NUMERO : 67

DATA : 24/03/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Di Pietro

MATERIA : Geometria

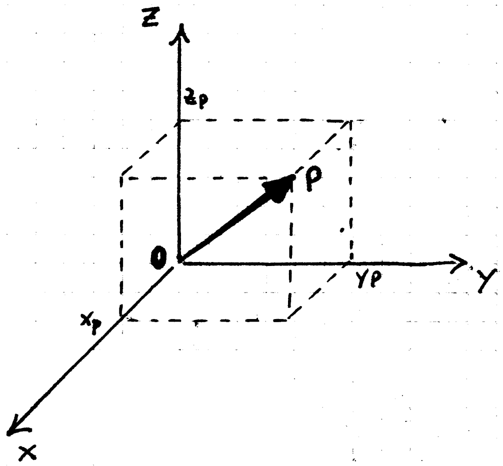
• Geometria

23/02/09

→ nozioni generali:

• $\mathbb{R}^3$ = insieme delle terne ordinate in colonna $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x; y; z \in \mathbb{R} \right\}$

↳ diamo un' interpretazione geometrica...



$\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in colonna anziché che in coordinate lineari...

I vettori di $\mathbb{R}^3$ vengono denotati con delle lettere come $\vec{u}$, $\vec{v}$ o $\vec{w}$ ed espressi:

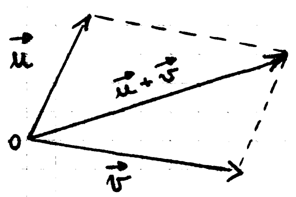
$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

• descriviamo adesso alcune operazioni che si possono svolgere con i vettori:

•) <u>Somma e differenza:</u>

• somma di 2 vettori con direzioni diverse:

• siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori appartenenti a $\mathbb{R}^3$ con direzioni diverse



con $\vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}}$$

definizione di somme di vettori...

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \in \mathbb{R}^3$ PROPRIETÀ

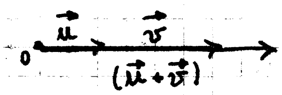
$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA

• somma di 2 vettori con la stessa direzione:

• quando due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione, (cioè quando stanno sulla stessa retta), si hanno 2 casi:

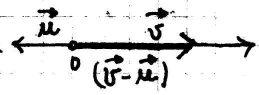
a) ... stesso verso...

⇒ modulo uguale alla somma dei moduli



b) ... verso opposto...

⇒ modulo uguale alla differenza dei moduli



- **Determinante di 2 vettori:**

Prima di dare la definizione di determinante ricordiamo:

- "Matrice": tabella composta da righe orizzontali e colonne verticali ...
- "Permutazione": di un insieme I è un applicazione biiettiva $\sigma : I \to I$

adesso:

« Sia A una matrice quadrata; il determinante di A è il numero che si calcola:

-) Per ogni permutazione $(i_1; i_2; \dots; i_n)$ si calcola il prodotto di $a_{1 i_1} \dots a_{n i_n}$
-) a ciascuno dei prodotti così ottenuti si dà il segno + se la corrispondente è pari; segno − se è dispari
-) Si fa la somma algebrica dei numeri così ottenuti

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \ x; y \in \mathbb{R} \right\} \qquad \det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}; \vec{v}) \longmapsto \det(\vec{u}; \vec{v})$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - (v_1 u_2)$$

argomento 1°

argomento 2°

$\Rightarrow \forall \vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = -\det(\vec{v}; \vec{u})$ PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA

$\Rightarrow$ Se un determinante ha 2 righe (o colonne) uguali; allora esso vale zero

$$\det(\vec{u}; \vec{u}) = -\det(\vec{u}; \vec{u})$$

$$2 \det(\vec{u}; \vec{u}) = 0$$

$$\det(\vec{u}; \vec{u}) = 0$$

PROPRIETÀ (conseguenza dell'antisimmetria)

$\Rightarrow \forall \vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
$\forall \lambda; \mu \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2; \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}_1; \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}_2; \vec{v})$$

PROPRIETÀ (linearità risp. al 1° argomento)

- dimostrazione: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \lambda a' + \mu a'' \\ \lambda b' + \mu b'' \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2; \vec{v}) = \begin{vmatrix} \lambda a' + \mu a'' & v_1 \\ \lambda b' + \mu b'' & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda a' + \mu a'') v_2 - (\lambda b' + \mu b'') v_1 =$$

$$= \lambda a' v_2 + \mu a'' v_2 - \lambda b' v_1 - \mu b'' v_1 =$$

$$= \lambda (a' v_2 - b' v_1) + \mu (a'' v_2 - b'' v_1) = \lambda \begin{vmatrix} a' & v_1 \\ b' & v_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a'' & v_1 \\ b'' & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \det(\vec{u}_1; \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}_2; \vec{v})$$

c.v.d.

(prendendo ad esempio v_1 $\begin{vmatrix} \cancel{u_1} & \cancel{v_1} & \cancel{w_1} \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow v_1 \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}$)

$$\Rightarrow -v_1 \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + v_2 \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} - v_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

infatti il $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = - \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix}$ qnd

il determinante è antisimmetrico PROPRIETA'

$\Rightarrow$ se una colonna è il risultato della somma algebrica degli altri elementi delle righe; riga per riga; allora il suo determinante è "0"

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5+2+3=0 \ !!!$$

$1+2=3..$
$2+1=3..$
$1+3=4..$

PROPRIETA'

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\rightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}+\vec{v}) = \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}) + \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}) = 0$

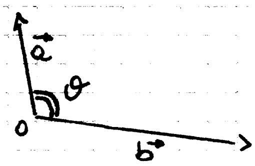
$\mathbb{R}^3$ è Euclideo

•) Prodotto scalare:

Il prodotto scalare consente di moltiplicare tra di loro due vettori ottenendo come risultato uno scalare, considerando l'angolo formato dai due vettori.
Il prodotto scalare si indica con $<;>$ ed è dato da:

$\vec{a}; \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad <\vec{a}; \vec{b}> = |a| \cdot |b| \cdot \cos\vartheta$

$<\vec{a}; \vec{b}> = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3)$



$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad <\vec{u}; \vec{v}> = <\vec{v}; \vec{u}>$

↳ qnd è simmetrico PROPRIETA' (simmetria)

$\Rightarrow \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in \mathbb{R}^3$
$\lambda; \mu \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \ <\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}; \vec{w}> = \lambda <\vec{u}; \vec{w}> + \mu <\vec{v}; \vec{w}>$

PROPRIETA'

$<\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}; \vec{w}> = <\vec{w}; \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}>$ (linearità risp al 1° e 2° argomento)

... ricordiamo: 26/02/09

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \setminus u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

versori coordinate...!

- **Versori:**

$$\underline{\vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}}$$

Viene definito "versore" un vettore di modulo 1 quindi:

$$|\vec{a}| = (a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2 = 1$$

Esistono anche dei versori particolari chiamati versori fondamentali e sono: $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

PROPRIETÀ PRINCIPALE...

$\Rightarrow \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \in \mathbb{R}^3$
$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ $\Rightarrow \langle \vec{i}; \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}; \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}; \vec{i} \rangle = 0$ PROPRIETÀ

Si dice che $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ sia una TERNA ORTONORMALE

PROPOSIZIONE:

$\langle ; \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ è "non degenere"!

- se $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$ significa che $\vec{u} = \vec{0}$
(infatti $\vec{u}$ dovrebbe essere ortogonale a tutti i vettori $\vec{v}$, e ciò può essere soltanto se $\vec{u} = \vec{0}$)

dimostrazione: $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$ (anche per $\vec{v} = \vec{u}$)

$$\Rightarrow \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{u}| = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$$

c.v.d

PROPOSIZIONE:

$\langle ; \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$

- se $\langle \vec{u}; \vec{i} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{j} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{k} \rangle = 0$ allora $\vec{u} = 0$

dimostrazione: sia $\vec{v} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \Rightarrow$

$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}; v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \rangle =$ USO LA LINEARITÀ RISP AL 2° ARGOMENTO...

$$\Rightarrow v_1 \underbrace{\langle \vec{u}; \vec{i} \rangle}_{0} + v_2 \underbrace{\langle \vec{u}; \vec{j} \rangle}_{0} + v_3 \underbrace{\langle \vec{u}; \vec{k} \rangle}_{0} \Rightarrow 0$$

c.v.d

... abbiamo dimostrato che se esiste; il prodotto vettoriale è unico; ma adesso dimostriamo cos'è ?...

« chi è "$\vec{u} \times \vec{v}$" ? »

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\vec{u} \times \vec{v})_1 \vec{i} + (\vec{u} \times \vec{v})_2 \vec{j} + (\vec{u} \times \vec{v})_3 \vec{k} =$$

$$= \langle \vec{u} \times \vec{v} ; \vec{i} \rangle + \langle \vec{u} \times \vec{v} ; \vec{j} \rangle + \langle \vec{u} \times \vec{v} ; \vec{k} \rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u & v & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ u & v & 1 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ u & v & 0 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - v_3 u_1)\vec{j} + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{k}$$

Ex. $(\vec{i} \times \vec{j})_1 = \langle i \times j ; i \rangle = \det(i; j; i) = 0$

$(\vec{i} \times \vec{j})_2 = \langle i \times j ; j \rangle = \det(i; j; j) = 0$

$(\vec{i} \times \vec{j})_3 = \langle i \times j ; k \rangle = \det(i; j; k) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

Esercizio: $(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}) =$

$2\vec{i} \times \vec{i} + 4\vec{i} \times \vec{j} - 10\vec{i} \times \vec{k} - \ldots$ utilizziamo le proprietà distributive ...

però ci occorre un teorema che ci consenta di utilizzare le proprietà distributive ...

PROPRIETÀ: il prodotto vettoriale $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ è una funzione bilineare antisimmetrica; ossia:

1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \forall \vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

2) $\forall \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda; \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \times \vec{w} = \lambda(\vec{u} \times \vec{w}) + \mu(\vec{v} \times \vec{w})$

3) $\forall \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda; \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \vec{u} \times (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) + \mu(\vec{u} \times \vec{w})$

qnd ora sappiamo quanto vale $\vec{u} \times \vec{v}$; cioè:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

in un determinante; scambiando le righe con le colonne; esso resta costante...

ad esempio se voglio calcolare $\vec{i} \times \vec{j}$ ...

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots \vec{k}$$

$\vec{i} \times \vec{j} =$ è un vettore in $\mathbb{R}^3$ quindi lo posso scrivere come =

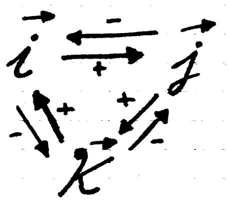
$$= \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})_1 \vec{i}}_{0} + \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j}) \vec{j}}_{0} + (\vec{i} \times \vec{j}) \vec{k} \to 1$$

possiamo utilizzare un semplice schema:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$



ex. $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

Esercizio:

$$(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) =$$

$$= \cancel{2\vec{i} \times \vec{i}}^{\,0} + 2\vec{i} \times \vec{j} + 8\vec{i} \times \vec{k} + 3\vec{j} \times \vec{i} + \cancel{3\vec{j} \times \vec{j}}^{\,0} + 12\vec{j} \times \vec{k} - \vec{k} \times \vec{i} - \vec{k} \times \vec{j} - \cancel{4\vec{k} \times \vec{k}}^{\,0} =$$

$$= 2\vec{k} - 8\vec{j} - 3\vec{k} + 12\vec{i} - \vec{j} + \vec{i} = 13\vec{i} - 9\vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

27/02/09

Esercizio: PROVARE CHE; SE $\vec{u};\vec{v}$ SONO ORTOGONALI (cioè $\langle\vec{u};\vec{v}\rangle = 0$) ALLORA $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

iniziamo considerando il quadrato di $|\vec{u}\times\vec{v}|$:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = \langle\vec{u}\times\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}\rangle = \det\langle\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}\rangle =$$
$$= -\det\langle\vec{u};\vec{u}\times\vec{v};\vec{v}\rangle = +\det\langle\vec{u}\times\vec{v};\vec{u};\vec{v}\rangle =$$
$$= \langle\langle\vec{u};\vec{u}\rangle\times\vec{v} - \underbrace{\langle\vec{v};\vec{u}\rangle}_{0}\vec{u};\vec{v}\rangle = \langle|\vec{u}|^2\vec{v};\vec{v}\rangle =$$
$$= |\vec{u}|^2\cdot\langle\vec{v};\vec{v}\rangle =$$
$$\Rightarrow |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$$

ricorda:
$|\vec{u}| = \sqrt{\langle\vec{u};\vec{u}\rangle}$
quindi
$|\vec{u}|^2 = \langle\vec{u};\vec{u}\rangle$

$\Rightarrow$ Se $\vec{u};\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ allora essi sono perpendicolari sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$:

$$\vec{u}\times\vec{v} \perp \begin{cases}\vec{u}\\ \vec{v}\end{cases}$$

PROPRIETA'

dimostrazione:

$$\langle\vec{u}\times\vec{v};\vec{u}\rangle = \underbrace{\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u})}_{0}$$

$$\langle\vec{u}\times\vec{v};\vec{v}\rangle = \underbrace{\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v})}_{0}$$

Ex.

$$\vec{i}\times\vec{j} \perp \begin{cases}\vec{i}\\ \vec{j}\end{cases} \Rightarrow \vec{i}\times\vec{j} \parallel \vec{k}$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = a\vec{k}$$
$$\langle\vec{i}\times\vec{j}\rangle = a\langle\vec{k}\rangle$$
$$\langle\vec{i}\times\vec{j};\vec{k}\rangle = a\langle\vec{k};\vec{k}\rangle$$

moltiplichiamo entrambi i membri per due

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = a = 1$$

Ex.

sia $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; trovare un vettore che sia ortogonale ad entrambi...

