NUMERO : 81

DATA : 18/04/2011

# A P P U N T I

STUDENTE : Pignato

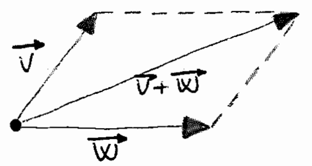
MATERIA : Geometria
Prof. Corgnier

• **VETTORI** nel piano $\vec{v} = (\alpha, \beta)$

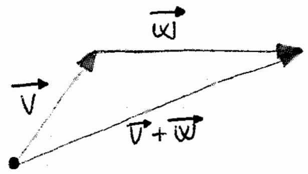
Sono segmenti orientati caratterizzati da:
- MODULO (lunghezza del segmento)
- DIREZIONE
- VERSO
- PUNTO DI APPLICAZIONE (vettore applicato)

OPERAZIONI tra VETTORI (o VETTORI-NUMERI)

1) **SOMMA**




metodo del PARALLELOGRAMMA




metodo PUNTA - CODA

PROPRIETÀ

- INVARIANTIVA $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- ASSOCIATIVA $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z})$

2) **PRODOTTO SCALARE** vettore - numero

$$a \cdot \vec{v} \begin{cases} a > 0 & \text{direzione e verso uguali, modulo moltiplicato per } a \\ a < 0 & \text{stessa direzione, verso opposto, modulo moltiplicato per } |a| \end{cases}$$

se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli:

$$a = \pm \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$$

$\vec{v} = a \cdot \vec{w}$ o $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$

sempre — solo se $\vec{v} \neq \vec{0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 122

• **VETTORI** nello spazio $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$|\vec{v}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ **MODULO di $\vec{v}$**

1) **PRODOTTO VETTORIALE** (nello spazio)

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{cases} \text{modulo} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \text{direzione } \perp \text{ a } \vec{v} \text{ e a } \vec{w} \\ \text{verso (regola della mano destra) segue il dito medio} \end{cases}$$

PROPRIETÀ

- $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{w} \wedge \vec{v}$
  $(= -\vec{w} \wedge \vec{v})$

- $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ DISTRIBUTIVA

Quindi, dati

$\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\vec{w} = (a, b, c)$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (\beta c - \gamma b, \gamma a - \alpha c, \alpha b - \beta a)$$

SCHEMA per ottenerla semplicemente

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k}$

$\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$

$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

<u>es.</u>

$\vec{v} = (1, 2, 3)$

$\vec{w} = (-1, 3, 2)$

$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w} = (-5, -5, 5)$

$m$ = equazioni iniziali
$n$ = numero incognite
$m_s$ = equazioni "sopravvissute"

$n - m_s$ = incognite libere

- REGOLA per la RIDUZIONE

$$E_2 \to E_2 - \frac{b}{a} E_1$$

- Nel sistema

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x-y+2z=1 \\ x+y=-1 \\ -y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} m=4 \\ n=3 \end{matrix}$$

è utile raggruppare i coefficenti delle incognite e i termini noti in una tabella

$$A/B \quad \begin{bmatrix} x & y & z & | & \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE

4 righe e 4 colonne
R

- MATRICE RIDOTTA

Se ogni riga non nulla contiene un elemento non nullo sotto al quale ci sono tutti 0

Anche alle matrici si applica la RIDUZIONE: $R_2 \to R_2 - \frac{b}{a} R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

① $\underline{u} + \underline{v} = 2\underline{j} + 5\underline{k}$

② $\underline{u} - \underline{v} = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 1\underline{k}$

③ $|\underline{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{14}$

④ $|\underline{v}| = \sqrt{5}$

⑤ $\underline{u} \cdot \underline{v} = -1 + 0 + 6 = 5$

⑥ $$\cos \hat{uv} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

7) $\underline{u} = (1, 2, 3)$ $\qquad \underline{u} \wedge \underline{v} = (4, -5, 2)$

$\underline{v} = (-1, 0, 2)$

es. 3 Dato $\underline{v} = 1\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ trovare:

1) $\text{vers}(\underline{v})$

2) i vettori // a $\underline{v}$

3) i vettori // a $\underline{v}$ con modulo 3

① $$\text{vers}(\underline{v}) = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

② $\underline{v} \longrightarrow t\underline{v} \quad t \in \mathbb{R} \qquad t\underline{v} = (t, 2t, -t)$

③ $|t\underline{v}| = 3$

$|t\underline{v}| = |t| \cdot |\underline{v}| = |t| \cdot \sqrt{6} \longrightarrow |t| \cdot \sqrt{6} = 3 \qquad |t| = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

3) i vettori // a $\underline{v}$ la cui proiezione ⊥ su $\underline{u}$ ha modulo 2

① detta r la retta su cui giace

$$|\underline{u}_r| = |\underline{u} \cdot \text{vers}(\underline{v})|$$

PROIEZIONE di un VETTORE su di un altro

$$\text{vers}(\underline{v}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \underline{u} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

② $\underline{u}_r = |\underline{u} \cdot \text{vers}(\underline{v})| \cdot \text{vers}(\underline{v})$

$$\underline{u}_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

③ $t\underline{v} = (t, t, -t)$

$$|t\underline{v}_r| = |t\underline{v} \cdot \text{vers}(\underline{u})| \qquad \text{vers}(\underline{u}) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\longrightarrow t\underline{v} \cdot \text{vers}(\underline{u}) = \frac{2}{\sqrt{6}}t + \cancel{\frac{1}{\sqrt{6}}t} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{6}}t} \qquad |t\underline{v} \cdot \text{vers}(\underline{u})| = \left|\frac{2}{\sqrt{6}}t\right|$$

$$\longrightarrow \left|\frac{2}{\sqrt{6}}t\right| = 2 \qquad |t| = \sqrt{6} \qquad t = \pm\sqrt{6}$$

es. 7 Trovare i vettori complanari

con la coppia $\underline{u} = (1, -1, 0)$

1) $\underline{v} = (1, 1, 0)$

e con la coppia $\underline{u}' = (1, 1, 1)$

2) $\underline{v}' = (1, -1, 0)$

$\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$

un vettore $\underline{a}$ è complanare ad altri due vettori se $\underline{a} \cdot (\underline{u} \wedge \underline{v}) = 0$

- OPERAZIONI (TRASFORMAZIONI) nei sistemi

1) $R_2 \rightarrow R_2 + aR_1$

2) $R_1 \leftrightarrow R_2$

3) $R_1 \rightarrow aR_1 \qquad a \neq 0$

- SISTEMI OMOGENEI

Quando, in tutte le equazioni, il termine noto è $= 0$.
In questo caso il sistema ha sempre soluzioni: una è di sicuro la SOLUZIONE NULLA (BANALE)

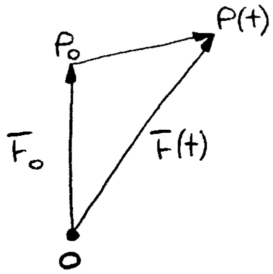
$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Quando esistono soluzioni non banale?

