



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 64

DATA : 24/03/2011

# A P P U N T I

STUDENTE : Brigante

MATERIA : Termodinamica Applicata e Trasmissione  
del Calore

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# TERMODINAMICA APPLICATA

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Prof. Romano Borchiellini

ORARIO DEL CORSO

MARTEDI 13,00 - 16,00 → Aula 3

VENEDI 8,30 - 11,30 13,00 - 16,00  
Aula 3 Aula 4C

TESTO CONSIGLIATO

M. Coli, P. Gregorio "Termodinamica" Esculapio  
Bologna.

Il corso è costituito da lezioni, esercitazioni e laboratori.  
L'esame è costituito da due esercizi di termodinamica e due esercizi di trasmissione del calore.

La **termodinamica** è quella parte della fisica in cui le parole calore, lavoro e temperatura hanno una particolare rilevanza.  
Ma cosa è il calore?

Il calore è una forma di energia che può essere trasmessa da un corpo all'altro.

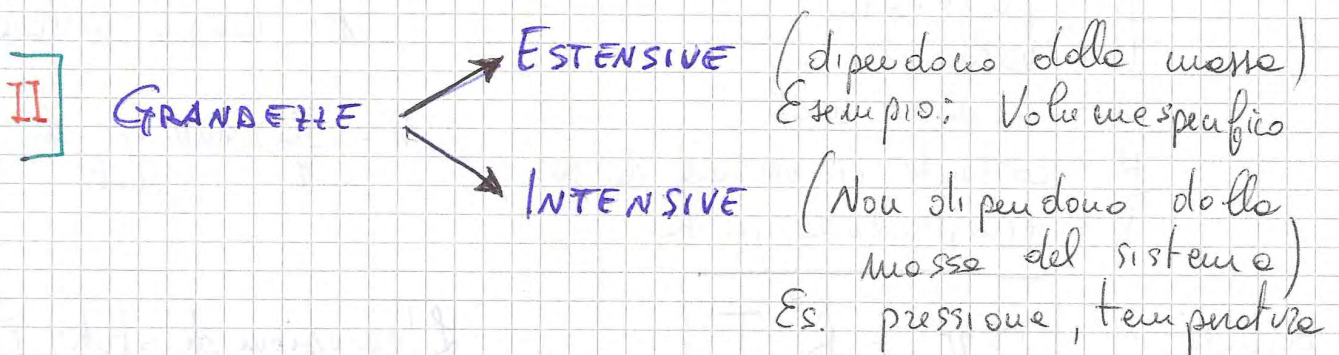
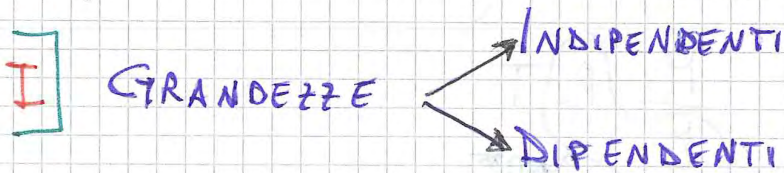
Una semplificazione che viene fatta in termodinamica applicata è che i corpi sono considerati omogenei, cioè in qualsiasi punto del corpo lo vale e misurare una certa grandezza, troverà sempre lo stesso valore. Però ciò, ci fa dimenticare, è abbastanza da quello che è effettivamente il valore reale della grandezza.

L'**energia** è una proprietà della materia che può trasferirsi da un corpo ad un altro o spostarsi all'interno di uno stesso corpo. Il suo spostamento è contemporaneamente causa ed effetto di ogni cambiamento del mondo sensibile e allo stesso tempo dimostrazione che è avvenuto.

Un sistema può essere definito nei seguenti modi, e secondo degli scambi che fa con l'ambiente esterno.

Scambio con l'esterno:	→ MASSA	→ CALORE	→ LAVORO
1. SIST. APERTO	X	X	X
2. SIST. CHIUSO	No	X	X
3. SIST. RIGIDO	X	X	NO Lfs
4. SIST. ADIABATICO	X	No	X
5. SIST. ISOLATO	No	No	No

In termodinamica si distinguono grandezze **dipendenti** e **indipendenti**. Non esistono e più gruppi di grandezze indipendenti, ma devo vedere ciò che devo fare e quindi quali grandezze mi servono. Distinguiamo quindi:



Le grandezze possono essere anche **specifiche** ed esempio il volume specifico, dato dal rapporto di due grandezze estensive.

Tutte queste grandezze possiamo indicarle con  $x_i$ ,  $i=1, \dots, N$  se  $N$  grandezze definiscono il sistema.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

Questo vettore mi permette di conoscere lo stato del sys all'istante  $t$ .

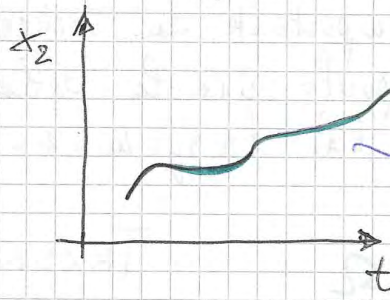
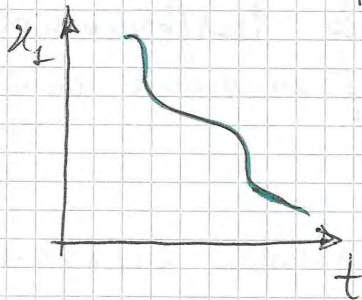
Nel caso dell'esposizione di stato l'elenco del vettore  $x$  è dato da due grandezze indipendenti,  $p \in \mathbb{I}$ .

Faremo quindi spesso riferimento a situazioni del tipo:

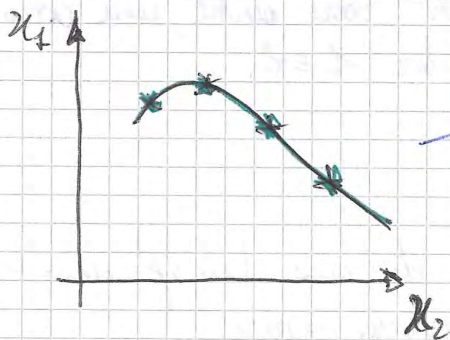
$$y = f(x_1, x_2)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi per capire ciò che succede, possiamo o vedere come cambia nel tempo rispetto a  $x_1$  e  $x_2$  oppure misurare diverse volte la posizione di  $x_1, x_2$ .



Processo  
(Dipende dal tempo)

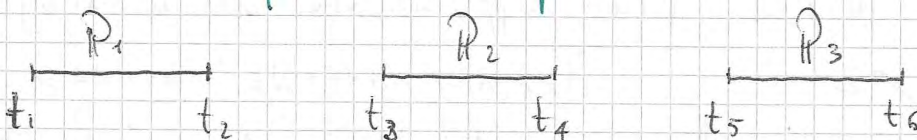


Trasformazione  
(Non dipende dal tempo)

**PROCESSO:** Conoscenza dell'evoluzione del sistema *in funzione* del tempo.

**TRASFORMAZIONE:** Conoscenza dell'evoluzione del sistema indipendentemente dal tempo.

Posso anche pensare ad un processo che si svolge tra  $t_1$  e  $t_2$  e dopo un po' un'altra che va da  $t_3$  a  $t_4$ , poi ancora un'altra tra  $t_5$  e  $t_6$ , l'insieme di questi processi costituisce un **processo composto**:



Un'altra condizione per cui vale un processo composto è che le coordinate termodinamiche del sistema devono cominciare negli estremi

Se questa operazione viene fatta riportando il sistema allo stato iniziale, ma anche l'ambiente esterno, è come se non fosse accaduto niente, cioè l'universo in tale periodo non si è mosso. Tale processo o trasformazione si dice **reversibile**.

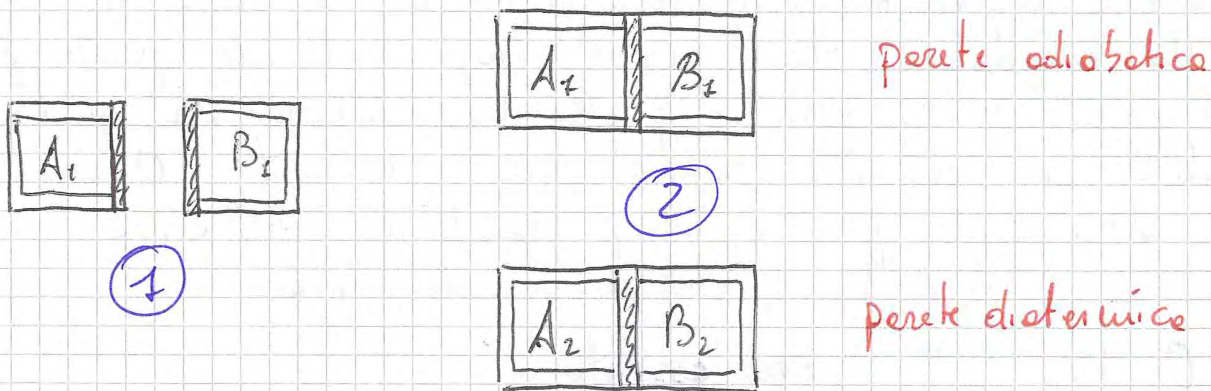
Quindi in una trasformazione reversibile riesco a riportare il sistema allo stato iniziale facendo ~~rimuovere~~ **rimuovere** l'ambiente esterno. Nella realtà nessun processo è reversibile, ma ci serve come elemento di riferimento.

**TEMPERATURA:** è una grandezza che per questa disciplina viene ~~definita~~ **definita** primitiva. Il concetto di temperatura nasce dal confronto termico di corpi diversi, ed è proprio quella grandezza che mi porta ad effettuare una valutazione oggettiva dello stato termico di tali corpi. Abbiamo due modi di individuarla:

1. Livello termico
2. Quantificazione oggettiva.

Un esperimento per misurare la temperatura è quello di prendere due sistemi diversi, aventi caratteristiche termiche diverse, e di avvicinarli fino al contatto: posso avere due possibilità:

1. Parete di contatto adiabatica: i sistemi ~~rimangono~~ **rimangono** invariati e non vi è scambio di energia.
2. Parete di contatto diatermica: i sistemi cambiano configurazione scambiando energia fino a quando non si raggiunge un equilibrio termico.



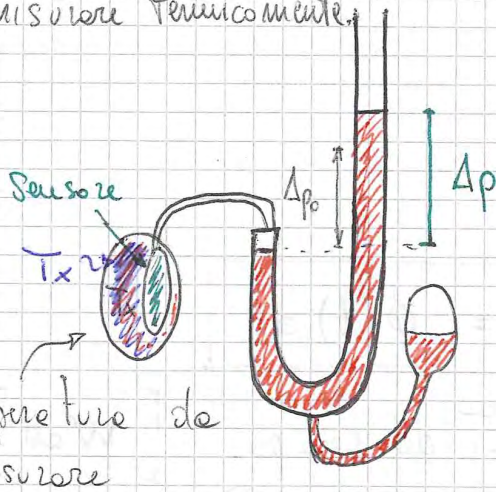
Per  $100^\circ\text{C}$  avrà quindi la temperatura di ebollizione dell'acqua.

$$\boxed{T = T_0 \frac{Y}{y_0}}$$

TEMPER. GENERICA  $\left\{ \begin{array}{l} T_0 \text{ valore nel punto triplo} \\ y_0 \text{ valore della variabile nel punto triplo.} \end{array} \right.$

Il termometro che più esplicitamente una temperatura è il termometro a gas, costituito da un sensore che viene immerso nello sostanza da misurare termicamente.

$$\Delta p_0 = \text{costante}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = p_b \text{ pressione bulbo} \\ \Delta p = \text{differenza di pressione finale} \end{array} \right.$$

$$\boxed{T_x = T_0 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 273,16 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta p_0}}$$

$$\Delta p_0 = \text{differenza di pressione iniziale}$$

Il sensore deve avere una massa molto più piccola dell'oggetto di cui dobbiamo misurare la temperatura, questo per evitare che la temperatura dell'oggetto possa variare.

Inizialmente pongo il sensore <sup>in contatto</sup> con un corpo in modo tale che io abbia

$$\boxed{p_0 V = R^* T_0}$$

poi immergo il sensore nel corpo di cui voglio misurare la temperatura, e avrò:

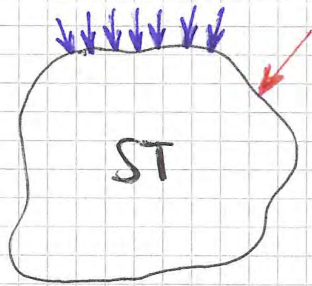
$$\boxed{p_x V = R^* T_x}$$

facendo il rapporto tra le due avrò il risultato sopra riportato.

In questo esperimento ho mantenuto il volume costante, e quindi sono verificate le pressioni.

$$\frac{p_x V}{p_0 V} = \frac{R^* T_x}{R^* T_0} \Rightarrow \boxed{T_x = T_0 \frac{p_x}{p_0}}$$

**LAVORO:** grandezza definita in meccanica come forza per uno spostamento. Vediamo cosa significa in termodinamica.



A.E.

Come per il calore anche il lavoro è una energia che non è una proprietà termodinamica. Anche il lavoro è legato ad un processo e si indica con:  
 $L(P)$

Quanto ci sono delle forze che gravano sul sistema in modo da determinare uno spostamento, queste pesano un lavoro sul sistema. Anche il lavoro come il calore è il risultato di una interazione tra due grandezze.

Indichiamo con i seguenti simboli

$L \rightarrow$  lavoro

$$L = \vec{F} \times \vec{s} \quad [\text{Joule}]$$

$W(t) \rightarrow$  Potenza in funzione del tempo  $[\text{Watt}]$

$$L = \int_P \tilde{L} = \int_{\Gamma} \vec{F} \times d\vec{s}$$

$$L = \int_P \tilde{L} = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt$$

$L(P)$  si indica per dire che non è funzione di un processo, ma è legato ad un processo.

Ricordiamo di non cadere nell'errore di scrivere  $L = L(t)$  in quanto non è funzione del tempo e non posso scrivere un'equazione

$W = \frac{dL}{dt}$  perché in tal caso il lavoro è legato al percorso e quindi non entrano in gioco forze conservative per cui il lavoro dipende solo dagli estremi di integrazione.