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\vec{i}+\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{i}\times\vec{i} + \vec{i}\times\vec{j} + \vec{k}\times\vec{i} + \vec{k}\times\vec{j} = \vec{k}+\vec{j}-\vec{i} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 222

... cioè: $a(b+c) = ab + ac$
$(b+c)a = ab + ac$ $\Rightarrow a(b+c) = (b+c)a$ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

Quindi $(\mathbb{Z};+;\cdot)$ è tale che: $(\mathbb{Z};+)$ È UN GRUPPO ABELIANO...
$(\mathbb{Z};\cdot)$ È INTERNO, COMMUTATIVO, ASSOCIATIVO, DISTRIBUTIVO ($\cdot$ risp $+$) E POSSIEDE UN EL. NEUTRO...

$\Rightarrow (\mathbb{Z};+;\cdot)$ È UN ANELLO, COMMUTATIVO E UNITARIO
(non ha inverso) $(ab = ba)$ $(1 \in \mathbb{Z})$

in realtà la definizione di anello elimina dal suo gruppo anche le proprietà commutativa e unitaria, reinserite in seguito...

Esempio: $(\mathbb{Q};+;\cdot)$ è un anello commutativo unitario...

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Q};+)$ è un gruppo abeliano

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Q};\cdot)$ non è un gruppo poiché, pur ammettendo numeri frazionari, ha $\frac{m}{0}$ = NON HA SENSO...!
quindi $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ = GRUPPO COMMUTATIVO
ha una proprietà in più...

Siccome $(\mathbb{Q};+;\cdot)$ è un "ANELLO COMMUTATIVO CON UNITÀ" tale che ogni elemento non nullo possiede un "inverso" $(+a \Rightarrow +a^{-1})$ moltiplicativo $(a \cdot a^{-1} = 1)$ si dice che esso è un CAMPO.

Esempio di campo...

$(\mathbb{R};+;\cdot)$ è un campo; in particolare $(\mathbb{R}^*;\cdot)$ è un "gruppo commutativo...

$(\mathbb{C};+;\cdot)$ è algebricamente "CHIUSO", poiché ogni polinomio a coefficienti complessi ammette radici complesse, ad esempio $\sqrt{-2} \in \mathbb{C}$

Ricordiamo che: 03/03/09

$\mathbb{Z}$ è un anello e che se $P = \{P_1; P_2; \dots; P_n\}$ allora $[P]_{\mathbb{Z}} = \left\{\sum_{i=1}^{n} m_i P_i \,/\, m_i \in \mathbb{Z}\right\}$

più in generale:

« Se A è un anello allora $[P]_A = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i P_i \,/\, a_i \in A\right\}$

- **SPAZIO VETTORIALE:**

definizione: qualunque modulo V su un campo $\mathbb{K}$, dotato di operazioni di somma e prodotto per scalare è uno spazio vettoriale se valgono le seguenti proprietà:

1) PROPRIETÀ DELLA SOMMA ...
2) PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER SCALARE ...
3) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVE ...

Esempio:

Considero $m = \{P; T\}$ e $[P, T] = \{\alpha P + \beta T \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}$ - spazio vettoriale $\rightarrow (\alpha_1 P + \beta_1 T) + (\alpha_2 P + \beta_2 T) = (\alpha_1 + \alpha_2) P + (\beta_1 + \beta_2) T \rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda(\alpha P + \beta T) = \lambda \alpha P + \lambda \beta T$

T e P = temperatura e Pressione

$\rightarrow \alpha P + \beta T \quad \searrow \quad \alpha_m P + \beta_m T = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot P + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} T$

→ Spazio vettoriale di colonna:

d'ora in poi, a meno che non sia detto il contrario, la lettera $\mathbb{K}$ indicherà il campo dei numeri reali o complessi...

$$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \text{(reali)} \\ \mathbb{C} \rightarrow \text{(complessi)} \end{cases}$$

Verrà detto "campo degli scalari" e gli elementi di $\mathbb{K}$ verranno chiamati scalari

$$\mathbb{K}^m = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \,/\, v_i \in \mathbb{K} \right\}$$

gli elementi di $\mathbb{K}^m$ verranno indicati con lettere $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \dots$ e per $\forall\, 1 \le i \le m$; $\vec{u}_{(i)}$ indicherà la i-esima componente di $\vec{u}$

$(\mathbb{K}^n; +; \cdot)$ è uno spazio vettoriale

Es. $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale sui reali $\mathbb{R}$

anche un polinomio $\mathbb{R}_{\leq n}[x] = [1, x, x^2, \dots, x^n] \dots$

... come $2 \cdot 1 + 3 \cdot x + 5 \cdot x^2 \dots$

... come $2 \cdot ■ + 3 \cdot ▲ + 5 \cdot ★ \dots$

• Sottospazio vettoriale:

definizione: Un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V si definisce sottospazio vettoriale se e solo se per ogni coppia $w_1; w_2 \in W$ e per ogni coppia $\lambda; \mu \in \mathbb{K}$ si ha:

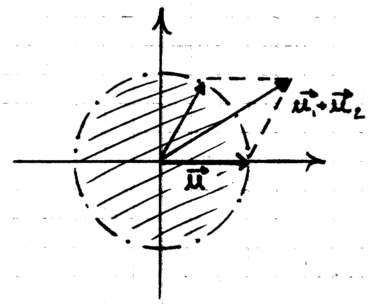
$$\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$$

Esempio: 1) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (SPAZIO VETTORIALE)

→ infatti è definito $\lambda f + \mu g$

• ANCHE IN ANALISI, SE f E g SONO CONTINUE ALLORA ANCHE $f+g$ È CONTINUO

2) $S^1: \{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / |\vec{u}| = 1\}$ (NON È UN SOTTOSPAZIO)



⫽ → $|\vec{u}| = 1$

non è un sottospazio poiché la somma di 2 componenti del vettore $\vec{u}$ non ricade all'interno dell'insieme S^1

Se $W \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio $\Rightarrow \vec{0} \in W$ infatti $\forall \vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ e $\forall \lambda; \mu \in \mathbb{K}$ si ha

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W \qquad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

basta scegliere $\vec{u} = \vec{v}$ e $\lambda = -\mu$ per avere

$$\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in W \qquad \text{con } \lambda = -\mu = 1$$

Si osservi che $\mathbb{K}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$

$\forall \vec{u}; \vec{v} \in \{\vec{0}\}$ $\qquad \{\vec{0}\}$ è un sottospazio

↪ $\lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$

$\mathbb{K}^n$ e $\{\vec{0}\}$ si dicono sottospazi banali. (quando uno spazio vettoriale è sottospazio vettoriale di se stesso) osservazioni:

$\vec{u}; \vec{v} \neq \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \lambda \vec{u}$

due vettori sono proporzionali se, e solo se, la rette vettoriali ad esse associate sono coincidenti

$[\vec{u}] = [\vec{v}]$

$\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ogni multiplo di $\vec{v}$ è anche multiplo di $\vec{u}$

$[\vec{v}] \subseteq [\vec{u}]$ Siccome $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ si ha $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} \vec{v} \rightarrow [\vec{u}] \subseteq [\vec{v}]$ quindi

$\Rightarrow$ Se un insieme è multiplo dell'altro genera gli stessi componenti lineari $([\vec{v}] \subseteq [\vec{u}] \Rightarrow [\vec{u}] = [\vec{v}])$

Viceversa, se $[\vec{v}] = [\vec{u}]$ allora $\vec{v} \in [\vec{v}] = [\vec{u}] \ldots$

$\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \in [\vec{u}]$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{K} \,/\, \vec{v} = \lambda \vec{u}$

05/03/09

Ricordiamo che:

$W \subseteq \mathbb{K}^n$ si dice sottospazio vettoriale se esso stesso è spazio vettoriale

$\Rightarrow \forall \vec{u}, \vec{v} \in W$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^w \rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$

Esempio - Esercizio

$$W = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \,/\, a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + a_3 \vec{w}_3 = 0 \right\}$$

W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$?

$\Rightarrow \begin{array}{l} \vec{u}, \vec{v} \in W \\ \lambda; \mu \in \mathbb{K} \end{array} \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$?

sostituiamo: $a_1 (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})_1 + a_2 (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})_2 + a_3 (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})_3$

$\rightarrow a_1 (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{v}_1) + a_2 (\lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{v}_2) + a_3 (\lambda \vec{u}_3 + \mu \vec{v}_3) = 0$

$\rightarrow \lambda \underbrace{(a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3)}_{0} + \mu \underbrace{(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3)}_{0} = 0$

$\rightarrow \lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$

$\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ si, è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Esempio: PROVARE CHE $\mathbb{R}^2 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right]$; DEVO PROVARE CHE SE $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ESISTE $\lambda; \mu; v$ TALI CHE:

$$\vec{u} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \lambda-\mu+2v\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda+\mu = \vec{u}_1\\ \lambda-\mu+2v = \vec{u}_2\end{cases} = \begin{cases}\lambda+\mu = \vec{u}_1\\ \lambda-\mu = \vec{u}_2 - 2v\end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2-2v)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \tfrac{1}{2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2-2v)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2-2v)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

abbiamo finite combinazioni lineari in base ai valori di "v" per esempio ($v=1; v=2; v=\dots$) $\Rightarrow$ ho troppe informazioni!

infatti $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]$ HO TOLTO L'ULTIMA COMPONENTE ...

$\Rightarrow$ questo è uno dei casi in cui:

$[\vec{u}_1; \vec{u}_2; \dots \dots \vec{u}_k] \rightarrow$ GENERANO UNO SPAZIO DI DIMENSIONI "k" MA POSSO FARE A MENO DI COMPONENTI CHE NON MI DANNO INFORMAZIONI NUOVE

consideriamo che questa informazione sia $\vec{u}_k$ allora

$$[\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_k] \supsetneq [\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_{k-1}]$$

VETTORI "LINEARMENTE INDIPENDENTI" E "LINEARMENTE DIPENDENTI" ...

definizione = Un insieme di vettori di $V = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots \dots \vec{v}_k)$ si dice linearmente indipendente (E I SUOI VETTORI SI DICONO L. INDIPENDENTI) se, e solo se:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots \dots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

e ciò implica che $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \dots = \lambda_k = 0$ $\hookrightarrow$ UNICA COMBINAZIONE LINEARE NULLA ...

Esempio

$$1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

non sono l. indipendenti poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ e in più possiamo scrivere...

$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 - \vec{u}_3$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda-\mu=0\end{cases} \begin{cases}\lambda=\mu\\ \lambda-\lambda=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=\mu=0$$

sono l. indipendenti

• **PROPOSIZIONE:** Siano $\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_h$ vettori di $\mathbb{K}^m$ e sono linearmente indipendenti se, e solo se, ogni vettore $\vec{u} \in [\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_h]$ può scriversi come COMBINAZIONE LINEARE UNICA di $\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_h$

cioè; siano $\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_h$ vettori indipendenti...
supponendo che $\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + \lambda_h\vec{u}_h = \mu_1\vec{u}_1 + \dots + \mu_h\vec{u}_h$ dire che essa è unica significa dire che $\lambda_i = \mu_i$ con $1 \le i \le h$

dimostrazione: Supponiamo $a_1\vec{u}_1 + \dots + a_m\vec{u}_m = b_1\vec{u}_1 + \dots + b_m\vec{u}_m$; si ha:

$\rightarrow (a_1 - b_1)\vec{u}_1 + \dots + (a_m - b_m)\vec{u}_m = \vec{0} \rightarrow \Sigma\vec{u}$ LINEARMEN INDIPEND.

$\rightarrow (a_1 - b_1) = \dots = (a_m - b_m) = 0 \rightarrow a_i = b_i$

$\Rightarrow$ unica combinazione essendo i coefficienti uguali

• **DEFINIZIONE:** Sia $W \subseteq \mathbb{K}^m$ e siano $\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m$ tali che $W = [\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m]$
Si dice che $(\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m)$ generano W e che W è generato da $(\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m)$

OSSERVAZIONE:
il sottospazio $\{0_v\}$ è generato dall'insieme nullo

• BASE... (DI UNO SPAZIO VETTORIALE):

definizione: Sia $W \subseteq \mathbb{K}^m$ (W SOTTOINSIEME DI $\mathbb{K}^m$) e sia $W = [\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m]$, viene chiamata **base** di W l'insieme "ordinato" di "vettori linearmente indipendenti" che "generano W"

cioè; sia $B = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m\}$ tale che:

1) B È ORDINATO
2) B È LIBERO (composto da vettori l. indipendenti)
3) B GENERA W ($W = \mathcal{L}(\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_m)$)

allora B è una base di W

Es. $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$ è una base di $\mathbb{K}^4$.....