Il numero di incognite calcolate è pari al numero di righe non nulle nella matrice ridotta

$m = n$ (numero incognite) SISTEMA DETERMINATO solo soluzione nulla

$m > n$ SISTEMA con SOLUZIONI PROPRIE




$$\overline{F}(t) = \overrightarrow{OP} = P - O$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$|P(t) - P_0| = \overline{F}(t) - \overline{F}_0$$

$$P(t) - P_0 = (\varphi(t) - x_0,\ \psi(t) - y_0,\ \chi(t) - z_0) \quad \text{vettore}$$

$$|P(t) - P_0| = \sqrt{(\varphi(t) - x_0)^2 + (\psi(t) - y_0)^2 + (\chi(t) - z_0)^2} \quad \text{numero}$$

Il limite di un vettore $\overline{V} = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ esiste se esiste il limite della singola funzione

$\downarrow$

• DERIVATA di un VETTORE VARIABILE

$$\frac{d\overline{F}(t)}{dt} = \left( \frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d\psi(t)}{dt}, \frac{d\chi(t)}{dt} \right)$$

Avendo un punto $P(t)$ variabile

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} \longrightarrow \text{vettore}$$

La derivata di un punto è quindi un vettore

– Per le derivate dei vettori valgono tutte le solite regole di derivazione

Un vettore variabile ha derivata perpendicolare a se stesso

<u>es.</u> Calcolo $\frac{d\bar{t}}{dt}$:

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{(0,2,0)\cdot\sqrt{2+4t^2} - (1,2t,1)\cdot\frac{4t}{\sqrt{2+4t^2}}}{2+4t^2} = \frac{(0,4+8t^2,0)-(4t,8t^2,4t)}{(2+4t^2)\sqrt{2+4t^2}} =$$

$$= \frac{(-4t,4,-4t)}{(2+4t^2)\sqrt{2+4t^2}} \qquad \bar{t}(1,2t,1) \perp \frac{d\bar{t}}{dt}$$

Ora calcolo $\bar{n}$:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{16+32t^2}}\cdot(-4t,4,-4t)$$

pagina seguente $\longrightarrow$

Calcolo $\frac{d^2P}{dt^2}$:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\left|\frac{dP}{dt}\right|\cdot\bar{t}\right) = \underbrace{\frac{d}{dt}\left|\frac{dP}{dt}\right|}\cdot\bar{t} + \underbrace{\left|\frac{dP}{dt}\right|}\cdot\underbrace{\left|\frac{d\bar{t}}{dt}\right|}\cdot\bar{n}$$

numeri

$\frac{d^2P}{dt^2}$ giace nel piano osculatore

Anche $\frac{dP}{dt}$ e $\frac{d^2P}{dt^2}$ identificano il piano osculatore

<u>Def.</u> Una curva si dice BIREGOLARE se esistono le derivate seconde, se sono regolari e in più se $\frac{d^2P}{dt^2}$ e $\frac{dP}{dt}$ non sono paralleli

Una retta quindi non è biregolare

Quindi, con la parametrizzazione intrinseca:

$$\vec{t} = \frac{dP}{ds}$$

$$\frac{d\bar{t}}{ds} \perp \bar{t} \longrightarrow \bar{n} = \text{norm}\, \frac{d\bar{t}}{ds} \longrightarrow \frac{d\bar{t}}{ds} = \left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right| \bar{n}$$

$$\text{CURVATURA} = \left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|$$

$$\frac{1}{\text{curvatura}} = \text{RAGGIO DI CURVATURA } (\rho) = \frac{1}{\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|}$$

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n}$$

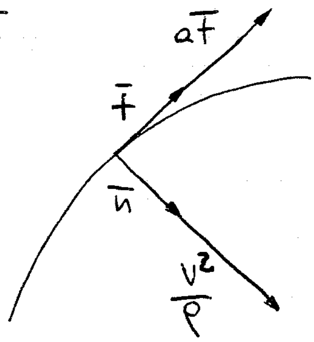
Quindi, dato:

$$P = P(t)$$

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\bar{t} \longrightarrow \vec{v} = v \cdot \bar{t}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(v\bar{t})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \bar{t} + v \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} =$$

$$= a\bar{t} + v \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \longrightarrow \vec{a} = a\bar{t} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$



**es. 2** Trovare la proiezione ortogonale di $\overline{v}=(1,1,-2)$ sul piano cui appartengono $\overline{w}=(1,0,-1)$

$\overline{z}=(1,2,-1)$

$$\overline{w}\wedge\overline{z}=(2,0,2)$$

$$\overline{v}_\perp=\left(\overline{v}\cdot \text{vers}(\overline{w}\wedge\overline{z})\right)\cdot \text{vers}(\overline{w}\wedge\overline{z})=\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{2}{\sqrt2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)=\left(-\frac12,0,-\frac12\right)$$

$$\overline{v}_\pi=\overline{v}-\overline{v}_\perp=(1,1,-2)+\left(\frac12,0,\frac12\right)=\left(\frac32,1,-\frac32\right)$$

**es. 3**

Dati i vettori $\overline{u}=(1,-t,0)$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$\overline{v}=(2,1,0)$

trovare, se esistono, i valori di $t$ per cui $\hat{uv}=\frac{\pi}{3}$

$$\cos\hat{uv}=\frac12 \qquad \frac12=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}=\frac{2-t}{\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt5}\longrightarrow \frac14-\frac{4+t^2-4t}{(1+t^2)\cdot5}=0$$

$$\longrightarrow \frac{5(1+t^2)-16-4t^2+16t}{20(1+t^2)}=0\longrightarrow t^2+16t-11=0$$

$$t=\frac{-16\pm10\sqrt3}{2}\quad \begin{cases}-8+5\sqrt3\\ -8-5\sqrt3\end{cases}$$

**es. 7** Risolvere al variare del parametro

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6-6m \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ -3y=6 \\ 6-6m=0 \end{cases}$$

$6-6m=0 \quad m=1$

① $$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

DETERMINATO

$6-6m\neq 0 \quad m\neq 1$

② $$\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=-2 \\ 0=6-6m \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

**es. 8**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & h & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & (h+4) & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 4y+5z=0 \\ (h-1)z=0 \end{cases}$$

$h-1=0 \quad h=1$

① $$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 4y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4}t \\ y=-\frac{5}{4}t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$h-1\neq 0 \quad h\neq 1$

② $$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

**es. 9** Sia $\gamma : P=P(t) = \begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \\ z=t^4 \end{cases}$

Si verifichi che $A(1,1,1)\in\gamma$ e si calcoli il triedro ① fondamentale di $\gamma$ in $A$ e la curvatura di $\gamma$ in $A$ e il raggio di curvatura ③ ②

② $\rho(1) = \dfrac{2\sqrt{109}}{29\sqrt{29}}$

$r = \dfrac{1}{\rho}$ RAGGIO di CURVATURA

$C = P + \rho\vec{n}$ CENTRO di CURVATURA

③ $r = \dfrac{29\sqrt{29}}{2\sqrt{109}}$

es. 10 $\quad \gamma : P(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$ $\quad A(0,0,0)$

Calcolare triedro fondamentale 1)
e curvatura 2)

① Per $t=0$ ottengo A

$P(t) = (t, t^2, t)$

$P'(t) = (1, 2t, 1) \longrightarrow P'(0) = (1,0,1)$

$P''(t) = (0,2,0) \longrightarrow P''(0) = (0,2,0)$

$\hat{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{b}(0) = \dfrac{(-2,0,2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{n}(0) = (0,1,0)$

② $\rho = \dfrac{\cancel{2\sqrt{2}}^{\,1}}{\cancel{2\sqrt{2}}_{\,1}} = 1$

2 sottospazi "banali" sono:

1) $W = V$

2) $\{\overline{0}_V\}$ SPAZIO NULLO

se $W_1$ e $W_2$ sono sottospazi vettoriali, allora $W_1 \cap W_2$ è ancora un sottospazio vettoriale:

$\overline{v}$ e $\overline{u}$ componenti intersezione

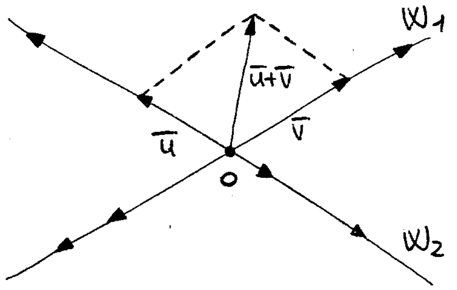
se $\overline{v} \in W_1, W_2$ se $a\overline{v} \in W_1, W_2$

se $\overline{u} \in W_1, W_2$

se $\overline{u}+\overline{v} \in W_1, W_2$ allora $W_1 \cap W_2$ è un S.S.V.

l'unione di $W_1$ e $W_2$ non è un sottospazio vettoriale

es.