Il lavoro è una grandezza che non appartiene ad un corpo, ma che quindi dipende dall'interazione di un avvenimento. È una grandezza estrinseca al sistema.

Per quanto riguarda i segni del lavoro su un determinato sistema adottiamo una convenzione opposta a quella che viene adottata in meccanica.



## LAVORO INTERNO

Il lavoro interno si può scomporre in due componenti:

- Quello dovuto alle forze che sul mio volumetto agiscono in modo normale, che possono essere viste come una pressione.
- Quello dovuto alle forze che sul mio volumetto agiscono in modo tangenziale, che provocano uno strisciamento tra i miei volumetti, dovuto al fatto che il materiale si oppone a subire una deformazione.

Il lavoro dovuto alle forze normali si chiama LAVORO INTERNO REVERSIBILE e si indica con  $L_{i,R}$ . In sostanza è il lavoro che riesco a portare all'esterno.

Il lavoro dovuto alle forze tangenziali si chiama LAVORO DI ATTRITO che non esiste per tutti i materiali, in quanto è legato alla sua viscosità (nei gas è praticamente assente mentre si muove l'asta nei liquidi e di più nei solidi).

Il lavoro dovuto all'attrito non si riesce ad utilizzare e quindi viene perso trasformandosi in energia termica.

Questo significa che il lavoro delle forze interne perduto del lavoro che corrisponde a quello di attrito.

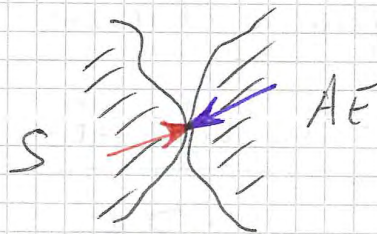
$$L_i = L_{i,R} - L_e$$

$$\begin{cases} L_i = \text{lavoro interno} \\ L_{i,R} = \text{lavoro interno reversibile} \\ L_e = \text{lavoro di attrito} \end{cases}$$

Però prima di tutto questo bisogna dire che, quando ad un corpo si applica una forza esterna su di esso si generano delle forze interne che generano la risultante, la quale si oppone alla forza esterna, e fa in modo, che la risultante sia nulla.

Se prendo un volumetto del mio corpo, sul quale è applicata una forza esterna, noterò che su di esso vi saranno esercitate delle forze che chiamo tensioni e che indico con  $\tau$ .

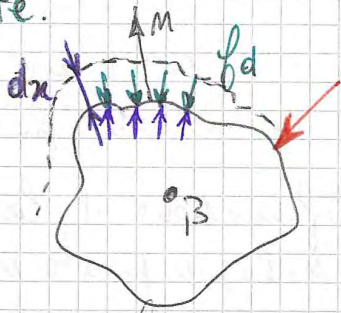
$$\begin{cases} \vec{F}_{se} + \vec{F}_{es} = 0 \\ L_{se} + L_{es} = 0 \end{cases}$$



Il punto di applicazione è sempre lo stesso.

## Forze di superficie concentrate e distribuite

Prendiamo un sistema e applichiamo forze concentrate e forze distribuite.



$n$ : vettore normale  
 $dx$  = spostamento infinitesimo

$$\vec{F}_{se}^s \text{ e } \vec{F}_{es}^s \text{ (sono delle risultanti)}$$

Sono entrambe forze di superficie

$$\vec{F}_{se}^d = \int_V \vec{b}_{se} dV$$

Se parliamo di densità di forze  $b_{se}$  sarebbe la densità  $f$  per la costante  $\rho$ .

Sono forze e distanze dovute alla

presenza di un campo, ad esempio il campo gravitazionale.

Poi abbiamo le cosiddette forze interne  $\vec{F}_i$  che hanno come risultato un valore nullo.

$$\vec{F}_{se}^s = \int_A \vec{f}_{d,se} dA$$

Risultante delle forze di superficie distribuite

$$L_{se}^s = \int_V \vec{F}_{se}^s \times d\vec{x} = \int_V \vec{f}_{d,se} \times \vec{m} dx dA = \int_V \vec{f}_{d,se} \times \vec{m} dV$$

↓ prodotto scalare

$dV = dx \cdot dA$

Lavoro delle forze di superficie distribuite

$$W_{se}^s = \vec{F}_{se}^s \times \vec{v}$$

Potenza forze di superficie

$v$  = velocità

$$\vec{F}_{se}^d = \int_V \vec{b}_{se} dV$$

$$L_{se}^d = \int_P \vec{F}_{se}^d \times d\vec{x}_B$$

$$W_{se}^d = \vec{F}_{se}^d \times \vec{v}_B$$

Forze, lavoro e potenza dovuti alle risultanti delle forze e distanze determinate dalla presenza di un campo.

Lavoro e potenza meccanica sono grandezze estensive, dipendono cioè dalla massa dei corpi.

Il teorema dell'energia cinetica ci dice che:

$$L_{es}(P) + L_i(P) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

$$L_{es} + L_i = \Delta E_c \rightarrow \text{Abbreviate}$$

Posso anche scrivere, sapendo che  $L_{es} = -L_{se}$

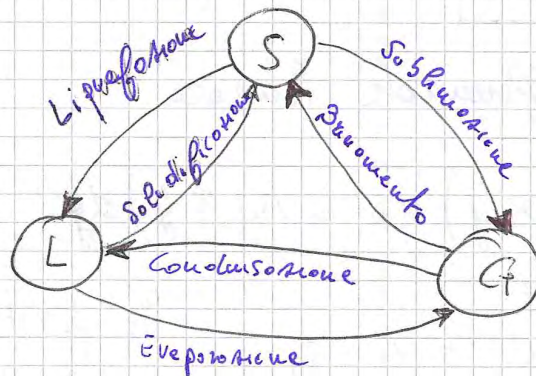
$$-L_{se} + L_i = \Delta E_c$$

Tutto ciò può essere anche scritto in termini di potenza:  $W_{es} = -W_{se}$

$$-W_{se} + W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA  
IN FORMA DI POTENTE

## I CAMBIAMENTI DI STATO DI AGGREGAZIONE



È importante dire che  
ogni fase, ovvero ogni porzione  
della materia omogenea  
e divisibile mediante fen.  
fisici, si trova in un  
solo stato di aggregazione.

Gli stati di aggregazione dipendono dalle coordinate  
termodinamiche del sistema.

$$p = p(V, T)$$

Le equazioni di stato sono fatte  
opposte per vedere come variano  
le coordinate del sistema.

La termodinamica ha validità generale e universale.  
Esistono delle relazioni definite fenomenologiche che collegano  
il valore scambiato all'evoluzione dello stato e delle coordinate  
termodinamiche indipendenti.

Le equazioni fenomenologiche si possono scrivere in due modi:

- Nel dominio del tempo;
- Nello spazio degli stati

Vediamo le unità di misura

$$\Lambda_v = \frac{J}{m^3} = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Questo a fa capire che una pressione è una energia per unità di volume

$$C_v = \frac{J}{kgK}$$

Poi definiamo la quantità di calore per unità di massa come:

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{Q}}{M} = \lambda_v dv + c_v dT$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_v = \frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa \\ c_v = \frac{J}{kgK} \end{array} \right.$$

$$\tilde{Q} = \phi(t) dt$$

$$\phi(t) = \Lambda_v \frac{dV}{dt} + C_v \frac{dT}{dt}$$

$$\phi(t) = \frac{\phi(t)}{M} = \lambda_v \frac{dv}{dt} + c_v \frac{dT}{dt}$$

potenza per unità di massa e delle meccanica

$$\tilde{L}_i = p dV \quad \tilde{L}_i = p dv \quad \text{Lavoro massico}$$

Quando le grandezze sono definite per l'unità di massa si chiamano le lettere minuscole.

$$p = p(V, T)$$

$$\tilde{W}_i = p \frac{dV}{dt}$$

POTENZA INTERNA

Definiamo ora dal secondo principio che:  $p \cdot v = R^* T$

$$\boxed{dv = T \left( \frac{dp}{dT} \right)_v} \Rightarrow dv = T \left( \frac{R^*}{v} \right) = p$$

$$\boxed{dp = -T \left( \frac{dv}{dT} \right)_p} \Rightarrow dp = -T \left( \frac{R^*}{p} \right) = -v$$

Quindi abbiamo fatto sparire due equazioni delle pagine precedenti, e cioè:

1.  $dv = dv(v, T)$

2.  $dp = dp(p, T)$

Ci rimangono così solo tre equazioni o relazioni fondamentali.

Dalle equazioni di stato avremo:

$$\boxed{p = \frac{R^* T}{v}}$$

$$\boxed{v = \frac{R^* T}{p}}$$

$$dv = T \frac{R^*}{v} = p \quad \left\{ \begin{array}{l} c_p = c_p(T) \\ c_v = c_v(T) \end{array} \right.$$

$$dp = -T \frac{R^*}{p} = -v$$

$$\boxed{c_p - c_v = R^*} \quad \text{Relazione di Meyer}$$

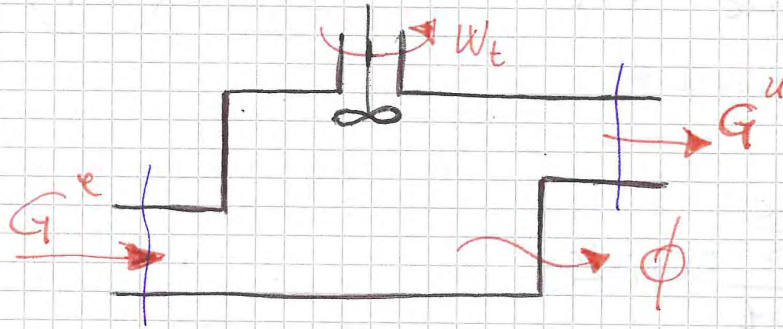
$$\delta Q = [-v dp + c_p dT] = [p dv + c_v dT]$$

Relazioni che valgono solo per i gas ideali sono mostrati nelle seguenti tabelle:

Atomi pes	$c_p$	$c_v$	$\gamma = c_p/c_v$
1	$\frac{5}{2} R^*$	$\frac{3}{2} R^*$	$5/3$
2	$\frac{7}{2} R^*$	$\frac{5}{2} R^*$	$7/5$
3	$4 R^*$	$3 R^*$	$4/3$
+ di 3	$c_p(T)$	$c_v(T)$	$\gamma(T)$

# I SISTEMI APERTI O SISTEMI CON DEFLUSSO

Il fluido passando attraverso il sistema esce e occorre lavoro.  
 Lo schema utilizzato per indicare tali sistemi è del tipo:



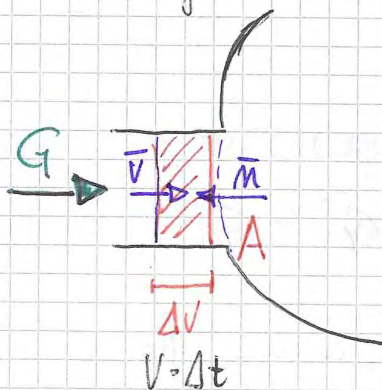
Abbiamo due possibilità o metodi di definizione di un sistema: **metodo Lagrangiano** e **metodo Euleroiano**.

• Nel **metodo Lagrangiano** prendo in considerazione il processo nel tempo di una particella. La descrizione è quindi di una singola particella. Per tale sistema bisogna porsi in condizioni tali da essere su una singola particella (con il sys di riferimento).

Nel **metodo Euleroiano** prendiamo un volume di controllo e vediamo ciò che accade in un intervallo di tempo. Possiamo paragonare tale metodo ad una esplosivo e vedere cosa cambia dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

L'approccio che più utilizzeremo sarà il **metodo Euleroiano**.

• La prima grandezza di cui occupiamo è la portata  $G$ .  
 Facciamo un esperimento



Si definisce portata la quantità di massa che attraversa una sezione nell'unità di tempo

$$G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\Delta t)}{\Delta t} =$$

$\bar{m}$  verso dell'area  $A$  rivolto verso l'esterno

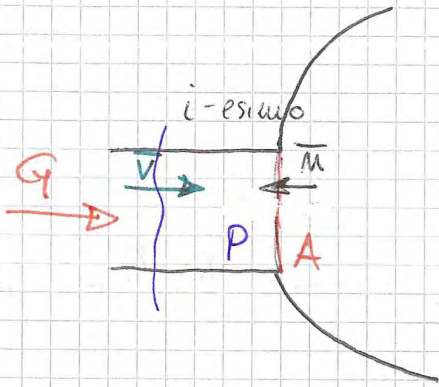
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho A \bar{m} v \Delta t}{\Delta t}$$

+ portata uscente

- portata entrante

$$G = \pm \rho A |v|$$

Riprendiamo il nostro impianto



Nel condotto abbiamo una certa pressione che identifichiamo con  $p$ .

$$W_{sp,i} = \bar{F} \cdot \bar{v} = p \cdot A \bar{m} \bar{v} = \pm p A |v| =$$

$$= \pm p A \frac{G}{pA}$$

$$v = \frac{1}{\rho}$$

$$W_{sp,i} = \pm (p v)_i G_i$$

Volume specifico

$$W_{sp} = \sum \pm (p v)_i G_i$$

$$W_i = p \frac{dV}{dt} - W_e$$

$$L_{sp} = \int_{t_1}^{t_2} W_{sp} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \pm (p v)_i G_i dt$$

$$W_{sp} = \frac{d(pV)}{dt}$$

$$L_{sp} = \Delta(pV)$$

$$W_{se} = W_{se}^s + W_{se}^d$$

$$-W_{se} + W_i = \frac{dE_c}{dt}$$

teorema dell'energia cinetica  
valuto anche per fluidi con attrito.

Quindi avrò:

$$-W_t - W_{sp} - W_{se}^d + p \frac{dV}{dt} - W_e = \frac{dE_c}{dt}$$

$\swarrow$   $W_{se}^s$   $\searrow$   $W_i$

$$-W_t - \frac{d(pV)}{dt} - \frac{dE_p}{dt} + p \frac{dV}{dt} - W_e = \frac{dE_c}{dt}$$

$\swarrow$   $W_{se}^d$

ma sapendo che le derivate rispetto al tempo vale:

$$\frac{d(pV)}{dt} = p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt}$$

E combinando tutto di nuovo otteniamo il risultato:

$$+W_t + V \frac{dp}{dt} + W_e + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = 0$$

Abbiamo combinato tutto di nuovo ed eliminato i termini

$p \frac{dV}{dt}$  perché si annullavano l'uno con l'altro.

