NUMERO : 70

DATA : 24/03/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Masserano

MATERIA : Analisi I

ATTENZIONE: all'esame i test potranno proporre una scelta tra **cinque** opzioni.

Test: insiemi e numeri–1

L. Pandolfi

1. A e B sono insiemi. Allora
   (a) $A \cup B$ si fa solo se gli insiemi hanno elementi della medesima natura.
   (b) $A \cup B$ è sempre definito
   (c) $A \cup B$ si può fare solo se $B \neq \emptyset$
   (d) $A \cup B$ non è mai vuoto

2. A e B sono insiemi. Allora
   (a) $A \cap B$ può essere vuoto
   (b) $A \cap B$ è vuoto se e solo se uno dei due insiemi è vuoto
   (c) $A \cap B$ si può fare solo se A e B sono tra loro diversi
   (d) L'uguaglianza $A \cap B = A$ implica $B = A$

3. Indicare quale delle affermazioni seguenti è vera.
   (a) Ogni insieme è uguale al suo complementare
   (b) L'unione di due insiemi non può essere uguale ad uno dei due
   (c) L'intersezione di due insiemi è sempre diversa da almeno uno degli insiemi
   (d) Insiemi con lo stesso complementare coincidono

4. Indicare quale delle affermazioni seguenti è vera
   (a) Esistono numeri razionali la cui somma è irrazionale
   (b) Esistono numeri irrazionali la cui somma è razionale
   (c) Ogni numero irrazionale è multiplo intero di $\sqrt{2}$
   (d) Ogni numero razionale è multiplo intero di un numero primo

5. Siano a e b due numeri irrazionali. Allora

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 342

ATTENZIONE: all'esame i test potranno proporre una scelta tra **cinque** opzioni.

Soluzioni: insiemi e numeri–1

L. Pandolfi

1. A e B sono insiemi. Allora
   (a) $A \cup B$ si fa solo se gli insiemi hanno elementi della medesima natura.
   (b) $\boxed{A \cup B \text{ è sempre definito}}$
   (c) $A \cup B$ si può fare solo se $B \neq \emptyset$
   (d) $A \cup B$ non è mai vuoto

2. A e B sono insiemi. Allora
   (a) $\boxed{A \cap B \text{ può essere vuoto}}$
   (b) $A \cap B$ è vuoto se e solo se uno dei due insiemi è vuoto
   (c) $A \cap B$ si può fare solo se A e B sono tra loro diversi
   (d) L'uguaglianza $A \cap B = A$ implica $B = A$

3. Indicare quale delle affermazioni seguenti è vera.
   (a) Ogni insieme è uguale al suo complementare
   (b) L'unione di due insiemi non può essere uguale ad uno dei due
   (c) L'intersezione di due insiemi è sempre diversa da almeno uno degli insiemi
   (d) $\boxed{\text{Insiemi con lo stesso complementare coincidono}}$

4. Indicare quale delle affermazioni seguenti è vera
   (a) Esistono numeri razionali la cui somma è irrazionale
   (b) $\boxed{\text{Esistono numeri irrazionali la cui somma è razionale}}$
   (c) Ogni numero irrazionale è multiplo intero di $\sqrt{2}$
   (d) Ogni numero razionale è multiplo intero di un numero primo

5. Siano a e b due numeri irrazionali. Allora

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 342

ATTENZIONE: all'esame i test potranno proporre una scelta tra **cinque** opzioni.

Test: insiemi e numeri–2

L. Pandolfi

1. L'insieme $\{x \mid x^2 > 2\}$
   (a) è un insieme di numeri positivi
   (b) è un insieme di numeri razionali
   (c) contiene líntervallo $[0, 1/2)$
   (d) contiene numeri positivi

2. L'insieme $\{x \mid x^2 + 2x > 1\}$
   (a) ha per grafico una parabola
   (b) ha solo elementi irrazionali
   (c) contiene tutti i suoi punti di accumulazione
   (d) ha punti di accumulazione che non gli appartengono

3. L'insieme $\{n - 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$
   (a) è superiormente limitato
   (b) è un insieme di numeri positivi
   (c) ammette punti di accumulazione
   (d) è privo di punti di accumulazione

4. L'insieme $\left\{n - \frac{1}{m}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, m \in \mathbb{N}\right\}$
   (a) ha infiniti punti di accumulazione
   (b) è privo di punti di accumulazione
   (c) è limitato
   (d) è vuoto.

5. L'insieme $\{(x, y) \mid y = x + |x|\,,\ x \in \mathbb{R}\}$
   (a) è grafico di funzione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 342

ATTENZIONE: all'esame i test potranno proporre una scelta tra **cinque** opzioni.

Soluzioni: insiemi e numeri–2

L. Pandolfi

1. L'insieme $\{x \mid x^2 > 2\}$
   (a) è un insieme di numeri positivi
   (b) è un insieme di numeri razionali
   (c) contiene l'intervallo $[0, 1/2)$
   (d) $\boxed{\text{contiene numeri positivi}}$
2. L'insieme $\{x \mid x^2 + 2x > 1\}$
   (a) ha per grafico una parabola
   (b) ha solo elementi irrazionali
   (c) contiene tutti i suoi punti di accumulazione
   (d) $\boxed{\text{ha punti di accumulazione che non gli appartengono}}$
3. L'insieme $\{n - 1/n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$
   (a) è superiormente limitato
   (b) è un insieme di numeri positivi
   (c) ammette punti di accumulazione
   (d) $\boxed{\text{è privo di punti di accumulazione}}$
4. L'insieme $\left\{n - \frac{1}{m}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, m \in \mathbb{N}\right\}$
   (a) $\boxed{\text{ha infiniti punti di accumulazione}}$
   (b) è privo di punti di accumulazione
   (c) è limitato
   (d) è vuoto.
5. L'insieme $\{(x, y) \mid y = x + |x|\,,\ x \in \mathbb{R}\}$
   (a) $\boxed{\text{è grafico di funzione}}$

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
Limiti e non solo...

1. **QUESITO**

Data la successione $\{a_n\}$ monotona decrescente illimitata, allora:

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ può non esistere, nè finito nè infinito;

(b) $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

(d) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, con l finito e negativo

(e) nessuna delle risposte precedenti è esatta

2. **QUESITO**

Data la funzione $f(x) = (\sin\sqrt{x})^2$; allora, se $x \to 0$

(a) $f(x) \sim \sqrt{x}$

(b) $f(x) \sim x$

(c) $f(x) \sim x^2$

(d) $f(x) \sim \ln(1+\sqrt{x})$

(e) $f(x) \sim 1 - \cos x$

3. **QUESITO**

La funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-\pi}$, allora

(a) $\lim_{x\to\pi} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} f(-x)$

(c) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \dfrac{e^x-1}{x-\pi}$

(e) $\lim_{x\to\pi} f(x) = -1$

SOLUZIONI ITEM A RISPOSTA MULTIPLA

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Risposta	b	b	e										

(c) $\sqrt[3]{1-\cos x} \asymp \ln(1+\sin x^2),\ x \to 0$ no

(d) $\sqrt{1-\cos x} \asymp x^2,\ x \to 0$ no

(e) $\ln(\cos x) \sim (\cos x - 1),\ x \to 0$

6. **QUESITO**

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) $\sin(2\pi\, e^x) \sim (3\pi\, e^x), x \to 0$ no

~~(b)~~ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\pi\, e^x)}{x} = +\infty$

(c) $\sin(3\pi\, e^x)$ è un infinito del I ordine, per x $\to 0$ no

(d) $\sin(3\pi\, e^x) \sim \sin 3x,\ x \to 0$ no

(e) $\sin(3\pi\, e^x) \asymp \sin 3x,\ x \to 0$ no

SOLUZIONI CONFRONTO LOCALE

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Risposta	d	b	d	b	e	e							

(b) $f'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^4} \sin \dfrac{1}{(1-x)^3}\ e^{\cos \frac{1}{(1-x)^3}}$

(c) $f'(x) = 2e^x \sin x(x-1)$

(d) $f'(x) = -2e^{\cos \dfrac{1}{(x-1)^2}} \cos \dfrac{1}{(x-1)^2}(x-1)^3$

(e) $f'(x) = e^{\sin \dfrac{1}{(x-1)^2}} + \cos \dfrac{1}{(x-1)^2} - 2\dfrac{1}{(x-1)^3}$