.... quindi $\mathbb{K}^4$ è generato dai vettori l. indipendenti $[\vec{e}_1; \dots; \vec{e}_4]$

sia $\vec{u} \in \mathbb{K}^4$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \end{pmatrix} = u_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + u_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + u_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3} + u_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_4} =$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{4} u_i \cdot \vec{e}_i$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{K}^m$ si chiama base canonica, unica colonna che ha tutte le componenti nulle eccetto l'i-esima

EX $\rightarrow J$

$\vec{e}_i(J) = \delta_{i,J} = \begin{cases} 1 & i = J \\ 0 & i \ne J \end{cases}$

$(\vec{v}; \vec{b_2}; \dots \vec{b_m})$ è una base?

↳ i suoi vettori sono l. indipendenti? ①

↳ i suoi vettori generano lo spazio vettoriale V? ②

1) $(\vec{v}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ sono linearmente indipendenti?

$\lambda \vec{v} + \mu_2 \vec{b_2} + \dots + \mu_m \vec{b_m} = \vec{0}$ NB: non utilizzo λ perché usato prima

$\lambda(\lambda_1 \vec{b_1} + \dots + \lambda_m \vec{b_m}) + \mu_2 \vec{b_2} + \dots + \mu_m \vec{b_m} = \vec{0}$

$\lambda\lambda_1 \vec{b} + (\lambda\lambda_2 + \mu_2)\vec{b_2} + \dots + (\lambda\lambda_m + \mu_m)\vec{b_m} = \vec{0}$

↳ $\lambda\lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda = 0$ poiché $\lambda_1 \neq 0$

$\lambda\lambda_2 + \mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = 0$

quindi $(\vec{v}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ sono linearmente indipendenti

2) Ora provo che $\forall \vec{w} \in V \rightarrow \vec{w} \in [\vec{v}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m}]$

Siccome $\mathcal{B}$ è base:

$\vec{w} = v_1 \vec{b_1} + \dots + v_m \vec{b_m}$ quindi...

$\vec{w} = v_1 \left(\frac{1}{\lambda}\vec{v} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{b_2} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda}\vec{b_m}\right) + v_2 \vec{b_2} + \dots + v_m \vec{b_m}$

Quindi $\vec{w}$ è una combinazione lineare di $(\vec{v}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ e cioè è una base di V

---

dimostrazione (per induzione) $[(n-1)^3 \div 3 \quad \forall n]$

Supponiamo che $(n-1)^3 - (n-1)$ sia divisibile per 3

$(n-1+1)^3 - (n-1+1) =$

$= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + \cancel{1} - (n-1) - \cancel{1} =$

$= \underbrace{(n-1)^3 - (n-1)}_{\text{divisibili per ipot.}} + \underbrace{3(n-1)^2 + 3(n-1)}_{\text{divisibili perché multipli}}$

Ricordiamo che $\vec{v_1}; \dots; \vec{v_h}$ con $1 \le h \le n$

Quindi se $h = n$ devo aggiungere $n - h = n - n = 0$ vettori di $\mathcal{B}$ per ottenere una base.

CONCLUSIONI: Se V ha una base di n elementi allora ogni n-upla di vettori linearmente indipendenti è una base

CONSEGUENZE: Sia $\mathcal{B} = (\vec{b_1}; \dots; \vec{b_n})$ base di V e siano $\vec{v_1}; \dots; \vec{v_n}; \vec{v_{n+1}}; \dots; \vec{v_m}$ vettori di V $(m > n)$ allora sono l. dipendenti

Infatti se fossero l. indipendenti, allora $\vec{v_1}; \dots; \vec{v_n}$ sarebbero anch'essi l. indipendenti, allora formerebbero una base, Polinomio = un polinomio è una successione di numeri reali in cui tutti gli elementi siano uguali e 0; eccetto un ristretto numero finito.

Sospettiamo che $\mathbb{K}[x]$ sia un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione infinita

Supponiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = n$$

ossia che la sua dimensione sia finita
Allora esiste una base formata da n elementi:

$$(P_1; P_2; \dots; P_n) \qquad \text{con } P = \text{polinomio}$$

Sia $m = \max(\deg(P_i))$ con $1 \leq i \leq n$

allora $\deg(P_i) \leq m$, quindi

$$(P_1; P_2; \dots; P_n) \in [1; x; \dots x^m]$$

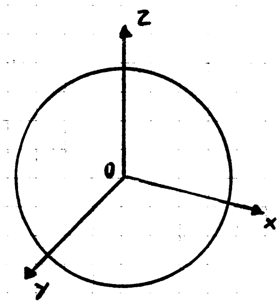
allora x^{m+1} non è combinazione lineare di $(P_1; P_2; \dots; P_n)$...
Poiché non è possibile scrivere x^{m+1} la dimensione di $\mathbb{K}[x]$ è infinita

Introduzione alle funzioni:
(definite su uno spazio vettoriale, e a valori in uno spazio vettoriale)

Sia X un insieme e sia

$$f : X \to \mathbb{K}^m$$

$\vec{f}$ si dice campo vettoriale su X (a valori su $\mathbb{K}^m$)



SFERA DI CENTRO O E RAGGIO 1

Esempio: sia $S^2 = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

$\Rightarrow$ esempio di campo vettoriale

CAMPO VETTORIALE: $\left\{ X \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{K}^m \right\}$

$\vec{f}; \vec{g} : X \to \mathbb{K}^m$

$(\lambda \vec{f} + \mu \vec{g})(x) = \lambda \vec{f}(x) + \mu \vec{g}(x)$ COMBINAZIONI LINEARI DI CAMPI... (VETTORIALI)

N.B. = se $m = 1$ si ha:

$f : X \to \mathbb{K}$ e si chiama campo scalare

onde i campi scalari formano uno spazio vettoriale

$f; g : X \to \mathbb{K}$

$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ COMBINAZIONI LINEARI DI CAMPI... (SCALARI)

NOTAZIONE:

l'insieme di tutti i campi scalari definiti su un insieme X si denota con: $\mathbb{K}^X = \left\{ X \xrightarrow{f} \mathbb{K} \right\}$

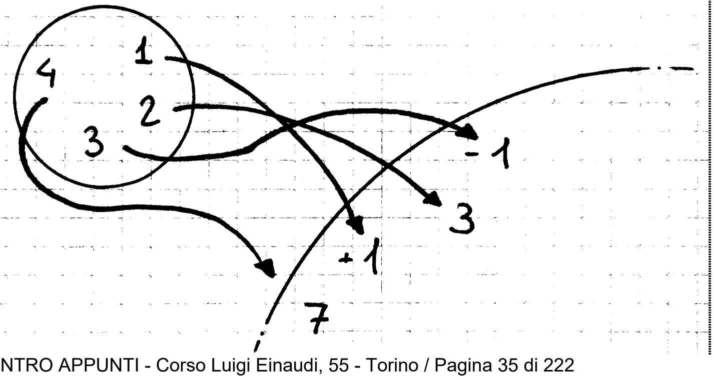
se $X = m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ allora $3 = \{1, 2, 3\}$

Ogni vettore di $\mathbb{K}^m$ può vedersi (è) come un campo scalare definito su m

se $\vec{u} \in \mathbb{K}^m$ $\quad \vec{u} = \{1, 2, \ldots, m\} \to \mathbb{K} \quad i \to \vec{u}(i)$

Esempio: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$\vec{u} = \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$



10/03/09

SPAZI VETTORIALI (di righe di scalari)

$$(\mathbb{K}^m)^\vee = \{(a_1; \dots; a_m) \,/\, a_i \in \mathbb{K}\} \quad \text{con } \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

Indicherò le righe per mezzo di lettere grafiche minuscole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ cioè avrò: $\alpha : \{1, 2, \dots m\} \to \mathbb{K}$

$(\mathbb{K}^m)^\vee$ È UNO SPAZIO VETTORIALE, cioè: $\left.\begin{matrix} \alpha, \beta \in (\mathbb{K}^m)^\vee \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{matrix}\right\} \lambda\alpha + \mu\beta \in (\mathbb{K}^m)^\vee$

↳ INSIEME DELLE RIGHE

$$(\lambda\alpha + \mu\beta)_{(i)} := \lambda\alpha_{(i)} + \mu\beta_{(i)}$$

la i-esima somma delle componenti è la somma delle i-esime componenti delle combinazione lineare...

SE SCRIVO:
$\alpha_{(i)} \to$ RIGA... $\alpha_{(i)} \in (\mathbb{K}^m)^\vee$
$\vec{u}_{(i)} \to$ COLONNA.. $\vec{u}_{(i)} \in \mathbb{K}^m$

ESEMPIO: in $(\mathbb{R}^3)^\vee$ si ha: $3(1,2,-5) + 7(0,1,-2) =$
$(3,6,-15) + (0,7,-14) = (3,13,-29)$!!!

P.S. = COMBINAZIONE LINEARE
⇓
« somma di vettori con coefficienti »

TRASPOSIZIONE:

« funzione lineare che trasforma le "righe in colonne" e le "colonne in righe" »

$$(\mathbb{K}^m)^\vee \xrightarrow{T} \mathbb{K}^m$$

$$\alpha \in (\mathbb{K}^m)^\vee \longmapsto \alpha^T \in \mathbb{K}^m \quad \alpha^T : (\text{unica colonna, tale che } \alpha^T_{(i)} = \alpha_{(i)})$$

↳ OSSIA: se $\alpha^T \in \mathbb{K}^3$
$\alpha = (a_1; a_2; a_3) \to \alpha^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Analogamente esiste la funzione che da colonne le trasforma in righe

$$\mathbb{K}^m \xrightarrow{T} (\mathbb{K}^m)^\vee$$

$$\vec{u} \in \mathbb{K}^m \longmapsto \vec{u}^T \in (\mathbb{K}^m)^\vee \quad \vec{u}^T : (\text{unica riga, tale che } \vec{u}^T_{(i)} = \vec{u}_{(i)})$$

↳ OSSIA: se $\vec{u}^T \in (\mathbb{K}^3)^\vee$
$\vec{u}^T = (u_1, u_2, u_3) \leftarrow \vec{u}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE:

$T : \mathbb{K}^m \to (\mathbb{K}^m)^\vee$ e $(\mathbb{K}^m)^\vee \to \mathbb{K}^m$ sono funzioni lineari e invertibili...

dimostrazione: occorre provare che $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^m$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si può:

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})^T = \lambda\vec{u}^T + \mu\vec{v}^T$$

IL TRASPOSTO FILTRA DENTRO LE COMBINAZIONI LINEARI...

- **PRODOTTO DI RIGHE PER COLONNE:**

Colonne e righe si "posso unire", infatti esiste una funzione bilineare detta "prodotto di righe per colonne", che manda le coppie

$$(\alpha; \vec{u}) \in (\mathbb{K}^m)^\vee \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \underbrace{\alpha \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{(i)} \vec{u}_{(i)}}_{\text{SCALARE....}} \in \mathbb{K}$$

Esso quindi è:

$$(\mathbb{K}^m)^\vee \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$$

più esplicitamente se $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ si avrà:

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha_1 \dots \alpha_m) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$$

Esempio $(1,2,1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 3 + 2 + 4 = 9$

Esso è *bilineare* nel senso che:

$$\left.\begin{aligned} &\forall \alpha, \beta \in (\mathbb{K}^m)^\vee \\ &\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^m \\ &\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{aligned}\right\} (\lambda\alpha + \mu\beta)\vec{u} = \lambda(\alpha \cdot \vec{u}) + \mu(\beta \cdot \vec{u})$$

LINEARITÀ RISPETTO AL I° ARGOMENTO...

$$\hookrightarrow \sum (\lambda\alpha + \mu\beta)_i \cdot \vec{u}_i = \sum (\lambda\alpha_{(i)} + \mu\beta_{(i)})\vec{u}_i =$$

$$= \sum (\lambda\alpha_i \cdot \vec{u}_i + \mu\beta_i \cdot \vec{u}_i) = \sum \lambda\alpha_i \vec{u}_i + \sum \mu\beta_i \vec{u}_i =$$

$$= \lambda \sum \underbrace{\alpha_i \vec{u}_i} + \mu \sum \underbrace{\beta_i \vec{u}_i}_{\text{prodotto di righe} \times \text{colonne}} = \lambda\alpha\vec{u} + \mu\beta\vec{u}$$

c.v.d.

$$\alpha(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(\alpha \cdot \vec{u}) + \mu(\alpha \cdot \vec{v})$$

LINEARITÀ RISPETTO AL II° ARGOMENTO....

$$\hookrightarrow \sum \alpha_i \cdot (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \dots = \lambda\alpha\vec{u} + \mu\alpha\vec{v}$$

c.v.d.