Se il fluido è incomprimibile è ovvio che il volume specifico è costante e posso portarlo fuori dall'integrale.

○ Fluido incomprimibile  $\Rightarrow v = \text{costante}$

Allora l'espressione diventa

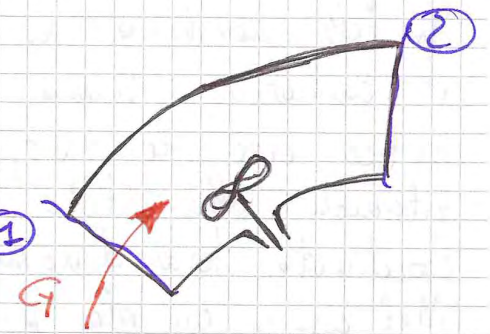
$$h_t + h_e + v \Delta p + \Delta e_c + \Delta e_p = 0$$

$$0 = h_t + h_e + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + \frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} + g z_2 - g z_1 \quad \textcircled{1}$$

Quindi avremo

$$h_t + h_e + \frac{p_2}{\rho} + \frac{C_2^2}{2} + g z_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{C_1^2}{2} + g z_1$$

È il teorema di Bernoulli.



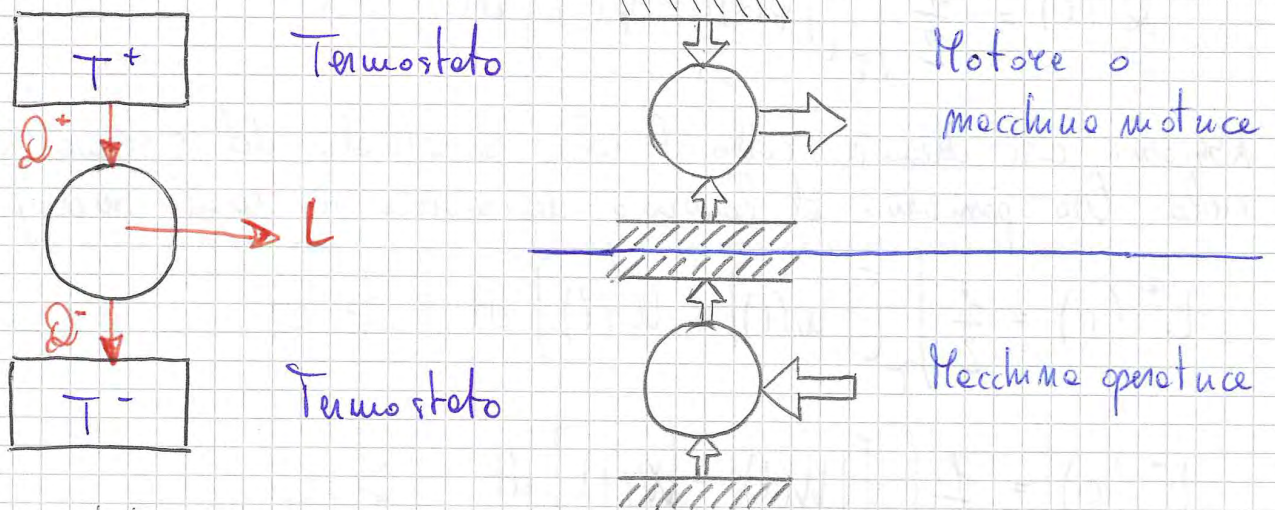


Nel **frigorifero** quello che voglio realizzare è sottrarre calore da un sistema e rimetterlo nell'ambiente esterno, avrà così come effetto quello di un abbassamento della temperatura all'interno del sistema.

Nella **pompa di calore** voglio invece aggiungere calore ad un sistema prendendolo dall'ambiente esterno.

È un effetto analogo a quello visto per il frigorifero.

Le macchine termiche più semplici sono le **MACCHINE BITERMICHE** che vengono indicate nel seguente modo:



Il termostato è un sistema ideale che è in grado di dare calore al sistema preso in considerazione senza che questo vari la sua temperatura. Tale termostato è sede di trasformazioni reversibili, semplificando il comportamento reale delle macchine.

Nella macchina bitermica l'energia termica è scambiata tra due corpi ben definite di livello termico. Cioè avere calore da una fonte a una certa temperatura e lo cede ad un'altro avente una determinata temperatura.

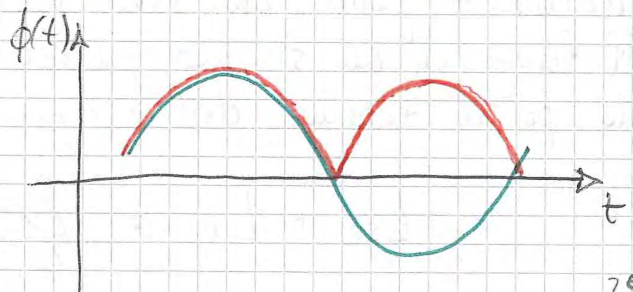
Vediamo come indica il calore scambiato in un ciclo

$$Q(c) = \int_{\tau} \phi(t) dt \rightarrow \text{Calore scambiato in un ciclo}$$

$\tau$  è la durata del ciclo.

- ciclo reale  $\rightarrow \phi(t)$

- ciclo positivo  $\rightarrow |\phi(t)|$



Quindi in un ciclo parlare di  $L_{se}$  e parlare di  $L_i$  è la stessa cosa.  $L_i = L_{se}$

Vediamo cosa si intende ora per **EFFICIENZA** di una macchina termica in generale.

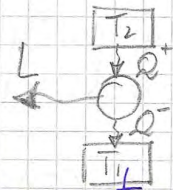
$$\text{EFFICIENZA} = \frac{\text{ENERGIA UTILE}}{\text{ENERGIA SPESA}}$$

Si può parlare anche di effetto utile ed effetto speso in una macchina termica.

Su una macchina motrice l'efficienza posso scriverla come un rendimento definito da:

$$\eta = \frac{L_m(c)}{Q^+(c)}$$

→ Rendimento motore o Rendimento macchina termica motrice



Per le macchine operatrici ovvero due distinzioni tra frigorifero e pompe di calore e parleremo di efficienza:

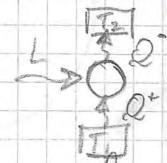
$$E_F = \frac{Q^+(c)}{L_m(c)}$$

→ EFFICIENZA di un FRIGORIFERO

$Q^+(c)$  calore ricevuto dal sistema in un ciclo  
 $Q^-(c)$  calore ceduto dal sistema in un ciclo

$$E_{PC} = \frac{Q^-(c)}{L_m(c)}$$

→ EFFICIENZA di una POMPA DI CALORE



Può essere utile il seguente schema per pronto ripasso colori e lavoro netti di macchine operatrici e motrici.

	$L_m(c)$	$Q_m(c)$
<b>MACCHINE MOTRICI</b> o <b>MOTORI</b>	$> 0$	$> 0$
<b>MACCHINE OPERATRICI</b>	$< 0$	$< 0$

non ciclica o in un arco potenziale

$$\int_{\Gamma} \tilde{Q} = E(X_2) - E(X_1)$$

$\Delta E =$  variazione dell'energia totale del sistema.

Possiamo allora tradurlo con l'espressione

$$\int_{\Gamma} \tilde{Q} - \tilde{L} = E_2 - E_1$$

Saperlo che

$$\begin{cases} Q(P) = \int_{\Gamma} \tilde{Q} \\ L(P) = \int_{\Gamma} \tilde{L} \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma} \tilde{Q} - \int_{\Gamma} \tilde{L} = \Delta E$$

Quindi per una trasformazione non ciclica il primo principio della termodinamica diventa

$$Q(P) - L(P) = \Delta E$$

PRIMO PRINCIPIO PER UNA TRASFORMAZIONE NON CICLICA

In tal caso quindi devo conoscere il percorso della trasformazione non ciclica o processo non ciclico.

In termodinamica il simbolo  $E$  è definito come energia totale e il suo valore è noto o meno di una costante, ciò significa che in uno stato iniziale preso come riferimento le coordinate termodinamiche saranno:

$$X_0 \left\{ \begin{array}{l} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{array} \right\}$$

e tali coordinate corrispondono a un valore di energia totale del sistema per  $e$

$$E_0 = E(X_0)$$

E quindi avrò l'espressione:

$$\hat{E}(X) = E(X) - E(X_0)$$

che rappresenta il valore di energia totale di un sistema espresso come differenza di tali energie dal valore preso come riferimento.

## II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Avevamo parlato di processi inversi  $P_{inv}$  e poi di processi reversibili, e da tale concetto possiamo dire che: Avevamo  $IP$  per cui si ha  $P_{inv}$  effermomo

$$\left. \begin{aligned} Q(P) &= -Q(P_{inv}) \\ L(P) &= -L(P_{inv}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Se queste sculture sono valide} \\ P \text{ è reversibile} \end{array}$$

In natura la reversibilità non esiste però alcuni processi più di altri possono essere approssimati come reversibili.

Il Secondo principio della termodinamica dice che: "quando un sistema termodinamico percorre un processo  $P$ , il flusso di calore che ad ogni istante può essere scambiato è sempre inferiore o uguale ad un valore massimo che è caratteristico del corpo." Tale grandezza è chiamata entropia indicata con  $S$ . In forme matematica ovvero:

$$\phi(t) \leq \phi_H(t)$$

dove

$$\phi_H = T \frac{dS}{dt}$$

che sostituendo nella prima equazione diventa:

$$T \frac{dS}{dt} \geq \phi(t)$$

## II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

È uguale nelle disuguaglianze vale nel processo reversibile. Da qui c'è la possibilità di scrivere tale principio in diversi modi:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\phi(t)}{T} + \sum_i$$

→ termine dovuto alle irreversibilità

dove

$$\sum_i \neq 0 \quad \text{se} \quad \text{IRREVERSIBILE}$$

$$\sum_i = 0 \quad \text{se} \quad \text{REVERSIBILE}$$

$$\Delta S = \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2}$$

Perché i termostati lavorano a temperatura costante posso usare l'isoterma. Vediamo cosa succede sui due termostati

$$\Delta S_{T_1} = -\frac{Q}{T_1} \rightarrow \text{Componente del termostato } T_1$$

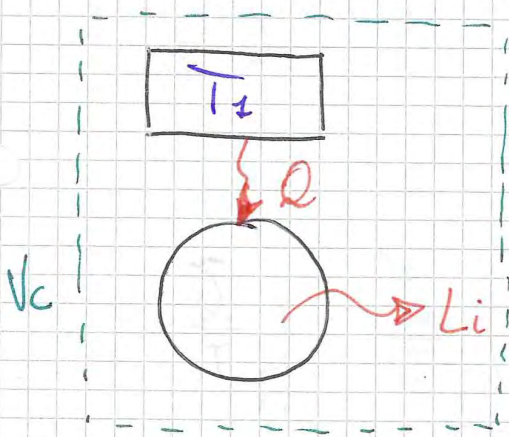
$$\Delta S_{T_2} = \frac{Q}{T_2} \rightarrow \text{Componente del termostato } T_2$$

Sostituendo queste espressioni nella prima equazione, ottengo:

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \quad \text{perché } T_1 > T_2$$

Abbiamo trovato quindi che il sistema complessivo costituisce un processo irreversibile, in quanto l'entropia è sempre crescente. Vediamo un altro esempio:

Un sistema scambia calore con un singolo termostato e produce lavoro immettendolo nell'ambiente esterno.



Prendiamo quindi in considerazione il VC indicato e scriviamo che:

$$\Delta S = \Delta S_T + \Delta S_{\text{ciclo}} = 0$$

$$\begin{cases} \Delta S_T = \text{variaz. entropie termostato} \\ \Delta S_{\text{ciclo}} = \text{variaz. entropie sist. ciclico.} \end{cases}$$

Quindi avremo che la variazione di entropia di tale sistema è negativa.

$$\Delta S = -\frac{Q}{T} < 0$$

$$\Delta S_T = -\frac{Q}{T} < 0$$

Tale macchina quindi non può funzionare perché contraddice il II principio.

Carnot ha dimostrato che esiste una macchina che compie un ciclo particolare che ha il massimo rendimento possibile.

Allora avrà:

$$\frac{Q^-}{Q^+} = \frac{T^-}{T^+}$$

$$\frac{Q^+}{T^+} - \frac{Q^-}{T^-} = 0$$

Alle fine il rendimento del ciclo di Carnot sarà:

$$\eta_c = 1 - \frac{T^-}{T^+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+}$$

RENDIMENTO  
CICLO DI CARNOT

Abbiamo supposto di misurare la temperatura con una scala assolutamente indipendente del materiale termometrico che sull'asse delle ordinate del ciclo abbiamo denotato con  $T$ .

Del risultato ottenuto possiamo dire che il rendimento per il ciclo di Carnot non dipende dalle sostanze che percorrono il ciclo.

La  $T^-$  che è più facile da ottenere è la  $T_{amb}$  perché è la temperatura che è più delle nostre portate, in quanto per ottenerla non dobbiamo spendere alcuna energia.

$Q^+$  = calore fornito al sistema

$$\eta = \frac{L_u(c)}{Q^+} = \frac{Q_u(c)}{Q^+} = \frac{Q^+ - Q^-}{Q^+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+}$$

Per Carnot invece:

$$\eta_c = 1 - \frac{T^-}{T^+}$$

Tanto più  $T^-$  è distante da  $T^+$  <sup>tanto più</sup> il rapporto tende a zero e quindi il rendimento va all'unità e la macchina è migliore.