6. **QUESITO**

Se $f(x) = 2x + \ln x$, allora l'equazione della retta tangente al grafico della sua funzione inversa f^{-1} nel punto $x_0 = f^{-1}(2)$, è:

(a) $y - 2 = \dfrac{5}{2}(x - 2)$

(b) $y - 1 = 3(x - 2)$

(c) $y = 3(x-1) + 2$

(d) $y = \dfrac{1}{3}(x+1)$

(e) $y = \dfrac{1}{3}(x-2)$

7. **QUESITO**

La derivata della funzione $g(x) = \ln^2(f^3(x) - 3)$

(a) $g'(x) = 2\ln(f(x) - 3)\dfrac{f'(x)}{f^3(x) - 3)}$

(b) $g'(x) = 6 \ln x(f(x)\ f'(x) - 3$

(c) $g'(x) = 2\ln(f^3(x) - 3) + \ln^2(f^3(x) - 3)3f^2(x)$

(d) $g'(x) = 2\ln x(f^3(x) - 3) + 3f^2(x)\ln(f^3(x) - 3)$

(e) $g'(x) = 2\ln(f^3(x) - 3)\dfrac{3f^2(x)f'(x)}{f^3(x) - 3}$

8. **QUESITO**

Sia data la funzione $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, continua e derivabile in $[-2,3]$ e tale che $f(-2) = -1, f(3) = 4, f'(-1) = 3, f'(-2) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) se $f(x)$ è iniettiva e $(f^{-1})'$ è la sua funzione inversa, allora $(f^{-1})'(-1) = 3$

(b) se $f(x)$ è monotona strettamente crescente in $[-2,3]$, allora $f[-2,3] = [-1,4]$

(c) poichè $f(-2)f(3) = -4$, allora esisterà almeno una x_1 in [-2,3] tale che $f(x_1) = 0$

(d) esisterà in $[-2,3]$ almeno un punto c tale che $f'(c) = 1$

(e) se $f(x)$ è iniettiva e $(f^{-1})'$ è la sua funzione inversa, allora $(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{2}$

9. **QUESITO**

La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x\cos x^2$ in $\sqrt{\pi}$ è

(a) $y = -x$

(b) $y = -x + 2\sqrt{\pi}$

(c) $y = -2\pi x + 2\pi\sqrt{\pi}$

(d) $y = 0$

(e) $y = -\sqrt{\pi}x$

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
Calcolo Integrale - funzioni integrali, teorema della media integrale
Alcuni item riguardano le funzioni integrali, che non avete ancora fatto a lezione, ma altri argomenti sono stati affrontati.... cercate...

1. **QUESITO**

   Se a > 0, allora $F(x) = \int_a^{+\infty} (5x)^{-\frac{1}{3}}\ dx \quad =$

   (a) $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$
   (b) $+\infty$
   (c) $(5a)^{-\frac{2}{3}}$
   (d) $(5a)^{\frac{2}{3}}$
   (e) è un numero finito

2. **QUESITO**

   Sia data la funzione $f(x) = \sin x$, quale delle seguenti affermazioni non è corretta?

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\ dx \ = 0$
   (b) l'area della parte di piano racchiusa fra il grafico della funzione e l'asse delle x, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, vale 4
   (c) detto μ il valor medio integrale della funzione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è $\mu = \frac{2}{\pi}$
   (d) detto μ il valor medio integrale della funzione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, $\mu = 0$
   (e) esiste almeno un punto $c \in [-\pi, \pi]$, $f(c) = \mu$

3. **QUESITO**

   Sia data la funzione $f : \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$, allora

   (a) detto μ il valore medio integrale della funzione $\exists$ almeno $c \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] : \mu = f(c)$
   (b) la funzione in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ ammette il massimo e il minimo assoluto
   (c) $\frac{\min f(x)}{2} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\ \ dx \ \leq \frac{\text{Max} f(x)}{2}$
   (d) detto μ il valore medio integrale, $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\ \ dx \ = \frac{\mu}{2}$
   (e) detto μ il valore medio integrale, $-\frac{\text{Max} f(x)}{2} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\ \ dx \ \leq -\frac{\min f(x)}{2}$

4. **QUESITO**

   Se a > 0, allora $F(x) = \int_a^{+\infty} (5x)^{-\frac{1}{3}}\ dx \quad =$

   (a) $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$
   (b) converge
   (c) $(5a)^{-\frac{2}{3}}$
   (d) $(5a)^{\frac{2}{3}}$
   (e) diverge

5. **QUESITO**

   Se a > 0, allora $F(x) = \int_0^{a} (5x)^{-\frac{1}{3}}\ dx \quad =$

(c) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)\,\mathrm{d}x$

(d) $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x-1}\right)$

(e) $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

10. **QUESITO**

Data una funzione continua e derivabile $f : [-1,4] \to \mathbb{R}$, $f(-1) = -6, f(4) = 2, \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 25$, allora

(a) $\exists\, c \in (-1,4),\ f'(c) = 0$

(b) $\exists\, c \in [-1,4],\ f(c) = 5$

(c) $\exists\, c \in [-1,4],\ f(c) = 4$

(d) $\exists\, c \in [-1,4],\ f(c) = 6$

(e) $\exists\, c \in [-1,4],\ f(c) = 0$

11. **QUESITO**

Sia $F(x) = \int_0^x \mathrm{sign}(t-1)\,\mathrm{d}t$; allora F'(1)=

(a) 1

(b) -1

(c) $\nexists$

(d) 0

(e) 2

12. **QUESITO**

Sia $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$, se $x \neq -2$. Allora il grafico di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ha quest'equazione:

(a) $F(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $F(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -2 \\ x & x > -2 \end{cases}$

(c) $F(x) = \begin{cases} -x-2 & x \leq -2 \\ x+2 & x > -2 \end{cases}$

(d) $F(x) = \begin{cases} -x-2 & x \leq -2 \\ 2 & x > -2 \end{cases}$

(e) $F(x) = x + 2$

13. **QUESITO**

Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}$, quale delle affermazioni non è corretta?

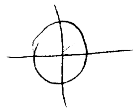
(a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|x+1| + 2\ln(x^2+4x+5) - 7\arctan\,(x+2) + c$

(c) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|x+1| - 7\mathrm{arctan}\,(x+2) + c$

(d) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x - 7\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$



ESERCITAZIONE N° 3
Anno Accademico 2010-2011
19 OTTOBRE 2010
Paola Suria
Numeri complessi - temi presi da temi di esame
Venerdì 29 Ottobre 2010

1. **QUESITO**

Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Allora

$\sqrt{1+3} = 2$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \cos\theta \to \theta = \frac{\pi}{6}$

(a) $|z^3| = z$ NO

(b) z^3 è un numero reale positivo; NO

(c) z^3 è un numero complesso;

(d) z^3 è un numero reale negativo; NO

(e) l'argomento di z^3 è uguale a quello di z NO

$|z| = 2$

$x = \rho \cdot \cos\theta$

$z = \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z^3 = \frac{1}{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

$z^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\underset{\searrow 0}{\cos\frac{\pi}{2}} + i \underset{\searrow 0}{\sin\frac{\pi}{2}} \right)$

2. **QUESITO**

Considerato $z \in \mathbb{C}$ allora:

(a) $z - \overline{z}$ è un numero reale

(b) $|z-1| = \begin{cases} z-1 & \text{se } z-1 \geq 0 \\ -z+1 & \text{se } z-1 < 0 \end{cases}$

(c) l'argomento di z e $\overline{z}$ sono supplementari

(d) $z \cdot \overline{z} = z^2$

(e) z ha lo stesso modulo di $\overline{z}$

3. **QUESITO**

Dato $z \in \mathbb{C}$ se $z^3 = |\overline{z}|^2$, allora

(a) l'unico numero complesso che soddsfa la condizione è z=0

(b) deve essere $\rho^3 = \rho^2$ e quindi $\rho = 0$

(c) z^3 è un numero reale positivo

(d) soddisfano la condizione tutti i numeri complessi che stanno sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

(e) solo il numero complesso $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ soddisfa la condizione.

