | 2 | " " |
| 4ª " | 1 | " " |

Se mi fermo alla 2ª estraz. ho $4 \cdot 3$ possibilità di "combinazione"

$n \cdot (n-1)$

Se continuo

| | | |
|---|---|---|
| passo 1 | $n$ | possibilità |
| " 2 | $n-1$ | " |
| " 3 | $n-2$ | " |
| ... | | |
| passo k | $n-k+1$ | possibilità |
| passo n | $n-n+1 = 1$ | " |

$\hookrightarrow n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ $\qquad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Potenza ennesima del binomio $a+b$

dati $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{sommatoria} & \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + c_2 \ldots + c_n \\ \text{produttoria} & \prod_{k=0}^{n} c_k = c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \end{array}\right]$$

$$= c_0 \cancel{a^0} b^n + c_1 a b^{n-1} + c_2 a^2 b^{n-2} + \ldots + c_n a^n \cancel{b^{n-n}}$$

$c_k = \binom{n}{k}$ $\qquad n, k \in \mathbb{N} \qquad k < n$

è 1 combinazione di fattoriali $\qquad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

p è pari → $\exists k : p = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

sostituisco → $(2k)^2 = 2q^2$ → $4k^2 = 2q^2$ → $2k^2 = q^2$

→ $q^2$ è pari → anke q è pari

→ p, q hanno 2 come fattore comune → contraddizione

↓

$x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali

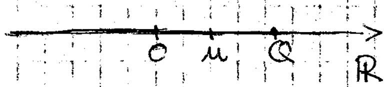
Retta → insieme continuo di punti

se prendo solo i pt razionali nn ho più 1 insieme continuo (salto almeno $\sqrt{2}$); per prendere tt la retta devo prendere anke i pt nn razionali

↓

Numeri irrazionali

(sono i pt che sulla retta nn hanno 1 coordinata razionale)



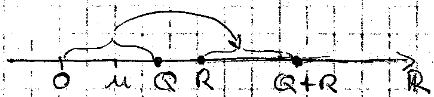

$\mathbb{R}$ numeri reali → tutti i punti della retta

$Q = \sqrt{2} = 1,4143...$ → 1,4143 vicino di sx → approssimaz. x difetto

1,4144 vicino di dx → approssimaz. x eccesso

ma come si sommano i numeri irrazionali?

↓




traslazione geometrica

si usa 1 metodo geometrico anche per moltiplicare 2 num. irrazionali

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ con le operaz. di somma e prodotto

tutte le proprietà algebriche valgono anke in qst contesto (è dimostrabile)

commutativa
associativa
distributiva

esistono anke gli elementi neutri dati da:
- opposto x la somma → $x - x = 0$
- inverso x il prodotto → $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ $(x \neq 0)$

⇓

l'insieme $\mathbb{R}$ è 1 campo

con qst termine si dice che valgono tutte qll proprietà

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è 1 campo



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 376

<u>def.</u> di estremo superiore di A

$S \in \mathbb{R}$ è estremo superiore di A se è il min dello insieme dei maggioranti

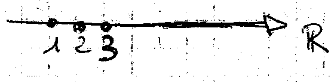
$S = \min M_+$

24/09/08

$A = \{ x \in \mathbb{R} : x = \max \{n, \frac{1}{n}\}, \; n \in \mathbb{N}, n > 0 \}$

se $n = 1$ $x_1 = \max \{1, \frac{1}{1}\} = 1$
se $n = 2$ $x_2 = \max \{2, \frac{1}{2}\} = 2$ > è sempre n

quindi $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$




- $m_+(A) = \emptyset$ nn ci sono maggioranti
  $\downarrow$
  A è l'insieme superiormente illimitato

- $m_-(A) = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \}$
  $= ]-\infty ; 1]$ $\qquad [a, b]$

max A nn esiste
min $A = 1$
$\sup A = \min m_+(A)$

<u>def.</u> se A ha maggioranti si dice che $\sup A = \min m_+(A)$
se A nn ha maggioranti si dice che $\sup A = +\infty$

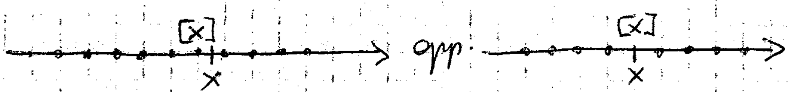
<u>def</u> se A ha minoranti $\inf A = \max m_-(A)$
se A nn ha minoranti $\inf A = -\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del  CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 376

## Funzione parte intera

dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di $x$ il max numero intero minore o uguale di $x$ (approssimax per difetto)

$$[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$$

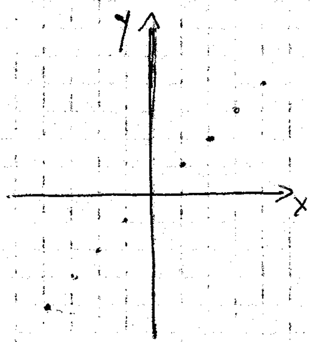



se $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$

$[1] = 1$

$[-3] = -3$

...



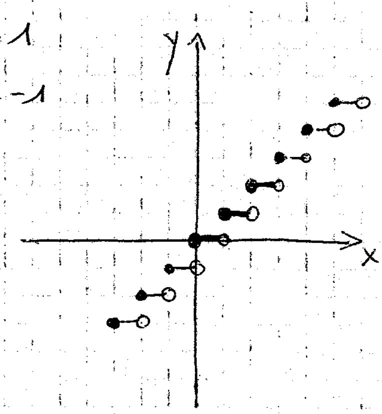

$y = [x]$

Se $x \notin \mathbb{Z}$, $0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$

$[-0{,}5] = -1$




## Valore assoluto dei numeri reali

def. $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

### Proprietà

1. a) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

   $|xy| = |x| \cdot |y|$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

   $|x+y| \leq |x| + |y|$ disuguaglianza triangolare

   e $\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$

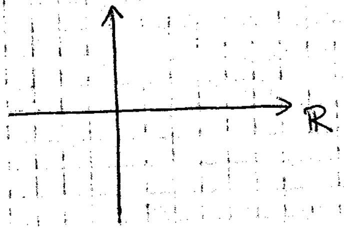


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 376

# Numeri complessi

In $\mathbb{R}$ so risolvere $x^n = c$, quando $c \geq 0$

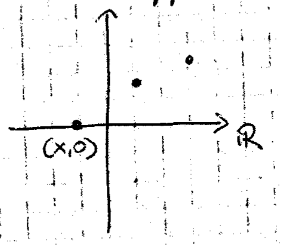
$\{x^2 = -1\}$ $c < 0$ $\Rightarrow$ in $\mathbb{R}$ non ci sono soluzioni perché le potenze pari sono sempre $\geq 0$




costruiamo 1 "modello" per l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi utilizzando i punti del piano ($\rightarrow$ uscendo da $\mathbb{R}$)

NUM COM $\mathbb{C}$

Gli elementi del piano sono i punti, ciascuno di essi è individuato mediante le sue coordinate cartesiane, cioè con 1 coppia di numeri reali




dati $(a,b)$ e $(c,d)$ devo definire somma e prodotto

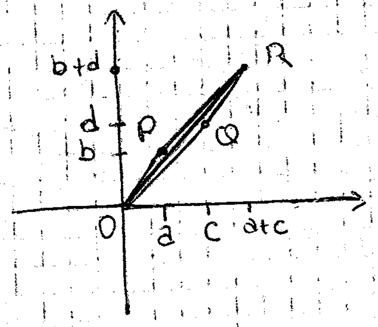
I punti del tipo $(x,0)$ corrispondono ai numeri reali $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Le definizioni di somma e prodotto devono essere compatibili con le corrispondenti operazione in $\mathbb{R}$ e poi devono fornire 1 soluzione per $x^2 = -1$

- def. di somma

dati $(a,b)$, $(c,d)$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

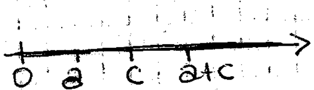



$\overline{OR}$ è la diagonale del parallelogramma OPRQ

compatibilità con $\mathbb{R}$

se prendo $(a,0)$, $(c,0)$

$(a,0) + (c,0) = (a+c, 0)$




(traslazione $\rightarrow$ ok)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 376