$V_2$

$\overline{u}+\overline{v} \notin W_1 \cup W_2$

- COMBINAZIONE LINEARE

Dati n vettori, v si dice combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ se:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

per un solo vettore, v è c.l. di $v_1$ se $v = a_1 v_1$

$\bar{v} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ $\qquad \mathcal{L}(v)$ significa $\{a\bar{v}\}$

$\bar{u} = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

$\bar{u} + \bar{v} = \left((a_1+b_1)v_1 + \dots (a_n+b_n)v_n\right)$

<u>es.</u> $V_2 = \mathcal{L}(\bar{i}, \bar{j})$

$V_3 = \mathcal{L}(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ $\qquad V_2 \subseteq V_3$

- GENERATORI

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_n$ si dicono GENERATORI di $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

- INSIEME LIBERO (LINEARMENTE INDIPENDENTI)

Dati $n$ vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$

essi si dicono "linearmente indipendenti" se:

$$\underbrace{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n}_{C.L.} = 0 \longrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

- essere indipendente $\equiv$ essere $\neq \bar{o}_v$ per 1 solo vettore

- per 2 vettori $\bar{v}, \bar{u}$ $\qquad a\bar{v} + b\bar{u} = 0 \longrightarrow a = b = 0$

se $\bar{v}$ e $\bar{u}$ sono dipendenti, è possibile

$a\bar{v} + b\bar{u} = 0$ con $a, b$ non entrambi $= 0$

ad esempio suppongo $a \neq 0 \longrightarrow \bar{v} = -\frac{b}{a}\bar{u}$

- CRITERIO di INDIPENDENZA di vettori

Si prendono in ordine n vettori e si procede:

1) $\overline{V}_1 = \overline{0}_V \longrightarrow$ SI, non sono indipendenti.
$\downarrow$
NO

2) $\overline{V}_2$ è C.L. di $\overline{V}_1$

$V_2 = a V_1 \longrightarrow$ SI, non sono indipendenti
$\downarrow$
NO

⋮

3) $\overline{V}_n$ è C.L. di $\overline{V}_{n-1}, \dots, \overline{V}_1$? $\longrightarrow$ SI, non sono indipendenti
$\downarrow$
NO

sono indipendenti perchè: tutti i coefficenti assumono valore = 0

- BASE di uno SPAZIO VETTORIALE

Una base è un insieme libero di generatori: ogni vettore di quello S.V. deve poter essere scritto come C.L. dei vettori che formano la base

Si dicono SPAZI FINITAMENTE GENERATI gli spazi con un insieme finito di generatori

$(\hat{i}, \hat{i}+\hat{j})$ è una base

Tutte le basi di un dato spazio sono formate da un certo numero di vettori

$V^2 \longrightarrow$ basi formate da 2 vettori

$V^3 \longrightarrow$ basi formate da 3 vettori

Una base di $K^n$ è formata da:

$$\bar{e}_1 = (1,0,0,\dots,0)$$
$$\bar{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$$
$$\bar{e}_3 = (0,0,1,\dots,0)$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$$

$$\bar{V} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ sono indipendenti e formano una

BASE CANONICA

• LEMMA di STEINITZ

Se $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è base di V

e $u_1, u_2, \dots, u_m$, con $m > n$, sono vettori qualsiasi di V, allora essi non sono indipendenti dim $V$ = massimo numero di vettori indipendenti

dim $V = n$ è $\longrightarrow \overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n$ se sono $n$ vettori indipendenti, essi sono una base

• DIMENSIONE di SOTTOSPAZI

se $W \subset V$ ($W$ è s.s.v. di $V$) quanti vettori indipendenti ci sono in $W$?

dim $V = n \longrightarrow$ dentro $W$ ci sono al massimo $n$ vettori indipendenti

$v_1, v_2, \dots, v_m \longrightarrow m \leq n$

$W$ ha una base fatta di $m \leq n$ vettori $\longrightarrow \dim W \leq \dim V$

se $m = n \longrightarrow W \equiv V$

ogni vettore $\overline{v}$ (generatore di $V$), è della forma $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, ed è anche generatore di $W$

es. se $V$ ha dimensione $n$

i suoi sottospazi possono essere:

| DIMENSIONE | ESEMPIO di SOTTOSPAZIO |
|---|---|
| $n$ | $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ |
| $n-1$ | $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ |
| $\vdots$ | |
| $1$ | $\mathcal{L}(v_1)$ |
| $0$ | $\{0\}$ |

Lo spazio delle righe e quello delle colonne hanno la stessa dimensione

$r = \dim R_A = \dim C_A$ RANGO della MATRICE

• TEOREMA del RANGO

$r = \dim R_A = \dim C_A$

Dim.
se $R_A$ ha dimensione $r$, esiste una base fatta di

$$\overline{v}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,n})$$
$$\overline{v}_2 = (c_{2,1}, c_{2,2}, \dots, c_{2,n})$$
$$\vdots$$
$$\overline{v}_r = (c_{r,1}, c_{r,2}, \dots, c_{r,n})$$

$R_1$ è C.L. di $r$ vettori:

$$R_1 = p_{1,1}\overline{v}_1 + p_{1,2}\overline{v}_2 + \dots + p_{1,r}v_r \quad \in K^n$$
$$\vdots$$
$$R_m = p_{m,1}\overline{v}_1 + p_{m,2}\overline{v}_2 + \dots + p_{m,r}\overline{v}_r$$

$R_1$ "nasconde" $n$ uguaglianze numeriche

Il primo elemento di $R_1$ è $a_1$:

$$a_{1,1} = p_{1,1}c_{1,1} + p_{1,2}c_{2,1} + \dots + p_{1,r}c_{r,1} \longrightarrow a_{1,2} = p_{1,1}c_{1,2} + \dots + p_{1,r}c_{r,2}$$
$$a_{2,1} = p_{2,1}c_{1,1} + p_{2,2}c_{2,1} + \dots + p_{2,r}c_{r,1} \xrightarrow{\dots}$$
$$\vdots$$
$$a_{m,1} = p_{m,1}c_{1,1} + p_{m,2}c_{2,1} + \dots + p_{m,r}c_{r,1} \xrightarrow{\dots}$$

$(12,1,13) = a(1,-1,0) + b(3,-4,-1) \longrightarrow$ $a = 51$, $b = -13$ è C.L. dei primi due