PROPRIETÀ: $\forall \alpha \in (\mathbb{K}^m)^\vee$ e $\forall \vec{u} \in \mathbb{K}^m$

1) $\overline{\alpha \cdot \vec{u}} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\vec{u}}$

2) $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{u}^T \cdot \alpha^T$

dimostrazione 1: Ricordiamo che $\overline{\alpha}_{(i)} = \overline{\alpha_{(i)}}$ e che $\overline{\vec{u}}_{(i)} = \overline{\vec{u}_{(i)}}$ (per coniugare un vettore, coniughiamo ogni componente)

$$\overline{\alpha \cdot \vec{u}} = \overline{\sum \alpha_{(i)} \cdot \vec{u}_{(i)}} = \sum \overline{\alpha_{(i)} \cdot \vec{u}_{(i)}} \left(\text{CIOÈ } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\right) =$$

$$= \sum \overline{\alpha_{(i)}} \cdot \overline{\vec{u}_{(i)}} = \left(\text{CIOÈ } \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\right) = \sum \overline{\alpha}_{(i)} \cdot \overline{\vec{u}}_{(i)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\vec{u}}$$

dimostrazione 2 : $<\vec{u};\vec{v}> = \vec{u}^T \cdot \overline{\vec{v}} = (\overline{\vec{v}})^T \cdot (\vec{u}^T)^T = (\overline{\vec{v}^T}) \cdot \vec{u}^{TT} =$

$= (\overline{\vec{v}^T}) \cdot \vec{u} = (\overline{\vec{v}^T}) \cdot \overline{\overline{\vec{u}}} = \vec{v}^T \cdot \overline{\vec{u}} = <\vec{v};\vec{u}>$

dimostrazione 3 : $\forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n$

$<\vec{u};\vec{u}> = \vec{u}^T \cdot \overline{\vec{u}} = \sum \vec{u}^T_{(i)} \overline{\vec{u}}_{(i)} = \sum \vec{u}_{(i)} \cdot \overline{\vec{u}_{(i)}} =$

$= \sum |\vec{u}_{(i)}|^2 = |\vec{u}_{(1)}|^2 + \dots + |\vec{u}_{(n)}|^2$

$\Rightarrow <\vec{u};\vec{u}> \geq 0$ SEMPRE $\left(<\vec{u};\vec{u}> = 0 \text{ se e solo se } \vec{u} = \vec{0} \right)$

NB: Siano $\vec{u} = (u_{(i)})$ con $1 \leq i \leq n$ $= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$\vec{v} = (v_{(i)})$ con $1 \leq i \leq n$

$<\vec{u};\vec{v}> = \vec{u}^T \cdot \overline{\vec{v}} = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Siccome $\mathbb{K}^n$ è unitario e $<;>$ è definito positivo, definiamo:

$|\vec{u}| = \sqrt{<\vec{u};\vec{u}>}$

TEOREMA: "DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ"

$\forall \vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ si ha:

$$|\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

NB: VALE X OGNI FORMA SESQUILINEARE, HERMETICA E DEFINITA POSITIVA

dimostrazione: prima di tutto supponiamo che $\vec{u} = \vec{0}$ quindi...

$|\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle| = 0$ (XKÈ È UN OPERAZIONE LINEARE $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{u}; \vec{v} \rangle = 0 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$)

$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 = |\vec{0}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 = 0$

... ho provato che se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ sono nulli la disuguaglianza vale banalmente...

DIMOSTRAZIONE DISCRETA

$\forall \vec{u}; \vec{v} \in \mathbb{K}^n$ con $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha:

$$0 \leq |\lambda \vec{u} + \vec{v}|^2 = \langle \lambda \vec{u} + \vec{v}; \lambda \vec{u} + \vec{v} \rangle = \text{utilizzo la linearità} =$$
$$= \lambda \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \lambda \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{v} \rangle =$$
$$= |\lambda|^2 \cdot |\vec{u}|^2 + \lambda \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle + |\vec{v}|^2 =$$

siccome la disuguaglianza vale per ogni λ; ne cerco uno che mi possa semplificare alcuni termini... $\lambda = -\dfrac{\overline{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}}{|\vec{u}|^2}$

$$= \frac{|\cancel{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle}|^2}{\cancel{|\vec{u}|^{4}}} \cdot \cancel{|\vec{u}|^2} - \frac{|\cancel{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle}|^2}{\cancel{|\vec{u}|^2}} - \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2}{|\vec{u}|^2} + |\vec{v}|^2 =$$
$$= -|\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle|^2 + |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{u}|^2 \geq 0$$

quindi possiamo scrivere:

$$= |\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{u}|$$

c.v.d.

DIMOSTRAZIONE IN $\mathbb{R}^n$

definiamo $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to |x\vec{u} + \vec{v}| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Phi = x^2 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2x \, \mathrm{Re} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$$

NB: SI RICORDI CHE $\mathrm{Re} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \leq |\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle|$ QUINDI:

$$x^2 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2x |\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle| \geq \underbrace{x^2 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}| + 2x \, \mathrm{Re} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \geq 0}$$

consideriamo $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ quindi...

$[\mathrm{Re} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle]^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \leq 0$

$[\mathrm{Re} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle] \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

la parte reale di un numero reale è la parte stessa

$|\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

c.v.d.

DEFINIZIONE: Sia $(\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_n})$ una base di $\mathbb{K}^n$.
Dico che è **ortogonale** se, e solo se, $\underline{\langle \vec{b_i}; \vec{b_j} \rangle} \neq 0 \rightarrow i = j$
Dico inoltre che $(\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_n})$ è una base "ortonormale" se, oltre ad essere ortogonale, sia...

$$|\vec{b_i}| = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$$

Alternativamente $(\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_n})$ è una base "ortonormale" se, e solo se, si ha:

$$\langle \vec{b_i}; \vec{b_j} \rangle = \delta_{ij}$$

Esempio: La base canonica di $\mathbb{K}^n$

$$E = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \dots; \vec{e_n})$$

è ortonormale ....?

DIMOSTRAZIONE SEMPLICE

$$\langle \vec{e_1}; \vec{e_1} \rangle = \vec{e_1}^T \cdot \vec{e_1} = (1, 0, \dots 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle \vec{e_1}; \vec{e_2} \rangle = \vec{e_1}^T \cdot \vec{e_2} = (1, 0, \dots 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ SI, È ORTONORMALE...

DIMOSTRAZIONE FORMALE

$$\langle \vec{e_i}; \vec{e_j} \rangle = \vec{e_i}^T \cdot \vec{e_j} = \vec{e_i}^T \cdot \vec{e_j} = \sum_{k=1}^{n} \vec{e}^T_{i(k)} \vec{e}_{j(k)} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot \delta_{jk} = \begin{cases} i = j & 0 \\ i \neq j & 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij}$$

Osserviamo che il prodotto scalare unitorio è "non degenere"; ossia...

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n \quad \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

infatti, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, per ogni $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, in particolare per $\vec{u} = \vec{v}$, si ha che $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ quindi $\vec{u} = \vec{0}$

→ **CONSEGUENZA:** Se $\langle \vec{u}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

dimostrazione: $\langle \vec{u}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle \rightarrow \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle = 0 \rightarrow$ uso la linearità $\rightarrow$
$\rightarrow \langle \vec{u} - \vec{v}; \vec{w} \rangle = 0 \ \forall \vec{w} \in \mathbb{K}^n \rightarrow \vec{u} - \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

c.v.d.

13/03/09

PROPRIETÀ: Sia $\mathcal{B} = (\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ una base ortonormale, ossia $\langle \vec{b_i}; \vec{b_j} \rangle = \delta_{ij}$; allora $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^m$ può scriversi in modo unico

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \dots \dots + \lambda_m \vec{b_m}$$

dove $\lambda_i = \langle \vec{v}; \vec{b_i} \rangle$ per ogni $1 \le i \le m$

IN ALTRI TERMINI:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{v}; \vec{b_i} \rangle \vec{b_i}$$

dimostrazione formalmente sia $\vec{v} = \sum \lambda_i b_i$ (i $\vec{b_i}$ FORMANO UNA BASE, QUINDI OGNI $\vec{b_i}$ È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI ELEMENTI DELLA BASE)

$\forall\, 1 \le j \le m$ si ha: $\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i ; b_j \rangle =$

i = indice muto (varia)
j = indice fisso (non varia)

$$= \sum \langle \lambda_i b_i ; b_j \rangle = \sum \lambda_i \langle b_i ; b_j \rangle = \sum \lambda_i \delta_{ij} \dots$$

$$\rightarrow \text{se} \begin{cases} i = j \rightarrow 1 \\ i \ne j \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_j = \langle \vec{v}; \vec{b_j} \rangle$$

c.v.d.

ORTONORMALIZZAZIONE DI UNA BASE
_ GRAM - SCHMIDT _

Sia $\mathcal{B} = (\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ una base di $\mathbb{K}^m$; allora...

$$\{0\} \subsetneq \underbrace{[\vec{b_1}]}_{\text{retta vettoriale}} \subsetneq \underbrace{[\vec{b_1}; \vec{b_2}]}_{\text{piano vettoriale}} \subsetneq \underbrace{[\vec{b_1}; \vec{b_2}; \vec{b_3}]}_{\text{spazio vettoriale}} \subsetneq \dots \subsetneq [\vec{b_1}; \dots; \vec{b_m}]$$

Ogni volta che voglio ortonormalizzare una base, in questo caso $\mathcal{B}$; desidero costruire una base $C = (\vec{c_1}; \vec{c_2}, \dots; \vec{c_m})$ tale che:

$$\langle \vec{c_i}; \vec{c_j} \rangle = \delta_{ij} \rightarrow C \text{ è ortonormale}$$

per $\forall\, 1 \le h \le m$ avrò:

$$[\vec{c_1}; \vec{c_2}; \dots; \vec{c_h}] = [\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_h}]$$

Ossia sono basi di uno stesso spazio vettoriale, più esplicitamente sarà:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \subsetneq & [\vec{b_1}] & \subsetneq & [\vec{b_1}; \vec{b_2}] & \subsetneq \dots \subsetneq & [\vec{b_1} \dots \vec{b_m}] \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \{0\} & \subsetneq & [\vec{c_1}] & \subsetneq & [\vec{c_1}; \vec{c_2}] & \subsetneq \dots \subsetneq & [\vec{c_1} \dots \vec{c_m}] \end{array}$$

dimostrazione: comincio da $[\vec{b_1}]$

DEFINISCO $\vec{c_1} = \dfrac{\vec{b_1}}{|\vec{b_1}|}$ CON $|\vec{c_1}| = 1$ E $[\vec{b_1}] = [\vec{c_1}]$

GENERANO GLI STESSI SPAZI VETTORIALI
$\Rightarrow$ STESSA RETTA

allora $[\vec{c_1}; \vec{b_2}] = [\vec{b_1}; \vec{b_2}]$

e quel sarà:

$$\vec{c}_h = \frac{\vec{c}_h'}{|\vec{c}_h'|} \rightarrow \vec{c}_n = \sum_{i=1}^{h-1} \langle \vec{c}_i ; \vec{b}_h \rangle \vec{c}_i + \vec{b}_h$$

Esercizio:

Sia data la base $\mathcal{B} = \left\{ \underset{\vec{b}_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}} ; \underset{\vec{b}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}} ; \underset{\vec{b}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}} ; \underset{\vec{b}_4}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}} \right\}$ di $\mathbb{R}^4$

=> ORTONORMALIZZAZIONE

Sia $\vec{c}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

- $\vec{c}_2' = \lambda \vec{c}_1 + \vec{b}_2$

$$\langle \vec{c}_2' ; \vec{c}_1 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle \vec{c}_1 , \vec{c}_1 \rangle}_{1} + \langle \vec{b}_2 , \vec{c}_1 \rangle = 0 \rightarrow \lambda_1 = - \langle \vec{b}_2 ; \vec{c}_1 \rangle$$

$$\lambda_1 = - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \right\rangle = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 0$$

quindi $\langle \vec{b}_2 ; \vec{c}_1 \rangle = \langle \vec{c}_2' ; \vec{c}_1 \rangle$

$\Rightarrow \vec{b}_2 = \vec{c}_2'$

$\rightarrow$ ORTOGONALE A $\vec{c}_1$

Sia $\vec{c}_2 = \frac{\vec{c}_2'}{|\vec{c}_2'|} = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1^2+(-1)^2} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\-\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$

- $\vec{c}_3' = \lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \vec{b}_3$

$$\langle \vec{c}_3' ; \vec{c}_1 \rangle = \langle \lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \vec{b}_3 ; \vec{c}_1 \rangle = 0 \rightarrow \lambda_1 + \langle \vec{b}_3 ; \vec{c}_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_1 = - \langle \vec{b}_3 ; \vec{c}_1 \rangle = \underline{1}$$

$$\lambda_2 = - \langle \vec{b}_3 ; \vec{c}_2 \rangle = 0$$

quindi $\vec{c}_3' = -(1)\vec{c}_1 + \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

ORTOGONALE A $\vec{c}_1$ E $\vec{c}_2$

Sia $\vec{c}_3 = \frac{-\vec{c}_1 + \vec{b}_3}{|-\vec{c}_1 + \vec{b}_3|} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} \Big/ 1 = (1/2 ; -1/2 ; 1/2 ; -1/2)^T$

PROPRIETÀ: 1) $\forall A \in \Omega$ si ha $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

<u>dimostrazione</u>: considerando charles:

$$\cancel{\overrightarrow{AA}} + \overrightarrow{AA} = \cancel{\overrightarrow{AA}} \rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

2) $\forall A, B \in \Omega$ si ha $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

<u>dimostrazione</u>: considerando charles:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0 \rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

3) $\forall O \in \Omega$, $\forall B, C \in \Omega$ si ha $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

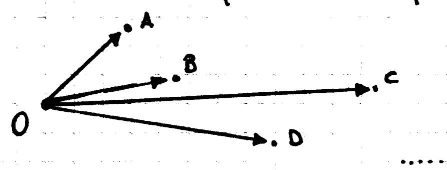
<u>dimostrazione</u>: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

modelli grafici di spazi vettoriali...