$\Rightarrow$ Notazione in forma algebrica

Ogni num. complesso si può decomporre

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = \underbrace{(a,0)} + i\,\underbrace{(b,0)} =$$

$$= \boxed{a + ib} \rightarrow$$ forma algebrica o cartesiana di $(a,b)$

$(a,0)$ lo indico con $a \rightarrow$ num. reale

$$\Rightarrow (a,b)(c,d) = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd =$$
$$= ac + iad + ibc - bd = \underbrace{(ac-bd)}_{A} + i\underbrace{(ad+bc)}_{B}$$

$A + i\,B$

$A \downarrow$ 1° parte del prodotto

$B \downarrow$ 2° parte del prodotto

es. $(2-3i)(1+i) = 2+2i-3i-3i^2 = 2+2i-3i+3 = 5-i$

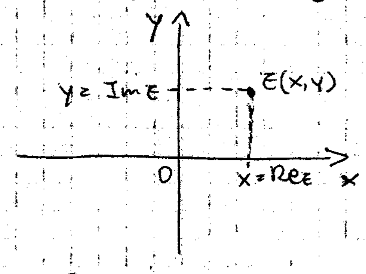
IN GENERALE.

si indicano i num complessi con $z$

$$z \in \mathbb{C} \;:\; z = x + iy = (x,y)$$

$x = \mathrm{Re}\,z =$ parte reale di $z$

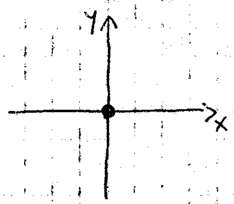
$y = \mathrm{Im}\,z =$ parte immaginaria di $z$




asse x = asse reale

asse y = asse immaginario

$$z = x + iy = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$




dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$

$$\underbrace{z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}}$$

1 uguaglianza in campo reale corrisponde a 2 uguaglianze in campo immaginario



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 376

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2+ixy-ixy = x^2+y^2 = |z|^2 \geq 0$$

---

- $\dfrac{1}{x+iy} = \ldots = a+ib \Rightarrow i$ al numeratore

x far qst

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} =$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \iff x+iy \neq 0$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

- $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

esercizio

dato $z = (2-i)^2 \cdot \dfrac{1}{i} - \overline{(1+3i)}\,(2i)$

calcolare $\operatorname{Re} z$

$\operatorname{Im} z$

$$z = (4+i^2-4i)(-i) - (1-3i)(2i) =$$

$$= (3-4i)(-i) - (1-3i)(2i) =$$

$$= -3i + 4i^2 - 2i + 6i^2 =$$

$$= -3i - 4 - 2i - 6 =$$

$$= -10 - 5i$$

$\operatorname{Re} z = -10$

$\operatorname{Im} z = -5$

$$|z| = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 15$$

# Forma polare di $z \in \mathbb{C}$

$z = x + iy$ nota la forma algebrica

sostituisco a $x, y$ le espressioni delle coordinate polari

$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ → forma polare di $z$

stesso $\theta$ dalle 2 parti → $\theta$ = argomento di $z$

$\rho \in \mathbb{R}$

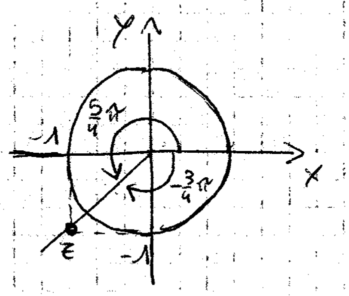
$\rho = |z|$ = modulo di $z$

$\rho \geq 0$

$\underline{\arg z} = \{$tutti i valori ammissibili per $\theta$ (sono $\infty$)$\}$

$\underline{\operatorname{Arg} z}$ = argomento principale di $z$ → l'unico valore di $\theta \in \arg z$ che appartiene ad 1 intervallo fissato in precedenza;

le scelte più comuni per qst intervallo di riferimento sono $[0, 2\pi[$ opp $]-\pi, \pi]$




$\frac{5}{4}\pi \in [0, 2\pi[$

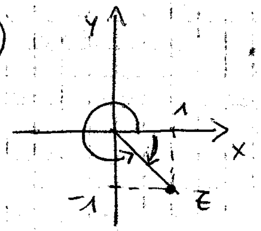
$-\frac{3}{4}\pi \in ]-\pi, \pi]$

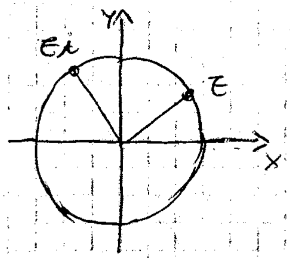
es

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

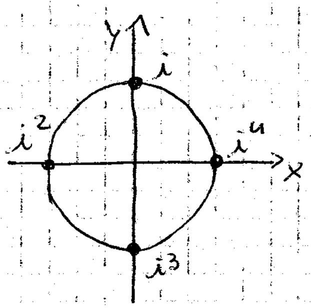
$w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$






$z \cdot i \to$ ruoto di $\frac{\pi}{2}$




$i \cdot i = i^2 = -1$

$i \cdot i \cdot i = i^3 = -i$

$i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4 = 1$

## Potenze in forma polare

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$z^3 = (x+iy)^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$z^n = (x+iy)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

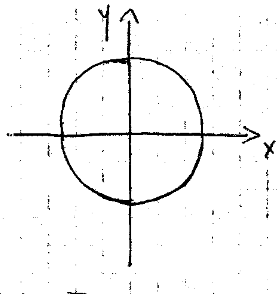
es.

$z = \sqrt{3} - i \qquad z^4 = ?$

$$z = \sqrt{3} - i \to \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$




$\theta = \frac{11}{6}\pi \in [0, 2\pi[$

$$\Rightarrow z = 2\left[\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right]$$

$$z^4 = 2^4\left[\cos\left(\frac{11}{6}\cdot 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\cdot 4\pi\right)\right] =$$

$$= 16\left[\cos\left(\frac{22}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{22}{3}\pi\right)\right]$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 376

prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

potenza n-esima

$$z^n = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right]$$

divisione, reciproco con $z$ in forma polare

- reciproco $\rightarrow$ dato $z \Rightarrow \frac{1}{z} = w$

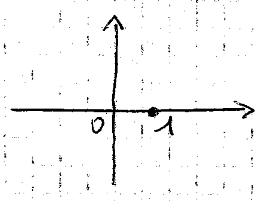
$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ dato $(z \neq 0)$

$w = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ incognita

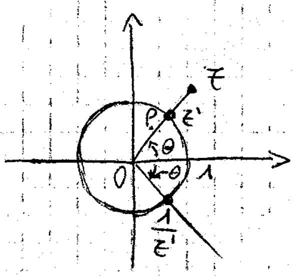
$z \cdot w = 1$

$$\rightarrow \rho r\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right] = 1(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho r = 1 \\ \theta + \alpha = 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$




$$\begin{cases} r = \frac{1}{\rho} \\ \alpha = -\theta + 2k\pi \; , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$




$\rho = 1 \rightarrow r = 1$

$\rho > 1 \rightarrow r < 1$

$\rho < 1 \rightarrow r > 1$

se $|z'| = 1 \rightarrow \frac{1}{z'} = \bar{z}'$

$z' \cdot \bar{z}' = |z'|^2 = 1$

- divisione $\rightarrow$ dati $z_1, z_2$ trovare $\frac{z_1}{z_2} = w$

$z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i \sin\theta_k)$

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 376

$\Rightarrow$ forma esponenziale di $z$:

dato $z$ in forma polare $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ è la sua forma esponenziale

**N.B.** $z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta + 2k\pi)}$ → ricordarsi la periodicità di $\theta$ !!!