È quindi il rendimento sarà:

$$\eta_c = 1 - \frac{Q^-}{Q^+}$$

$$\eta_c = 1 - \frac{\cancel{MR}^+ Q^- \ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right)}{\cancel{MR}^+ Q^+ \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}$$

In una trasformazione adiabatica vale la relazione seguente:

### TRASFORMAZIONE ADIABATICA

$$Q V^{\gamma-1} = \text{costante}$$

$Q$  = temperatura

dove  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  e vale  $\gamma = 1,4$  per l'aria

Cioè per le nostre trasformazioni adiabatiche 1-2 e 3-4 valgono le relazioni:

$$1-2) \quad Q^- V_1^{\gamma-1} = Q^+ V_2^{\gamma-1}$$

$$3-4) \quad Q^- V_4^{\gamma-1} = Q^+ V_3^{\gamma-1}$$

$$\eta_c = 1 - \frac{Q^- \ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right)}{Q^+ \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}$$

Facendo il rapporto tra le due avremo

$$\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$$

Sostituendo tale valore nel rendimento di Carnot avremo

$$\eta_c = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} = 1 - \frac{T^-}{T^+}$$

me ho bisogno anche di  $p$  e  $c_v$  per calcolare  $u$ .

$$p = p(v, T)$$

$$c_v = c_v(v, T)$$

Vediamo cosa succede ~~con~~ per il **gas ideale**, perché è quello che useremo di più durante questa trattazione.  
Per il gas ideale sappiamo che:

$$\boxed{\lambda v = p} \rightarrow \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0 \quad u = u(T)$$

ciò mi dice che l'energia interna di un gas ideale è funt. delle sole temperature

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_v(T)$$

Mettendo insieme le due espressioni abbiamo

$$du = c_v(T) dT \quad \text{che integrato su una superficie } \Gamma$$

$$u - u_0 = \int_{\Gamma} c_v(T) dT = c_v(T - T_0) \quad \text{se } c_v = \text{costante}$$

Utilizziamo tale metodo anche per ricavare l'entalpia, però per tale grandezza si preferisce lavorare con  $(p, T)$ .

$$h = h(p, T)$$

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT$$

$$\tilde{q} - \tilde{li}^T = du \quad \rightarrow \quad \text{me} \quad \tilde{li} = p dv \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{q} - p dv = du$$

$$d(pv) = p dv + v dp$$

$$\tilde{q} - p dv + d(pv) = du + d(pv)$$

$$dh = du + d(pv)$$

$$\tilde{q} - p dv + p dv + v dp = dh$$



Analogamente per l'entropia avremo:

$$s = \begin{cases} s(v, T) & ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT \\ \text{coordinate indipendenti} \\ s(p, T) & ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT \end{cases}$$

Possiamo scrivere che:  $\tilde{q} = \lambda_v dv + c_v dT$

$$ds = \frac{\tilde{q}}{T} = \begin{cases} \lambda_v \frac{dv}{T} + c_v \frac{dT}{T} & \text{se } s(v, T) \\ \lambda_p \frac{dp}{T} + c_p \frac{dT}{T} & \text{se } s(p, T) \end{cases}$$

$$\tilde{q} = \lambda_p dp + c_p dT$$

Ma sappiamo che:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{\lambda_v}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \\ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{c_v}{T} \end{cases}$$

Prendiamo queste due equazioni se l'entropia è espressa in funzione di  $s(v, T)$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{\lambda_p}{T} = - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T} \end{cases}$$

Prendiamo invece queste altre due equazioni se l'entropia è espressa in funzione di  $s(p, T)$

Vediamo cosa succede per il gas **IDEALE** quando consideriamo  $\rightarrow s(v, T)$   
 $\lambda_v = p$   
 $ds = p \frac{dv}{T} + c_v \frac{dT}{T} = R^* \frac{dv}{v} + c_v \frac{dT}{T}$  perché  $\frac{p}{T} = \frac{R^*}{v}$   $\rightarrow \tilde{e} = \tilde{e}^0?$

dalla relazione  $p v = R^* T$  abbiamo sostituito  $p$ .

Integrando otteniamo:  $p = \frac{R^* T}{v}$

$$s - s_0 = R^* \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) + c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Vediamo come diventa tale espressione

$$\phi - W_t = \frac{dU}{dt} + \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \sum \pm G_i (p v)_i$$

ottiamo fatto comparare nell'espressione le portate  $G_i$ . Poiché siamo di fronte a grandezze estensive possiamo fare le derivate sostanziale su tutto il volume di controllo e ricordandoci la formula di bilancio e prendendo:

$$\frac{dZ}{dt} = \left( \frac{dZ}{dt} \right)_{vc} + \sum \pm G_i z_i$$

$$\boxed{U^t = U + E_c + E_p} \rightarrow U^t = \text{Energia interna totale}$$

Quindi il primo principio diventa:

$$h_i = u_i + (p v)_i$$

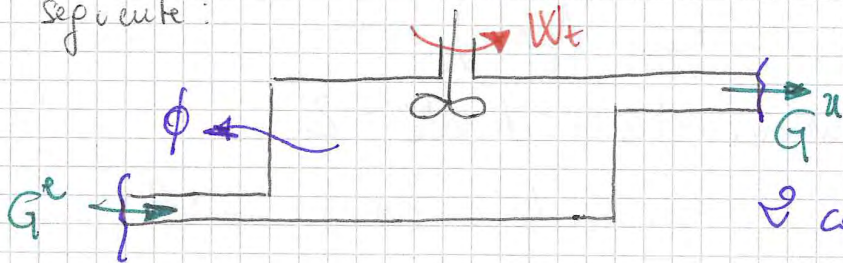
$$\phi - W_t = \left( \frac{dU^t}{dt} \right)_{vc} + \sum \pm G_i \left( (p v)_i + u_i + e_{ci} + e_{pi} \right)$$

Nelle forme finali avremo Da ricordare x sempre

$$\boxed{\phi - W_t = \left( \frac{dU^t}{dt} \right) + \sum_{i=1}^{NC} \pm G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi})} \quad \text{PPSA}$$

**PPSA** (Primo Principio Sistemi Aperti)

Se dal generico sistema aperto ci concentriamo al caso particolare seguente:



Cioè ad un caso che ha solo due condotti ed un flusso di lavoro tecnico.

2 condotti

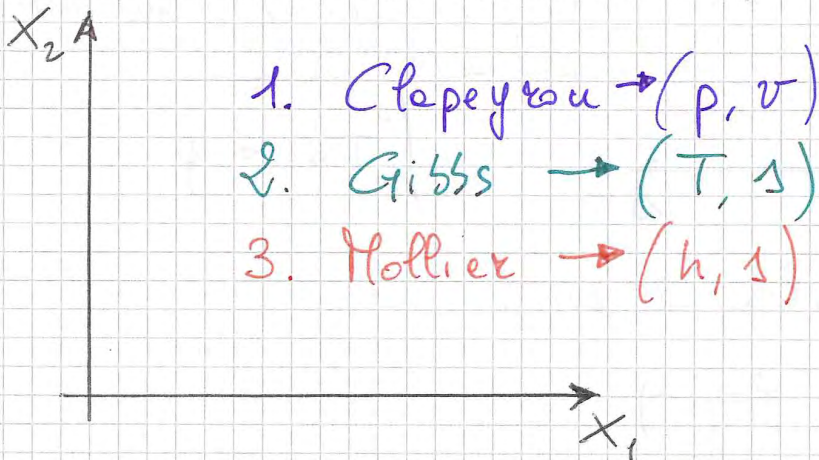
$G^u =$  portata in uscita  
 $G^e =$  portata in entrata

$$\phi - W_t = \left( \frac{dU^t}{dt} \right) + G^u (h + e_c + e_p)^u - G^e (h + e_c + e_p)^e$$

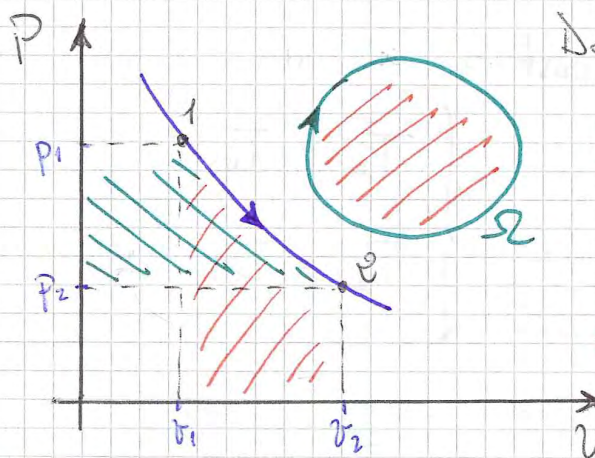
Non si semplifica neanche dalle scritte sopra. Possiamo però fare l'ipotesi di stazionarietà, cioè che:  $\frac{dU^t}{dt} = 0$

Ora dobbiamo analizzare i cicli termodinamici che si realizzano nelle macchine termiche, applicando quindi i due principi della termodinamica alle macchine che conosciamo.

Però prima di iniziare analizziamo prima i diagrammi utilizzati per descrivere i cicli termodinamici. Essenzialmente ne conosciamo tre.



Iniziamo con il descrivere il **DIAGRAMMA di CLAPEYRON**



Dall'Analisi Matematica sappiamo che

$$\int_1^2 p dv > 0 \rightarrow l_i$$

$$- \int_1^2 v dp > 0$$

$$\boxed{\int_{\Omega} p dv = - \int_{\Omega} v dp} \rightarrow \text{Nelle superficie chiuse e cicliche}$$

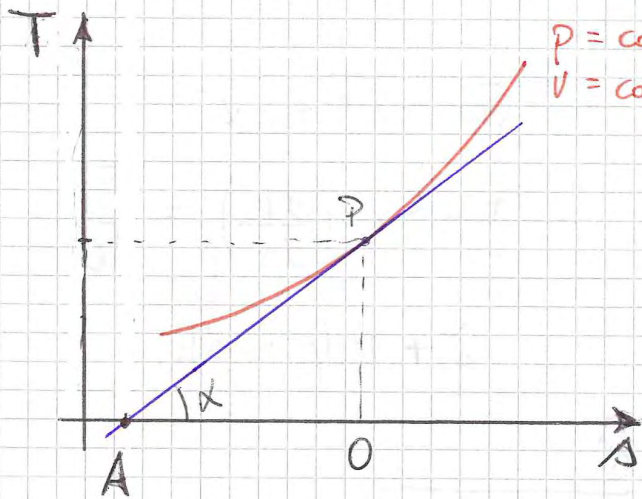
Invece l'area sottesa tra la curva della trasformazione e l'asse delle ascisse ( $v$ ) indica

$$l_i = \int_1^2 p dv > 0 \quad \text{che esprime il lavoro } (l_i) \text{ per unità di massa.}$$

L'area compresa tra la curva della trasformazione e l'asse delle ordinate ( $p$ ) rappresenta:

$$- \int_1^2 v dp > 0$$

Un'altro particolare del diagramma  $(T, s)$  è:



$p = \text{cost}$   
 $v = \text{cost}$

Tracciamo la retta tangente alla trasformazione in P.

$$\overline{PO} = \overline{AO} \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PO}}{\overline{AO}} = \frac{T}{\overline{AO}}$$

$$\boxed{\frac{dT}{ds} = \frac{T}{\overline{AO}}}$$

• Se una trasformazione isocora avviene

$$T ds = \tilde{q} = \cancel{d v} + c_v dT$$

$$T ds = c_v dT$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_v}$$

$$\boxed{\overline{AO} = c_v}$$

• Se una trasformazione isobara avviene

$$T ds = \tilde{q} = \cancel{d p} + c_p dT$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p}$$

$$\boxed{\overline{AO} = c_p}$$

# TIPICI DI CICLI PER MOTORI

Per i motori i cicli possibili sono due

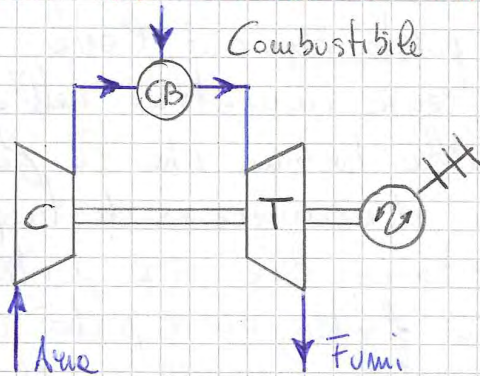
- CICLI A GAS
- CICLI A VAPORE

Nei cicli a gas il fluido che attraversa le trasformazioni che compongono il ciclo, è allo stato gassoso e il gas in genere è l'aria. Nei cicli a vapore il fluido che attraversa le trasformazioni che compongono il ciclo subisce un cambiamento di stato e in genere il fluido usato è l'acqua.

Per ciclo intendiamo la serie di trasformazioni che avvengono nella macchina motrice

## - CICLI A GAS

### MOTORI A CIRCUITO APERTO



C = compressore

T = turbina

CB = camera di combustione

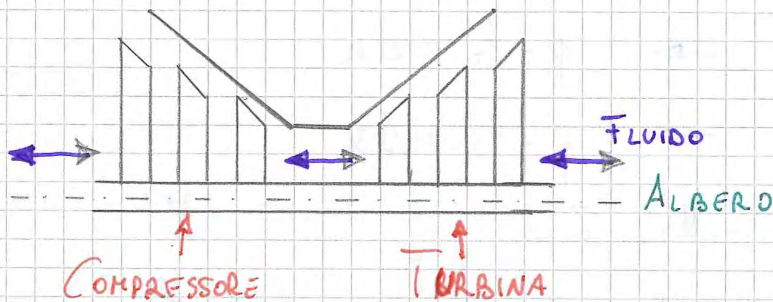
Il ciclo schematicizzato in figura è quello di un turbogas a circuito aperto, l'aria viene prelevata dall'atmosfera e viene introdotta in un compressore che ne alza la pressione. Poi passa, una volta compressa, nella camera di combustione che miscelata con del combustibile incrementa notevolmente la sua temperatura. A questo punto i fumi della combustione, cioè lo scarto tra aria e combustibile bruciato, viene inviato a grande velocità in una turbina, dove si espande, perché ancora compresso, e si raffredda. Durante l'espansione nella turbina questa produce energia, che viene portata all'esterno e utilizzata in altro modo. In uscita abbiamo dei fumi che vengono rimessi nell'atmosfera. Il ciclo così ricomincia, prelevando dall'atmosfera l'aria.

## MACCHINE A RINNOVAMENTO di FLUIDO o A FLUSSO CONTINUO:

in tali macchine per ogni componente di cui è costituita, si verificano trasformazioni diverse ed ogni componente è visto come un sistema aperto.

**MACCHINE ALTERNATIVE o VOLUMETRICHE:** in tali macchine le trasformazioni si svolgono tutte nello stesso componente meccanico.