Si è provato che per ogni punto generico $O \in \Omega$ c'è una biiezione:

$$\varphi_0 : \Omega \longmapsto \mathbb{K}^n$$
$$A \longmapsto \overrightarrow{OA} = a(O, A)$$

Se Ω è lo spazio in cui viviamo lo si può modellare per mezzo di uno spazio affine dove posso spostare un qualsiasi punto tramite un qualsiasi vettore



UNA VOLTA APPLICATO UN PUNTO ABBIAMO UN MODELLO

fissato O, Ω stesso può essere pensato come uno spazio vettoriale, ma rispetto a quali operazioni?
definisco infatti somma "+" e prodotto per uno scalare dipendenti dal punto applicato

$$\underbrace{A + B}_{\dots\text{PUNTI}\dots} \Longleftrightarrow \underbrace{\overset{\overrightarrow{OA}}{\varphi_0(A)} + \overset{\overrightarrow{OB}}{\varphi_0(B)}}_{\dots\text{COLONNE}\dots}$$

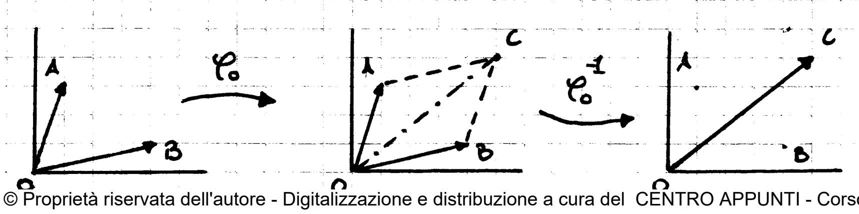
$\rightarrow \lambda A = \varphi_0^{-1}(\lambda \varphi_0(A))$

$\rightarrow A + B = \varphi_0^{-1}(\varphi_0(A) + \varphi_0(B))$

$\longrightarrow$ usiamo φ_0^{-1} per ritornare dalla funzione φ_0 ...

prendiamo in considerazione $\mathbb{R}^2$ (fissato un O)

$A + B = C$

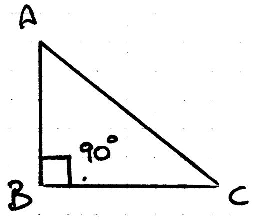


A+B = applico φ_0 = faccio i conti = applico φ_0^{-1} = = ottengo C.

$\overrightarrow{AB}$ = lunghezza di $[A,B]$ e per definizione $\overrightarrow{AB} = d(A,B)$ quindi se io ho $\hat{ABC}$, il "bordo" è $\partial \hat{ABC} = [A,B]+[B,C]+[C,A]$ → ha senso nello $\mathbb{Z}$ modulo

DEFINIZIONE: Siano A,B,C punti di $\mathcal{E}_m$; diciamo che il Triangolo $\hat{ABC}$ è "quasi" rettangolo in B se, e solo se, sarà

$$Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$$



→ se siamo in $\mathbb{R}$ $Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$ quindi è totalmente retto

TEOREMA (DI PITAGORA):

« Un Triangolo è quasi rettangolo se e solo se $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{CA}^2$

<u>dimostrazione</u>: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

→ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ → (usiamo la f. di polarità) → $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = |\overrightarrow{AC}|$

→ essendo $Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$ → $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Viceversa...

Supponiamo che valga $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ allora si avrà

$\cancel{\overrightarrow{AC}^2} + 2Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = \cancel{\overrightarrow{AC}^2}$ → $Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$

⇒ è retto in B

CASO PARTICOLARE:

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora $Re\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle$ quindi il Triangolo è rettangolo ⟺ vale pitagora

DEFINIZIONE: Sia $\mathcal{E}_m$ spazio affine euclideo e sia $\mathcal{R} = (0, \beta) \in \mathcal{E}_m$ e $\beta = (\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ base di $\mathbb{K}^m$ allora

$(0, \beta)$ si dice "RIFERIMENTO DI $\mathcal{E}_m$"

e se $P \in \mathcal{E}_m$ allora $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{m} x_{i;P} \vec{b_i}$ le m-uple di scalari

$(x_{1,P}; x_{2,P}; \dots; x_{m,P})$ si dicono "COORDINATE DEL PUNTO P"

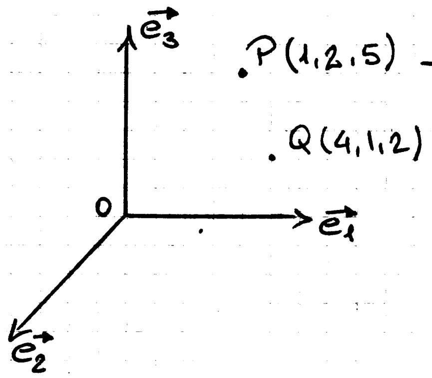
e se $(\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m})$ è una base ortonormale di $\mathbb{K}^m$ (OSSIA CHE $\langle \vec{b_i}; \vec{b_j}\rangle = \delta_{i,j}$) allora

$(\vec{0}; (\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_m}))$ si dice "RIFERIMENTO CARTESIANO ORTONORMALE" se il riferimento è $\mathcal{R}$ = riferimento canonico ortonormale

$$(O; (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n)) \text{ allora } \vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_{1Q} - x_{1P} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

fisso l'origine — base di riferimento

Ex. in $\mathcal{E}_3$ fisso l'origine e prendo la base canonica come riferimento



PUNTI IN "RIGA" → MI COSTRUISCO IL VETTORE "COLONNA"

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-2 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

nello spazio affine abbiamo i "vettori applicati" (cioè applicabili in un punto per ottenere un altro punto)

$P, Q \in \mathcal{E}_n \rightarrow d(P,Q) = ?$

distanza tra P e Q... $\rightarrow$ $\boxed{d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{iQ} - x_{iP})^2}}$

Ex. $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

$\Rightarrow$ SOLO SE SIAMO IN RIFERIMENTO ORTON.

$$d(P,Q) = \sqrt{|\vec{PQ}|} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^{n} (x_{iQ} - x_{iP}) \vec{b}_i ; \sum_{j=1}^{n} (x_{jQ} - x_{jP}) \vec{b}_j \right\rangle} =$$

= USO LA LINEARITÀ DEL PRODOTTO SCALARE =

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{iQ} - x_{iP}) \overline{(x_{jQ} - x_{jP})} \cdot \langle \vec{b}_i ; \vec{b}_j \rangle}$$

Esempio.... $n = 2$

$$\rightarrow \langle x_1 b_1 + x_2 b_2 ; x_1 b_1 + x_2 b_2 \rangle =$$

$$= x_1 \overline{x_1} \langle b_1, b_1 \rangle + x_1 \overline{x_2} \langle b_1, b_2 \rangle +$$

$$+ x_2 \overline{x_1} \langle b_2, b_1 \rangle + x_2 \overline{x_2} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

= SE ORTONORMALE SI AVRÀ... $\begin{cases} \langle b_1, b_1 \rangle = \langle b_2, b_2 \rangle = 1 \\ \langle b_2, b_1 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle = 0 \end{cases}$

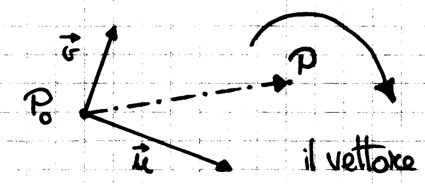
$$= x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \quad !!!$$

Se $(O, (b_1, b_2, \dots, b_n))$ è ortonormale la distanza tra i punti P e Q sarà

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_{1Q} - x_{1P}|^2 + |x_{2Q} - x_{2P}|^2 + \dots \dots + |x_{nQ} - x_{nP}|^2}$$

Piano Affine: Sia $P_0 \in \mathcal{E}_m$ e siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m \setminus [\vec{u}] \neq [\vec{v}]$ (QUINDI DI CONSEGUENZA SONO L. INDIPENDENTI).
Il "piano affine" generato da $\vec{u}, \vec{v}$ e passante per P_0 sarà:

$$\pi_{P_0;(\vec{u};\vec{v})} = \left\{ P \in \mathcal{E}_m \setminus \overrightarrow{P_0P} \in [\vec{u}, \vec{v}] \right\} =$$

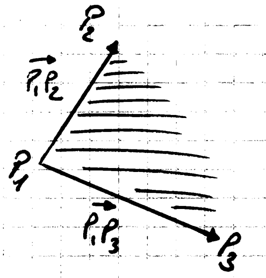


$$= \left\{ P \setminus \overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \right\}$$

il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

• <u>Piano passante per 3 punti:</u>

Siano P_1, P_2, P_3 punti di $\mathcal{E}_m$; allora



$$\pi_{P_1;P_2;P_3} = \left\{ P \setminus \overrightarrow{P_1P} \in [\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{P_1P_3}] \right\} = \left\{ P \setminus \overrightarrow{P_1P} \in \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \overrightarrow{P_1P_3} \right\}$$

HO CONSIDERATO P_1 COME PUNTO DI PARTENZA MA POSSO SCEGLIERE ANCHE P_2, O P_3...

$\rightarrow \pi_{P_1, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}}$ SICCOME HO BISOGNO DI 1 PUNTO E 2 VETTORI PER UN PIANO

Cosa succederebbe: se $P_1 = P_2 = P_3$; si avrebbe ...

$$\left\{ P \setminus \overrightarrow{P_1P} = \lambda \vec{0} + \mu \vec{0} \right\} = P_1 \quad \text{UNICO PUNTO}$$

se i punti sono allineati; si avrebbe...

$$[P_1P_2] = [P_1P_3] = \text{SI AVREBBE UNA RETTA}$$

se i punti non sono allineati, si avrebbe...

$$[P_1P_2] \neq [P_1P_3] = \text{SI AVREBBE UN PIANO}$$

DEFINIZIONE: 3 punti P_1, P_2, P_3 sono allineati se e solo se la retta vettoriale è generata da $[P_1P_2] = [P_1P_3]$, se ciò non è allora i punti non sono allineati...

... quando $\dim_{\mathbb{R}} [\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{P_1P_3}] = 2$

26/03/09

- RETTA PASSANTE PER P_0 E PARALLELA A $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$r = \left\{ P \in \mathcal{E}_n \setminus \overrightarrow{P_0P} \in [\vec{u}] \right\}$$

- RETTA PASSANTE PER P_1 E $P_2 \in \mathcal{E}_n$

$$r = \left\{ P \in \mathcal{E}_n \setminus \overrightarrow{P_1P} \in [\overrightarrow{P_1P_2}] \right\}$$

- PIANO PASSANTE PER P_0 E PARALLELO A $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\pi = \left\{ P \in \mathcal{E}_n \setminus \overrightarrow{P_0P} \in [\vec{u}; \vec{v}] \right\}$$

- PIANO PASSANTE PER P_1, P_2 E $P_3 \in \mathcal{E}_n$

$$\pi = \left\{ P \in \mathcal{E}_n \setminus \overrightarrow{P_1P} \in [\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{P_1P_3}] \right\}$$

SFERA IN $\mathbb{R}^4$?