$\dim C_A = r = 2$

il rango della matrice è 2

- **PROPRIETÀ dei S.S.V.**

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \mathcal{L}(v_1 + a \cdot v_2, \dots, v_r)$$

$$v_1 \longrightarrow v_1 + a \cdot v_2$$

se $v = a_1(v_1 + a v_2) + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$

$$\downarrow$$

$$v = a_1 v_1 + (a_1 a + a_2) v_2 + \dots + a_r v_r$$

conseguenze

$R_1 \longrightarrow R_1 + a R_2$ l'operazione di riduzione non cambia il rango

se A è ridotta, il RANGO è = al numero di righe $\neq 0$

es.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 12 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

rango = 2

$$R_A = \mathcal{L}(\underbrace{(1,3,5,12),(0,-1,8,13)}_{\text{BASE}})$$

es. 3 trovare una base $\neq$ da quella trovata

$a=1 \quad b=3 \qquad a v_1 + b v_2 \qquad a=2 \quad b=-1$

$(1,3,-2,7) \longleftarrow$ nuova base $\longrightarrow (2,-1,4,0)$

es. 4 $R^3$

$v_1=(1,2,3) \quad v_2=(-1,1,1) \quad v_3=(0,3,K) \quad v_4=(-1,K,5) \quad v_5=(-1,10,13)$

trovare la dim di $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ in funzione di $K$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 10 & 13 \\ -1 & K & 5 \\ 0 & 3 & K \end{bmatrix} \longrightarrow {}^T\!A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & K & 3 \\ 3 & 1 & 13 & 5 & K \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & K-1 & 3 \\ 4 & 0 & 12 & 4 & K \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & K-1 & 3 \\ 4-K & 0 & 12-3K & 4-\frac{K}{3}(K-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 4-K=0 \\ 12-3K=0 \\ 4-\frac{K}{3}(K-1)=0 \end{cases} \qquad K=4$$

il rango di $\mathcal{L}$ è 3 se $K\neq 4$, 2 se $K=4$

$$\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) = R^3 \quad \text{se } K\neq 4$$

$$\subset R^3 \quad \text{se } K=4$$

es. 2 Trovare dim e base ($\mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} x+2y-z+0t=0 \\ 2x-y+z+t=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3x+y+t=0$

$\dim S = n - r = 4 - 2 = 2$ $\qquad y = -t - 3x$

$\downarrow$

$x + 2(-t-3x) - z = 0 \longrightarrow z = -5x - 2t$

libere $x, t$

| $\overset{\times}{x}$ | $y$ | $z$ | $\overset{\times}{t}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -3 | -5 | 0 |
| 0 | -1 | -2 | 1 |

base $S$: $(1,-3,-5,0),(0,-1,-2,1)$

- ALGEBRA delle MATRICI

A e B $\longrightarrow$ matrici $\qquad m \longrightarrow$ righe

$n \longrightarrow$ colonne

1) SOMMA

$A + B = C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$ per definizione

2) PRODOTTO MATRICE/NUMERO

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Le matrici formano uno S.V. che si chiama $K^{n,m}$

- MATRICE TRASPOSTA $\,^{T}A$

Scambio le righe con le colonne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad {}^{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad {}^{T}(A \cdot B) = {}^{T}B \cdot {}^{T}A$$

- MATRICE IDENTICA $I$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A \cdot I = A \\ I \cdot A = A \end{array}$$

DIAGONALE PRINCIPALE

- MATRICE INVERSA di A $\quad A^{-1}$

B è inversa (destra) di A se: $A \cdot B = I$

es. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+4z=0 \\ y+2t=0 \\ 3y+4t=1 \end{cases} = \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3/2 \\ t=-1/2 \end{cases} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- SISTEMI ad INCOGNITE VETTORIALI

$$\begin{cases} x+y=(1,2,3) \\ 2x+y=(3,1,0) \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] =$$

$$\longrightarrow x=(2,-1,-3) \quad , \quad y=(1,2,3)-(2,-1,-3)=(-1,3,6)$$

$A \cdot X = B$ sistema in cui le incognite sono le righe di $X$ e i termini noti sono le righe di $B$

$$\underset{m \cdot n}{A} \cdot \underset{n \cdot p}{X} = \underset{m \cdot p}{B}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es. Trovare l'inversa di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x+2y=(1,0) \\ -2y=(-3,1) \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= \left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \\ x &= (-2,1) \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$ se $rg\,A = rg\,A/I$, $rg\,I = n$

$A^{-1}$ esiste se e solo se $rg\,A = n \rightarrow r = n$

es. Risolvere l'equazione:

$$XA = B \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$^TA\,^TX = {}^TB \longrightarrow {}^TA\,Y = {}^TB \qquad {}^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad {}^TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] = \begin{cases} x + 3y = (1,0,2) \\ -2y = (-2,1,-1) \end{cases}$$

$$y = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad x = \left(-2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad Y = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X = {}^TY = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Dim.

$$^T(\underset{m\cdot n}{A}\,\underset{n\cdot p}{B}) = {}^TB\,{}^TA$$

$$(AB)\Big|_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{jl} \longrightarrow {}^T(AB)\Big|_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\, b_{il}$$

$$^TB\Big|_{hk} = b_{kh} \qquad {}^TA\Big|_{hk} = a_{kh}$$

$$(^TB\,^TA)\Big|_{ij} = \sum_{l=i}^{n} {}^TB\Big|_{il} \cdot {}^TA\Big|_{jl} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}\, a_{jl}$$

- $\exists$ opposto

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (x',y') / (x,y) + (x',y') = (0,0) \longrightarrow (-x,-y) \in \mathbb{R}^2$

- commutativa sì

PRODOTTO

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

$a[b(x,y)] = (ab)(x,y) = (x|ab|, y|ab|)$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists a \in \mathbb{R} / a(x,y) = (x,y) \longrightarrow (x|a|, y|a|) = (x,y) \longrightarrow |a| = 1$
- $\forall (x,y),\ \forall a,b \in \mathbb{R}$

$(a+b)(x,y) = a(x,y) + b(x,y)$

$(x|a+b|, y|a+b|) \neq (x|a|, y|a|) + (x|b|, y|b|) = (x(|a|+|b|), y(|a|+|b|))$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

<u>es. 2</u>

Sia $V$ un $K$-s.v., $a \in K$, $\overline{v} \in V$

Allora $a\overline{v} = \overline{0}_V \longleftrightarrow a = 0_K$ oppure $\overline{v} = \overline{0}_V$

1) Dato $\overline{v} = (4,0,1,9) \in \mathbb{R}^4$ si trovi $a \in \mathbb{R} / \underbrace{(a+430)}_{=0_{\mathbb{R}}}\overline{v} = 0 \longrightarrow a = -430$

2) Dato $\overline{v} = (3,0,0,8,7) \in \mathbb{R}^5$ si trovi $\overline{w} / 239(v + \overline{w}) = \overline{0}_{\mathbb{R}^5}$

$\overline{v} + \overline{w} = \overline{0}_{\mathbb{R}^5} \longrightarrow \overline{w} = -\overline{v} = (-3,0,0,-8,-7)$

## • DETERMINANTE

È un numero "legato" ad una matrice quadrata

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

### PROCEDIMENTO

$\det = (\pm)\, a_{1,2} \cdot a_{2,4} \cdot a_{3,3} \cdot a_{4,1}$ metto prima in ordine il primo indice $a_{1,2}$

Poi scrivo il secondo indice di ciascun membro:

$\overset{2}{1}\ \overset{4}{2}\ \overset{3}{3}\ \overset{1}{4}$ e scrivo tutte le possibili coppie

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | NO | − |
| 1 | 3 | NO | − |
| 1 | 4 | NO | − |
| 2 | 3 | SI | + |
| 2 | 4 | SI | + |
| 3 | 4 | NO | − |

e vedo se compaiono in ordine

Moltiplico i segni e il risultato è il segno dell'addendo del determinante. Ripeto il procedimento per tutti i possibili addendi

### PROPRIETÀ

1) $\det A = \det {}^{T}A$

- **MINORE**

Sottomatrice estratta prendendo certe righe e certe colonne

- **COMPLEMENTO ALGEBRICO**

Complemento algebrico di $a_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det$ (matrice senza riga i e colonna j) $= A_{i,j}$

es. $\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{5} & 1 \end{bmatrix}$ $A_{1,2} = (-1)^3 \cdot (-6) = (-1) \cdot (-6) = 6$