## TURBINA E COMPRESSORE



Il flusso del fluido è inverso rispetto a quello indicato

Nel profilo sono rappresentati un compressore e una turbina collegati sullo stesso albero. Sia compressore che turbina sono costituiti da delle pale di altezza variabile. Nel compressore l'albero viene fatto girare dall'esterno mentre sulla turbina il fluido impatta sulle pale e fa girare l'albero, generando del lavoro.

Quindi si può dire che il compressore è una turbomacchina utilitativa, cioè per poter funzionare ha bisogno di potenza meccanica in ingresso e restituisce come compenso. La turbina è invece una turbomacchina motrice, in grado grazie alla velocità del fluido in ingresso, ma soprattutto del suo stato di pressione e temperatura iniziali, presa e generare energia cinetica trasformandola in lavoro.

Se ho una **Isoentropica** per un sistema aperto significa che il calore  $\dot{q} = 0$  e che la trasformazione è **REVERSIBILE** e quindi si dice che:

$$l_t = -\Delta h$$

$$u = h - pv$$

ISOENTROPICA  $\Rightarrow$  ADIABATICA

$$l_i = -\Delta h + \Delta(pv) = -\Delta u$$

Adiabatica reversibile = isoentropica

Se invece ho una trasformazione **ISOBARA** per un sistema aperto ottengo che:

$$q = \Delta h$$

perché  $l_t = 0$ ?

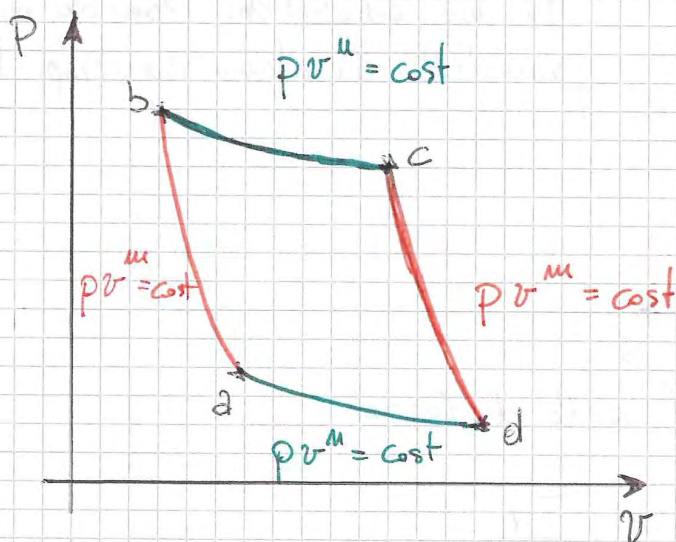
Nel caso in cui il lavoro di stuto è nullo, si ha:

$$l_t = 0$$

$$l_i = \Delta(pv) = \int p dv + \int v dp = p\Delta v$$

$$\left[ \begin{aligned} l_i &= \int_{11} p \cdot dv = \bar{p} \cdot \Delta v \\ l_t &= - \int_{11} v \cdot dp = \bar{v} \Delta p \end{aligned} \right.$$

**POLITROPICHE A DUE A DUE UGUALI** ( $pv^m = \text{cost}$ ;  $q = \int c dt$ )



$$l_t + \cancel{l_c} + \cancel{l_d} + \cancel{l_a} + \int_{11} v dp = 0$$

$$l_t = - \int_{11} v dp = 0$$

Per una isobara

Si può dimostrare che per tale ciclo il prodotto moltiplicato delle grandezze di stato è costante, e quindi:

$$P_a P_c = P_d P_b$$

$$T_a T_c = T_b T_d$$

$$V_a V_c = V_b V_d$$

### Il motore e il ciclo di Carnot

Si può dimostrare che, a parità di temperature massima e minima, nessun ciclo termodinamico anche se reversibile, può avere un rendimento superiore a quello del ciclo di Carnot

### Motore di Carnot: schema di funzionamento



Inoltre abbiamo che

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{T_d}{T_c} \quad \text{e} \quad \frac{v_b}{v_c} = \frac{v_e}{v_d}$$

quindi si può sostituire nell'espressione di  $\eta$

$$\frac{T_c}{T_b} = \left( \frac{v_b}{v_c} \right)^{\gamma-1}$$

$$\eta = \frac{v_b}{v_c} = \frac{v_d}{v_a}$$

Rapporto volumetrico di compressione

Sostituendo il rapporto di compressione  $\rho$  nel rendimento, otteniamo:

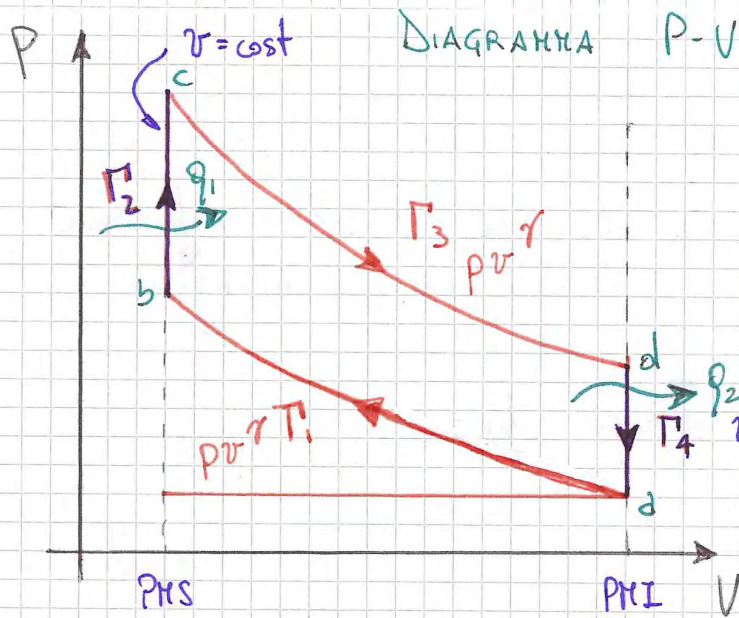
$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_a} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad \text{da unificare il rapporto } \rho \text{ del ciclo di combustione}$$

Da questa espressione possiamo concludere che se aumenta  $\rho$  e quindi il rapporto di compressione, aumenterà anche il rendimento.

## IL CICLO OTTO

Il ciclo Otto è un ciclo effettuato da una macchina volumetrica composta da un compressore che può essere visto come adiabatico, dal momento che avviene molto rapidamente (il ciclo) e viene considerato anche reversibile, quindi isoentropico. Quindi tale ciclo è composto da una adiabatica, data la velocità della trasformazione, una isocora nella quale il fluido acquisisce calore per aumento sia della sua temperatura che della sua pressione, dopo vi è una espansione adiabatica che fa ottenere temperatura e pressione ed infine di nuovo una isocora nella quale il fluido cede calore per riportarsi alla pressione ed alla temperatura iniziale.

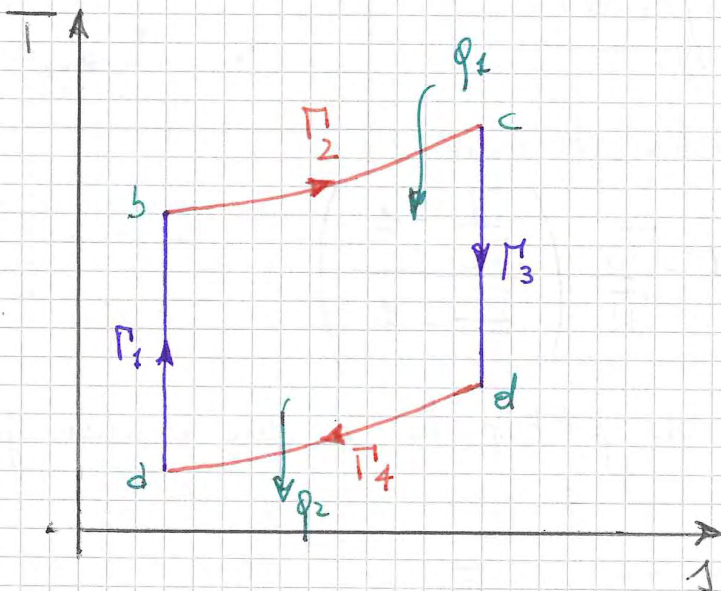
Vediamo una rappresentazione convenzionale del ciclo Otto sul diagramma  $p-V$  e successivamente sul diagramma  $T, S$ .



$\Gamma_1 = \Gamma_3 = \text{adiabatica reversibile} = \text{isocritica}$   
 $\Gamma_2 = \Gamma_4 = \text{isocora}$

Come si vede nelle due isocore immetto e tolgo calore al fluido.

DIAGRAMMA  $T-S$



**N.B.** Nel diagramma  $p-V$  posso eliminare il tratto che va parte del PMI al PMS e viceversa perché non interessa ai fini del calore e del lavoro all'interno del processo.

Dalle trasformazioni adiabatiche posso scrivere che:

$$\overline{T}_d v_d^{\gamma-1} = \overline{T}_b v_b^{\gamma-1}$$

Quindi:

$$\frac{\overline{T}_d}{\overline{T}_b} = \left( \frac{v_b}{v_d} \right)^{\gamma-1}$$

dove però sappiamo che il rapporto tra i volumi è

$$\rho = \left( \frac{v_b}{v_d} \right) \quad \text{Rapporto di compressione volumetrico}$$

Sostituendo tale termine nel rendimento ottengo:

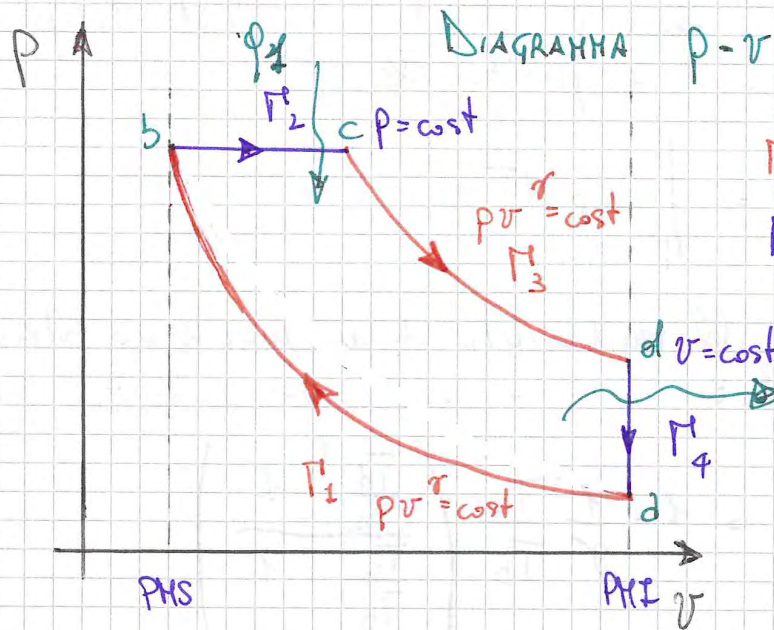
$$\eta = 1 - \frac{\overline{T}_d}{\overline{T}_b} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad \text{Rendimento del Ciclo Otto}$$

Da punto scritto posso notare che se aumento  $\rho$  aumento anche il rendimento, e che a parità di  $\rho$ , se aumento  $\gamma$  aumento anche il rendimento.

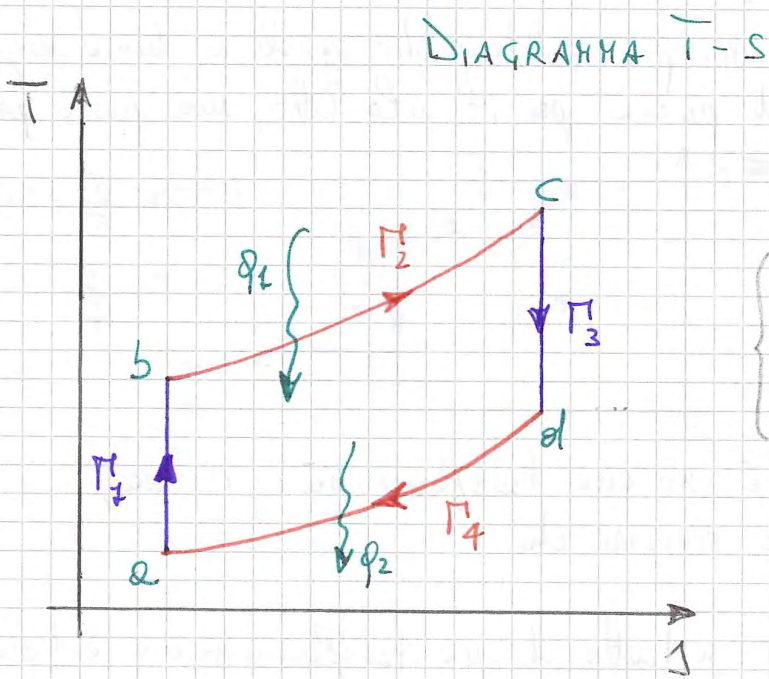
### LE TRASFORMAZIONI

CARATTERISTICHE DEL CICLO OTTO				
TRASFORMAZIONI				
	a-b	b-c	c-d	d-e
TIPO	Compressione adiabatica	Riscaldamento isocoro	Espansione adiabatica	Raffreddamento isocoro
Em. Termica	Q=0	Q=Q <sub>1</sub> >0	Q=0	Q=Q <sub>2</sub> <0
Lavoro Interno	L <sub>i</sub> <0	L <sub>i</sub> =0	L <sub>i</sub> >0	L <sub>i</sub> =0
Temperatura	T <sub>1</sub> da T <sub>2</sub> a T <sub>1</sub>	T=T <sub>1</sub>	T <sub>1</sub> da T <sub>1</sub> a T <sub>2</sub>	T=T <sub>2</sub>
Volume	V da V <sub>e</sub> a V <sub>s</sub>	V=cost=V <sub>s</sub> =V <sub>c</sub>	V da V <sub>c</sub> a V <sub>d</sub>	V=cost=V <sub>c</sub> =V <sub>d</sub>

Facciamo le stesse cose ora per il ciclo Diesel, così mettiamo e confronto il diagramma  $p-v$  e il diagramma  $T-s$  e troviamo il rendimento di tale ciclo.



isentrope  
 $M_1 = M_3 =$  adiabatica reversibile  
 $M_2 =$  isobara  
 $M_4 =$  isocora



$q_2 = -c_v (T_c - T_d)$   
 $q_1 = c_p (T_c - T_b)$   
 $\left\{ \begin{aligned} q_2 &= \lambda_v dv + c_v dT \\ q_1 &= \lambda_p dp + c_p dT \end{aligned} \right.$   
 $q_2$  è scambiato lungo una isocora  
 $q_1$  è scambiato lungo una isobara

Vediamo ora di calcolare il rendimento per tale ciclo.  
 Per le macchine bitermiche vale:

$$\eta = 1 - \frac{q_2}{q_1}$$

$q_2 =$  calore ceduto  
 $q_1 =$  calore fornito

Però dal grafico possiamo vedere che il calore  $q_2$  è scambiato lungo una trasformazione isocora, quindi avremo che:

Ora se chiamo il rapporto tra i volumi come  $\delta$  avrò:

$$\delta = \frac{v_c}{v_b}$$

RAPPORTO DI INTRODUZIONE  
O COEFFICIENTE DI INTRODUZIONE

Posso scrivere sostituendo quanto trovato che

$$\frac{T_d}{T_c} = \left(\frac{v_c}{v_a}\right)^{\gamma-1} \frac{v_c}{v_b} \cdot \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{v_c}{v_b}\right)^{\gamma} = \delta^{\gamma}$$

dove  $v_a$  e  $v_b$  si elidono perché sono gli estremi di una isocora.