$\rho e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho e^{i\theta} \cdot \rho e^{i2k\pi} = \rho e^{i\theta} \cdot 1 = \rho e^{i\theta}$

uguaglianza in forma esponenziale

$z_k = \rho_k e^{i\theta_k} \quad k = 1,2$

$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

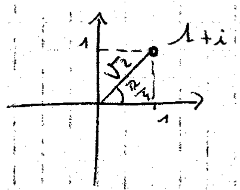
prodotti e potenze in forma esponenziale

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$= \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

es. $(1+i)^{127} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{127} = (\sqrt{2})^{127} e^{i\pi\frac{127}{4}}$




★ radice n-esima di numeri complessi

dato $z \in \mathbb{C}$, dato $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$

cercare $w$ tale che $w^n = z$

Ogni soluz. di qst equaz. si chiama radice n-esima di $z$

$z = \rho e^{i\theta}$ incognita $w = r e^{i\alpha}$

sostituisco nell'equaz. → $(r e^{i\alpha})^n = \rho e^{i\theta}$ → $r^n e^{i\alpha n} = \rho e^{i\theta}$

$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha - \theta = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \quad (\text{dato } \rho \geq 0) \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

# Relazioni & funzioni

- Relazione
- Funzione
- Immagini e controimmagini di elementi o di insiemi
- Funzioni limitate (inf, sup) su 1 certo insieme
- max, min, sup, inf di funzioni su 1 certo insieme
- f iniettive e suriettive
- f invertibili
- f inversa
- f monotona
- f composta

## Relazione

<u>def.</u> dati 2 insiemi $A, B$ si dice relazione tra $A$ e $B$ ogni sottoinsieme $R$ del prodotto cartesiano $A \times B$

$\Rightarrow R \subseteq A \times B$

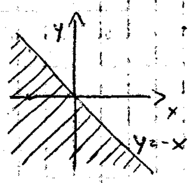
<u>es.</u> $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

relazioni possibili

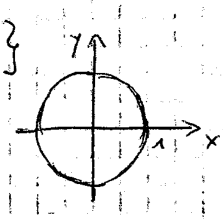
$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \to$ asse $y$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0\}$




pt. sotto la bisettrice del II e IV quadrante (retta esclusa)

$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

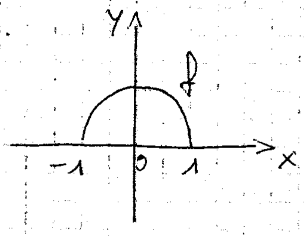



pt. della circonferenza canonica

01/10/08

Dominio di $f$ è il sottoinsieme di $A$ formato da tutti gli elementi $a$ per i quali esiste $b \in B$ tale che $(a,b) \in f$.

es.




$f$ è 1 funzione definita in $\mathbb{R}$ ($A$) a valori in $\mathbb{R}$ ($B$).

$\text{dom } f = [-1, 1]$

(è la proiez. sull'asse $x$ del grafico di $f$.)

Notazione: Se $f$ è 1 funzione di $A$ in $B$ si scrive

$$f : A \to B \iff f \subseteq A \times B$$

$$b = f(a) \iff (a,b) \in f.$$

$$\text{dom } f = \{ a \in A : \exists b \in B \;\; b = f(a) \}$$

$A = B = \mathbb{R} \to$ funzione a valore reale

$A = \mathbb{R}^2 \quad B = \mathbb{R} \to$ funzione di 2 variabili reali

$A = \mathbb{R}^3 \quad B = \mathbb{R} \to$ " " 3 " "

- es. $f(x) = \log x \quad A = B = \mathbb{R}$

  è 1 funzione? $\quad \text{dom } f = ?$

  sì xké la formula esclude il caso di + valori (o log nn esiste opp è definito in modo univoco)

$$\text{dom } f = \{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : y = \log x \} = ]0, +\infty[$$

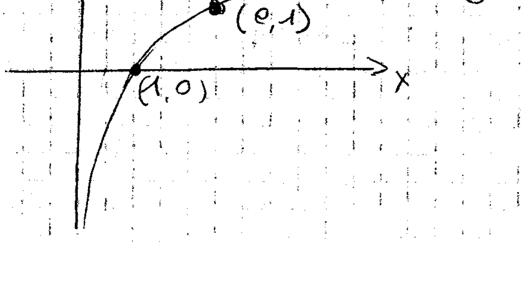
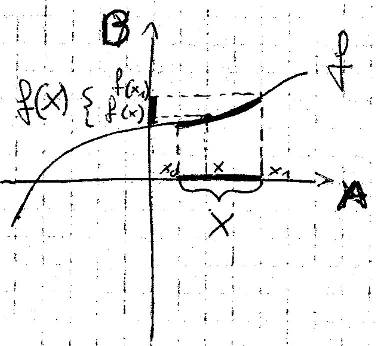


Immagine e controimmagine di sottoinsiemi

data $f\ A \to B$ $\quad X \subseteq A$

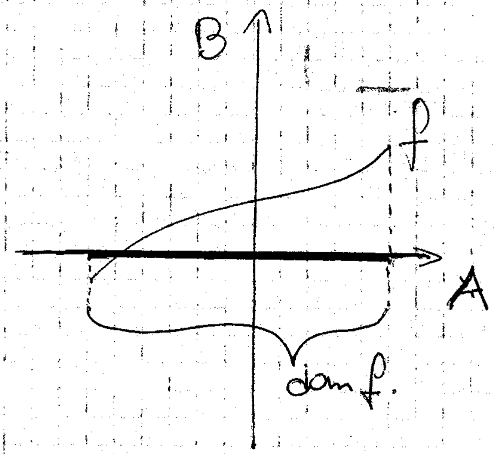
diciamo immagine di $X$ tramite $f$. il sottoinsieme di $B$ $f(X)$ formato da tutte le immagini di elementi di $X$




$$f(X) = \{ f(x) \in B : x \in X \}$$

più precisamente

$$f(X) = \{ f(x) \in B : x \in X \cap \operatorname{dom} f \}$$

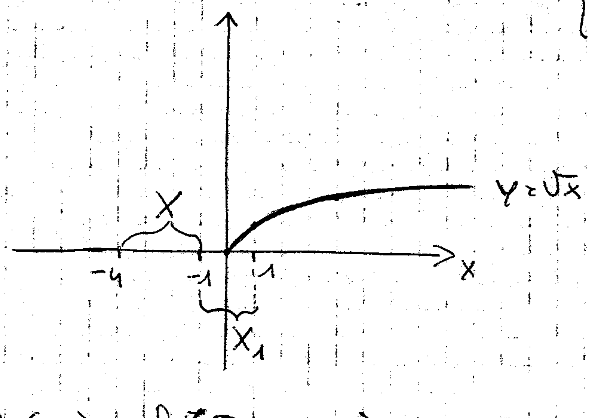



$f(x)$ può essere $\emptyset$, ad es qnd $X$ non interseca dom $f$.

es. $f(x) = \sqrt{x}$

$\operatorname{dom} f = [0, +\infty[$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x \end{cases}$$




$f(X) = f([-4, -1])$ $\qquad [-4, -1] \cap \operatorname{dom} f = \emptyset$

$f(X_1) = f([-1, 1])$ $\qquad [-1, 1] \cap \operatorname{dom} f = [0, 1]$

$\cancel{\iff 1 \le \sqrt{x} < 4}$

$\cancel{\iff \begin{cases} 1 \le \sqrt{x} \\ \sqrt{x} < 4 \end{cases}}$ ~~cercare controimmagini di insiemi significa risolvere sistemi di disequazioni o disequazioni~~

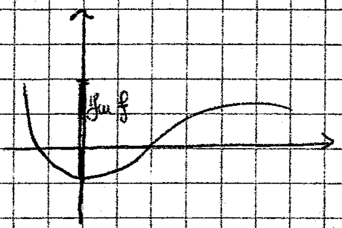
## Immagine di f

→ caso particolare di $f(x)$

Se $X = \text{dom} f$, $f(\text{dom} f)$ si chiama l'immagine di $f$ ed è indicato con $\text{Im} f$

È il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene tutte le possibili immagini di elementi del dominio

In $\text{Im} f$ ci sono tutti i valori possibili di $f$.




Geometricamente $\text{Im} f$ è la proiezione del grafico sull'asse y

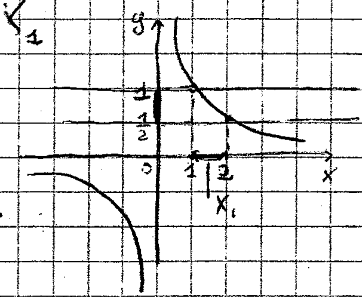
Es. $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{dom} f = \mathbb{R} \quad \text{Im} f = [-1, 1]$

**Def** dato $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato $X \subseteq \mathbb{R}$, $f$ si dice superiormente limitata su $X$ se $f(X)$ è [superiormente] limitato
(inf.)

Es. $f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $X_1 = [1, 2[$

$X_1$



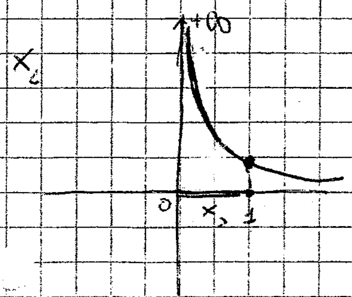

$f(X_1) = f([1, 2[)$

$= ]\frac{1}{2}, 1] \implies$ su $X_1$ è limitata

- $X_2 = ]0, 1[ \qquad f$ è limitata su $X_2$?