$\downarrow$

$$\det A = a_{1,1} A_{1,1} + a_{1,2} A_{1,2} + \dots + a_{i,n} A_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$$

- **MATRICE INVERSA del DETERMINANTE**

se $\det A \neq 0 \longrightarrow A^{-1}$ esiste

$$A^{-1}\Big|_{r,s} = \frac{A_{s,r}}{\det A} = B\Big|_{r,s}$$

Verifica:

$AB = I$

$$AB\Big|_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A\Big|_{i,l} B\Big|_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \frac{A_{j,l}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} A_{j,l}$$

$\downarrow$

se $i=j$ $\quad AB\Big|_{i,i} = 1$ , se $i \neq j$ $\quad AB\Big|_{i,j} = 0$

es. 4 Verificare che $AB = 0 \not\rightarrow A = 0$ o $B = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es. 5 Calcolare il RANGO

$$r = \dim R_A = \dim C_A \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r = 2$$

Teorema

Le righe non nulle di una matrice ridotta sono L.I.
Esse formano una base dello spazio delle righe e il loro $n^\circ_R = r_A$

data $AX = B \longrightarrow X = A^{-1} B$ se $\det A \neq 0 \longrightarrow \exists A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Calcolo la prima incognita $x_1$:

$$x_1 = A^{-1}\big|_{1,1} \cdot b_1 + A^{-1}\big|_{1,2} \cdot b_2 + \ldots + A^{-1}\big|_{1,n} \cdot b_n$$

$$\downarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot \left( b_1 A_{1,1} + \ldots + b_n A_{n,1} \right)$$

**es. 6** Risolvere il SISTEMA OMOGENEO $AX=0$ dove

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&3\\1&3&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&1&-4\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-1&4\\0&0&5\\0&0&1\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-1&4\\0&0&5\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}r=3\\n=3\end{matrix}\quad r-n=0$$

solo soluzione nulla $(0,0,0)$

**es. 7** Trovare una base per lo spazio delle soluzioni

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-3z=0\end{cases}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-4\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}r=2\\n=3\end{matrix}\quad r<n$$

$\infty$ soluzioni che dipendono da $3-2=1$ parametro

$$\begin{cases}x+y+z=0\\-4z=0\end{cases}\to\begin{cases}x=-y\\z=0\end{cases}\quad y=t\quad (-t,t,0),\ t\in\mathbb{R}$$

$t=1$ $\quad B=\{(-1,1,0)\}$

**es. 8** Si stabilisca per quali $h\in\mathbb{R}$ la matrice è invertibile

$$A=\begin{bmatrix}1&h&3\\h&0&2\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&h&3\\h&0&2\\2-h&0&0\end{bmatrix}$$

se $h\neq 0$ e $h\neq 2$ $\quad r=n=3$ A INVERTIBILE

se $h=2$ $\quad r=2$ A NON INVERTIBILE

se $h=0$ $\quad r=2$ A NON INVERTIBILE

ISOMORFISMO

- Una applicazione è contemporaneamente iniettiva e suriettiva (cioè biiettiva) se e solo se $\rho(A)=m$ e $\rho(A)=n$, quindi in particolare si richiede $n=m$, cioè la coincidenza dello spazio di partenza con quello di arrivo (*f* in tale caso si dice "endomorfismo", e la matrice associata è quadrata con *n* righe e *n* colonne)

- Un endomorfismo è iniettivo se e solo se $\rho(A)=n$; un endomorfismo è suriettivo se e solo se $\rho(A)=n$; le due condizioni sono equivalenti, quindi per un endomorfismo le condizioni di iniettività, suriettività, biiettività si identificano, ed equivalgono tutte alle tre note condizioni:
    - $\rho(A)=$ massimo
    - *A* invertibile
    - $\det A \neq 0$

## CAMBI DI BASE

Dimenticando per un momento le applicazioni lineari, sia *V* uno spazio di dimensione *n*, $E=(e_1,e_2,....,e_n)$ una sua base (anche non canonica), $E'=(e_1',e_2',....,e_n')$ un'altra sua base. Ci si pone il problema di capire come cambiano le componenti di un vettore *v* quando si passa dalla base *E* alla base *E'* o viceversa.
Allo scopo si comincia ad osservare che i vettori $(e_1',e_2',....,e_n')$ possono essere espressi usando la base *E* con le formule:

$$\begin{aligned} e_1' &= p_{11}e_1+p_{21}e_2+.....+p_{n1}e_n \\ e_2' &= p_{12}e_1+p_{22}e_2+.....+p_{n2}e_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ e_n' &= p_{1n}e_1+p_{2n}e_2+.....+p_{nn}e_n \end{aligned}$$

Avendo introdotto la "matrice di passaggio" (quadrata)

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha certamente rango massimo (*n*): infatti, se così non fosse, una colonna sarebbe combinazione lineare delle altre, e quindi uno fra gli $(e_1',e_2',....,e_n')$ sarebbe combinazione lineare degli altri, contro l'ipotesi che $E'$ sia una base. Quindi si può concludere che *P* è invertibile (e si sa calcolare $P^{-1}$), e che $\det P \neq 0$.
Ciò premesso, consideriamo un vettore *v* e le sue rappresentazioni nelle due basi, in cui le componenti sono ovviamente diverse:

$$v=v_1e_1+v_2e_2+.....+v_ne_n=v_1'e_1'+v_2'e_2'+.....+v_n'e_n'$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .... \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ .... \\ v_n' \end{pmatrix}$$

2. calcolo di $w = f(v)$ usando le due basi iniziali, cioè la matrice *A*:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ..... \\ w_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ..... \\ v_n \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ .... \\ v_n' \end{pmatrix}$$

3. passaggio da $(w_1, w_2, ...., w_m)$ a $(w_1', w_2', ...., w_m')$ (cioè cambio di base all'interno di *W*), con la formula trovata

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ .... \\ w_m' \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ .... \\ w_m \end{pmatrix} = Q^{-1}A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ..... \\ v_n \end{pmatrix} = Q^{-1}AP \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ .... \\ v_n' \end{pmatrix}$$

Si conclude quindi che $A' = Q^{-1}AP$. La formula inversa $A = QA'P^{-1}$ segue immediatamente moltiplicando a sinistra per Q e a destra per $P^{-1}$.

Poiché le due matrici $A$ e $A'$ rappresentano la stessa applicazione *f* con 2 basi diverse, si usa a volte la notazione:

$$A = M^{EF}(f) \quad A' = M^{E'F'}(f)$$

Ovviamente le due matrici hanno lo stesso rango.

Nel caso particolare di un endomorfismo, se si suppone di usare all'interno dello spazio $V = K^n$ prima una base *E*, poi una base $E'$, la differenza fra le matrici *P* e *Q* sparisce, e le formule di passaggio si semplificano in $A' = P^{-1}AP$, $A = PA'P^{-1}$.
Due matrici quadrate $A$ e $A'$ così collegate si dicono simili, e hanno ovviamente lo stesso rango.

- **APPLICAZIONI NON LINEARI** (FUNZIONI di PIÙ VARIABILI)

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$z = f(x,y) = f(P)$
punto nel piano

I domini si calcolano esattamente come per le $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

es. $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$ $\quad$ $dom(f) = x^2+y^2-1 \geq 0 \longrightarrow x^2+y^2 \geq 1$

I grafici di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sono delle aree, di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono superfici. Più avanti non si possono rappresentare.