4. **QUESITO**

Dato il numero $z \in \mathbb{C}$ allora:

$e^{i\theta} = i e^{-i\theta}$

(a) $\text{Arg}(\overline{z}) = \text{Arg}(1/z)$

(b) $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$

(c) i numeri z che soddisfano la condizione $z = i\overline{z}$ sono quelli con $\mathcal{I}m(z) = 0$;

(d) i numeri z che soddisfano la condizione $z + \overline{z} = i$ sono quelli con $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$;

(e) i numeri z che soddisfano la condizione $\overline{z} = -\frac{1}{z}$ sono $\{i, -i\}$

5. **QUESITO**

Dato $\sqrt[3]{8i}$

$z = \sqrt[3]{8i}$ $\qquad$ $|z| = 2$ $\qquad$ $z = 2i$ $\qquad$ $b = \rho \cdot \sin\theta$

$\rho \cdot e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\qquad$ $k = 0, 1, 2$ $\qquad$ $\frac{b}{\rho} = \sin\theta$

(a) una delle radici è $2i$

(b) una delle radici è $\sqrt{3} + i$

(c) due radici sono tra loro coniugate

(d) le tre radici sono vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza $\rho = 1$

(e) una delle radici è $1 - i$

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
Riepilogo

1. **QUESITO**

   Sia $z = \dfrac{1+i}{1-i}$; allora z^{47} è:

   (a) $1-i$
   (b) i
   (c) 1
   (d) $-i$
   (e) $1+i$

2. **QUESITO**

   Sia $f(x) = \ln(3^x + 1)$; allora:

   (a) ha asintoto obliquo $y = x + 1$
   (b) non ha asintoto obliquo
   (c) ha asintoto obliquo $y = x \ln 3$, per $x \to +\infty$
   (d) $y = x \ln 3$ è asintoto obliquo completo
   (e) $y = 0$ è asintoto orizzontale completo

3. **QUESITO**

   Sia $f(x) = -x^2$, con $x \in [0, +\infty)$, allora la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è:

   (a) $x = \sqrt{y}$
   (b) $x = \sqrt{-y}$
   (c) $x = -\sqrt{-y}$
   (d) $x = -\sqrt{y}$
   (e) non esite perchè la funzione è pari

4. **QUESITO**

   Sia $f(x) = \sin^2 \sqrt{x}$ allora, per $x \to 0$:

   (a) $f(x) \sim \sqrt{x}$
   (b) $f(x) \sim x$
   (c) $f(x) \sim (1 - \cos \sqrt{x})$
   (d) $f(x) \sim \ln(1 + \sqrt{x})$
   (e) $(\sqrt{x}) = o(f(x))$

5. **QUESITO**

   Per $x \to +\infty$ quale delle seguenti affermazioni non è vera?

   (a) $\sinh x \sim \cosh x$
   (b) $\dfrac{e^x}{2} \sim (\cosh x)$
   (c) $\dfrac{e^x}{2} \sim (\sinh x)$
   (d) $\tanh x = o(\sinh x)$
   (e) $\tanh x \sim \sinh x$

SOLUZIONI ITEM A RISPOSTA MULTIPLA
Test Riepilogo

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta	d	c	b	b	e	d	e	a	d	c

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 342

(e) $+\infty$

6. **QUESITO**

   Il massimo della funzione $f(x) = \ln\left(2 + \frac{1}{1+x^2}\right)$ è

   (a) $\ln 4$
   (b) $-\infty$
   (c) $\ln 2$
   (d) $\ln 3$
   (e) la funzione non è inferiormente limitata

7. **QUESITO**

   Quale delle seguenti proprietà non è soddisfatta dalla funzione $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$

   (a) si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo [0,2]
   (b) si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo [0,2]
   (c) il punto di Lagrange nell'intervallo [0,2] è $x = \frac{2}{3}$
   (d) il punto di Rolle nell'intervallo [0,2] è $x = \frac{2}{3}$
   (e) non si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo [0,2]

8. **QUESITO**

   L'estremo inferiore della funzione $f(x) = \ln\left(2 + \frac{1}{1+x^2}\right)$ è

   (a) $\ln 4$
   (b) $-\infty$
   (c) $\ln 2$
   (d) $\ln 3$
   (e) la funzione non è inferiormente limitata

9. **QUESITO**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $x_0 \in \mathbb{R}$, per l'esistenza di un punto di flesso, a tangente orizzontale, la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

   (a) condizione sufficiente
   (b) condizione necessaria e sufficiente
   (c) condizione necessaria
   (d) nè necessaria nè sufficiente
   (e) condizione solo necessaria

10. **QUESITO**

    Quale delle affermazioni seguenti è falsa: la funzione $f(x) = x\sqrt{x}$

    (a) ha un punto di non derivabilità in x=0
    (b) ha dominio $[0, +\infty)$
    (c) è continua e derivabile nel suo dominio
    (d) è infinita di ordine $\frac{3}{2}$, per $x \to +\infty$
    (e) $f'(0) = 0$

11. **QUESITO** Quale delle affermazioni seguenti è vera per la funzione $f(x) = (x+2)\sqrt{x}$

(a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$

(b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

(c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$

(e) $\lim_{x \to 5} f(x) = +\infty$

17. **QUESITO**

Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5\}$, allora:

(a) A è vuoto

(b) Sup $(A) < \sqrt{5}$

(c) in A c'è il minimo

(d) Sup $(A) = \sqrt{5}$

(e) minimo di A è $-\sqrt{5}$

18. **QUESITO**

Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 5\}$, allora:

(a) A ammette il massimo

(b) in A c'è il minimo

(c) Sup $(A) = \text{Max}(A)$

(d) Sup $(A) < \sqrt{5}$

(e) Sup $(A) = \sqrt{5}$

19. **QUESITO**

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(2x - x^2) - 4x^2}{\ln(3 + x^4) - \ln 3}$ vale

(a) $+\infty$

(b) 0

(c) -28

(d) 2

(e) 28

20. **QUESITO**

Quale delle seguenti affermazioni è vera per la funzione $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(a) è possibile applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$

(b) è possibile applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, \dfrac{1}{4}]$

(c) la funzione non è continua in $x = 0$

(d) la funzione ha un punto di non derivabilità

(e) la funzione è continua e derivabile nel suo dominio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 342

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
RIEPILOGO 2

1. **QUESITO**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $x_0 \in \mathbb{R}$, per l'esistenza di un punto di stazionarietà la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

   (a) condizione sufficiente
   (b) condizione necessaria e sufficiente
   (c) condizione necessaria
   (d) nè necessaria nè sufficiente
   (e) condizione solo necessaria, ma non sufficiente

2. **QUESITO**

   L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x = -\sin \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$

   (a) non è limitato
   (b) ha minimo
   (c) ha massimo
   (d) ha massimo e minimo
   (e) il massimo è $\pi/2$

3. **QUESITO**

   Sia $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, tale che $|z| > 1$. Allora, necessariamente, le radici quadrate di z, w_1 e w_2 hanno:

   (a) modulo maggior di $|z|$
   (b) modulo uguale a $|z|$
   (c) $Re(w_1) = Re(w_2) = 0$
   (d) $Re(w_1) \neq -Re(w_2)$
   (e) modulo minore di $|z|$

4. **QUESITO**

   Quante radici reali positive ha l'equazione $x^5 + 3x^3 + 2x + 7 = 0$

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) 5

5. **QUESITO**

   Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $fx) = e^x - \lambda - \sin x$, per quale valore del parametro reale λ si ha $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$?

   (a) 0
   (b) nessun valore di λ
   (c) 1
   (d) -1

(a) $f'(0) = 0$

(b) è infinita di ordine $\frac{1}{2}$, per $x \to +\infty$

(c) è continua e derivabile nel suo dominio

(d) è infinitesima di ordine $\frac{3}{2}$, per $x \to 0$

(e) ha un punto di non derivabilità in x=0

12. **QUESITO**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e $x_0 \in \mathbb{R}$, per l'esistenza di un punto di massimo relativo la condizione $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ è:

(a) condizione sufficiente

(b) condizione necessaria e sufficiente

(c) condizione necessaria

(d) nè necessaria nè sufficiente

(e) è condizione indispensabile

13. **QUESITO**

Se θ è l'argmento del numero complesso z, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, allora l'argomento di $\frac{1}{z}$, (a meno di multipli di 2π) è

(a) -2θ

(b) $\pi - \theta$

(c) $-\theta + \dfrac{\pi}{2}$

(d) $-\theta$

(e) θ

14. **QUESITO**

Il grafico della funzione $\dfrac{x}{|\sin x|}$ è:

(a) è uguale al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(b) è la retta parallela all'asse x di equazione $y = 1$

(c) è confrontabile con il grafico di $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, in un intorno di $x = 0$

(d) è la retta parallela all'asse x di equazione $y = -1$ se $x < 0$ e $y = 1$ se $x \geq 0$