$f(X_2) = ]1, +\infty[ \implies f$ è sup. ill. MA inf. limitata su $]0, 1[$

$X_2$




23

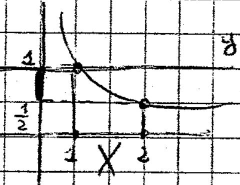
**Def** La funzione $f: D \to \mathbb{R}$ ha massimo $M$ (oppure minimo $m$, ha estremo superiore $S$, opp. estremo inf. $s$) su $X \subseteq \mathbb{R}$ se $f(X)$ ha massimo $M$ (oppure $m$, estremo sup $S$, estremo inf $s$)

**Es** $f(x) = \frac{1}{x}$

$X_1 = [1, 2[ \qquad f(X_1) = ]\frac{1}{2}, 1]$

$X_2 = ]0, 1[ \qquad f(X_2) = ]1, +\infty[$

Su $X_1$ $f$ ha massimo su $X_1 \Leftrightarrow f(X)$ ha massimo? Sì, $M = 1$




Notazione $M = \max_X f = \max_{x \in X} f(x)$

$m = \min_X f$

$S = \sup_X f$

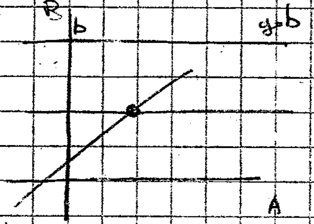
$s = \inf_X f$

$M$ è "assunto" per $x \in X$ almeno una volta

$x = 1$ è un punto di massimo per $f$ ✓

## FUNZIONI INIETTIVE E SURIETTIVE

• Iniettiva $f: A \to B$ iniettiva — Per ogni $b \in B$ esiste al più 1 elemento $a \in A$ che è controimmagine di $b$




Significato geometrico: $\forall b \in B$ il grafico di $f$ interseca la retta $y = b$ al più una volta

$(1)\ \begin{cases} y = b \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = b \ (2)$

Significato algebrico: $\forall b \in B$ il sistema (1) e l'equaz 2 hanno al + una soluz, non può capitare che $\exists\ x_1, x_2 \in A$ distinti tale che $f(x_1) = f(x_2)$

**Def** $f$ iniettiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ tale che $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \qquad x_1 \neq x_2$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Oss** → Se $f$ è iniettiva e suriettiva (cioè $f$ biettiva) allora se $f\ A \to B$ e dom $f = A$ allora:

1) per ogni $a \in A$ = dom $f \Rightarrow \exists!\ b = f(a)$

2) per ogni $b \in B \Rightarrow \exists!\ a \in A\ \ f(a) = b$

La 2) permette di definire una nuova funzione associata alla funzione $f$ detta funzione inversa di $f$, indicata col simbolo $f^{-1}$ perché sotto le nostre ipotesi $f^{-1}$ di $b$ è sempre formato da uno e un solo elemento

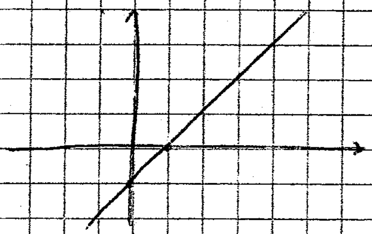
**Def** Data $f\ A \to B$ biettiva e con $A$ = dom $f$ si dice funzione inversa di $f$ la funzione $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}: B \to A$

$x \mapsto f^{-1}(x) = y \iff$

$\iff f(y) = x$

**Es** $y = f(x) = 2x - 1$

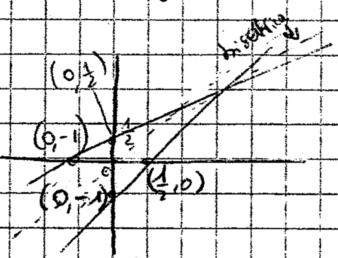


dom $f = \mathbb{R} = A$

im $f = \mathbb{R}$

$f$ è biettiva

→ Voglio costruire $f^{-1}$




$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$0 \to f(0) = -1$

$\frac{1}{2} \to f(\frac{1}{2}) = 0$

$f^{-1}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$-1 \mapsto 0$

$0 \mapsto \frac{1}{2}$

**Oss** $(x,y)$ appartiene al grafico di $f \implies (y,x)$ appartiene al grafico di $f^{-1}$

I grafici di $f$ e $f^{-1}$ devono essere simmetrici rispetto a $y = x$ (bisettrice)

→ Per calcolare la "formula" di $f^{-1}(x)$ uso la definizione $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$2y - 1 = x$

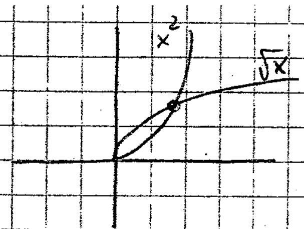
- $2y - 1 = x$

$2y = 1 + x$

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = f^{-1}(x)$

$g(x)=x^2$ , $x\in\mathbb{R}_+$

$g^{-1}(x)=\sqrt{x}$

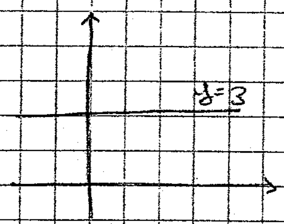



**Def** Dato $f: A\to B$ e $A'\subseteq A$ si dice restrizione di $f$ ad $A'$ la funzione $g: A'\to B$ tale che $\forall x\in A'$ $g(x)=f(x)$

Il simbolo che si usa è:

$g=f_{|A'}$ Es. $f(x)=x^2{}_{|\mathbb{R}_+}$

Es. $f(x)=3$ $\forall x\in\mathbb{R}$




$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Non si può rendere iniettiva a meno di restringere il dominio di un solo punto

$\Downarrow$

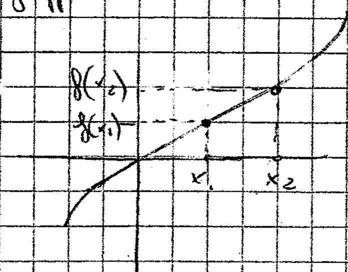
## FUNZIONI MONOTÒNE

Si tratta di funzioni che hanno un preciso comportamento rispetto alle disuguaglianze

① 1° gruppo: conservano le disuguaglianze

② 2° gruppo: le invertono

①




$x_1<x_2$

$f(x_1)<f(x_2)$ o al + $f(x_1)=f(x_2)$

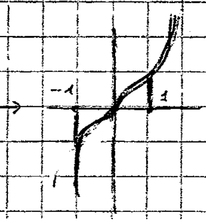
**Def** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è crescente $\iff \forall x_1,x_2\in \text{dom} f$, se $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

[ $f(x_1)<f(x_2)$ → strettamente crescente ]

$\boxed{\text{Oss}}$ se $f$ è strettam. crescente allora è iniettiva (immag. sono $\neq$)

Es. • $f(x)=2x-1$ retta

• $f(x)=x^n$ n dispari →



# 1 FUNZIONE COMPOSTA

Date 2 funzioni f g, comporle significa applicarle in successione una dopo l'altra. Ad esempio prima f e poi g. (opp il contrario)

Consideriamo:

$f: A \to B$ $\quad A = \text{dom} f \quad B = \text{im} f$

$g: C \to D$ $\quad C = \text{dom}\, g \quad D = \text{im}\, g$

$$A \xrightarrow{f} B \cap C \xrightarrow{g} D$$

$$\underbrace{x \to y = f(x) \longrightarrow g(y)}_{g \circ f} = g(f(x))$$

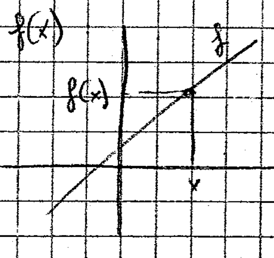
$B \cap C \neq \emptyset$

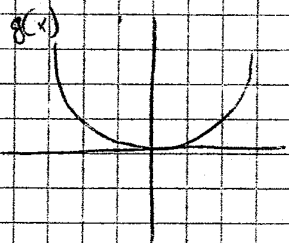
Condizione x poter applicare g dopo f: $\{x : f(x) \in \text{dom}\, g\} = f^{-1}(\text{dom}\, g)$

**Def** Si dice funzione composta di f e g la funzione $(g \circ f)$ definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\quad \forall x \in f^{-1}(\text{dom}\, g)$

**Es 1**

| | dom | Im |
|---|---|---|
| $f(x) = x+1$ | $A = \mathbb{R}$ | $B = \mathbb{R}$ |
| $g(x) = x^2$ | $C = \mathbb{R}$ | $D = [0, +\infty[$ |




$B \cap C = \mathbb{R}$
$= A$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x+1 \in \text{dom}\, g = \mathbb{R}$ dc posso semp fare la composiz.