Le curve di livello sono curve del tipo:

$f(x,y) = c$

- **LIMITI di FUNZIONI a PIÙ VARIABILI**

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ significa:

$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 \;/\; |x-x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\downarrow$ per un punto P (distanza geometrica)

$$\|P-P_0\| = \begin{cases} \sqrt{(x-x_0)^2} & n=1 \\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} & n=2 \\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} & n=3 \\ \vdots \end{cases}$$

$\downarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$

## TEOREMA del DIFFERENZIALE

si passa da $f(x)$ a $f(x+h)$

si definiscono $df = f'(x) \cdot h$ $\quad h = dx$

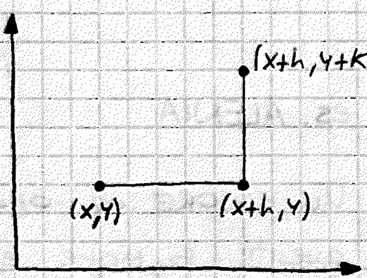
vale

$f(x+h) - f(x) = df$ + infinitesimo di ordine superiore ad $h$

$\downarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - df}{h} = 0$$

Per le $f$ a più variabili:




$f(x+h, y+k) - f(x,y)$

$df = f'_x(x,y) \cdot h + f'_y(x,y) \cdot k = f'_x dx + f'_y dy$

$\downarrow$

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$ se $f'_x dx$ e $f'_y dy$ sono CONTINUE

Dim.

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) = \underbrace{f(x+h,y+k) - f(x+h,y)}_{k f'_y(x+h,d)} + \underbrace{f(x+h,y) - f(x,y)}_{h f'_x(c,y)}$$

Ricordando La Grange $\quad k f'_y(x+h,d) + h f'_x(c,y)$

$g(x+h) - g(x) = h\, g'(c)$

$\downarrow$

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) - df = k f'_y(x+h,d) + h f'_x(c,y) - f'_x(x,y) \cdot h - f'_y(x,y) \cdot k =$$

$$= k\left[f'_y(x+h,d) - f'_y(x,y)\right] + h\left[f'_x(c,y) - f'_x(x,y)\right] = \longrightarrow$$

$$\det A = 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} + 1\cdot(-1)^3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 3\cdot(-1)^4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = -4+1+3=0$$

2° TEOREMA di LAPLACE

Sia $A \in M_{n\cdot n}$, allora:

1) $A$ è invertibile $\longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

2) se $\det A \neq 0$, l'inversa di $A = (a_{i,j})$ è

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot(A_{ji})$ dove $A_{ji}$ è la matrice dei complementi algebrici di $a_{ji}$

<u>es. 2</u> calcolare, se esiste, l'inversa

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \det A = 2\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix} = -4+1 = \underline{-3} \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$\downarrow$

$${}^{T}A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad (a_{ji})$$

$a_{1,1} \rightarrow A_{1,1} = (-1)^2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = -1$

$\vdots$

$A_{3,3}$

$\downarrow$

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ -4 & 7 & -5\end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}\cdot A_{j,i}$$

<u>es. 3</u> APPLICAZIONI LINEARI

Dati $V$ e $W$ s.v. su $K$, $f: V \longrightarrow W$ è lineare se:

1) $f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in V$

2) $f(ax) = af(x) \quad \forall x \in V, \forall a \in K$

**es. 5** Data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$f(x,y,z) = (x-y, x+2z)$, si trovino $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ e le rispettive dimensioni

$\ker f = \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^3 / f(\bar{v}) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$

$\ker f = \{ (x,y,z) / (x-y, x+2z) = (0,0)$

$\downarrow$

$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2z=0 \end{cases} = \begin{cases} y=x \\ z=-\frac{1}{2}x \end{cases}$ $S = \{ (t, t, -\frac{1}{2}t), t \in \mathbb{R} \} \to t(1,1,-\frac{1}{2})$

$B_{\ker f} = (1,1,-\frac{1}{2})$

$\dim \ker f = 1$

$f$ iniettiva $\leftrightarrow$ $\dim \ker f = 0$

$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \underset{\text{dim spazio di partenza}}{3}$

$\downarrow$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$

$\mathrm{Im} f$ = spazio delle colonne della matrice associata ad $f$

$\downarrow$

$f(1,0,0) = (1,1)$

$f(0,1,0) = (-1,0)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \{(-1,0),(0,2)\}$

$f(0,0,1) = (0,2)$

$f$ suriettiva $\leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f =$ dim spazio di arrivo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 122

dove $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_s$ sono elementi del campo numerico **K** su cui è definito lo spazio vettoriale, che sono evidentemente le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori, e $m_1, m_2, ...., m_s$ dei numeri interi positivi (che si dicono "molteplicità" degli autovalori), la cui somma vale evidentemente il grado del polinomio caratteristico, cioè *n*

2. i relativi autospazi hanno esattamente dimensioni $m_1, m_2, ...., m_s$ (si noti che questa seconda condizione è automaticamente soddisfatta se tutte le radici del polinomio caratteristico sono semplici, ma anche in altri casi);

Se le due condizioni sono soddisfatte, la base di autovettori può essere costruita semplicemente accodando i vettori delle basi (trovate comunque) dei singoli autospazi.

Gli AUTOVALORI devono avere molteplicità "m" = 1. Se $m \neq 1$, deve valere:

$$1 \leq V_\lambda \leq m$$

## DIAGONALIZZAZIONE

Se un endomorfismo $\varphi$ su $\mathbf{K}^n$ è semplice, è naturale considerare la matrice associata scegliendo una base formata da certi suoi autovettori $v_1, v_2, ...., v_n$, con associati autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_n$ (questi ultimi distinti o anche coincidenti, in tutto o in parte).

Quindi si pensa di passare dalla matrice associata *A*, alla matrice associata *A'* nella nuova base, data come noto da:

$$A' = P^{-1}AP$$

dove la matrice di passaggio *P* contiene nelle colonne gli autovettori scelti.

La matrice $A'$ assume una forma particolarmente semplice, come si vede dal calcolo sotto riportato, in cui si usa la notazione $B|_{ij}$ per indicare l'elemento in riga *i* e colonna *j* della generica matrice *B*:

$$A'|_{ij} = \sum_{l=1}^{n} P^{-1}|_{il} \sum_{m=1}^{n} A|_{lm} P|_{mj} = \sum_{l=1}^{n} P^{-1}|_{il} \sum_{m=1}^{n} A|_{lm} v_j|_m$$

Ma da $Av_j = \lambda_j v_j$ si trae:

$$\sum_{m=1}^{n} A|_{lm} v_j|_m = \lambda_j v_j|_l = \lambda_j P|_{lj}$$

Quindi la formula precedente diventa:

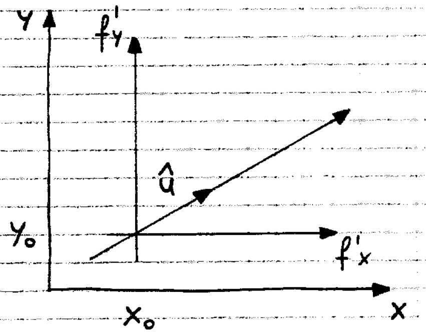
$$A'|_{ij} = \sum_{l=1}^{n} P^{-1}|_{il} \lambda_j P|_{lj} = \lambda_j \sum_{l=1}^{n} P^{-1}|_{il} P|_{lj} = \lambda_j I|_{ij}$$

avendo indicato con *I* la matrice identica, che contiene tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 al di fuori.