(e) ha un punto angoloso in $x = 0$

15. **QUESITO**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La condizione $\forall a > 0\ \exists b > 0$ tale che $x > b \Rightarrow |f(x) - 5| < a$ definisce

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

(e) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$

16. **QUESITO**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La condizione $M = 10^{-5}\ \exists \epsilon$ tale che $x < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 5| < M$ definisce

(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 5

22. **QUESITO**

Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$, allora:

(a) A è vuoto
(b) Sup $(A) < \sqrt{5}$
(c) in A c'è il minimo
(d) Sup $(A) = \sqrt{5}$
(e) minimo di A è $-\sqrt{5}$

23. **QUESITO**

Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 5\}$, quale relazione non è vera:

(a) A ammette il massimo
(b) in A c'è il minimo
(c) Sup $(A) = \text{Max}(A)$
(d) Sup $(A) < \sqrt{5}$
(e) Sup $(A) = \sqrt{5}$

24. **QUESITO**

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(2x - x^3) - 4x^2}{\ln(3 + x^4) - \ln 3}$ vale

(a) $\nexists$
(b) 0
(c) -28
(d) 2
(e) 28

la risposta corretta è la c

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
ERRATA CORRIGE RIEPILOGO 2

1. **QUESITO**
   OK
2. **QUESITO**
   OK
3. **QUESITO**
   OK
4. **QUESITO**
   Quante radici reali positive ha l'equazione $x^5 + 3x^3 + 2x + 7 = 0$
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) 5

   è sbagliato il testo oppure è sbagliata la risposta:

   - l'equazione non può avere soluzioni positive perché essendoci solo + +. +..,. qualsiasi numero positivo si metta, il risultato è positivo. Esempio x=0.. ottengo 7; x=1 ottengo 1+..... Quindi così come è formulato l'enunciato la risposta esatta è la a. Se invece cambio enunciato e dico quanti zeri può ammettere... allora 1, come spiegato anche nelle indicazioni.
5. **QUESITO**
   OK
6. **QUESITO**
   OK
7. **QUESITO**
   OK
8. **QUESITO**
   OK
9. **QUESITO**
   OK
10. **QUESITO**
    OK
11. **QUESITO**
    OK
12. **QUESITO**
    OK

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 342

SOLUZIONI ITEM A RISPOSTA MULTIPLA
Test RIEPILOGO 2

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Risposta	b	b	a	c	c	d	e	c	e	a	e	a	e	c	d	a	d	e	a	d

CONSIGLI PER LA RISOLUZIONE
Test RIEPILOGO 2

1. - Quesito 3

   La risposta c è vera solo se z è reale negativo. Le radici quadrate di un numero complesso (come caso particolare z può essere reale) hanno sempre $Re(w_1) = -Re(w_2), Im(w_1) = -Im(w_2)$. Le radici quadrate di un numero complesso sono gli estremi di un diametro (poligono di due lati..) della circonferenza con $r = \sqrt{|z|}$

2. - Quesito n° 4

   Posto $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 7$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,....., allora esiste almeno uno zero di $f(x)$. poichè la funzione è monotona ... e poichè $f(0) = 7$

3. - Quesito n° 6

   Si consiglia di calcolare i limiti agli estremi del dominio e la monotonia

4. - Quesito n° 12

   Esistono punti di massimo relativo (non si dice punto di massimo stazionario..) in cui la funzione non è derivabile: pensate alla funzione $f(x) = -|x| + 1$ oppure pensate alla funzione $f(x) = x^2$ considerata in un intervallo come $[-1, 2]$, oppure esistono funzioni funzioni come $f(x) = -x^4$ per le quali $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ ....

5. - Quesito n°18

   $\sqrt{5}$ è numero irrazionale e perciò non appariene a Q.

   - Se l'insieme A fosse di numeri x appartenenti ad $\mathbb{R}$ e la disequazione fosse debole (minore o uguale), allora A ammetterebbe sia massimo sia minimo.

   - Se l'insieme A fosse di numeri x appartenenti ad $\mathbb{R}$ e la disequazione fosse forte (minore), allora A ammetterebbe sup e inf e non max e min.

   - Con x numero razionale l'insieme A ammette sup, sia in presenza di disequazione forte sia debole, in nessun caso max o min!

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : \left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right)$
(b) $\forall x \in \mathbb{R} : \left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : (-\infty, 4)$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : [1,\ 5)$
(e) $\forall x \in \mathbb{R} : \left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

7. **QUESITO** se $z = e^{i\pi/6}$, allora $|z^2| =$

(a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$
(c) $e^{i\pi/3}$
(d) 1
(e) -1

8. **QUESITO**

$\lim_{x\to+\infty}(5x-2)\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right) =$

(a) $+\infty$
(b) 0
(c) $\nexists$
(d) 5
(e) -5

9. **QUESITO** $\lim_{x\to+\infty}(3x-4)\sin\frac{1}{x} =$

(a) $+\infty$
(b) -3
(c) 3
(d) $-\infty$
(e) $\nexists$

10. **QUESITO**

L'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano alla condizione $|z| = |z+1|$ è:

(a) una retta parallella all'asse immaginario
(b) una retta parallela alla bisettrice del I e III quadrante
(c) una retta parallela all'asse reale
(d) una circoferenza di raggio 1 e centro l'origine
(e) i punti di intersezione tra la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e la circonferenza di centro (-1,0) e raggio 1

11. **QUESITO**

Il polinomio di Taylor di grado due e centro x=1 della funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ è:

(a) $-\pi(x-1)$
(b) $-\pi(x-1) + o(x-1)$
(c) $-\pi(x-1) + o(x-1)^2$
(d) $-\pi x$
(e) $-\pi(x-1) + \pi^2(x-1)^2$

12. **QUESITO**

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente; allora f^{-1}

(a) una delle soluzioni è immaginaria negativa
(b) è soluzione $w = -\sqrt[3]{2}i$
(c) le tre soluzioni sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 1
(d) $\mathcal{R}e(w_1) = -\mathcal{R}e(w_2)$
(e) è soluzione $w = \sqrt[3]{2}(\sqrt{3} + i)$

19. **QUESITO**
I primi due termini dello sviluppo di Mac Laurin di $f(x) = \sin^2 x$ sono:

(a) $x^2 - \dfrac{x^3}{6}$
(b) $x - \dfrac{x^3}{6}$
(c) $x^2 - \dfrac{x^4}{3}$
(d) $x^2 + \dfrac{x^6}{36}$
(e) $x^2 - \dfrac{x^4}{3!}$

20. **QUESITO**
I primi due termini dello sviluppo di Mac Laurin di $f(x) = \sin(x - x^3)$ sono:

(a) $x - x^3$
(b) $x - \dfrac{x^3}{3!}$
(c) $x - \dfrac{x^3}{3}$
(d) $x^3 - \dfrac{x^6}{3!}$
(e) $x - \dfrac{7}{6}x^3$

SOLUZIONI ITEM A RISPOSTA MULTIPLA
Test Riepilogo 3

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Risposta	e	e	a	a	c	e	d	e	c	c	a	c	c	b	b	a	e	c	c	e

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 342

(d) $f(g(x)) = 5 - x$
(e) $im(g^\circ f) = [0, +\infty)$

7. **QUESITO**

Quale delle affermazioni seguenti non è soddisfatta dalla funzione $f(x) = \begin{cases} \cos|x| & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$

(a) si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[-\pi/2, 1]$
(b) il punto di Rolle, nell'intervallo cercato, è x=0
(c) si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}]$
(d) in x=0 la funzione è *continua, ma non derivabile*
(e) $f'(0) = 0$

8. **QUESITO**

Sia data la funzione $f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$, derivabile in [-3,4] e tale che: $f(-3) = -2$, $f(4) = 3$, $f'(-3) = 2$, $f'(-2) = -5$, $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = 28$. Quale delle seguenti affermazioni non è necessariamente vera?

(a) $\exists$ almeno una $\overline{x} \in [-3, 4] \backslash\ f(\overline{x}) = 4$
(b) $\exists$ almeno una $\overline{x} \in [-3, 4] \backslash\ f(\overline{x}) = \pi$
(c) $\exists$ almeno una $\overline{x} \in (-3, 4) \backslash\ f(\overline{x}) = 0$
(d) $(f^{-1})'_{y=-2} = \dfrac{1}{2}$
(e) $f[-3, 4] = [-2, 4]$

9. **QUESITO**

Sia $f(x) = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. Allora quale delle seguenti affermazioni non è vera?