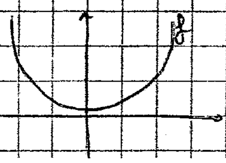
$$\to \quad \overset{A}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{B}{\mathbb{R}} = \overset{C}{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

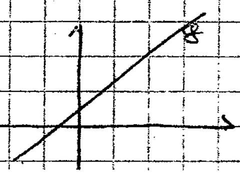
$$\underbrace{x \xrightarrow{f} f(x) = x+1 = y \longrightarrow y^2 = (x+1)^2}_{g \circ f}$$

$(g \circ f)(x) = (x+1)^2$

**Es 2**

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $A = \mathbb{R}$ | $B = [0, +\infty[$ |
| $g(x) = x+1$ | $C = \mathbb{R}$ | $D = \mathbb{R}$ |




$B \subseteq C$

$A \xrightarrow{f} B \subseteq C \xrightarrow{g} D$

$x \mapsto f(x) = y \mapsto$

$\{x : x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = A$

03/10/08

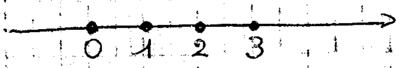
# Successioni

Le successioni sono le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

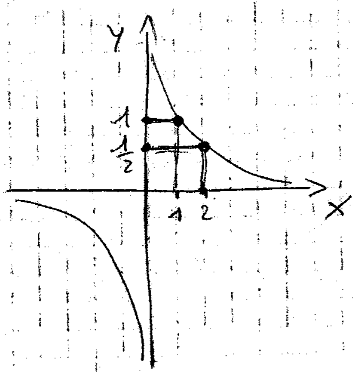
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) = f_n = a_n$$

es. $f(n) = \frac{1}{n}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$


numeri staccati

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$




$a_1 = 1$
$a_2 = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{1}{3}$
...

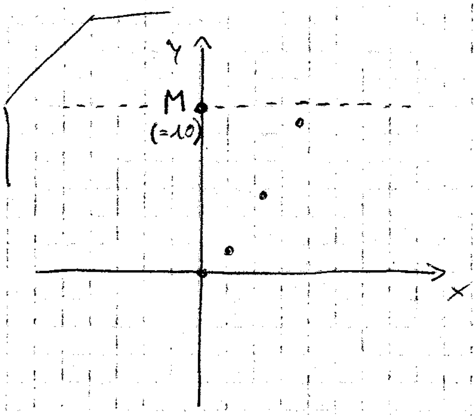
prendo 1 tratto del dominio $[a, b]$
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
$\mathbb{N} \cap [a,b]$ è sempre 1 insieme finito

} nn è così invece con i numeri reali

In generale il dominio di 1 successione non è superiormente limitato. Fissato cmq $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N} \cap [a, +\infty[$ nn è limitato. Se voglio conoscere il comportamento di $a_n$ per tutti gli $n > a$, il metodo del semplice "calcolo" non è sufficiente

$f(n) = \frac{1}{n} \to$ decrescente (strettamente decrescente)
i punti si avvicinano all'asse x

Definiamo il comportamento limite di $a_n$ quando n tende all'infinito cioè quando $n > a$ $(a \in \mathbb{R})$. Chiamo $l = 0$ il (comportamento) limite.




Se prendo $M_1 > M$ quelli che prima erano $< M$ ora lo sono ancora, poi ce n'è altri $< M_1$, poi però ce n'è 1 $\geq M_1$ e tutti i successivi sono $> M_1$

Per gli $n$ successivi a $\bar{n}$ $b_n > M$

In qst caso si dice che la successione $b_n$ tende a $+\infty$ qnd $n \to +\infty$

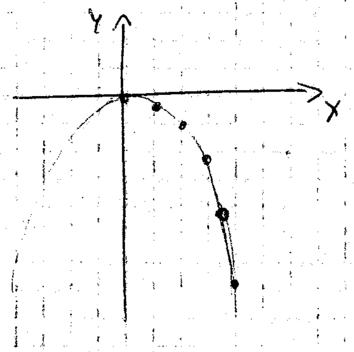
$$\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$$

in simboli $\to$ def $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty \iff$

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \quad b_n > M$$

Def. si dice che $a_n$ **converge** qnd ha limite finito $\ell \in \mathbb{R}$, si dice che $a_n$ **diverge** qnd il limite nn è finito

es $a_n = -n^2$




$a_n$ strettam. decrescente

$\underbrace{a_n \text{ tende a } -\infty}$

cmq fissato 1 livello sotto lo zero, esiste un numero $\bar{n}$ tale che, per tutti gli $n$ successivi, i valori assunti in corrispondenza della successione sono inferiori al livello $M$ fissato. In qst caso diciamo che $a_n$ tende a $-\infty$

def. $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

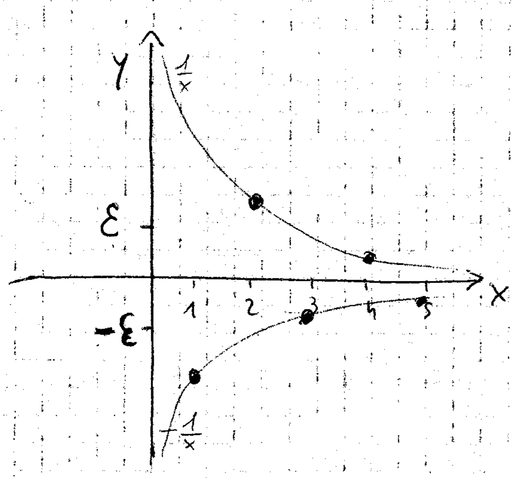
$\iff \forall M < 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ (tale che) $\forall n > \bar{n} \quad a_n < M$

Studiare il comportamento di $c_n$ per n che tende a $+\infty$

La successione non ha limite (è indeterminata, è oscillante)

- $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$d_1 = -1$
$d_2 = \frac{1}{2}$
$d_3 = -\frac{1}{3}$
$d_4 = \frac{1}{4}$




$\ell = 0$
$\varepsilon > 0$

In qst caso è vero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$

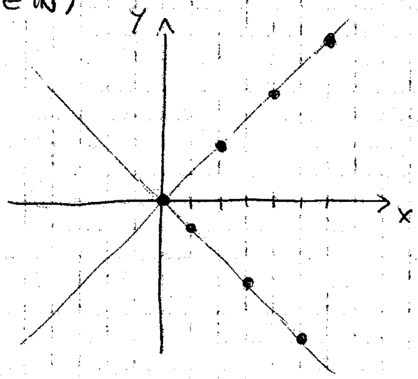
$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\underbrace{-\varepsilon < a_n - \ell}_{\text{sotto}} \quad \underbrace{a_n - \ell < \varepsilon}_{\text{sopra}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

In qst caso $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$

- $e_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$

$e_0 = 1 \cdot n$
$e_1 = -1 \cdot n$
$e_2 = 1 \cdot n$




successione indeterminata (non c'è 1 limite)

[Sottosuccessione → stud. o tutti gli n pari o tutti i dispari]

30

Per $n > \bar{n}$ $\quad a_n > a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$

$$S + \varepsilon > S > a_n > a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$$

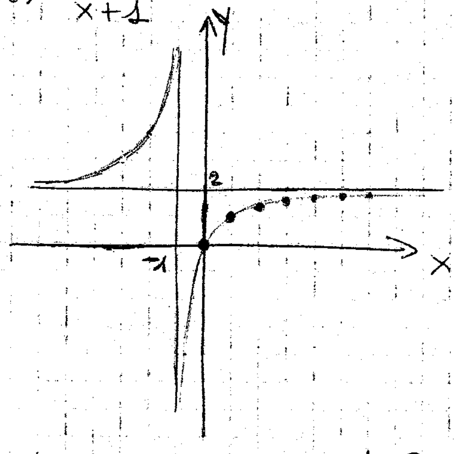
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n}$$

$$\boxed{\forall n > \bar{n} \quad |a_n - S| < \varepsilon}$$ limite

Esercizi

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+1}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$