Basta questo per concludere che la matrice $A'$ è diagonale (cioè tutti i suoi elementi fuori dalla diagonale principale si annullano), e sulla diagonale principale contiene gli autovalori, nello stesso ordine in cui gli autovettori associati sono stati posti nel formare la base

Si conclude quindi che la matrice di un endomorfismo semplice è riducibile a forma diagonale, scegliendo una base formata da autovettori.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 122




$$g(t) = f(x_0 + u_x t,\ y_0 + u_y t)$$

- DERIVATA DIREZIONALE

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = g'(t) = f'_x u_x + f'_y u_y = \nabla f \cdot \bar{u}$$

es. $P(1,2)$ $\quad \bar{v}(3,5)$ $\quad f = y \,\mathrm{sen}\, x$

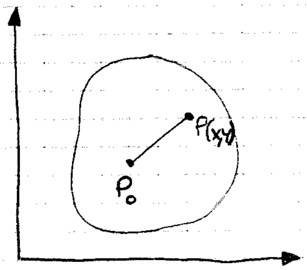
$$\bar{u} = \mathrm{norm}\ \bar{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = y\cos x \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} + \mathrm{sen}\, x\ \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\longrightarrow 2\cos 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} + \mathrm{sen}\, 1\ \frac{5}{\sqrt{34}} = \dots \text{numero}$$

- SVILUPPI di TAYLOR per FUNZIONI a più VARIABILI

$$g(x_0+h) = \underbrace{g(x_0) + h g'(x_0) + \frac{1}{2} h^2 g''(x_0)}_{\text{POLINOMIO di TAYLOR}} + \underbrace{\frac{1}{3!} h^3 g'''(c)}_{\text{RESTO}} \qquad 0 \le c \le h$$

$\downarrow$




$f(x,y) = f(P)$

$f(P) = g(1)$

$f(P_0) = g(0)$

$t$ per $0 = 1$

$$g(t) = f(x_0 + (x-x_0)t,\ y_0 + (y-y_0)t) \longrightarrow$$

→ $P_0$ è massimo se

$$(x-x_0)^2 \underbrace{f''_{xx}}_{P_0} + 2(x-x_0)(y-y_0)\underbrace{f''_{xy}}_{P_0} + (y-y_0)\underbrace{f''_{yy}}_{P_0}$$

è negativo per qualunque valore di $x$ e $y$

• APPLICAZIONI $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_m) & df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m \\ f_2(x_1,\dots,x_m) & \vdots \\ \vdots & \\ f_n(x_1,\dots,x_m) & df_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m \end{cases}$$

↓

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE JACOBIANA} = J} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

es. ALENIA

Si considera l'a.l. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

definita da $f(x,y,z) = (x+hz, y+hz, 2hz)$ $\quad h \in \mathbb{R}$

Si stabilisca per quali $h$ l'a.l. è iniettiva, suriettiva, biettiva

Sia $\overline{v}=(1,1,0)$ rispetto alla base F. Si trovino le sue componenti rispetto alla base B

$\overline{v}' = M_{BF}\,\overline{v}$

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37/10 & -19/10 & -7 \\ -1/5 & -2/5 & -1 \\ 13/10 & 11/10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} -37/10 - 19/10 = v_1' \\ -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = v_2' \\ \frac{13}{10} + \frac{11}{10} = v_3' \end{cases} \longrightarrow \quad v_1' = -\frac{28}{5} \quad v_2' = -\frac{3}{5} \quad v_3' = \frac{12}{5}$$

**es. 3** Determinare e disegnare dom f

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \log(-1+x^2+y^2)$$

$-1+x^2+y^2>0 \longrightarrow x^2+y^2>1 \qquad \text{dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2>1\}$

punti esterni ad una circonferenza con centro O di raggio 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 122

# • GEOMETRIA ANALITICA nel PIANO

## RETTA

eq. $ax + by + c = 0$

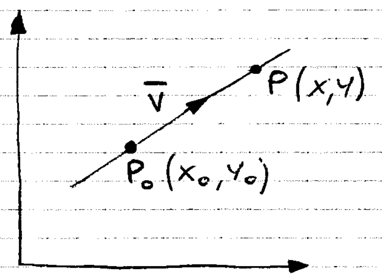
### 1) INTERSEZIONE FRA RETTE

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Il sistema può avere: (matrice)

- 1 soluzione (incidenti)
- nessuna soluzione (parallele)
- $\infty$ soluzioni (coincidenti)

Il vettore di componenti $a, b$ $(a,b)$ è PERPENDICOLARE alla retta




$\overline{P_0P}$ è $/\!/$ $\bar{v}$

$(x - x_0, y - y_0)$ è $/\!/$ $(l, m)$

$\bar{v} = (l, m)$

$\downarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$ FORMA PARAMETRICA

$(l, m)$ è $/\!/$ a $r$

$\downarrow$

es. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ $/\!/$ a $(2, -1)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - t \end{cases}$ $/\!/$ $(0, -1)$

Come passo dalla forma parametrica alla forma cartesiana:

FORMA PARAMETRICA / FORMA CARTESIANA

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} = \begin{cases} lt = x - x_0 \\ mt = y - y_0 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} l & x - x_0 \\ m & y - y_0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} m = 2 \\ n = 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\det [A|B] = 0 \qquad \begin{array}{l} \rho(A) = 1 \\ \rho(A/B) = 1 \end{array} \longrightarrow l(y - y_0) - m(x - x_0) = 0$$

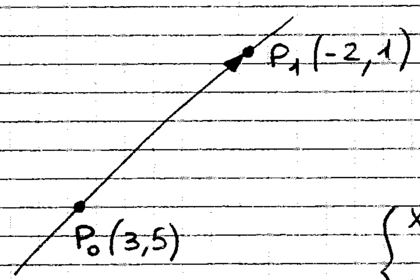
$$\downarrow$$

$$\underbrace{-mx}_{a} + \underbrace{ly}_{b} + \underbrace{mx_0 - ly_0}_{c} = 0$$

2) PERPENDICOLARITÀ FRA ANGOLI

$$\begin{array}{l} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array} \longrightarrow \alpha = \text{ang}\left((3,-2);(1,1)\right) \longrightarrow \cos\alpha = \frac{(3,2)\cdot(1,1)}{\|(3,2)\|\cdot\|(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}$$

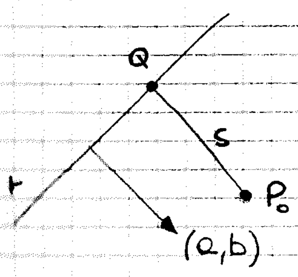
3) RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI




$$\bar{V} = (-2-3, 1-5) = (-5, -4)$$

$$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 5 - 4t \end{cases} \longrightarrow t = \frac{x-3}{5} \qquad y = 5 + \frac{4}{3}(x-3)$$

4) DISTANZA PUNTO - RETTA




Trovare $s \perp r$ e passante per $P_0$

$(a,b)$ è $\perp r$ quindi $// s$

**es. 2** Determinare gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi dell'endomorfismo:

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associato alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

mediante la base canonica

**Def.**

Dato $f : V \to V$

$\lambda \in K$ è un autovalore se $\exists\, v \in V,\ v \neq 0 \,/\, f(v) = \lambda v$

$\downarrow$

$f(v) - \lambda v = 0$

$\updownarrow$

$f_\lambda : v \to f(v) - \lambda v$ ha $\ker f_\lambda \neq \{0\}$

$\updownarrow$

$A - \lambda I \to \det(A - \lambda I) = 0$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \to A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 =$

$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$\downarrow$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$

le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori

**Def.**

$v$ è AUTOVETTORE se: $f(v) = \lambda v \to f(v) - \lambda v = 0$

$\downarrow$

$f_\lambda(v) = 0$

$\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$

$\varphi(0,1,0) = (2,2,0) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\varphi(0,0,1) = (3,3,3)$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) =$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1 \qquad A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow (A-\lambda_1 I)\cdot V = 0$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2V_2 + 3V_3 = 0 \\ V_2 + 3V_3 = 0 \\ 2V_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \\ V_1 = t \end{cases} \quad V = (t,0,0)$