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
(c) La funzione è monotona decrescente nel suo dominio
(d) $f[-1, 2]$ è un intervallo chiuso e limitato
(e) $f(x)$ non è invertibile in $\mathbb{R}$

10. **QUESITO**

Se $z = a + ib$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\backslash 0$ è una radice doppia del polinomio p(X) $\in \mathbb{R}$ (a coefficienti reali), allora

(a) il polinomio ha grado almeno 2
(b) il polinomio ha grado 4
(c) se il polinomio non ha termine noto, allora il suo grado è maggiore o uguale a 5
(d) il polinomio può essere riscritto come prodotto di due polinomi di II grado
(e) poiché ha coefficienti reali le soluzioni dell'equazione associata devono essere tutte reali.

11. **QUESITO**

Sia data l'equazione $3z^4 = i$. Quale delle seguenti affermazioni non è corretta?

(a) le soluzioni dell'equazione, sul piano di Gauss, sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
(b) una delle soluzioni è il numero $w = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} e^{i\frac{\pi}{8}}$
(c) le radici sono a due a due complesse coniugate
(d) le radici hanno, a due a due, parte reale e parte immaginaria opposte
(e) gli argomenti delle radici differiscono uno dall'altro di $\dfrac{\pi}{2}$ meno di multipli di 2π.

12. **QUESITO**

Sia data la funzione $f(x) = \ln(e^x + 1)$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 342

Esercizi in preparazione del test finale
Anno Accademico 2010 - 2011
Prof.ssa Paola Suria
RIEPIOGO 6

1. **QUESITO**

   Data la successione $\{a_n\}$ monotona decrescente illimitata, allora:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ può non esistere, né finito né infinito; NO

   (b) $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ NO

   ~~(c)~~ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$,

   (d) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, con l finito e negativo NO

   (e) nessuna delle risposte precedenti è esatta

2. **QUESITO**

   Data la funzione $f(x) = (\sin\sqrt{x})^2$; allora, se $x \to 0^+$

   (a) $f(x) \sim \sqrt{x}$

   ~~(b)~~ $f(x) \sim x$,

   (c) $f(x) \sim x^2$

   (d) $f(x) \sim \ln(1+\sqrt{x})$

   (e) $f(x) \sim 1 - \cos x$

   $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\sqrt{x})^2 \sim x$

3. **QUESITO**

   La funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-\pi}$, allora

   ~~(a)~~ $\lim_{x\to\pi} f(x) = 1$

   (b) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} f(-x)$

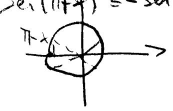
   (c) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$

   (d) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \dfrac{e^x - 1}{x-\pi}$

   (e) $\lim_{x\to\pi} f(x) = -1$

   $\lim_{x\to\pi} -\dfrac{\text{sen}\, x}{(x-\pi)}$ $(\pi - x)$

   $\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\, x$

   $x - \pi = t \to x = t + \pi$

   $x \to 0,\ t \to 0$

   $\lim_{t\to 0} + \dfrac{\text{sen}\, t}{t} = 1$

4. **QUESITO**

   Sia data la funzione $f : [-1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2x|$. Quale delle seguenti affermazioni non è corretta?

   ~~(a)~~ nell'intervallo $[-1,3]$ soddisfa alle condizioni del teorema di Rolle NO

   (b) nell'intervallo $[-1,3]$ soddisfa alle condizioni del teorema di Weiestrass ·

   (c) nell'intervallo $[0,2]$ soddisfa alle condizioni del teorema di Rolle ·

   (d) $f[-1,3]$ è un intervallo ·

   (e) $\exists f^{-1}(e) \in [-1,3]$

5. **QUESITO**

   Sia data la funzione $f : [-1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2x|$. Quale delle seguenti affermazioni non è corretta?

   (a) $f[0,2] = [0,1]$ OK

   (b) $f^{-1}[0,1] \neq [0,2]$ OK

   ~~(c)~~ in $[-1,3]$ $\nexists\, \overline{x} \backslash\ f'(\overline{x}) = 0$ ·

   (d) $f^{-1}(1) = \{1, x_1, x_2\}$ OK

   (e) il minimo assoluto non è punto critico OK

6. **QUESITO**

   Data l'equazione $z^2 - 2\overline{z} = 0$, quale delle seguenti affermazioni non è corretta?

   (a) è un'equazione che ammette 4 soluzioni: due reali e due complesse coniugate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 342

(a) ammette, indipendentemete dal valore dei coefficienti, la radice x=0 √

(b) se a, b, c, d sono reali, allora se ammette una radice complessa ammette anche la complessa coniugata con la setssa molteplicità √

(c) è possibile scegliere a, b, c, d $\in$ IR in modo che abbia $1-2i$ come radice semplice

(d) se i coefficienti sono reali, $1-2i$ è radice semplice e $d \neq 0$, allora deve anche ammettere un'altra radice reale, non nulla.

(e) è possibile scegliere a, b, c, d in IRin modo che abbia $1-2i$ come radice doppia

13. **QUESITO**

Consideriamo la disequazione $Re(i^{2011}e^{z+i}) > 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) le soluzioni sono $\forall x, -1+2k\pi < y < -1+\pi+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(b) sono soluzione tutte le y tali che $-1 < y < -1 + 2\pi$, qualsiasi x

(c) le soluzioni, rappresentate sul piano di Gauss, sono strisce di piano parallele all'asse immaginario, di ampiezza 2π

(d) soddisfano la condizione tutti i punti dell'asse reale

(e) le soluzioni, rappresentate sul piano di Gauss, sono strisce di piano delimitate da rette parallele all'asse reale, distanti tra loro di 2π

14. **QUESITO**

Data l'equazione $z^2 - z + 1 = 0$, allora quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) ammette due soluzioni simmetriche rispetto all'origine, sul piano di Gauss

(b) le soluzioni sono due numeri complessi coniugati

(c) è soluzione $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(d) se amette una soluzione complessa deve ammettere la sua complessa coniugata

(e) è soluzione $z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

15. **QUESITO**

Quale delle seguenti affermazioni non è vera:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n-2}} = 1$ OK $\sim \to \sqrt[n]{\frac{2n}{3n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3n-2}} = 1$ NO $\sim \sqrt[n]{\frac{2n^2}{3n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{3}n}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3n^3-2}} = 1$

(d) $\lim_{n\to-\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n-2}} = 1$

(e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3n-2}} = 1$

SOLUZIONI ITEM A RISPOSTA MULTIPLA
Test RIEPIOGO 6

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Risposta	c	b	~~c~~	a	c	b	~~d~~	~~c~~	~~e~~	~~a~~	a	~~e~~	c	~~a~~	d
	OK	OK		OK	OK	OK					OK		OK		OK

Test di prova 1

1. Se A, $B \subset \mathbf{R}$, e $A \subset B$ allora

   (a) $\inf A > \inf B$
   (b) $\inf A \leq \inf B$
   (c) $\inf A < \inf B$
   (d) $\inf A = \inf B$
   (e) $\inf A \geq \inf B$

2. La funzione $f(x) = \cos x + e^x$

   (a) è pari
   (b) ha infiniti zeri
   (c) è iniettiva
   (d) è monotona su $\mathbf{R}$
   (e) è periodica

3. Dati gli insiemi $A = \{z \in \mathbf{C} : |z - i| < 1\}$ e $B = \{z \in \mathbf{C} : \mathbf{Re}(z + i) > 5\}$, è vero che

   (a) $A \cup B$ è tutto il piano complesso
   (b) $B \setminus A = A \setminus B$
   (c) $A \cap B = \emptyset$
   (d) $A \subseteq B$
   (e) $A = B$

4. Un polinomio a coefficienti reali che ha tra le sue radici i numeri 0 e $2 + i$

   (a) ha grado 2
   (b) ha grado maggiore o uguale a 3
   (c) ha grado strettamente minore di 3
   (d) ha grado 4
   (e) ha grado pari

5. Il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sin \sqrt[7]{x}}\, dx$ vale

   (a) 1
   (b) $+\infty$
   (c) 0
   (d) -1
   (e) e

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$. Allora

   (a) $f(2) = 1$
   (b) $\forall \delta > 0$ se $|x - 2| < \delta$ allora $f(x) > 0$
   (c) $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - 2| < \delta$ allora $|f(x) - 1| < \delta$