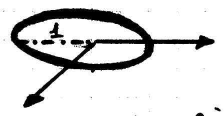
in $\mathcal{E}_n$ $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ considero $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$S_2 = \left\{ P \in \mathcal{E}_4 \setminus d(O,P) = 1 \wedge x_4 = 0 \right\}$$

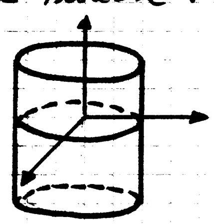
tutti i punti che distano 1 da O

$$d(O,P) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = 1$$

→ in $\mathbb{R}^2$ sarebbe l'eq di una circonferenza



→ in $\mathbb{R}^3$ sarebbe l'eq di un cilindro...



se voglio solo la circonf. in $\mathbb{R}^3$ considero:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

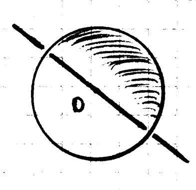
$$\Rightarrow S_2 = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \setminus x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \wedge x_4 = 0 \right\}$$

SFERA IN $\mathbb{R}^4$ CON CENTRO NELL'ORIGINE

Consideriamo la retta passante per l'origine e parallela a $\vec{e_4}$

$$r : \begin{cases} x_1 = 0 + t0 \\ x_2 = 0 + t0 \\ x_3 = 0 + t0 \\ x_4 = 0 + t1 \end{cases} \quad \vec{e_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Se consideriamo l'intersezione tra la retta e la sfera otteniamo $0 = 1$, assurdo, quindi la retta, in $\mathbb{R}^4$ non interseca la sfera anche se passa per la sua origine

$$\hookrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(3-(-2)) - y(3-(-4)) + (z-1)(1-2) = 0$$

$$\hookrightarrow 5x-7y-z-4=0$$ EQ CARTESIANA DEL PIANO PER P_1, P_2, P_3 ...

IN GENERALE...

... dati $P_0(x_0; y_0; z_0)$; $P_1(x_1; y_1; z_1)$; $P_2(x_2; y_2; z_2)$ il piano $\Pi_{P_0P_1P_2}$ ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-x_0)\overset{\nearrow a}{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}} - (y-y_0)\overset{\nearrow -b}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}} + (z-z_0)\overset{\nearrow c}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\end{vmatrix}} = 0$$

$$\rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

FORMULA GENERALE: "eq cartesiana di un piano passante per 3 punti"

NB: se Π è passante per 1 punto e parallelo a 2 vettori sarà:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1\\ y-y_0 & u_2 & v_2\\ z-z_0 & u_3 & v_3\end{vmatrix} = 0$$

la forma cartesiana di un piano è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\hookrightarrow d = -ax - by - cz$$

Sia per esempio $c \neq 0$

$$\Rightarrow cz = -ax - by - d$$

$$z = -\frac{ax}{c} - \frac{by}{c} - \frac{d}{c}$$

...allora tutte le soluzioni sono del tipo:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ -\frac{ax}{c}-\frac{by}{c}-\frac{d}{c}\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{a}{c}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{b}{c}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{d}{c}\end{pmatrix}$$

EQ PARAMETRICA DI UN PIANO PASSANTE PER $\begin{pmatrix}0\\0\\-d/c\end{pmatrix}$ E PARALLELO A $x\begin{pmatrix}1\\0\\-a/c\end{pmatrix}$ E $y\begin{pmatrix}0\\1\\-b/c\end{pmatrix}$

ESERCIZIO: Trovare l'eq del piano passante per $P_1 = (1,0,1)$; $P_2 = (1,1,0)$ e $P_3 = (2,1,1)$

un piano ha infinite equazioni cartesiane ma una volta trovata una di esse, tutte le altre sono sue multiple...

ESERCIZIO: Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per $P_0 = (1,2,-3)$ e ortogonale a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) scriviamo la generica eq. del piano passante per P_0 ...

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\downarrow$$
$$a(x-1)+b(y-2)+c(z+3)=0$$

2) siccome dev'essere ortogonale a $\vec{v}$ scrivo le sue componenti...

$$\downarrow \; 2(x-1)+1(y-2)+4(z+3)=0$$

$$\underline{\underline{2x+y+4z+8=0}}$$

ESERCIZIO: Scrivere l'equazione del piano passante per $P_0=(1,1,4)$ e ortogonale alla retta $r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 3+4t \end{cases}$

considerando l'eq. della retta notiamo che:

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 3+4t \end{cases}$$

$\rightarrow$ è il vettore direzionale di r (ortogonale al piano)

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ VETTORE DIREZIONALE

siccome tale vettore è ortogonale al piano, l'eq. cercata sarà:

PUNTO

$$2(x-1)-(y-1)+4(z-3)=0$$

VETTORE

Es: Eq. piano passante per $P_0=(2,2,3)$ e parallelo a $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

I° metodo: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

ESERCIZIO Sia data $r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 4-t \\ z = 1+t \end{cases}$, dare le eq. di due piani che si intersecano in questa data retta.

$\pi_1 ; \pi_2 \setminus \pi_1 \cap \pi_2 = r$

scelgo $t = 4-y \rightarrow \begin{cases} x = 2-3(4-y) \\ z = 1+(4-y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi_1 : x+3y-10=0 \\ \pi_2 : 5y+z-21=0 \end{cases}$

retta in forma cartesiana

27/03/09

Breve riposso: di una retta abbiamo:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases} \quad \text{ed} \quad r: \begin{cases} \pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

EQ PARAMETRICA

EQ. CARTESIANA
(ottenute come intersezioni di 2 piani)

ESERCIZIO $\begin{cases} x+2y-3z-1=0 \\ 2x-y+z-5=0 \end{cases}$ eq. parametriche?

Assegno il parametro "t" ad una variabile ...
$t = z$
e ottengo:

$$\left.\begin{cases} x+2y = 3t+1 \\ 2x-y = -t+5 \\ t = z \end{cases}\right] \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 2x+4y = 6t+2 \quad - \\ 2x-y = -t+5 \quad = \\ \hline // \quad 5y = 7t-3 \end{array}$$

$\hookrightarrow y = \frac{7}{5}t - \frac{3}{5}$

sostituendo ottengo anche la variabile "x"...

$\hookrightarrow x = \frac{2}{10}t + \frac{22}{10}$

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{5}t + \frac{11}{5} \\ y = \frac{7}{5}t - \frac{3}{5} \\ z = t \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ OTTENGO UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA CIOÈ UNA RETTA SEMPRE PARALLELA ALLA GENERATRICE

•) considero $\left.\begin{array}{l} x = 1+2t \\ z = 1+2t \end{array}\right\} x = z \rightarrow \boxed{x - z = 0}$

considero $\left.\begin{array}{l} y = 2-3t \\ z = 1+2t \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3t = -(y+2) \\ 2t = z-1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} 6t = -2(y+2) \;- \\ 6t = 3z-3 \;= \end{array}$

$// = -2(y+2) - 3(z+1)$

$2(y+2) + 3(z+1) = 0$

$\rightarrow \boxed{2y + 3z - 7 = 0}$

$\lambda(x-z) + \mu(2y+3z-7) = 0$

$\lambda x + 2\mu y + (3\mu - \lambda) z - 7\mu = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\mu \\ 3\mu - \lambda \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

X ESSERE ORTOGONALE ALLA RETTA r', I COEFFICIENTI DEL FASCIO DEVONO ESSERE PROPORZIONALI A QUELLI DEL VETTORE DIR

$\rightarrow$ EX. $\lambda = 2$; $\mu = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 1 \end{array} \quad \text{OK !!!}$$

ESERCIZIO: Scrivere l'equazione del piano contenente $r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 1+2t \end{cases}$ e passante per $P(1,2,2)$

1° •) considero come nell'esercizio precedente:

- $x - z = 0$
- $2y + 3z - 7 = 0$

$\lambda(x-z) + \mu(2y+3z-7) = 0$

$\hookrightarrow$ sono tutti i piani che contengono r, e sostituiamo le sue coordinate...

$\Longleftarrow$

$\lambda(1-2) + \mu(4+6-7) = 0$

$\boxed{\lambda = 3\mu}$

$\rightarrow$ PARAMETRO CHE DEVONO AVERE TUTTI I PIANI CONTENENTI P E PASSANTI PER r

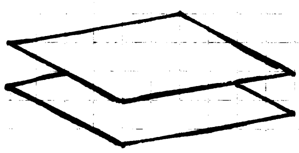
EX: $\lambda = 1$
$\Rightarrow \mu = 3$

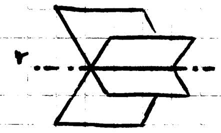
$3(x-z) + (2y+3z-7) = 0$

$3x + 2y - 7 = 0$

Posizioni Relative:

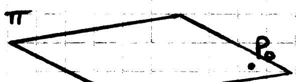
•) **Piano - Piano:** dati π_1 e π_2 due piani distinti, si dicono paralleli se, e solo se, sono uguali le loro direzioni, cioè se: $\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\right] \quad \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right]$





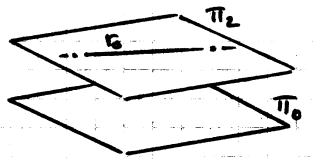
viceversa, si dicono incidenti se si intersecano lungo una retta

•) **Piano - Punto:** dati un punto $P_0 \in \mathcal{E}_3$ ed un piano π, il punto $P_0 \in \pi$ se e solo se sarà rispettata l'uguaglianza data:



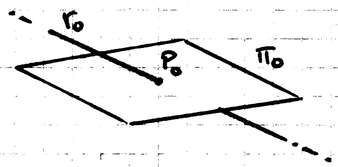
$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

•) **Piano - Retta:** dati $r_0: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$ e $\pi_0: ax + by + cz + d = 0$, la retta è detta parallela a π_0 se, e solo se, è contenuta in un piano ad esso parallelo, infatti tutte le rette che stanno su un piano $\pi_1 \parallel \pi_2$ sono anche parallele a π_2



↳ CONDIZIONE DI PARALLELISMO (PIANO - RETTA):

$$<\begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}> = 0 \rightarrow a\ell + bm + cn = 0$$



Se r_0 non è parallela a π_0, essa viene detta retta incidente, ed incide in un punto P_0 di intersezione $P_0 = r_0 \cap \pi_0$, e tale punto si calcola mettendo a sistema $P_0: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$

Esempio: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$; $\pi: 2x - y + 3z - 5 = 0$

↳ consideriamo $<\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}> \neq 0 \rightarrow$ non sono parallele

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \rightarrow 2(1 + 2t) - (1 - 3t) + 3(2 - 4t) - 5 = 0$$

↳ $t = 2/5$ PARAMETRO DEL PUNTO INCIDENTE

sostituendo ottengo $\begin{cases} x = 1 + 2(2/5) \\ y = 1 - 3(2/5) \\ t = 2 - 4(2/5) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = P_0$

abbiamo ottenuto il punto di intersezione P dato dalla sostituzione di $s=0$ o $t=1$ $\Rightarrow P=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

per verificare che le 2 rette sono complanari:

$$\begin{vmatrix}(x_1-x_2) & l_1 & l_2\\(y_1-y_2) & m_1 & m_2\\(z_1-z_2) & M_2 & M_1\end{vmatrix} \begin{cases}\to =0 \ (\text{complanari})\\ \to \neq 0 \ (\text{sghembe})\end{cases}$$

$$r': \begin{cases}x=x_1+l_1t\\y=y_1+m_1t\\z=z_1+M_1t\end{cases} \qquad r'': \begin{cases}x=x_2+l_2t\\y=y_2+m_2t\\z=z_2+M_2t\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1-3 & 2 & 7\\2-(-1) & -3 & 4\\4-(-1) & -5 & 2\end{vmatrix} = -28-117+145=0 \Rightarrow \text{sono complanari...}$$

$$\to \begin{vmatrix}x-3 & 2 & 7\\y+1 & -3 & 4\\z+1 & -5 & 2\end{vmatrix} = 14x-39y+29z-52=0$$

$\to$ PIANO CHE CONTIENE LE RETTE r_1 e r_2

ESERCIZIO:

$$r_1: \begin{cases}x=1-2t\\y=2-3t\\z=1+t\end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases}x=2+4t\\y=3+6t\\z=2-2t\end{cases}$$

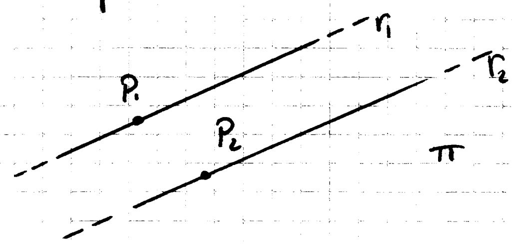
sono parallele?

due rette sono parallele se:

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'} \to \frac{\cancel{-2}^{\,-1}}{{}_2\cancel{4}}=\frac{\cancel{-3}^{\,-1}}{{}_2\cancel{6}}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

quindi sono parallele

il piano che le contiene?