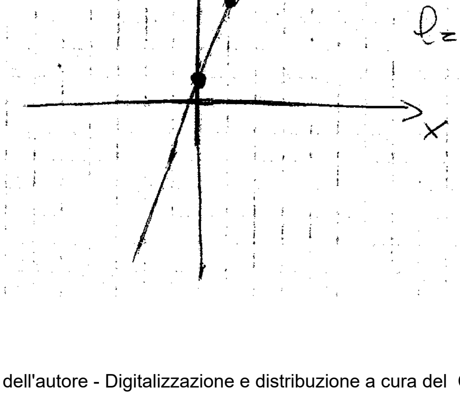

$l = 2$

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

$$\left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| < \varepsilon \qquad \left|-\frac{2}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \text{vero!}$$

- $\lim_{n \to +\infty} (3n + 1)$

$f(x) = 3x + 1$




$l = +\infty \qquad a_n > M \qquad M > 0$

Rivediamo gli es:

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n>\bar{n} \ \ |a_n - \ell| < \varepsilon$

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M>0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n>\bar{n} \ \ a_n > M$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M<0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n>\bar{n} \ \ a_n < M$

Teorema I: le successioni monotone nn sono mai indeterminate, cioè hanno sempre limite

II se $a_n$ è crescente e superiormente limitata

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \ell = \sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\text{i valori della successione (im } f)}$

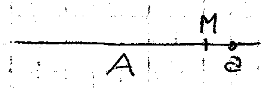
III se $a_n$ è **crescente** e superiormente illimitata

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

<u>dim</u> le ipotesi:

a) $a_n$ crescente $\iff \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \leq a_{n+1}$

b) $a_n$ superiorm. illimitata $\iff A = \{a_n \ n \in \mathbb{N}\}$ nn ha maggioranti




b) $\iff \forall M \in \mathbb{R}$ M non è maggiorante di A. $(M>0)$

in particolare $\forall M>0 \ \exists a \in A \ \ a > M$

$\Updownarrow$

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \ a = a_{\bar{n}}$

quindi $\forall M>0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_{\bar{n}} > M$

Sfrutto la monotonia di $a_n$ e osservo che

$\forall n \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \ \ a_n \geq a_{\bar{n}} > M$

quindi: $\forall M>0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ \ n>\bar{n} \ \ a_n > M$

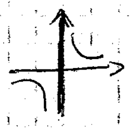
cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (osservaz. $\sup A = +\infty$)

$\downarrow$

$\lim = \sup A$

# Limiti di funzioni

Cominciamo a considerare esempi



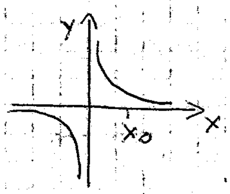
$f(x) = \frac{1}{x}$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = x^2$ dom $g = \mathbb{R}$

Qui ha senso stud. l'andamento per $x > \bar{x}$, ma anke per $a < x < b$ perché anke tra a e b ci possono essere infiniti elementi del dominio

Per "limite" si intende lo studio di $f(x)$ per gli $x$ "vicini" ad 1 particolare $x_0$ fissato

es. $f(x) = \frac{1}{x}$




casi possibili:

$x \to +\infty$ $x > \bar{x}$

$x \to -\infty$ $x < \bar{x}$

$x$ ~~$\to x_0$~~$\in \mathbb{R}$ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$x \neq x_0$ $\delta > 0$

$x_0$ può appartenere al dominio oppure no

casi possibili per $f(x)$ e $\ell$:

$\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$, $\nexists \ell$

vogliamo dare 1 definizione unitaria di limite che includa tutti i casi

Definizioni

- intorno di $x_0$, di $+\infty$, di $-\infty$
- pti di accumulazione del dominio
- pti isolati

# Definizione di limite di $y = f(x)$

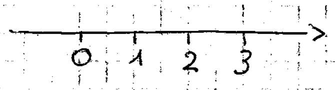
Caso generale:

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$
$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Supponiamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ sia 1 pt di accumulaz. di $A = \text{dom} f$

es. $x_0 = +\infty$
$A = \mathbb{N}$

$x_0$ è pt di accumulaz. per A? SI

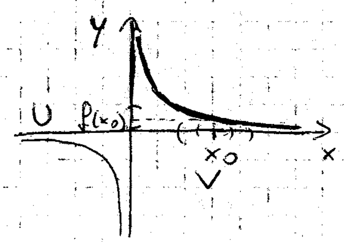


$I_a(+\infty) = ]a, +\infty[$

$\forall a \in \mathbb{R}$ esiste almeno 1 $n \in \mathbb{N}$ $n > a$ $(n \in I_a(+\infty))$? SI

Nella def. indichiamo gli intorni di $x_0$ e di $\ell$ con lettere U, V, W, ... (senza specificare il raggio)

Def. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$ per ogni intorno U di $\ell$ esiste almeno 1 intorno V di $x_0$ tale che se $x \in V$ allora $f(x) \in U$ ($x \in \text{dom} f$, $x \neq x_0$)




$f(x) = \frac{1}{x}$
$x_0 = 3 \to f(x_0) = \frac{1}{3}$
U = intorno di $f(x_0)$
V = intorno di $x_0$
$\ell = \frac{1}{3}$

Def. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\iff \forall U$ intorno di $\ell$
$\exists V$ intorno di $x_0$ :
$\forall x \in V \cap \text{dom}, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$

CASI PARTICOLARI

- se $x_0, \ell \in \mathbb{R}$ allora U, V sono del tipo $] \; , \; [$

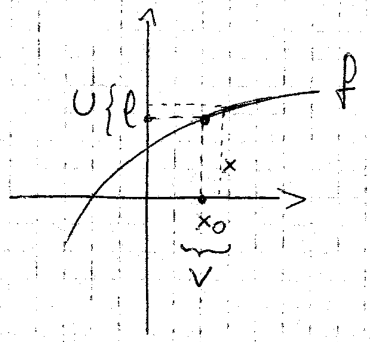
  $U = I_\varepsilon(\ell) = ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

  $V = I_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

# Def. di limite

9/10/08

Dati $f$ funzione, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pt di accumulaz. per dom $f$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se $\forall U$ intorno di $\ell$ $\exists V$ intorno di $x_0$ : $\forall x \in V \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$



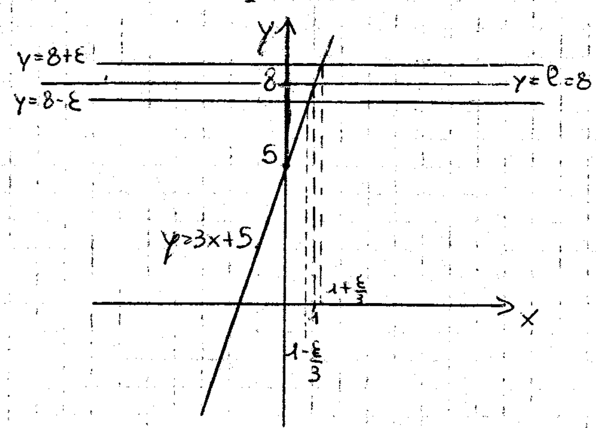

Se $x_0$ (o $\ell$) $\in \mathbb{R}$ U,V $I_R(x_0) = ]x_0 - R, x_0 + R[$

Se $x_0$ (o $\ell$) $\in \{-\infty, +\infty\}$, U,V $I_a(+\infty) = ]a, +\infty[$

$I_b(-\infty) = ]-\infty, b[$

- caso $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$ $U = I_\varepsilon(\ell)$, $V = I_\delta(x_0)$

es. $\lim_{x \to 1} (3x + 5) = \ell$ ?




presumo che $\ell = 8$

faccio la verifica

$\ell = 8 \in \mathbb{R}$

$x_0 = 1 \in \mathbb{R}$

fisso $U = I_\varepsilon(8) = ]8-\varepsilon, 8+\varepsilon[$

impongo che sia

$3x + 5 \in U$

$8 - \varepsilon < 3x + 5 < 8 + \varepsilon$

$3 - \varepsilon < 3x < 3 + \varepsilon$

$\frac{3-\varepsilon}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{3+\varepsilon}{3}$

$$\underbrace{1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3}}_{\text{è 1 intorno di 1}} \quad (\varepsilon > 0)$$

$I_{\varepsilon/3}(1)$ $\delta = \varepsilon/3$

## Limite dx e sx.

Introduciamo la <u>def.</u> di intorno dx e sx.
Considero $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>Def.</u> $I_R^+(x_0) = ]x_0, x_0 + R[$ intorno dx