Sostituendo quanto trovato posso scrivere che:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_c}{T_b} \left( \frac{\delta^{\gamma} - 1}{\delta - 1} \right) = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{p^{\gamma-1}} \left( \frac{\delta^{\gamma} - 1}{\delta - 1} \right)$$

In conclusione avrò:

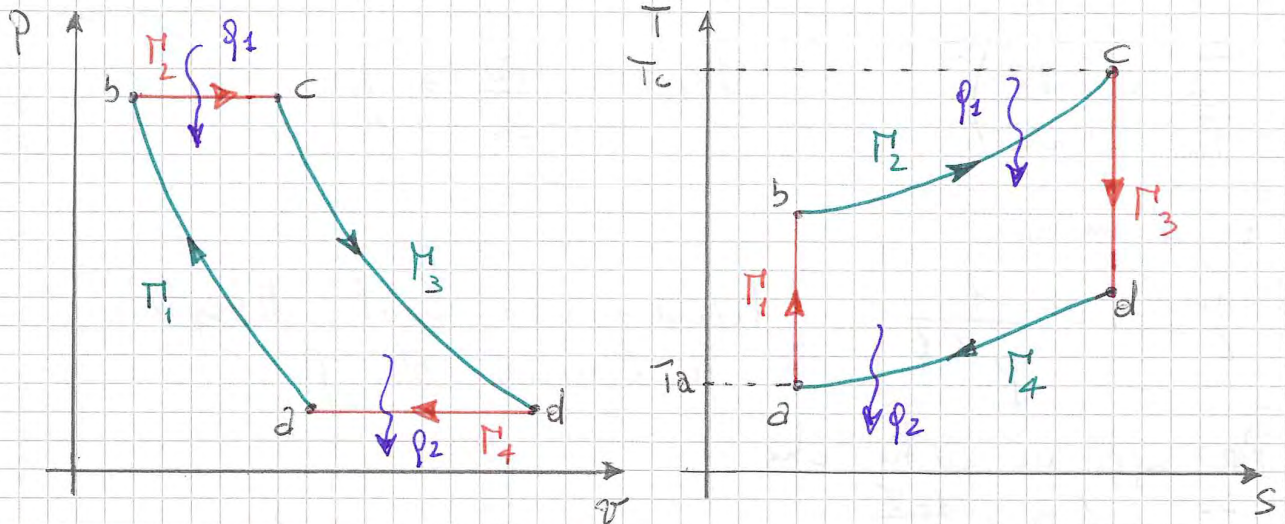
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{p^{\gamma-1}} \left( \frac{\delta^{\gamma} - 1}{\delta - 1} \right)$$

RENDIMENTO DEL  
CICLO DIESEL

Si può notare da quanto scritto che se  $\delta \rightarrow 1$  per il teorema di de l'Hopital il rendimento tende a quello del ciclo Otto.

Se si mettono a confronto i due rendimenti (ciclo Otto e ciclo Diesel) si può notare che a parità di rapporto di compressione il ciclo Otto è migliore, ma che il ciclo Diesel può lavorare con rapporti di compressione molto più alti di quelli con cui si può lavorare con il ciclo Otto.

# I DIAGRAMMI p-v e T-s



$\pi_1 = \pi_2 =$  adiabatica reversibile

$\pi_3 = \pi_4 =$  trasformazione isobara

Vediamo di calcolare ora il rendimento del ciclo Joule - Brayton

**RENDIMENTO:**

Per un motore possiamo scrivere

$$\eta = 1 - \frac{q_2}{q_1}$$

$$\tilde{q} = \int p dp + \int c_p dT \quad (p, T)$$

$q_2$  e  $q_1$  però sono scambiati lungo le trasformazioni isobare quindi si può scrivere:

$$q = \int_1^2 (p dp + c_p dT) = \int_1^2 c_p dT$$

Allora possiamo scrivere la relazione

$$\eta = 1 - \frac{\int p dT(\bar{T}_d - \bar{T}_a)}{\int p dT(\bar{T}_c - \bar{T}_b)} = 1 - \frac{\bar{T}_d}{\bar{T}_b} \frac{(\frac{\bar{T}_d}{\bar{T}_a} - 1)}{(\frac{\bar{T}_c}{\bar{T}_b} - 1)}$$

Dato che il ciclo è formato da politropiche e due e due uguali sappiamo che:

$$\bar{T}_a \bar{T}_c = \bar{T}_b \bar{T}_d \Rightarrow \frac{\bar{T}_d}{\bar{T}_a} = \frac{\bar{T}_c}{\bar{T}_b} \quad \text{Quindi:}$$

$$\eta = 1 - \frac{\bar{T}_d}{\bar{T}_b}$$

$\bar{T}_a$  e  $\bar{T}_b$  si trovano lungo una adiabatica quindi sappiamo che:

# CICLI RIGENERATIVI

## LA RIGENERAZIONE

Si può dimostrare che, a parità di temperature massime e minime, nessun ciclo termodinamico anche se reversibile, può avere un rendimento superiore a quello del ciclo di Carnot.

Però è possibile ideare cicli termodinamici che nel caso reversibile ottengono un rendimento uguale a quello del ciclo di Carnot. La procedura a cui si ricorre per ottenere questo risultato è la cosiddetta **regenerazione**.

L'idea sulla quale è basata la regenerazione consiste nel dotare il motore di opportuni dispositivi che fanno in modo che, la quantità di calore che è necessario assorbire per convertirlo in lavoro, sia in parte ottenuta dall'esterno e in parte **recupera** dando il gas che percorre il ciclo.

In tal modo a parità di risultato si riduce la spesa di energia, in quanto una parte lo si ottiene internamente al ciclo e non deve essere contabilizzata nel bilancio che si fa applicando il primo principio della termodinamica.

Un ciclo regenerativo è composto da trasformazioni lungo alcune delle quali si scambia calore con l'esterno e lungo altre internamente al sistema. Questi ultimi contributi non danno alcun contributo al termine del calore speso che compare a denominatore del rendimento.

Le trasformazioni che si svolgono tra le stesse temperature e scambiano la stessa quantità di calore prendono il nome di **isodibatiche**. Le apparecchiature che permettono di scambiare calore internamente al ciclo si chiamano **regeneratori**.

I processi e le trasformazioni che si svolgono nei regeneratori:

- Sono sempre in numero **pari** perché mentre in uno il gas cede calore, in un altro lo riceve.
- Possono essere di qualunque tipo purché, **materialmente**, non **adiabatici**.

## Rigenerazione ideale

▷ Rendimento del ciclo senza rigenerazione

$$\eta = \frac{l_n}{q_1 + q_R} = \frac{(q_1 + q_R) - (q_2 + q_R)}{q_1 + q_R} = 1 - \frac{q_2 + q_R}{q_1 + q_R}$$

▷ Rendimento del ciclo con rigenerazione ideale

$$\eta = \frac{l_n}{q_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

## Il motore di Stirling

▷ La prima macchina di questo tipo fu ideata da Stirling nel 1816

▷ E' basata su un ciclo ad aria standard che porta lo stesso nome

- ▷ il ciclo è composto di due isoterme e da due linee a volume costante
- ▷ le due trasformazioni mediante le quali si passa da un'isoterma all'altra non sono adiabatiche



Per  $\int T ds$  posso usare il teorema del valore medio e trovare che:

$$\eta = \frac{\bar{T}(s_5 - s_e) + \bar{T}^+(s_{c'} - s_{b'}) - \bar{T}(s_{c'} - s_d) - T^-(s_d - s_e)}{\bar{T}(s_{b'} - s_e) + \bar{T}^+(s_{c'} - s_{b'})}$$

Dato che il segmento  $ed = bc = b'c'$  sappiamo che  $(s_{c'} - s_{b'}) = (s_d - s_e)$  quindi possiamo che:

dividendo per  $(s_d - s_e) = (s_{c'} - s_{b'})$

$$\eta = \frac{(\bar{T}^+ - \bar{T}^-)(s_d - s_e)}{\bar{T}(s_{b'} - s_e) + \bar{T}^+(s_{c'} - s_{b'})} = \frac{(\bar{T}^+ - \bar{T}^-)}{\bar{T}^+ + \bar{T}\left(\frac{s_{b'} - s_e}{s_{c'} - s_{b'}}\right)} < \frac{\bar{T}^+ - \bar{T}^-}{\bar{T}^+}$$

$$\eta = \frac{\bar{T}^+ - \bar{T}^-}{\bar{T}^+ + \bar{T}\left(\frac{s_{b'} - s_e}{s_{c'} - s_{b'}}\right)} < \frac{\bar{T}^+ - \bar{T}^-}{\bar{T}^+} = \eta_c$$

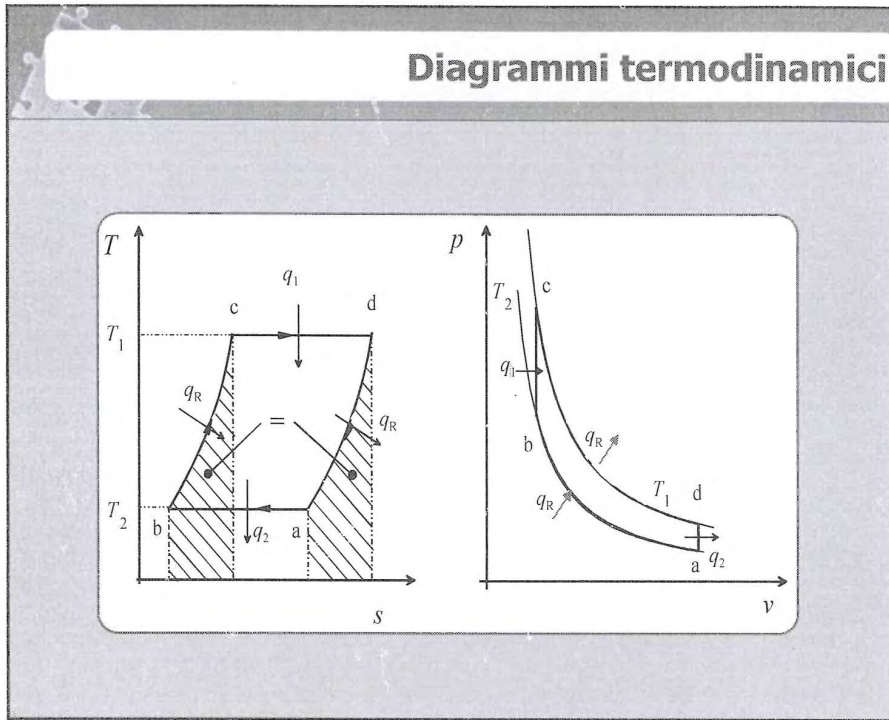
Abbiamo dimostrato che il rendimento di tale ciclo è minore di quello di Carnot a parità di temperature massime.

### CICLO RIGENERATIVO

Ora pensiamo di portare del calore ceduto dal fluido nel tratto  $C'd$  al tratto  $a b'$ .

$$\eta_R = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{\bar{T}^-(s_d + s_e)}{\bar{T}^+(s_{c'} - s_{b'})} = 1 - \frac{\bar{T}^-}{\bar{T}^+} = \eta_c$$

Con la rigenerazione riesco quindi ad ottenere il rendimento del ciclo di Carnot.