$P_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

π

$P_2=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

se faccio $\begin{vmatrix}x-x_0 & l & l'\\y-y_0 & m & m'\\z-z_0 & n & n'\end{vmatrix}=0$ $\to$ xke sono multipli...

quindi considero $\overrightarrow{P_1P_2}$ come vettore: $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

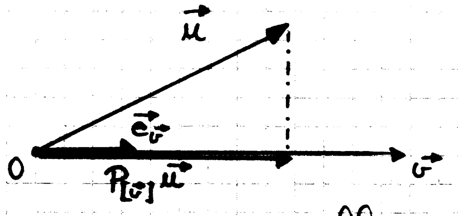
$$\begin{vmatrix}x-1 & -2 & 1\\y-2 & -3 & 1\\z-1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 4x-3y-z+3=0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 222

30/03/09

DEFINIZIONE (PROIEZIONE ORTOGONALE):
Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$; $\vec{v} \neq 0$ e $[\vec{v}]$ la direzione ad esso associato; allora:

$$P_{[v]} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{u} \longrightarrow P_{[\vec{v}]}\vec{u} = \langle \vec{u}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle \vec{e_{\vec{v}}}$$



con $\vec{e_{\vec{v}}} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

allora $P_{[\vec{v}]}\vec{u}$ si dice proiezione ortogonale di $\vec{u}$ sul vettore $\vec{v}$.

$\langle \vec{u}; \vec{e_v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{e_v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{e_v})$
$= |\vec{u}| \cdot 1 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{e_v})$
se $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow P_{[v]}\vec{u} = \vec{0}$

PROPRIETÀ DI $P_{[v]}\vec{u}$

1) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \rightarrow P_{[v]}\vec{u} \in [\vec{v}]$

2) $P_{[v]}$ è lineare, ossia $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\forall \vec{u_1}; \vec{u_2} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo:
$$P_{[v]}(\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}) = \lambda P_{[v]}(\vec{u_1}) + \mu P_{[v]}(\vec{u_2})$$

3) $|\langle \vec{u}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle| = |\vec{u}| \cdot |\cos(\vec{u}; \vec{e_{\vec{v}}})|$

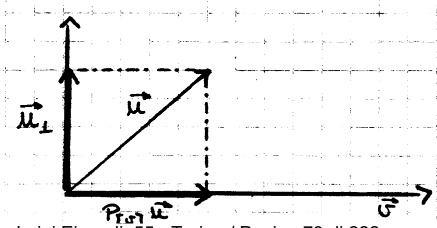
4) $\exists!$ (esiste ed è unico) vettore $\vec{u_\perp} \in \mathbb{R}^n \setminus$ (tale che)
$$\vec{u} = \vec{u_\perp} + P_{[v]}\vec{u}$$

dimostrazione #1
$$P_{[v]}\vec{u} = \langle \vec{u}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle \vec{e_{\vec{v}}} \in [\vec{v}]$$

dimostrazione #2
$$P_{[v]}(\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}) = \langle \lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle \vec{e_{\vec{v}}} =$$
$$= \lambda \langle \vec{u_1}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle \vec{e_{\vec{v}}} + \mu \langle \vec{u_2}; \vec{e_{\vec{v}}} \rangle \vec{e_{\vec{v}}} =$$
$$= \lambda P_{[v]}\vec{u_1} + \mu P_{[v]}\vec{u_2}$$

dimostrazione #3
considerando i moduli nel prodotto scalare osserviamo che $|\vec{e_{\vec{v}}}| = 1$

dimostrazione #4
definisco $\vec{u_\perp} = \vec{u} - P_{[v]}\vec{u}$



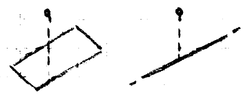
NB: dove $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$= |<\vec{P_0P}; \vec{n_\pi}>||\vec{n_\pi}| = |<\vec{P_0P}; \vec{n_\pi}| =$ considerando $\vec{P_0P} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} =$

$= \left| < \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} > \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \left| a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \right| =$

$\to ax - by - cz = d$

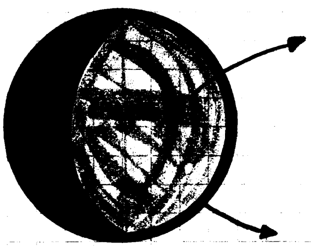
$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ → simile alla distanza "Punto-retta"



DEFINIZIONI: Se $P_0 \in \mathcal{E}_n$ e $R \geq 0$ abbiamo:

$$\mathcal{B}_{P_0}(R) = \{ P \in \mathcal{E}_n \setminus d(P_0,P) < R \}$$

e si dice Palla aperta di centro P_0 e raggio R.



$$\mathcal{S}_{P_0}(R) = \{ P \in \mathcal{E}_n \setminus d(P_0,P) = R \}$$

e si dice sfera (o superficie sferica) di $n-1$ dimensione, di centro P_0 e raggio R.

$n-1$ perchè ad esempio in $\mathcal{E}_2$ la superficie di circonferenza è una linea... in $\mathcal{E}_3$ è un piano la superficie sferica...

Sia $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \dots; \vec{e_n})$; $P_0(x_{1,0}; x_{2,0}; \dots; x_{n,0})$; $P(x_1; x_2; \dots x_n)$ allora si ha:

$$S_{P_0}(R) = \{ P \in \mathcal{E}_n \setminus |\vec{P_0P}|^2 = R^2 \}$$

considerando $\vec{P_0P} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0} \\ \dots \\ x_n - x_{n,0} \end{pmatrix} \to |\vec{P_0P}|^2 = \underbrace{(x_1 - x_{1,0})^2 + \dots \dots + (x_n - x_{n,0})^2 = R^2}_{\text{EQ. CARTESIANA DELLA SFERA...}}$

Considero $\mathcal{E}_3$; $P(x,y,z)$ ottengo:

$$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

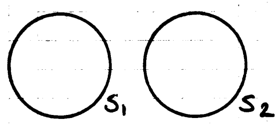
Essa è l'equazione cartesiana della sfera in $\mathcal{E}_3$ di centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ e raggio R che può scriversi anche:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

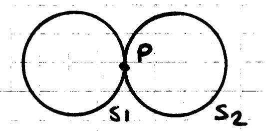
- **INTERSEZIONE DI DUE SUPERFICI SFERICHE:**

Siano S_1 e S_2 due sfere e sia $S_1 \cap S_2$ la loro intersezione, allora essa può essere:

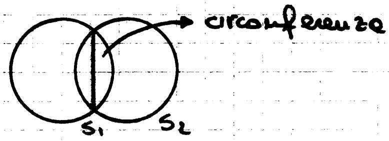
1) $S_1 \cap S_2 \rightarrow \{\emptyset\}$ insieme vuoto



2) $S_1 \cap S_2 \rightarrow \{P\}$ un punto
(ciò vuol dire che le due sfere sono "tangenti"...)



3) $S_1 \cap S_2 \rightarrow$ circonferenza
(ciò vuol dire che le due sfere sono "secanti"...)



DEFINIZIONE: Sia $S_1: x^2+y^2+z^2+A'x+B'y+C'z+D'=0 \rightarrow S_1(x,y,z)=0$
$S_2: x^2+y^2+z^2+A''x+B''y+C''z+D''=0 \rightarrow S_2(x,y,z)=0$
due sfere, allora si dice fascio di sfere generato da S_1 e S_2 la famiglia di sfere:

$$\lambda S_1(x,y,z)+\mu S_2(x,y,z)=0$$

dove $S_1 \cap S_2$ è detto "LUOGO BASE" del fascio

NB: "LUOGO BASE" insieme di tutti i pti comuni a tutte le sfere del fascio

Affermo che $P_0 \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow P_0 \in$ ogni sfera del fascio infatti se $P_0(x_0,y_0,z_0) \in S_1 \cap S_2$ ottengo: $\lambda S_1\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\emptyset}+\mu S_2\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\emptyset}=0$

In particolare $S_1 \cap S_2$ è contenuto in $S_1(x,y,z)-S_2(x,y,z)=0$

$\hookrightarrow (A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z+(D_1-D_2)=0$

Viene chiamato piano radicale del fascio...

$$S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \{\text{Piano radicale}\} = S_2 \cap \{\text{Piano radicale}\}$$

CASO 1: se S_1 e S_2 sono secanti (hanno in comune una circonf.)
$\Rightarrow$ PIANO RADICALE = è il piano della circonferenza

CASO 2: se S_1 e S_2 sono tangenti (hanno in comune un punto)
$\Rightarrow$ PIANO RADICALE = è il piano tangente a entrambe nel pto.

quindi ottengo: $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2-9+t(2x-y+z+3)=0$

EQ. FASCIO DI SFERE

(Tutte le sfere sono comprese, tranne il piano rad.)

NB: in questo caso

↳ il piano radicale non è una soluzione

$$x^2+2x+1+y^2+z^2-2z+1-9+2x\cdot t-y\cdot t+z\cdot t+3t=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2(1+t)x-ty+(2+t)z+3t-7=0$$

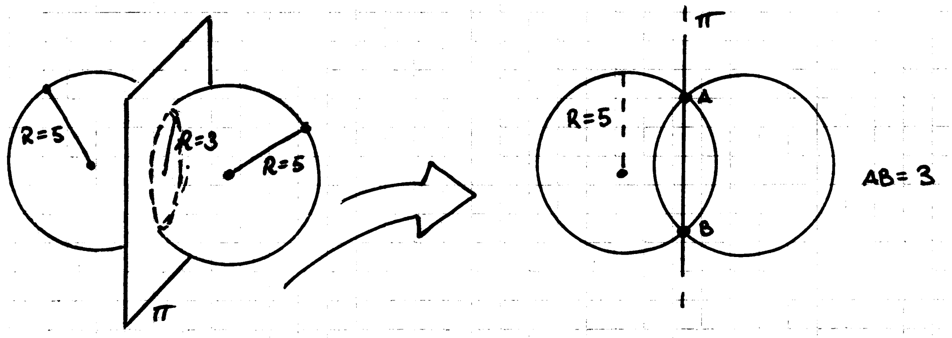
$$\underset{\text{CENTRO SFERA}}{C}=\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2};-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow C=\left(-(1+t);+\frac{t}{2};-\frac{(2+t)}{2}\right)$$

$$\underset{\text{RAGGIO SFERA}}{R^2}=\left(\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2+\left(-\frac{C}{2}\right)^2\right) \Rightarrow R^2=(1+t)^2+\frac{t^2}{4}+\frac{(2+t)^2}{4}$$

↳ da cui ottengo che: $t=\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$

quindi le sfere cercate hanno equazione

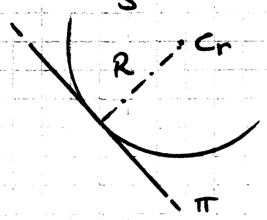
$$S_{1,2} \Rightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2-9\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}(2x-y+z+3)=0$$



ESERCIZIO: Determinare le sfere del fascio dato, tangenti al piano $\pi: 2x-y+2z-4=0$

fascio dato $S_1 \cap S_2$: $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2-9\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}(2x-y+z+3)=0$

Soluzione $\Rightarrow d(\pi, C_r)=R$



$$\frac{\left|2(-1-t)-\frac{t}{2}+(-2-t)-4\right|}{\sqrt{9}}=5$$

$$\hookrightarrow \frac{|-7t-16|}{3}=5 \rightarrow |-7t-16|=30$$

$$49t^2+256+224t=900$$

$$49t+224t-644=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-224\pm 420}{98} \begin{cases} t_1=-228{,}2\ldots \\ t_2=2 \end{cases}$$

le sfere hanno $t_1=t$ e $t_2=t$

$$\vec{m} = \frac{(\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}) \times \vec{u}}{|(\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}) \times \vec{u}|}$$ (affinché abbia modulo = 1)

$$d(P_0,P) = |\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P} \rangle| = \left| \left\langle \frac{(\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}) \times \vec{u}}{|(\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}) \times \vec{u}|} ; \overrightarrow{P_0P} \right\rangle \right| =$$

$$= \frac{1}{|(\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}) \times \vec{u}|} \cdot |\langle \overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}, \vec{u} \times \overrightarrow{P_0P} \rangle| =$$

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}|} \cdot |\vec{u}|} = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = d(P_0, r)$$

Esempio: Sia $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ e $P_0(4,2,1)$, allora $d(P_0, r) = ?$

considero $t = 1$ allora $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & -4 & 1 \\ j & -2 & 2 \\ k & +6 & -4 \end{vmatrix} = i(-4) + j(-10) + k(-6) = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}$

- $|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{38}$
- $|\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21}$

$$d(P_0, r) = \frac{2\sqrt{38}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{38 \cdot 21}}{21}$$

DISTANZA "PIANO - PIANO" IN $\mathcal{E}_3$

$$\pi_1 : ax + by + cz + d' = 0$$

$$\pi_2 : \lambda ax + \lambda by + cz\lambda + d'' = 0$$

se avessi $d'' = d'$ sarebbe le stesse rette...