$I_R^-(x_0) = ]x_0 - R, x_0[$ intorno sx

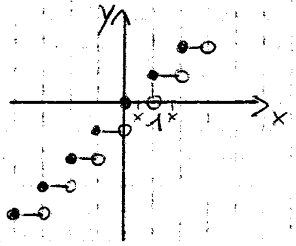
<u>Def</u> Si dice che $f$ tende a $\ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) per $x$ che tende a $x_0$ da destra

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

se $\forall U$ intorno di $\ell$ $\exists V$ intorno dx di $x_0$ tale che
$\forall x \in V \cap \text{dom} f \underset{(x \neq x_0)}{} \Rightarrow f(x) \in U$

(idem x def. limite sx)

<u>es.</u> $f(x) = [x]$ $\qquad \lim_{x \to 1} [x]$ $\qquad [x] = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } 1 \leq x < 2 \end{cases}$




$\nexists \lim_{x \to 1} [x]$

$\exists \lim_{x \to 1^-} [x] = 0$

$\exists \lim_{x \to 1^+} [x] = 1$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 376

Sono continue in tutti i pt del loro dominio

- le funzioni razionali, cioè i quozienti di polinomi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\arcsin x$, $\arccos x$, $\log_a x$
- $x^a$ $a \in \mathbb{R}$
- $\tan x$, $\cot x$ e funz. inverse

## Discontinuità in $x_0$

Si può avere 1 discontinuità qnd

$x_0 \in \text{dom } f$

$x_0$ è di acc.

ma $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nn è soddisfatta!

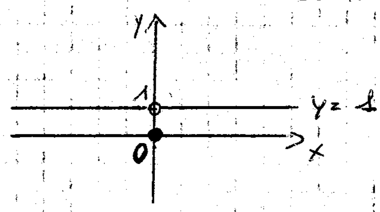
**I** Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, ma $\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = l$

si dice che in $x_0$ c'è 1 discontinuità di prima specie

es. $f(x) = [x]$ $x_0 \in \mathbb{Z}$

significato geometrico: il grafico ha 1 "salto" in $x_0$ di ampiezza finita

es. $f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$




$$\left.\begin{aligned} &\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \\ &f(0) \neq 1 \end{aligned}\right\} \text{discontinuità eliminabile}$$

def. $f$ ha in $x_0$ 1 discontinuità eliminabile se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ ma è diverso da $f(x_0)$

**II** Def. in tutti gli altri casi la discontinuità si dice di seconda specie

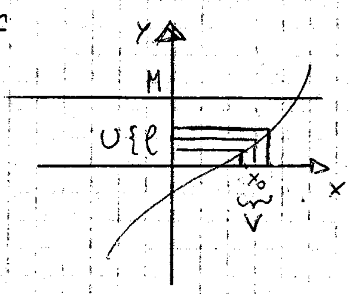


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 376

## Proprietà di limitatezza locale.

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è localmente limitata in $x_0$, cioè esiste 1 intorno $V$ di $x_0$ e 1 numero reale $M > 0$ tali che $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$

dim




per def. di lim:

fisso $U$ intorno di $\ell$ $U = ]\ell-1, \ell+1[$

$\Rightarrow \exists V$ intorno di $x_0$ tale che $x \neq x_0$

$x \in V \quad f(x) \in U$

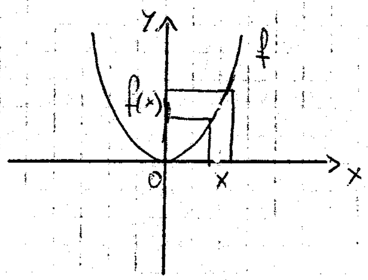
$\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$

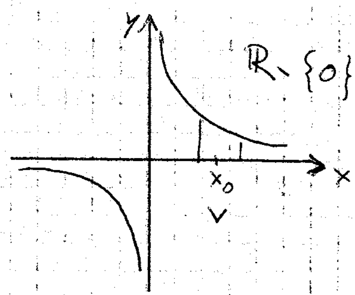
$m \leq f(x) \leq M$ $\left[\begin{array}{l} m = \text{minorante} \\ M = \text{maggiorante} \end{array}\right]$

10/10/08

## Proprietà di limitatezza locale per funzioni continue.

Se $f$ è continua in $x_0 \in \text{dom} f \Rightarrow$ esiste 1 intorno $V$ di $x_0$ in cui $f$ è limitata, cioè $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ : $m < f(m) < M \quad \forall x \in V$




in generale l'intorno $V$ dipende dal pt $x_0$

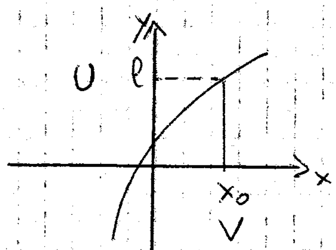
## Teorema della permanenza del segno.

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con $\ell > 0$ (finito o infinito) $\Rightarrow$ esiste 1 intorno $V$ di $x_0$ : $f(x) > 0 \quad \forall x \in V,\ x \neq x_0$

es. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5 + 2x^4 - 1}{2x^5 - 3x + 3} = \dfrac{3}{2} > 0$

Dal segno di $\ell = \frac{3}{2} > 0$ ricavo che $\dfrac{3x^5 + 2x^4 - 1}{2x^5 - 3x + 3} > 0 \quad \forall x > \overline{x}$

dim. supponiamo $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell = +\infty$ per esercizio)




per def. di lim, fissato 1 intorno $U$ di $\ell$

$\exists$ 1 intorno $V$ di $x_0$ : $\forall x \in V$, $x \neq x_0$

$f(x) \in U$ - $U$ è del tipo $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Se scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell - \varepsilon > 0$

per gli $x \in V, x \neq x_0$ segue che $\ell > \varepsilon$,

$0 < \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

Teorema della permanenza del segno (x caso) con $\ell = +\infty$

$\ell = +\infty$, per def. di limite, fissato 1 intorno $U$ di $\ell$

$\exists$ 1 intorno $V$ di $x_0$ : $\forall x \in V$, $x \neq x_0$ $\quad f(x) \in U$

$\varepsilon > 0 \rightarrow U = ]+\infty - \varepsilon, +\infty[$

$\ell - \varepsilon = +\infty - \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \ell > \varepsilon$

$$0 < +\infty - \varepsilon < f(x) < +\infty$$

**Teorema del confronto.**

Date $f, g$ so che, per es. $f \leq g$, so che hanno limiti $\underbrace{\ell, m}$
per $x \to x_0 \Rightarrow \ell \leq m$

$\ell, m$ finiti !!!

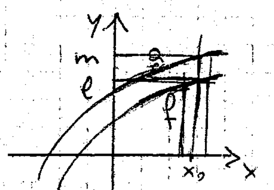
**Teorema 1**

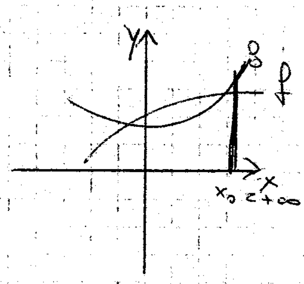
Supponiamo date $f, g$ $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

ip 1) $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in V$, $x \neq x_0$ con $V$ intorno di $x_0$

ip 2) esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ allora $\ell \leq m$




oss. se scriviamo l'enunciato precedente per la funzione ausiliaria $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ in $V$

per ip. 1) se esiste $\lim_{x \to x_0} h(x) \Rightarrow$ si può applicare il corollario di prima - Esiste il $\lim h(x)$? quanto vale?