### Rendimento del ciclo Stirling ideale

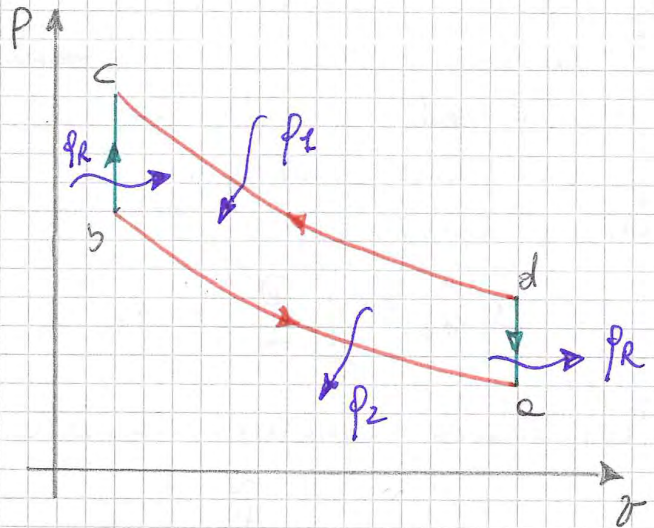
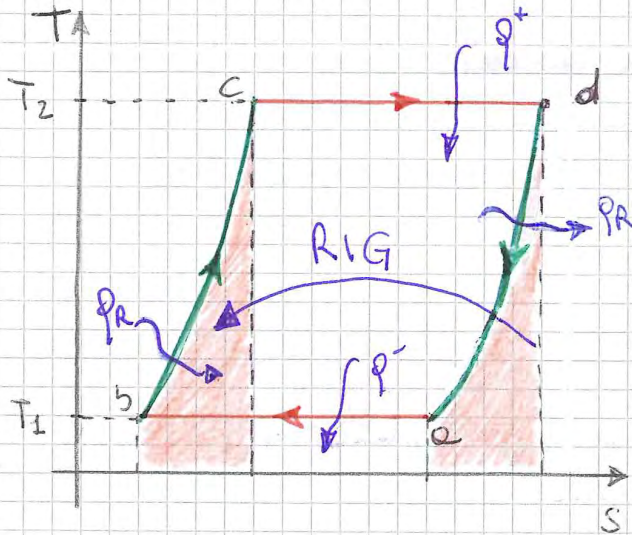
▷ Rendimento del ciclo senza rigenerazione

$$\eta = \frac{l_n}{q_1 + q_R} = \frac{(q_1 + q_R) - (q_2 + q_R)}{q_1 + q_R} = 1 - \frac{q_2 + q_R}{q_1 + q_R}$$

▷ Rendimento del ciclo con rigenerazione ideale

$$\eta = \frac{l_n}{q_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

# DIAGRAMMA T-S e DIAGRAMMA p-v



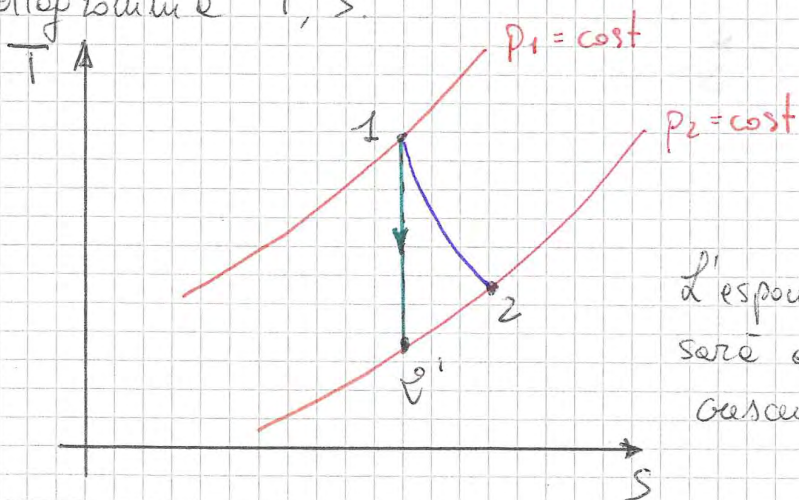
Sappiamo che  $p = \int T ds$

$$\eta = 1 - \frac{q_{de} + p_{ab}}{q_{bc} + p_{cd}} = 1 - \frac{T_1 (s_c - s_b)}{T_2 (s_d - s_c)} = \eta_c$$

Quindi le equazioni ci riportano il rendimento del ciclo e quello del ciclo di Carnot  $\eta_c$ .

Con questo ciclo concludiamo ciò che riguarda per i cicli a gas e introduciamo ora i cicli a vapore

Nelle volte ci troviamo ad analizzare fenomeni che corrispondono a flussi che tengono conto anche delle velocità di variazione delle coordinate termodinamiche. Esistono dei modelli semplificati in grado di farci arrivare molto vicino al risultato reale. Ad esempio possiamo vedere lo schema seguente sul diagramma T, S.



$$\phi = 0 \quad \forall t$$

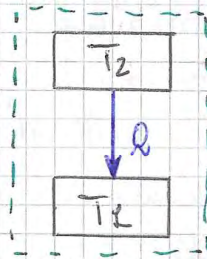
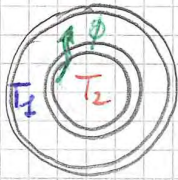
$$p = 0 \quad \Delta s = \frac{q}{T} + s_i$$

L'espansione reale del sistema sarà a entropia variabile e crescente.

## RAPPRESENTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI

Fino ad ora non abbiamo tenuto conto delle viscosità del fluido e dell'irreversibilità della trasformazione.

Prendiamo in esame uno scambiatore di calore costituito da un tubo piccolo che contiene il fluido caldo alla temperatura  $T_2$  e questo tubo si trova immerso in un fluido contenuto in un altro tubo più grande alla temperatura più fredda  $T_1$ . Ciò che succede è che il fluido caldo cede un flusso termico  $\phi$  al fluido freddo. Posso rappresentare tutto ciò in modo schematico con due termostati:



Se volessi calcolare il  $\Delta S$  del sistema tratteggiato otterrei, considerando  $T_1$  e  $T_2$  due termostati (punti reversibili), che

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} = Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$$

Dato che il sistema considerato è isolato, ovvero che:

$$\Delta S = \int_{=0}^{\neq 0} \frac{\delta Q}{T} + S_{int} = S_{int}$$

e dato che ho trovato che è  $> 0$  vuol dire che il sistema è irreversibile anche se è costituito da due trasformazioni reversibili.

L'**irreversibilità interna** è un fenomeno dovuto all'attrito del fluido e a delle eventuali reazioni chimiche.

L'**irreversibilità esterna** è quella che si può vedere solo dal punto di vista dell'universo e non riesco a misurarla se mi trovo all'interno del sistema considerato.

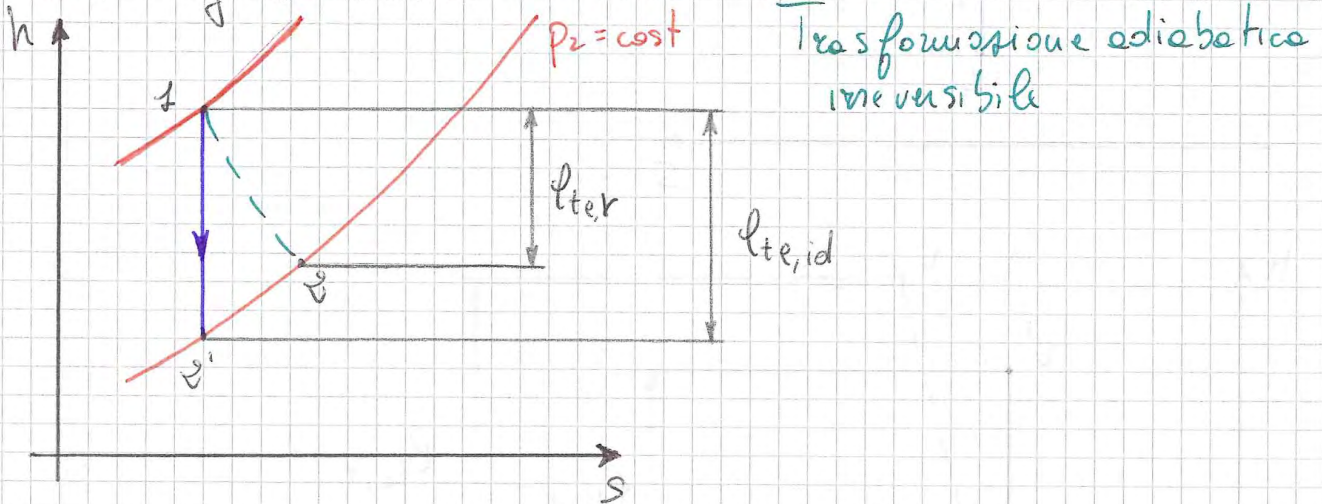
Per il primo principio della termodinamica scriviamo:

$$q - l_t = \Delta h + \cancel{\Delta e_c} + \cancel{\Delta e_p}$$

1. trasformazione:  $q = 0 \rightarrow -l_t = \Delta h$

2. trasformazione:  $l_t = 0 \rightarrow q = \Delta h$

Se vedessimo ciò che otteniamo appena detto su un diagramma  $h-s$  otteniamo i seguenti risultati:



$l_{te,r}$  = lavoro tecnico di espansione reale

$l_{te,id}$  = lavoro tecnico di espansione ideale

### rendimento isocritico di espansione

$$\eta_{is,e} = \frac{l_{te,r}}{l_{te,id}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2'}}$$

Però se volgiamo le condizioni  
avzo d'espansione

$$\boxed{dh = c_p dT}$$

$$\eta_{is,e} = \frac{l_{te,r}}{l_{te,id}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_{2'}}$$

In conclusione possiamo dire che una trasformazione reale possiamo approssimare, considerandolo una politropica

$p v^m = \text{cost}$  TRASFORMAZIONE POLITROPICA

→ reversibile, quindi:  $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta Q_{irr}}{0}$

e la cui quantità di calore  $q$  corrispondente è

$q = \int T ds = l_e \rightarrow$  Lavoro di attrito del fluido

Cioè la quantità di calore generata è uguale al lavoro di attrito generato.

## CICLI A VAPORE

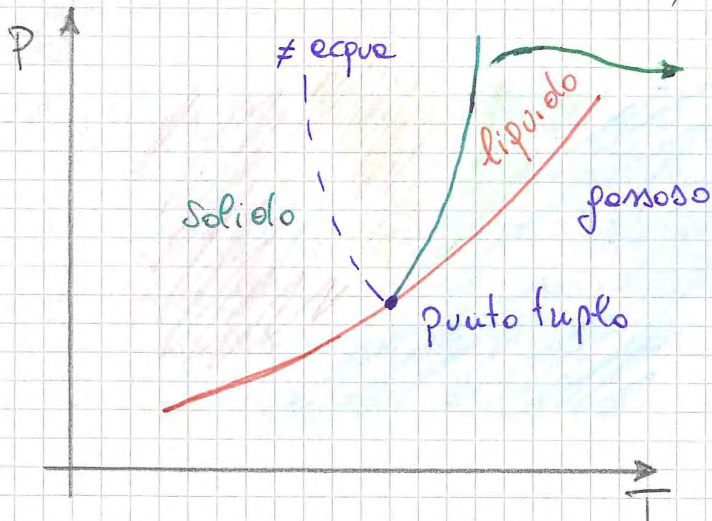
Nei cicli a vapore il fluido che percorre il ciclo è il gas surriscaldato, cioè il gas che si trova al di sotto della temperatura critica.

La **temperatura critica** è quella particolare temperatura al di sopra della quale se manteniamo costante  $T$  e vario  $p$  e  $v$  otteniamo sempre lo stesso stadio di aggregazione del fluido in esame.

La **curva limite** è la curva che definisce il limite tra lo stato liquido e lo stato gassoso e si trova al di sotto della temperatura critica.

Il **punto triplo** è il punto in cui ho la coesistenza di tre stadi di aggregazione.

Una cosa importante da sapere, dato che il fluido che percorre i nostri cicli a vapore è l'acqua, è che nel passaggio da liquido a solido il volume aumenta, mentre per altre sostanze diminuisce.



Queste curve vale per l'acqua mentre per un altro fluido  $\Delta v < 0$  e quindi le curve vanno verso sinistra.

## IL TITOLO

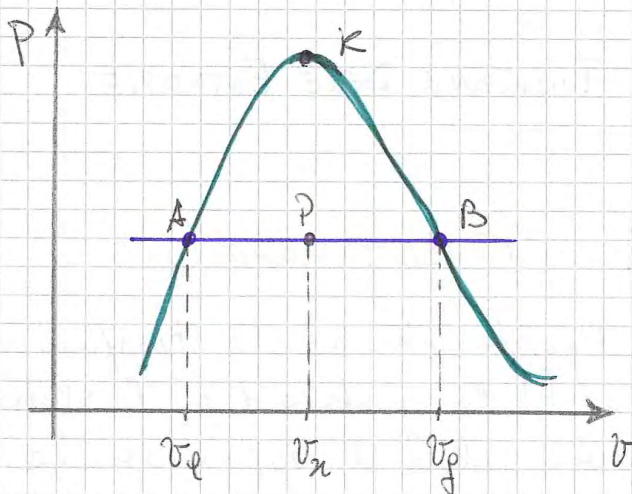
Il titolo è una grandezza che mi identifica punto liquido e punto vapore cioè nelle miscele liquido-vapore. È una grandezza adimensionata ed è definita come rapporto tra la massa del vapore e la massa totale di liquido più vapore.

$$X = \frac{m_g}{m_g + m_l}$$

TITOLO

Nelle curve limite inferiore il titolo vale 0 cioè in condizioni di liquido saturo mentre nelle curve limite superiore il titolo vale 1 cioè in condizioni di vapore saturo. All'interno delle curve limite il titolo varia da 0 a 1.

Usando il titolo, possiamo calcolare il valore medio di qualsiasi grandezza estensiva; vediamo ad esempio il volume.



Sappiamo che il volume  $v$  è:

$$v = \frac{V}{M}$$

Volume molare

Possiamo scrivere che:

$$V = V_l + V_v$$

$$M = M_l + M_v$$

$V_l$  = Volume liquido

$V_v$  = Volume vapore o volume gas

$M_l$  = Massa liquido

$M_v$  = Massa gas o vapore

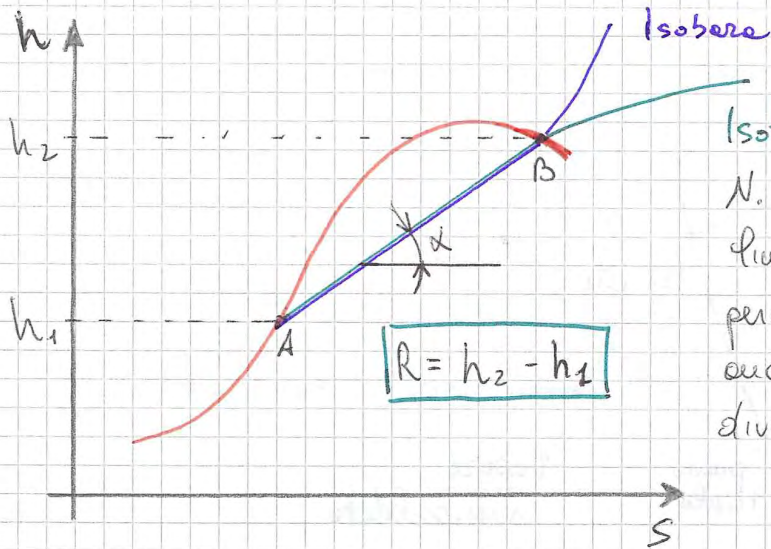
Scriviamo che:

$$v_m = \frac{V}{M} = \frac{V_l + V_v}{M_l + M_v} = \frac{M_l v_l + M_v v_v}{M_l + M_v} = v_l \frac{M_l}{M_l + M_v} + v_v \frac{M_v}{M_l + M_v}$$

Sapendo che:

$$(1 - X) = 1 - \frac{M_v}{M_l + M_v} = \frac{M_l}{M_l + M_v}$$

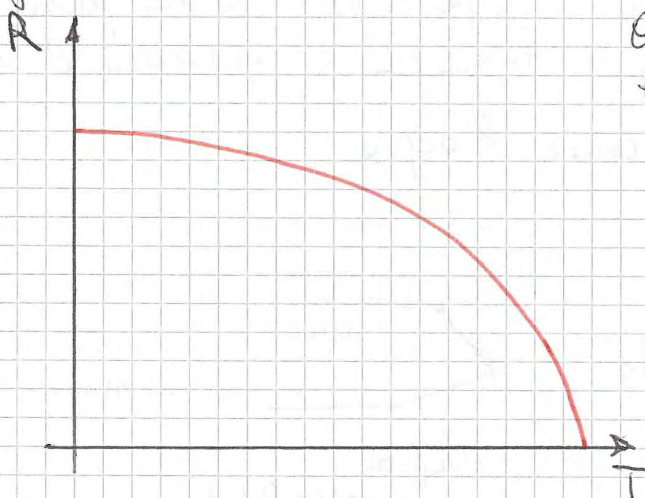
Per un fluido nel passaggio di stato sia  $p$  che  $T$  sono costanti quindi vuol dire che la curva, se  $T = \text{cost}$  sarà una retta.