$P_0 \in \pi_1 \quad (x_0, y_0, z_0)$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_2) = \frac{|\lambda a x_0 + \lambda b y_0 + \lambda c z_0 + \lambda d''|}{\sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2)}} =$$

$$= \frac{\cancel{|\lambda|} \cdot |\overbrace{a x_0 + b y_0 + c z_0}^{= -d'} + d''|}{\cancel{|\lambda|} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d'' - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(\pi_1, \pi_2)$$

03/04/09

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \underline{m} = \{1, 2, 3, \dots \dots, m\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{n} = \{1, 2, 3, \dots \dots, n\}$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m, n \geq 1$ e sia $\underline{m} \times \underline{n} = \left\{(i;j) \,/\, \begin{matrix} i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n} \end{matrix}\right\} = \left\{(i;j) \,/\, \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}\right\}$
e sia inoltre $X \neq \{\emptyset\}$ (diverso da un insieme vuoto)

DEFINIZIONE: Una matrice a "n" colonne e "m" righe a valori in X è una funzione: $A: \underline{m} \times \underline{n} \longrightarrow X$

Ex.
F 1 B
C 2 3
qual'è il 2° elemento della 2° colonna?
$\Rightarrow$ 2... (HO APPLICATO UNA FUNZIONE)

DEFINIZIONE: Sia $X^{\underline{m} \times \underline{n}} = \{A: \underline{m} \times \underline{n} \longrightarrow X\}$ allora A e B sono uguali se, e solo se, sono uguali anche come funzioni e cioè:

$$A = B \iff A(i,j) = B(i,j)$$

NB: l'insieme $\{A(i,j) \,/\, (i,j) \in \underline{m} \times \underline{n}\}$ si dicono entrate della matrice.

Osservazione:

se $A = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{Bmatrix}$ allora $f: A(i,j) = x_{i,j}$

Ex.
se $A = \begin{Bmatrix} \heartsuit & \clubsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \diamondsuit & \diamondsuit \end{Bmatrix}$ se considero $A_{1,2} = \clubsuit$
$A_{2,3} = \diamondsuit$
....

DEFINIZIONI: Sia $A \in X^{1 \times n}$; ossia $A: \{1\} \times \underline{n} \longrightarrow X$, si dice matrice riga (a "n" colonne) o più semplicemente riga...

Sia $A \in X^{m \times 1}$; ossia $A: \underline{m} \times \{1\} \longrightarrow X$, si dice matrice colonna (a "m" righe) o più semplicemente colonna...

→ Sia $Q \in X^{m \times n}$; con $(Q: m \times n \longrightarrow X)$, Q si dice **matrice quadrata** se $m = n$

DEFINIZIONE: Sia $A \in X^{m \times n}$ allora si ha:

$$A^T = (R_1(A)^T; \dots; R_m(A)^T) = \begin{pmatrix} C_1(A)^T \\ \cdots \\ C_n(A)^T \end{pmatrix} \in X^{n \times m}$$

è sempre una matrice...

RICORDA
- $R_i(A^T) = C_i(A)^T$
- $C_j(A^T) = R_j(A)^T$

PROPOSIZIONE: $A, B \in X^{m \times n}$

$A = B$ se, e solo se, per ogni $1 \le i \le m$ $R_i(A) = R_i(B)$; oppure per ogni $1 \le j \le n$ $C_j(A) = C_j(B)$ .....

.... solo se hanno ogni elemento uguale tra loro...

dimostrazione (x RIGHE) se $A = B$ allora $\forall 1 \le i \le m$ e $\forall 1 \le j \le n$ si avrà:

$$R_i(A)(j) = A(i,j) = B(i,j) = R_i(B)(j)$$

quindi, $\forall j$ si ha $R_i(A)(j) = R_i(B)(j)$ e infine

$$R_i(A) = R_j(B)$$

d'ora in poi indicheremo $X = \mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ e in questo caso sarà $\mathbb{K}^{m \times n} = \{A : m \times n \to \mathbb{K}\}$ la matrice a $\begin{cases} \to m \text{ righe...} \\ \to n \text{ colonne...} \end{cases}$

PROPRIETÀ: $\mathbb{K}^{m \times n}$ è ovviamente un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, ossia posso prendere due qualunque matrici A e B; e posso, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, farne combinazioni lineari

$$\begin{matrix} A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{matrix} \to \underbrace{\lambda A + \mu B}_{\text{SCALARI...}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

un campo scalare definito forma uno spazio vettoriale...

OSSERVAZIONE: $\underline{0} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ è la matrice nulla, definita da $\underline{0}(i,j) = 0 \in \mathbb{K}$, tutti gli elementi zero

OSSERVAZIONE: $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $-A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $\to (-A)(i,j) = -A(i,j)$

Prodotto di matrici...

Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$ allora esiste una funzione bilineare:

$$f : \mathbb{K}^{m \times p} \times \mathbb{K}^{p \times n} \longmapsto \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$(A, B) \longrightarrow A \cdot B \quad \text{(prodotto di matrici)}$$

ovviamente osserviamo che:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{R}_i(A) \in (\mathbb{K}^p)^\vee \\ C_j(B) \in \mathbb{K}^p \end{matrix}\right\} \text{ entrambe hanno } p \text{ entrate...}$$

$A \cdot B$ è l'unica matrice di $\mathbb{K}^{m \times n}$

$$(A \cdot B)_{(i,j)} = \mathcal{R}_i(A) \cdot C_j(B)$$

più visivamente:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(A) \\ \mathcal{R}_2(A) \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{R}_m(A) \end{pmatrix} \cdot \left(C_1(B); C_2(B); \dots; C_n \right) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(A) \cdot C_1(A); & \cdots & \cdots; \mathcal{R}_1(A) \cdot C_n(A) \\ \mathcal{R}_2(A) \cdot C_1(A); & \cdots & \cdots; \mathcal{R}_2(A) \cdot C_n(A) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \mathcal{R}_m(A) \cdot C_1(A); & \cdots & \cdots; \mathcal{R}_m(A) \cdot C_n(A) \end{pmatrix}$$

Esercizio:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{Bmatrix} \qquad A \cdot B = ?$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (1\ 2\ {-1})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & (1\ 2\ {-1})\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} & (1\ 2\ {-1})\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \\ (3\ 1\ 4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & (3\ 1\ 4)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} & (3\ 1\ 4)\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot1 - 1\cdot1 & 1\cdot2 - 2\cdot1 - 1\cdot1 & 1\cdot3 + 2\cdot1 - 1\cdot4 \\ 3\cdot1 + 1\cdot1 + 4\cdot1 & 3\cdot2 - 1\cdot1 - 4\cdot1 & 3\cdot3 + 1\cdot1 + 4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 9 & 26 \end{pmatrix}$$

Proprietà: "*bilinearità*"

Il prodotto di matrici è bilineare, ossia...

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \dots \forall A, A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{m \times p} \dots \forall B, B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{p \times n}$

$\rightarrow (\lambda A_1 + \mu A_2) \cdot B = \lambda A_1 \cdot B + \mu A_2 \cdot B$ — linearità risp. al 1° arg.

$\rightarrow A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A \cdot B_1 + \mu A \cdot B_2$ — linearità risp. al 2° arg.

DEFINIZIONE: Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ una matrice quadrata, allora:

1) una matrice si dice simmetrica se, e solo se, si ha: $A^T = A$
2) una matrice si dice antisimmetrica se, e solo se, si ha: $A^T = -A$
3) una matrice si dice hermitiana se, e solo se, si ha: $A^T = \bar{A}$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ è SIMMETRICA poiché la 1ª colonna è uguale alla 1ª riga... ... la n riga all'n colonna...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ è ANTISIMMETRICA poiché trasponendo si ottiene l'opposta di A...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$ è HERMETIANA perché se faccio la trasposta ottengo la matrice coniugata...

→ matrice di pauli

dimostriamo adesso che:

$$\forall\, 1 \le j \le n,\ \forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow C_j(A) = A \cdot \vec{e}_j$$

matrice $m \times n$

una sola colonna

dim: $(A \cdot \vec{e}_j)_{(i)} = (A \cdot \vec{e}_j)_{(i,1)} = R_i(A)\,\vec{e}_j =$

$= \sum_{h=1}^{i} R_i(A)_{(h)} \cdot \vec{e}_{j(h)} =$ come: $a \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a \cdot u_{(i)}$ $=$

$= \sum_{h=1}^{i} R_i(A)_{(h)} \cdot \delta_{jh} = R_i(A)_{(j)} \cdot d_{j \cdot j} =$

$= R_i(A)_{(j)} = A(i,j)$

c.v.d

$$\forall\, 1 \le i \le m,\ \forall A \in \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow R_i(A) = \varepsilon_i \cdot A$$

dim: per dimostrarlo si può utilizzare il risultato per le colonne, infatti la i-esima colonna della trasposta di $A \Rightarrow A^T$

$\rightarrow C_i(A^T) = R_i(A)^T = A^T \cdot \vec{e}_i = A^T \cdot \varepsilon_i^T$

$(R_i(A)^T)^T = (A^T \cdot \varepsilon_i^T)^T \Rightarrow \underline{\underline{R_i(A) = A \cdot \varepsilon_i}}$

c.v.d

Osservazione: Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$

$$A \cdot B = (A \cdot C_1(B);\ A \cdot C_2(B);\ \dots;\ A \cdot C_n(B))$$

dim: $\forall\, 1 \le j \le n$ ho che:

$C_j(A \cdot B) = (A \cdot B) \cdot \vec{e}_j = A \cdot (B \cdot \vec{e}_j) =$

$= A \cdot C_j(B)$

c.v.d.

Esempio Sia $n \ge 1$

la matrice quadrata $\mathbb{1}_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

$$\mathbb{1}_n(i,j) = \delta_{i,j}$$

se $n = 2$ $\quad \mathbb{1}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n = 3$ $\quad \mathbb{1}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA DEL RANGO: il rango di una matrice è il numero di righe, o di colonne, linearmente indipendenti...

$\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ rango A = · rango righe A · rango colonne A

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- si vede subito che la 3ª riga è la somma delle prime due, quindi solo 1ª e 2ª riga sono l. indip. ⇒ rango 2
- lo spazio delle colonne è $\mathbb{R}^3$ ed è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che sono l. indip. quindi ⇒ rango 2

⇒ rango A = 2

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- la 3ª riga = somma delle prime due quindi 1ª e 2ª riga sono l. indip. ⇒ rango 2
- se rango di righe = 2 anche quello delle colonne sarà 2 quindi

⇒ rango B = 2

$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & +1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- la prima riga più la 2ª ci da la 3ª riga quindi ⇒ rango 2

⇒ rango C = 2

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- essendoci almeno un elemento non nullo il rango è 1...

⇒ rango D = 1

$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- essendo tutti i coefficienti uguali a zero si ha... ⇒ rango E = 0

DEFINIZIONE: una trasformazione elementare di riga è una combinazione lineare che non cambia lo spazio delle righe...

TRASFORMAZIONE # 1° $\quad R_i \longleftrightarrow R_j$ (SCAMBIO DELLE RIGHE i E j)

TRASFORMAZIONE # 2° $\quad R_i \longleftrightarrow \lambda R_i$ (RIGA PER UNO SCALARE)

TRASFORMAZIONE # 3° $\quad R_i \longleftrightarrow R_i + \lambda R_j$

ESERCIZIO: Calcolare il rango di A dove...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

* SAPPIAMO CHE SE LA MATRICE È RIDOTTA, IL NUMERO DI RIGHE NON NULLE CI DA IL RANGO

consideriamo: $\left.\begin{matrix} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \end{matrix}\right\}$ di A

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2-2\cdot1 & 1-2\cdot2 & 3-2\cdot(-1) & -1-2\cdot3 & 5-2\cdot4 \\ 1-1 & 2-2 & 7+1 & 3+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Possiede almeno un elemento speciale per ogni riga

$\Rightarrow$ Ridotta

vi sono 3 righe non nulle quindi

$\Rightarrow$ Rango(A) = 3

ESERCIZIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \to R_2 = R_2 - 2R_1 \\ \to R_3 = R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

ogni riga deve avere almeno un elemento speciale per essere ridotta

$\Rightarrow$ non è ridotta...

Ricorda che... 07/04/09

➡ Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, essa si dice ridotta per riga se ogni riga non nulla possiede almeno un "elemento speciale" non nullo, al di sotto del quale si hanno al più zeri.....

➡ Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, essa si dice ridotta per colonna se ogni colonna non nulla possiede almeno un "elemento speciale" non nullo, alla destra del quale si hanno al più zeri.....

Ex. "RIDOTTA PER RIGA"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ELEMENTI SPECIALI

"RIDOTTA PER COLONNA"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ELEMENTI SPECIALI

– DETERMINANTI –

Sia $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e sia $\det(A) \in \mathbb{K}$

$\hookrightarrow \det(A) = \det(C_1(A); C_2(A); \dots; C_n(A))$

determinante: $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ è l'unica forma multilineare (cioè lineare rispetto a ciascun elemento) e antisimmetrica (cioè se scambio un elemento il determinante cambia di segno) tale che:

$$\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n) = 1$$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

prima di calcolare il determinante considero la 2ª colonna $\to \vec{u}$

3ª colonna $\to \vec{v}$

4ª colonna $\to \vec{z}$

e scompongo la 1ª colonna....

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to 1 \cdot \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + 1 \cdot \vec{e}_4$$

quindi avrò:

$$\det(\underbrace{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4}_{1^a \text{ colonna}}; \underbrace{\vec{u}}_{2^a}; \underbrace{\vec{v}}_{3^a}; \underbrace{\vec{z}}_{4^a})$$