12. Sia $f(x) = 2^{x \sin x}$. Allora

    (a) $f'(x) = 2^{x \sin x}(\sin x + x \cos x)$
    (b) $f'(x) = 2^{x \sin x}$
    (c) $f'(x) = 2^{x \sin x} x \cos x$
    (d) $f'(x) = 2^{x \sin x}(\sin x + x \cos x) \log 2$
    (e) $f'(x) = 2^{x \sin x} \log 2$

13. Date le funzioni f, g, il rapporto incrementale della funzione prodotto $f \cdot g$ tra i punti x e x_0 è

    (a) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$
    (b) $f(x_0) \cdot \dfrac{g(x) - \dot{g}(x_0)}{x - x_0}$
    (c) $g(x_0) \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
    (d) $\dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$
    (e) $\dfrac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$

14. Se $f(x_0) = 0$ e x_0 è un punto angoloso di f, allora $g(x) = (x - x_0)f(x)$

    (a) è derivabile in x_0
    (b) ha un punto di cuspide in x_0
    (c) ha un punto di angoloso in x_0
    (d) non è derivabile in x_0
    (e) è discontinua in x_0

15. Se $f(2) = 1$ e $f'(2) = 3$ allora

    (a) $(f^{-1})'(2) = 3$
    (b) $(f^{-1})'(3) = 1$
    (c) $(f^{-1})'(1) = 1/3$
    (d) $(f^{-1})'(1) = 1/2$
    (e) $(f^{-1})'(3) = 2$

16. Sia $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \neq 1$, e $f(x) = \alpha$ se $x = 1$, con α parametro reale. Allora f assume tutti i valori compresi tra 0 e 2

    (a) se e solo se $\alpha = 0$
    (b) se e solo se $\alpha = 1$
    (c) se e solo se $\alpha = 2$
    (d) se e solo se $0 \leq \alpha \leq 4$
    (e) se e solo se $0 \leq \alpha \leq 2$

17. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua su $\mathbf{R}$. Sia inoltre decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$. Allora

    (a) $f(\mathbf{R})$ non è un intervallo
    (b) $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 342

Calcolo differenziale
Test di autovalutazione

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 tale che $f(0) = f'(0) = 0$. Si consideri la funzione $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sin x}$. Allora, necessariamente

   (a) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

   (b) $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$

   (c) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$

   (d) $\lim_{x\to 0} g(x) = \pi$

2. Data $f(x) = |2x| - x$, si può affermare che

   (a) f non è continua su $\mathbb{R}$

   (b) f ha un punto di minimo

   (c) esiste un intervallo in cui f è negativa

   (d) poiché $f(1) = f(-\frac{1}{3}) = 1$, esiste un punto $c \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ in cui $f'(c) = 0$

3. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se} \quad x \le 0\,, \\ -3x - 2 & \text{se} \quad x > 0\,, \end{cases}$$
   si può affermare che

   (a) $f'(x) = -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   (b) la derivata laterale destra di $f(x)$ in $x = 0$ vale -3

   (c) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = -1$

   (d) la funzione f' è definita su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

4. La derivata prima della funzione $f(x) = \dfrac{\ln(2x) - e^{-x}}{\sin^2 x}$ è la funzione

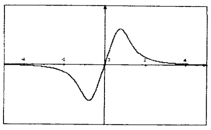
   (a) $f'(x) = \dfrac{\frac{\sin x}{x} + e^{-x}\sin x - 2\cos x \ln(2x) + 2e^{-x}\cos x}{\sin^3 x}$

   (b) $f'(x) = \dfrac{(\frac{1}{x} + e^{-x})\sin^2 x - (\ln(2x) - e^{-x})2\sin x}{\sin^4 x}$

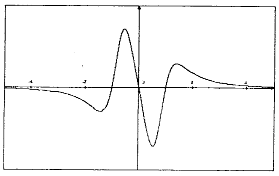
   (c) $f'(x) = \dfrac{(\frac{1}{2x} + e^{-x})\sin^2 x - (\ln(2x) - e^{-x})2\sin x \cos x}{\sin^4 x}$

   (d) $f'(x) = \dfrac{(\frac{1}{2x} + e^{-x})\sin^2 x - (\ln(2x) - e^{-x})2\sin x}{\sin^4 x}$

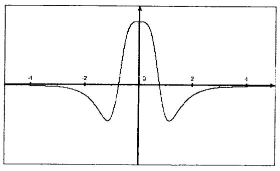
9. Data la funzione $f(x)$ di grafico



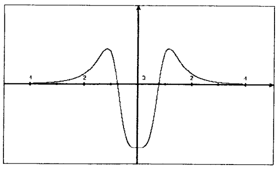
il grafico della funzione derivata $f'(x)$ è:



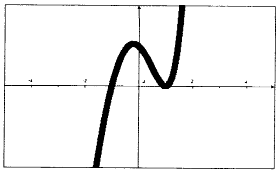
(a)



(b)



(c)



(d)

10. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora la funzione $g(x)=|f(x)|$
    - (a) non è mai derivabile
    - (b) è derivabile se e solo se $f(x)\geq 0\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}$
    - (c) se $f'(0)=0$, allora $g(x)$ è derivabile
    - (d) se $f(x)$ non ha zeri, allora $g(x)$ è derivabile

11. Sia data la funzione $f(x)=\dfrac{e^x}{|x|-1}$. Allora
    - (a) non ha asintoti orizzontali
    - (b) ad essa si può applicare il Teorema di Rolle in $[2,5]$
    - (c) è derivabile in $x_0=0$
    - (d) è continua in $x_0=0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 342

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in 0 tale che $f(0) = f'(0) = 0$. Si consideri la funzione $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sin x}$. Allora, necessariamente

   (a) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

   (b) $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$

   (c) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$

   (d) $\lim_{x\to 0} g(x) = \pi$

   RISPOSTA ESATTA: (a)

   Risulta
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} := f'(0) = 0.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se} \quad x \leq 0\,, \\ -3x-2 & \text{se} \quad x > 0\,, \end{cases}$$

si può affermare che

(a) $f'(x) = -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) la derivata laterale destra di $f(x)$ in $x = 0$ vale -3

(c) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = -1$

(d) la funzione f' è definita su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

RISPOSTA ESATTA: (d)

La funzione è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, tranne che in $x = 0$ (dove non è continua), e si ha $f'(x) = -3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quindi (d) è vera e (a) è falsa.

La risposta (c) è falsa, perché $f(x)$ ha un salto in $x = 0$ e $\operatorname{im} f = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$. Pertanto f non assume il valore -1.

La (b) è errata, perché non esiste la derivata laterale destra in $x = 0$; infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x-2}{x} = -\infty\,.$$

5. Sia f continua sull'intervallo $[-1, 1]$ tale che $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Allora:

   (a) se $f \in C^{(2)}((-1, 1))$ allora esiste almeno un punto $c \in (-1, 1)$ in cui $f''(c) = 0$

   (b) f è necessariamente derivabile in $(-1, 1)$

   (c) se $f(-\frac{1}{2}) > 0$ allora $f(\frac{1}{2}) < 0$

   (d) esiste un intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$ in cui f è strettamente decrescente.

RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti, se la funzione f è derivabile in $(-1, 1)$, per il Teorema di Rolle, essendo $f(-1) = f(0)$ esisterà un punto $x_1 \in (-1, 0)$ in cui $f'(x_1) = 0$; analogamente, essendo $f(0) = f(1)$ esisterà un punto $x_2 \in (0, 1)$ in cui $f'(x_2) = 0$.

Poiché $f'(x_1) = f'(x_2)$, se f è derivabile due volte in $(-1, 1)$, applicando il Teorema di Rolle ad f' sull'intervallo $[x_1, x_2]$ si troverà un punto $c \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$ in cui $f''(c) = 0$.

La funzione $f(x) = |\sin(\pi x)|$ fornisce un controesempio che mostra la falsità della (b) e della (c).

La (d) è falsa: si consideri la funzione $f(x)$ identicamente nulla.