$V_{\lambda_1} = \{(V_1,0,0) / V_1 \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(1,0,0)\}$

ripeto lo stesso procedimento per $\lambda_2$ e $\lambda_3$

<u>Def:</u> $A$ è diagonalizzabile $\longleftrightarrow$ $\varphi$ è semplice

CRITERIO ($\varphi$ semplice)

$\varphi: V^n \longrightarrow V^n$

calcolate $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ di molteplicità $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$

$\downarrow$

$\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$, $\forall \lambda_i$ di molteplicità $m_{\lambda_i}$ si ha:

$$m_{\lambda_i} = \dim V_{\lambda_i} = n - \rho(A - \lambda_i I)$$

se $\exists$ $n$ autovalori distinti $\longrightarrow$ $\varphi$ è SEMPLICE

PROPRIETÀ Dato $\varphi: V^n \longrightarrow V^n$, sia $\lambda$ autovalore di molteplicità $m$

allora $1 \leq \dim V_\lambda \leq m$ se è verificato l'endomorfismo è SEMPLICE

$$\rightarrow P^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$(P^{-1}A)P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A'$$ MATRICE DIAGONALE

es.6 Si consideri l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^2$ euclideo definito da

$$f(x,y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$$

Verificare che è un endomorfismo autoaggiunto

Def. $\varphi : V \rightarrow V$ è AUTOAGGIUNTO

se $\forall v, w \in V$ , $\varphi(v)\cdot w = v \cdot \varphi(w)$

$\downarrow$

$$\underbrace{f(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)}_{①} = \underbrace{(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)}_{②}$$

$$① = \left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1,\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1\right)\cdot(x_2,y_2) = -\frac{3}{5}x_1x_2 + \frac{4}{5}y_1x_2 + \frac{4}{5}x_1y_2 + \frac{3}{5}y_1y_2 = ②$$

l'endomorfismo è autoaggiunto

CIRCONFERENZA (piano)

eq. $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$ ESPLICITA

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ IMPLICITA

1) INTERSEZIONE tra CIRCONFERENZA e RETTA

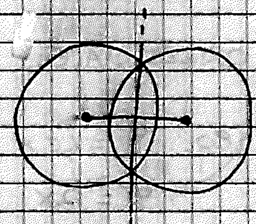
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

2 soluzioni (secante)
1 soluzione (tangente)
0 soluzioni (esterna)

4) CIRCONFERENZE SECANTI

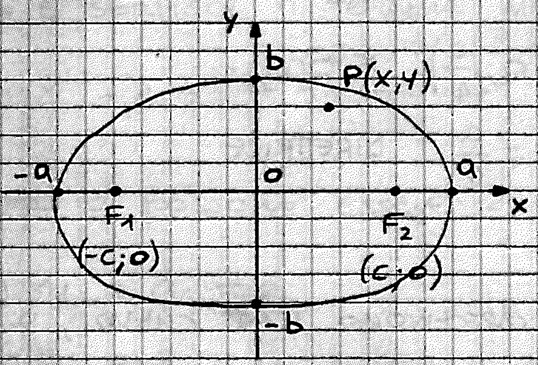
$$\begin{cases} C_1: x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ C_2: x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a'-a)x+(b'-b)y+(c'-c)=0 \end{cases} \longrightarrow \dots$$

ASSE RADICALE



ELLISSE

Luogo dei punti che hanno la somma delle distanze fissa da 2 punti detti FUOCHI




a semiasse maggiore

b semiasse minore

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (x+c)^2+y^2=4a+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \longrightarrow \cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \longrightarrow (cx-a^2)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] \longrightarrow c^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2\left[x^2-\cancel{2cx}+c^2+y^2\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$a>c$

$b^2=a^2-c^2$

$\downarrow$

eq. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}$

IPERBOLE

eq. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad c=\sqrt{a^2+b^2} \qquad y=\pm\dfrac{b}{a}x$ ASINTOTI costruisco la matrice di passaggio

2) $P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ \underbrace{p_{2,1}}_{V_1} & \underbrace{p_{2,2}}_{V_2} \end{bmatrix}$ MATRICE ORTOGONALE

3) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = p_{1,1}x' + p_{2,1}y' \\ y = p_{1,2}x' + p_{2,2}y' \end{cases}$

sostituisco nell'equazione di partenza e sparisce il termine misto $xy$

4) $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + Ax' + By' + C = 0$

Ora ci possono essere 2 casi:

1) $\lambda_1$ e $\lambda_2 \neq 0$

2) $\lambda_1$ o $\lambda_2 = 0$

① COMPLETAMENTO dei QUADRATI $\lambda_1$ e $\lambda_2 \neq 0$

raccolgo $\lambda_1$ e $\lambda_2$

$$\lambda_1\left[x' + \frac{A}{2\lambda_1}\right]^2 + \lambda_2\left[y' + \frac{B}{2\lambda_2}\right]^2 \underbrace{- \frac{A^2}{4\lambda_1} - \frac{B^2}{4\lambda_2}}_{\text{aggiunti per toglierli dalle quadre}} + C = 0$$

traslo l'origine mantenendo gli assi nella stessa posizione

$$X = x' + \frac{A}{2\lambda_1} \qquad Y = y' + \frac{B}{2\lambda_2}$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = K$$

- CURVE PIANE in GENERALE

Una curva è un luogo di punti le cui coordinate soddisfano

$f(x,y)=0$

Dato un punto su una curva, posso ricavare l'equazione della retta tangente in quel punto

$f(x_0,y_0)=0$

Se la curva fosse data in forma parametrica:

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ il vettore $\bar{v}(\varphi',\psi')$ è tangente alla curva

I punti devono soddisfare l'equazione:

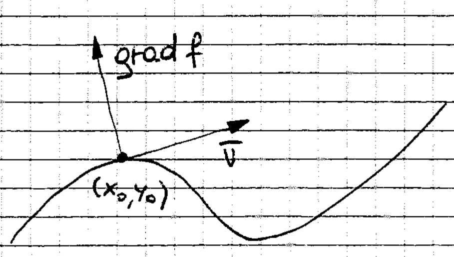
$$f(\varphi(t),\psi(t))=0$$

$$f'_x\varphi'+f'_y\psi'=0 \longrightarrow \text{grad} f\cdot\bar{v}=0$$

Quindi:

$\bar{v}\perp(f'_x,f'_y)$

$(f'_x,f'_y)\perp$ alla curva




$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

eq. RETTA TANGENTE

curva $f(x,y)=0$

punto $(x_0,y_0)$

# • GEOMETRIA ANALITICA nello SPAZIO

distanza tra 2 punti

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

PIANO

eq. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

PIANO

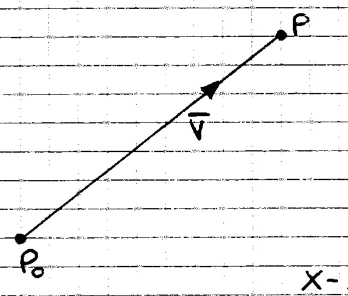
eq. $ax+by+cz+d=0$

1) INTERSEZIONE FRA PIANI

RETTA $\rho(A/B)=2$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right]$$

| $\rho(A)$ | $\rho(A/B)$ | SOLUZIONI |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\infty^2$ (piani coincidenti) |
| 1 | 2 | no sol. (piani //) |
| 2 | 2 | $\infty$ (retta in comune) |




$\overline{v}(l,m,n)$

$\overline{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ è // $\overline{v}$

$x-x_0=lt$

$y-y_0=mt$

$z-z_0=nt$

$\downarrow$

$(l,m,n)$ // r

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

FORMA PARAMETRICA