I teoremi algebrici garantiscono che

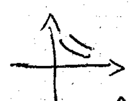
$\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x)$

**Teorema 1 (caso infinito)**

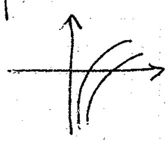
Supponiamo dati $f, g$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che

1) $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in V$, $x \neq x_0$ con $V$ intorno di $x_0$

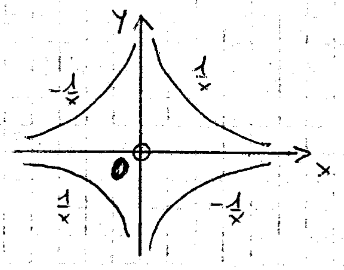
$\Rightarrow$ a) se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$



$\Rightarrow$ b) se $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



es $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$



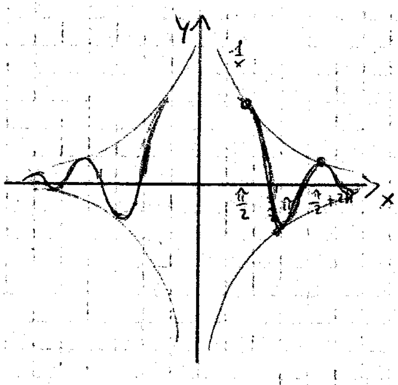

$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$

$g(x) = \frac{\sin x}{x}$

$g(-x) = \frac{\sin(-x)}{x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = g(x)$ funzione pari

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$




$\frac{\sin x}{x}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underset{f}{-\frac{1}{x}}} \leq \underset{g}{\frac{\sin x}{x}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underset{h}{\frac{1}{x}}}$$

## Operazioni algebriche sui limiti.

Considerimo le operazioni

- somma $f+g$
- prodotto $f \cdot g$
- reciproco $1/g$
- quoziente $f/g$

Supponiamo date $f, g$ tali che esistano

$\lim_{x \to x_0} f = \ell \quad \lim_{x \to x_0} g = m$

### Teorema 1 (caso finito)

Se $\ell, m \in \mathbb{R}$ allora

$\lim_{x \to x_0} (f+g) = \ell + m$

$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g) = \ell \cdot m$

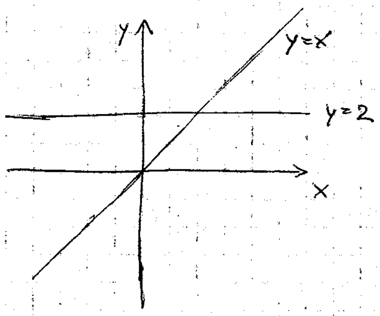
$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{m}$ se $m \neq 0$

$\lim_{x \to x_0} f/g = \ell/m$ se $m \neq 0$

## Teorema 1 (caso infinito)

es. $\lim_{x \to +\infty} (2+x)$

$l = 2 \qquad m = +\infty$




Introduciamo la convenzione seguente sulle "operazioni" in $\mathbb{R}$

$+\infty + s = +\infty \qquad \forall s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$-\infty + s = -\infty \qquad \forall s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

la situaz. $\infty - \infty$ si chiama "forma indeterminata",

cioè non ci sono teoremi per il $\lim_{x \to x_0} (f+g)$, qnd

$l = +\infty$, $m = -\infty$ (o viceversa);

qst perché ci sono esempi con risultati differenti: $+\infty$, $-\infty$, finito

es.

1) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) = +\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - x) = -\infty$

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

per casa $\boxed{2}$ $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1-x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} = +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - x) \dfrac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt{x+1} + x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1} + x} = -\infty$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 376

# Forme indeterminate

$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

caso $0 \cdot \infty$

nn ci sono teoremi perché si possono presentare situazioni con limite di tipo diverso

es.

1) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = +\infty$

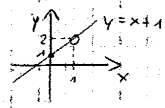
2) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2+1}{x^2} = 5 = \ell \in \mathbb{R}$

caso $\frac{0}{0}$

es.

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$




2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2+x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot x}{x^2(1+x)} = 0$

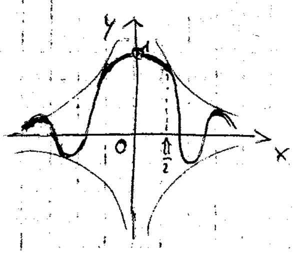
3) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x^3}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^2 \cdot x} = \pm\infty \rightarrow \lim$ nn esiste

4) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x^3}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1+x)}{x^2 \cdot x^2} = +\infty$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

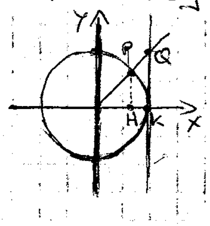
$h(x) = \frac{\sin x}{x}$

$h(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$ funzione pari




Studio $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$

fisso $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$




$\overline{PH} = \sin x$

$\overline{QK} = \tan x$

$\overline{PH} \leq x \leq \overline{QK}$

$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\sin x}{x} \leq 1$

→



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 376

## Applicazioni ai limiti notevoli:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

16/10/08

## Limite di gof

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

a) se $\ell \in \mathbb{R}$ e se $g$ è continua in $\ell$

oppure

b) se $\ell \in \{\pm\infty\}$ ed esiste $\lim_{y \to \ell} g(y)$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

$y = f(x)$

es. di applicazioni:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

potenza con base reale ed esponente reale

$$a^b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

noti: $e^x$, $\log x$

$(x \in \mathbb{R})$ $(x > 0)$

$$a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b \log a}$$

definiamo

$$a^b = e^{b \log a} \quad \forall a > 0, \ \forall b \in \mathbb{R}$$

se $a = 0$ $0^b = 0$ $\forall b > 0$

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

$\mathrm{dom}\, h = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g, f(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g, f(x) = 0, g(x) > 0\}$

## Limiti notevoli

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2 = e^2$

$y = \frac{x}{2} \to +\infty$

$l = +\infty$

$= \lim_{\varepsilon \to e} \varepsilon^2 = e^2$

$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = f(y) = \varepsilon \to e = \ell$

$g(\varepsilon) = \varepsilon^2$ continua in $e$? si

(b)

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad a \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x \to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$g(y) = \log y \quad y = f(x) \quad e = \ell$

$= \lim_{y \to e} \log y = \log e = 1$

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \qquad a \neq 1 \quad a > 0$

$= \lim_{x \to 0} \log_a \left[\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e}\right] = \log_a e$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\underbrace{\left[\frac{\ln(1+y)}{y}\right]}_{1}} = 1$

$e^x - 1 = y \qquad x = \ln(1+y)$

- $\lim_{x \to 0} \frac{(a^x - 1)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\underbrace{\left[\frac{\log_a(1+y)}{y}\right]}_{\log_a e}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$

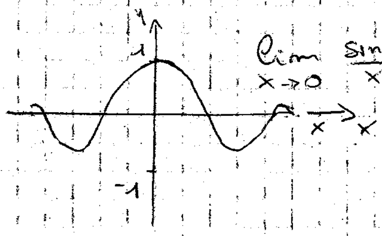
$a^x - 1 = y \qquad x = \log_a(1+y)$

## Confronto locale di 2 funzioni

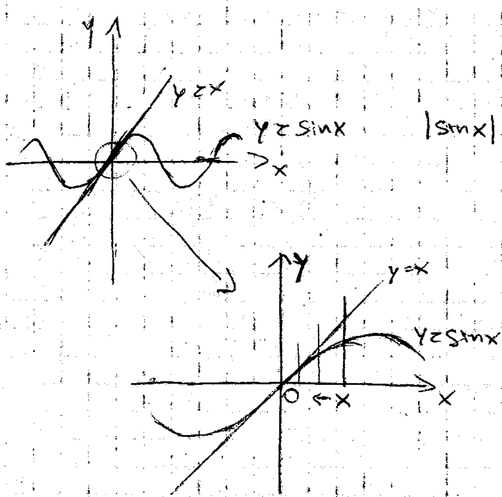
per $x \to x_0$

date $f, g$ definite in $V \setminus \{x_0\}$ ($V$ intorno di $x_0$), supponiamo definito anche $\frac{f}{g}$ in $V \setminus \{x_0\}$

<u>es.</u> $\frac{\sin x}{x} = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad x = 0$, $x \to 0$, $x \in V \setminus \{x_0\}$




$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$




$|\sin x| \leq |x|$

$\underbrace{\frac{\sin x}{x} \to 1}$ le funzioni sono quasi uguali tra loro

<u>def</u> date $f, g$ in $V \setminus \{x_0\}$ tali che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Vari casi:

1) se $\ell \in \mathbb{R}$ si dice che $\underbrace{f = O_{x \to x_0}(g)}$

$f$ e' "o grande" di $g$ per $x \to x_0$

$f$ e' dominata da $g$ per $x \to x_0$

2) se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che $\underbrace{f \underset{x \to x_0}{\asymp} g}$

$f$ e' equigrande rispetto a $g$ per $x \to x_0$

$f$ e $g$ hanno lo stesso ordine di grandezza per $x \to x_0$

3) se $\ell = 1$ si dice che $\underbrace{f \underset{x \to x_0}{\sim} g}$

$f$ equivale a $g$ per $x \to x_0$

4) se $\ell = 0$ si dice che $\underbrace{f = o_{x \to x_0}(g)}$

$f$ e' "o piccolo" di $g$ per $x \to x_0$

$f$ e' trascurabile rispetto a $g$ per $x \to x_0$

Se invece $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora $f$ e $g$ non sono confrontabili per $x \to x_0$

111