7. È data la funzione $f(x) = [1 + \ln(3x)]e^{-x}$. Allora

   (a) $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2e^{-1/3}$

   (b) $f'(1) = 0$

   (c) $f'(1) = \left(-\dfrac{2}{3} - \ln 3\right) e^{-1}$

   (d) $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

RISPOSTA ESATTA: (a)

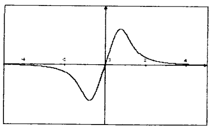
È sufficiente calcolare

$$f'(x) = \frac{1}{x}e^{-x} - e^{-x}[1 + \ln(3x)] = e^{-x}\left[\frac{1}{x} - 1 - \ln(3x)\right]$$

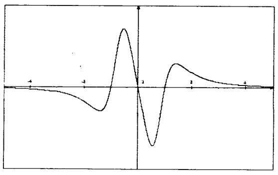
da cui si ha $f'(1) = e^{-1}(-\ln 3)$ e $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2e^{-1/3}$.

Pertanto le risposte (b), (c) e (d) sono false mentre la risposta (a) è vera.

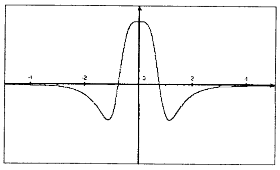
9. Data la funzione $f(x)$ di grafico



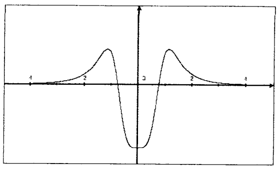
il grafico della funzione derivata $f'(x)$ è:



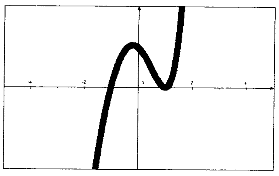
(a)



(b)



(c)



(d)

RISPOSTA ESATTA: (b)

Dal grafico assegnato si osserva che $f(x)$ è dispari, e pertanto $f'(x)$ è pari; dunque le risposte (a) e (c) sono da scartare.

Si osserva inoltre che la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 0$ ha coefficiente angolare positivo, e quindi $f'(0) > 0$; pertanto (b) è esatta mentre (c) è errata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 342

11. Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{|x|-1}$. Allora

(a) non ha asintoti orizzontali

(b) ad essa si può applicare il Teorema di Rolle in $[2, 5]$

(c) è derivabile in $x_0 = 0$

(d) è continua in $x_0 = 0$

RISPOSTA ESATTA: (d)

La (a) è errata in quanto $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro.

La risposta (b) è errata in quanto $f(2) \neq f(5)$.

f è continua in $x_0 = 0$ in quanto $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -1$.

Per vedere se f è derivabile calcoliamo la derivata di f, tenendo conto che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{-x-1}, & \text{se } x < 0,\ x \neq -1\,, \\ \dfrac{e^x}{x-1}, & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1\,, \end{cases}$$

e pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-xe^x}{(x+1)^2}, & \text{se } x < 0,\ x \neq -1\,, \\ \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, & \text{se } x > 0,\ x \neq 1\,. \end{cases}$$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, f non è derivabile in $x_0 = 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 342

INTEGRALI

Test di autovalutazione

1. Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$, e F una primitiva di f tale che $F(2) = 5$. Allora necessariamente:
   (a) esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = \int_2^x f(t)\, dt$
   (c) non è detto che F sia derivabile in $x_0 = 2$
   (d) $F(x) = 5 + \int_2^x f(t)\, dt$

2. Sia $F(x) = x^2 + e^x + 1$ una primitiva di $f(x)$. Allora necessariamente:
   (a) $f(x) = \int_1^x F(t)\, dt$
   (b) $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$
   (c) non esiste nessun valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$
   (d) $f(x) = 2x + e^x + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

3. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_5^x \sqrt{t^2 - 9}\, dt$. Allora:
   (a) $(F^{\;1})'(0) = \frac{1}{4}$
   (b) la tangente al grafico di F nel punto $x_0 = 5$ ha equazione $y = 5 + 4(x - 5)$
   (c) F ha un punto critico in $x_0 = 5$
   (d) F è invertibile su $\mathbb{R}$

4. Se $A = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^5}\, dx$, allora:
   (a) $A = 2 \int_0^1 \sqrt[3]{x^5}\, dx$
   (b) $A = 0$
   (c) $A = \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}}$
   (d) $A = x \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\, dx$

9. L'integrale $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\mathrm{d}x$
   (a) ha un valore finito
   (b) diverge
   (c) rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$ e l'asse delle x, per $x \in [0,9)$
   (d) poiché l'integrale $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, converge anche l'integrale $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\mathrm{d}x$

10. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   (a) è convergente, ma non assolutamente convergente
   (b) è assolutamente convergente
   (c) è oscillante
   (d) è divergente

11. Sia f una funzione continua sull'intervallo I$=[2,+\infty[$.
   (a) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ allora f è integrabile impropriamente su I
   (b) Se f non è integrabile impropriamente su I, neppure $|f|$ lo è
   (c) Se f è integrabile impropriamente su I, anche $|f|$ lo è
   (d) Se f è integrabile impropriamente su I, allora f ha ordine di infinitesimo $k>1$ per $x\to+\infty$

12. Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$, positiva e limitata su $\mathbb{R}$, il cui sviluppo di Maclaurin di ordine 3 è $f(x) = 5x^3 + o(x^3)$. Allora necessariamente:
   (a) l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,\mathrm{d}x$ è convergente
   (b) l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,\mathrm{d}x$ è nullo
   (c) l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,\mathrm{d}x$ è divergente
   (d) l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)(2+3\sin x)}{x\sqrt{x^5}}\,\mathrm{d}x$ è oscillante

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 342

2. Sia $F(x) = x^2 + e^x + 1$ una primitiva di $f(x)$. Allora necessariamente:

(a) $f(x) = \int_1^x F(t)\, dt$

(b) $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$

(c) non esiste nessun valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

(d) $f(x) = 2x + e^x + c\,, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

RISPOSTA ESATTA: (c).

La risposta (a) è errata: per definizione di primitiva, si ha $F'(x) = f(x)$, mentre dalla (a) si avrebbe (per il Teorema fondamentale) $f'(x) = F(x)$.

La risposta (b) è errata: infatti $F(1) = 2+e$, mentre se fosse $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ si avrebbe $F(1) = 0$.

La risposta (c) è esatta, in quanto $F(x)$ non si annulla per nessun valore di $a \in \mathbb{R}$.

La (d) è errata, in quanto $f(x) = F'(x) = 2x + e^x$.

4. Se $A = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^5}\, dx$, allora:

   (a) $A = 2\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^5}\, dx$

   (b) $A = 0$

   (c) $A = \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}}$

   (d) $A = x\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\, dx$

   RISPOSTA ESATTA: (b).

   La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ è dispari. Dunque (b) è esatta, mentre (a) è errata.

   La (c) è palesemente errata: si pensi al solo fatto che A è un numero reale e non una funzione!

   La (d) è errata, perché x non può essere portata fuori dal segno di integrazione (e, nuovamente, A non è una funzione!).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 342

6. Sia $f(x) = x + 1$, e sia μ la media integrale di f su $[0, 2]$. Allora:
   (a) la funzione $g(x) = f(x) + 3$ ha la stessa media integrale su $[0, 2]$
   (b) $\mu = 4$
   (c) se $c = 1$ si ha $f(c) = \mu$
   (d) esiste un punto $c \in (0, 2)$ tale che $f(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$

   RISPOSTA ESATTA: (c).

   Per definizione

$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^2 (x + 1)\ \mathrm{d}x\ = 2 = f(1) \neq \frac{1}{2} \int_0^2 (x + 4)\ \mathrm{d}x\ .$$

   Dunque (c) è vera mentre (a) e (b) sono false.

   La risposta (d) è falsa in quanto $\dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$. Ora $f(x) = 1$ se e solo se $x = 0$, ma $0 \notin (0, 2)$.

   Si ricordi che, per il Teorema di Lagrange, esiste invece un punto $c \in (0, 2)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 342

8. L'integrale improprio $\int_0^1 \log x \; \mathrm{d}x$

   (a) diverge a $-\infty = \lim_{x\to 0^+} \log x$

   (b) è positivo

   (c) converge a 1

   (d) è uguale al valore del seguente limite: $\lim_{t\to 0^+} (t - t\ln\ t - 1)$

RISPOSTA ESATTA: (d)

Infatti

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x \; \mathrm{d}x &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \log x \; \mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to 0^+} [x\log x - x]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} (-1 - t\log t + t).\end{aligned}$$

Si osservi che le risposte (b) e (c) sono da scartare perché $f(x) = \log x \le 0$ su $(0, 1]$, e dunque l'integrale definito tra 0 e 1 non può essere positivo.

10. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$

   (a) è convergente, ma non assolutamente convergente
   (b) è assolutamente convergente
   (c) è oscillante
   (d) è divergente

RISPOSTA ESATTA: (b)

Studiamo la convergenza assoluta dell'integrale improprio. Si ha

$$\left|\frac{\sin t}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

e $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ è convergente.

Dunque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$ è assolutamente convergente, e quindi è convergente.

Pertanto la risposta (b) è esatta, mentre le risposte (a), (c) e (d) sono errate.

12. Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$, positiva e limitata su $\mathbb{R}$, il cui sviluppo di Maclaurin di ordine 3 è $f(x) = 5x^3 + o(x^3)$. Allora necessariamente:

   (a) l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ è convergente

   (b) l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ è nullo

   (c) l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ è divergente

   (d) l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)(2+3\sin x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ è oscillante

   RISPOSTA ESATTA: (a)

   Dallo sviluppo di Maclaurin di $f(x)$, si ha $f(x) \sim 5x^3$, per $x \to 0$. Pertanto

$$\frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}} \sim \frac{5x^3}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{x}}, \qquad x \to 0\,.$$

   Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, allora (per il Criterio del confronto asintotico) l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ converge.

   Pertanto la risposta (a) è esatta.

   La risposta (b) è errata in quanto la funzione integranda è positiva e non identicamente nulla su I=(0, 1] e quindi l'integrale improprio non può essere nullo.

   La risposta (c) è errata, in quanto l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ converge assolutamente. Infatti, poiché $f(x)$ è limitata, esiste una costante $k > 0$ per cui $|f(x)| \le k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e pertanto $\left|\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x^5}}\right| \le \dfrac{k}{x\sqrt{x^5}}$, e l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{k}{x\sqrt{x^5}}\,dx$ converge.

   La risposta (d) è errata in quanto anche questo integrale improprio è assolutamente convergente; infatti, analogamente a quanto detto a proposito della risposta (c), poiché $|2 + 3\sin x| \le 5$, si ha

$$\left|\frac{f(x)(2+3\sin x)}{x\sqrt{x^5}}\right| \le \frac{5k}{x\sqrt{x^5}}.$$

6. Sia f derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che $f(2) = 0$ e f abbia ordine di infinitesimo 3 per $x \to 2$. Allora:
   (a) $f'(2) \neq 0$
   (b) $f'(2) = 0\,,\ f''(2) \neq 0$
   (c) $f'(2) = 0\,,\ f''(2) = 0\,,\ f'''(2) \neq 0$
   (d) $f'(2) = 0\,,\ f'(2) = 0\,,\ f'''(2) = 0$
7. È data la funzione $f(x) = \sin^2 x + 2 - 2\cosh x$. Allora:
   (a) lo sviluppo di Maclaurin è $f(x) = x^4 + o(x^4)$
   (b) f è infinitesima di ordine superiore al terzo, per $x \to 0$
   (c) f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$
   (d) f ha come tangente in $x_0 = 0$ la retta $y = x$
8. È data la funzione $f(x) = \sin^2 x + 2 - 2\cosh x$. Allora:
   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\tan^3 x} = -\dfrac{5}{12}$
   (b) $f(x) = o(x^4)$, per $x \to 0$
   (c) esiste un intorno di $x = 0$ in cui $f(x)$ è positiva
   (d) $f^{(27)}(0) = 0$
9. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$
   (a) è dispari
   (b) $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
   (c) $f(x) = o(x)\,,$ per $x \to 0$
   (d) in $x = 0$ ha un punto a tangente orizzontale
10. Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ il cui sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x - 2$ è dato da $f(x) = 3 + (x-2) - 2(x-2)^2 + o((x-2)^3)$ per $x \to 2$. Allora:
    (a) $f''(2) = -2$
    (b) f ha ordine di infinitesimo 2, per $x \to 2$
    (c) $f'''(2) = 0$
    (d) il polinomio di Taylor di f di ordine 3 centrato in $x = 2$ non esiste

1. Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$, il cui sviluppo di Maclaurin è dato da $f(x) = x^3 - 3x^4 + o(x^4)$. Allora necessariamente:
   (a) f non ha punti di massimo o di minimo
   (b) f è strettamente crescente nel suo dominio
   (c) $f'''(0) = 6$
   (d) f ha un punto di minimo in $x = 0$

   RISPOSTA ESATTA: (c).

   Infatti, il coefficiente di x^3 dello sviluppo di Maclaurin è dato da $\frac{f'''(0)}{3!}$. Nel nostro caso $\frac{f'''(0)}{3!} = 1$ e dunque $f'''(0) = 6$.

   La funzione $f(x)$ in $x = 0$ è equivalente alla funzione x^3 e quindi in $x = 0$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale. Dunque (d) è falsa.

   Lo sviluppo di Maclaurin fornisce indicazioni solo sul comportamento locale della funzione, in un intorno del punto $x = 0$; pertanto le affermazioni (a) e (b) sono del tutto arbitrarie: ad esempio, la funzione $f(x) = x^3 - 3x^4$ ha sviluppo di Maclaurin $f(x) = x^3 - 3x^4 + o(x^n)$, $\forall n \geq 4$. Essa fornisce un controesempio alle affermazioni (a) e (b) in quanto ha un punto di massimo nel punto $x = \frac{1}{4}$.

3. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 - x}$
   (a) ha come polinomio di Maclaurin del secondo ordine $T_2(x) = x + 3x^2$
   (b) ha un punto stazionario in $x_0 = 0$
   (c) $f(x) = o(x)$, per $x \to 0$
   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - x}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

RISPOSTA ESATTA: (d).

Calcoliamo lo sviluppo di Maclaurin di ordine 2 di $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - 1}{1 - x} = (e^x - 1) \cdot \frac{1}{1 - x} \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &= x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Dunque (a) è errata.

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2};$$

quindi (d) è esatta.

(b) è errata perché $f'(0) = 1$ e dunque $x = 0$ non è un punto stazionario per f.

(c) è errata, perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1 \neq 0.$$

5. Sia f derivabile infinite volte su $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Allora necessariamente:

   (a) $f(x)$ ha ordine di infinitesimo 2 per $x \to 0$

   (b) $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$

   (c) $x = 0$ è un punto di flesso per f

   (d) $x = 0$ è un punto di massimo o di minimo relativo per f

   RISPOSTA ESATTA: (b).

   Lo sviluppo di Maclaurin di f di ordine 2 è: $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$. Pertanto $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$, e dunque ha ordine di infinitesimo superiore al secondo. Quindi la risposta (b) è esatta mentre la risposta (a) è errata.

   Le risposte (c) e (d) non sono corrette in quanto se la prima derivata non nulla di f calcolata in 0 è di ordine dispari, allora $x = 0$ è un punto di flesso per f, mentre se è di ordine pari $x = 0$ è un punto di massimo oppure di minimo relativo per f.

7. È data la funzione $f(x) = \sin^2 x + 2 - 2\cosh x$. Allora:
   (a) lo sviluppo di Maclaurin è $f(x) = x^4 + o(x^4)$
   (b) f è infinitesima di ordine superiore al terzo, per $x \to 0$
   (c) f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$
   (d) f ha come tangente in $x_0 = 0$ la retta $y = x$

RISPOSTA ESATTA: (b).

Calcoliamo lo sviluppo di Maclaurin di ordine 4 di f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + 2 - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

Dunque (a) è falsa, mentre (b) è vera, in quanto $f(x)$ è infinitesima di ordine 4, per $x \to 0$.

Inoltre $f(x)$ è localmente equivalente (per $x \to 0$) alla funzione $-\dfrac{5}{12}x^4$. Dunque $f(x)$ ha in $x = 0$ un punto di massimo locale e la tangente in 0 è la retta $y = 0$. Pertanto le risposte (c) e (d) sono errate.

9. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+\sin x}$
   (a) è dispari
   (b) $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
   (c) $f(x) = o(x)$, per $x \to 0$
   (d) in $x = 0$ ha un punto a tangente orizzontale

   RISPOSTA ESATTA: (b).
   $f(x)$ non è dispari perché $f(-x) = \sqrt[3]{1-\sin x} \neq -f(x)$.
   Calcoliamo lo sviluppo di Maclaurin di ordine 2 di f:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+\sin x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin^2 x + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x + o(x^2)) - \frac{1}{9}\left(x + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \end{aligned}$$

   Dunque (b) è vera mentre (c) è falsa.
   Poiché $f'(0) = \frac{1}{3} \neq 0$, anche (d) è falsa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 342