Isoterme

N.B. Le rette dentro le curve finite non sono parallele perché se la temperatura cresce anche la  $tg \alpha$  cresce e quindi diventa sempre più ripida.

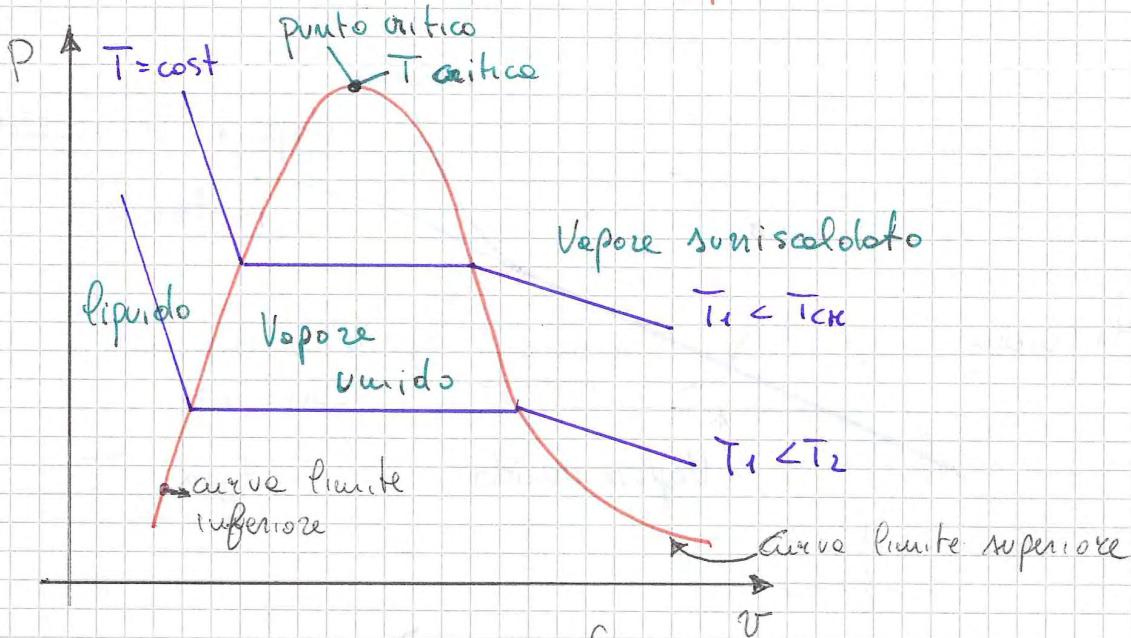
Il grafico che mette in relazione  $R$  con la temperatura è il seguente:



Come si nota dal grafico, più la temperatura aumenta più la  $R$  diminuisce, questo perché nel grafico  $h-s$  la curva delle isoterme aumenta la sua pendenza e si sposta verso l'alto fino ad arrivare alla temperatura critica, temperatura alla quale il cambio di stato è istantaneo.

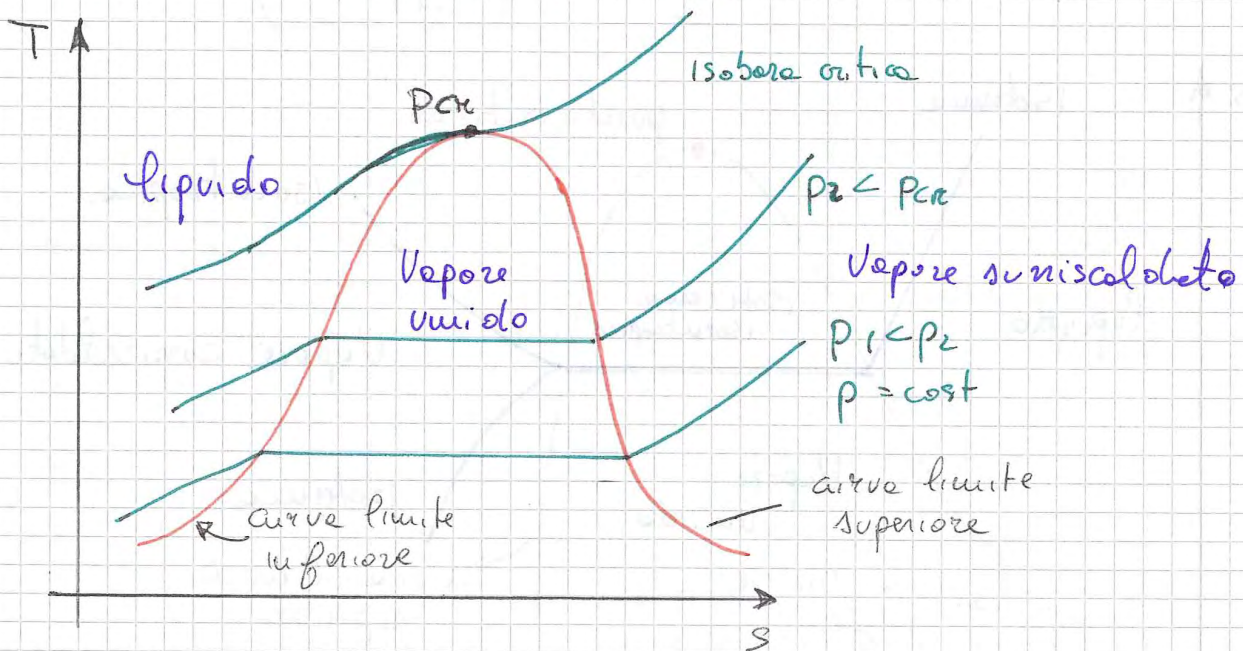


## DIAGRAMMA DI CLAPEYRON (p-v)



Se faccio l'integrale di  $\int p dv$  ottengo l'area sottesa dalle isoterme che corrisponde al lavoro interno.

## DIAGRAMMA DI GIBBS (T-s)



Se faccio l'integrale di  $\int T ds$  per un'isobara ottengo l'area sottesa dell'isobara che è il calore scambiato q.

# CICLO DI CARNOT A VAPORE

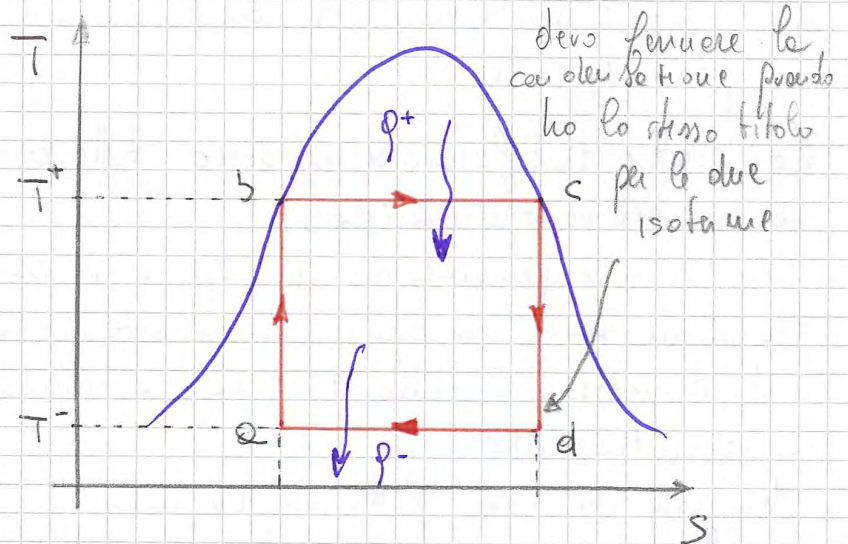
Dal punto di vista delle trasformazioni non differisce da quello visto per quello a gas.

- 2 ISOTERME
- 2 ADIABATICHE

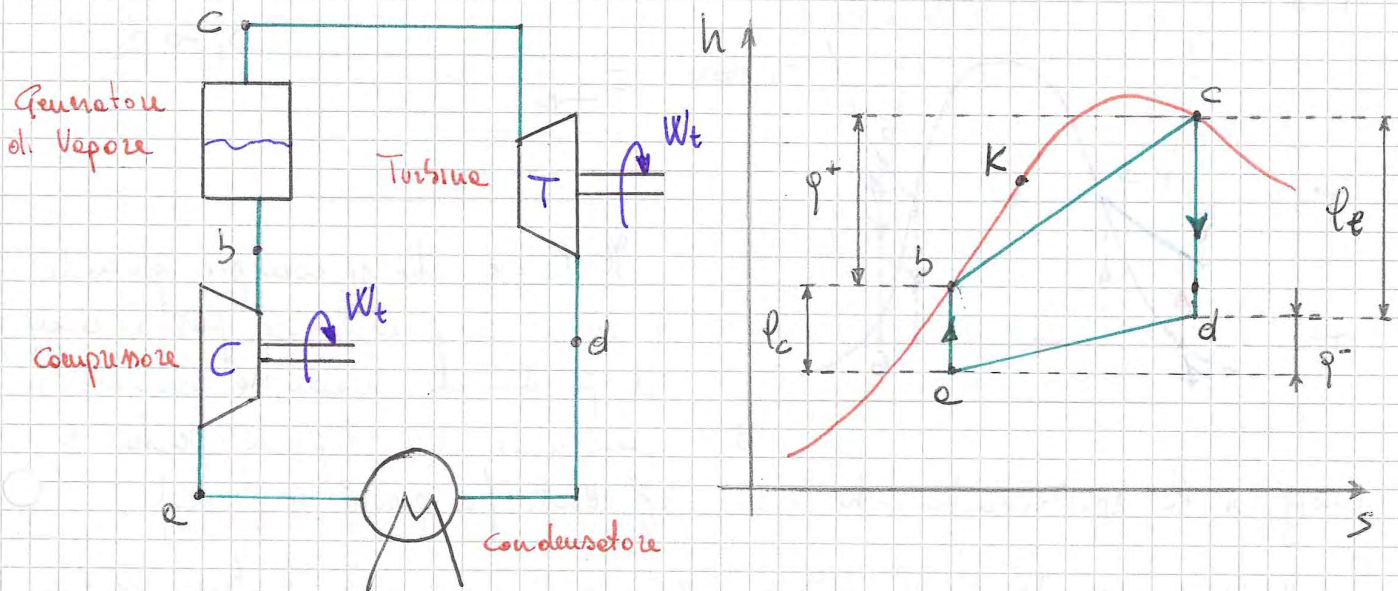
Rendimento di Carnot

$$\eta_c = 1 - \frac{T^-}{T^+}$$

Il ciclo si trova all'interno delle curve limite.



Vediamo come è fatto l'impianto di tale ciclo.



Si può pensare di realizzare un motore a vapore che utilizzi il ciclo di Carnot perché il rendimento è massimo e perché di temperature estreme e il rendimento non dipende dal fluido nel ciclo.

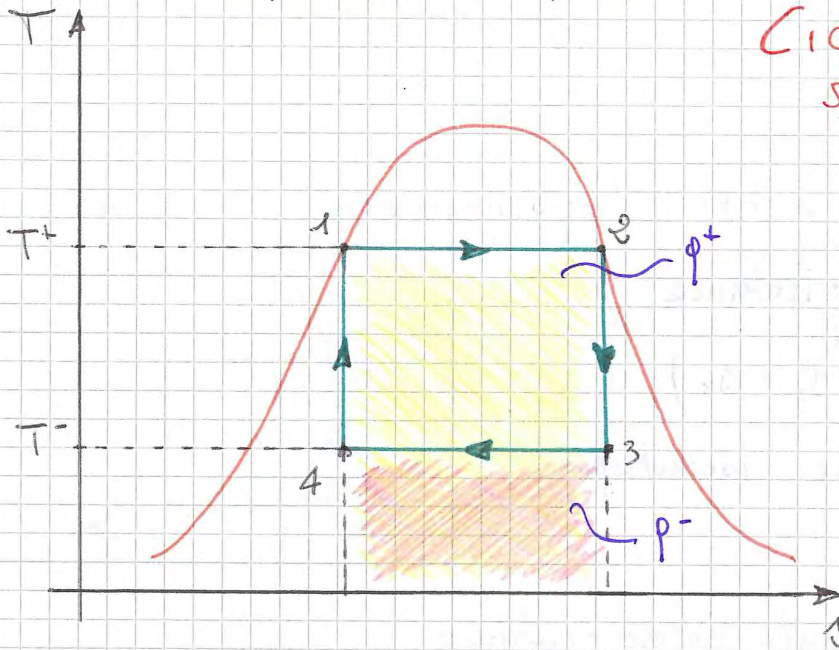
L'impianto è costituito da 4 componenti e si suppone che le trasformazioni si svolgono solo nei componenti e che nei condotti di collegamento lo stato del fluido non cambi.

4 componenti sono:

1. Turbine; il fluido si espande adiabaticamente cedendo all'esterno lavoro.

Prima di pensare poi al ciclo Rankine vediamo prima il rendimento del ciclo di Carnot utilizzando i profici dei cicli.

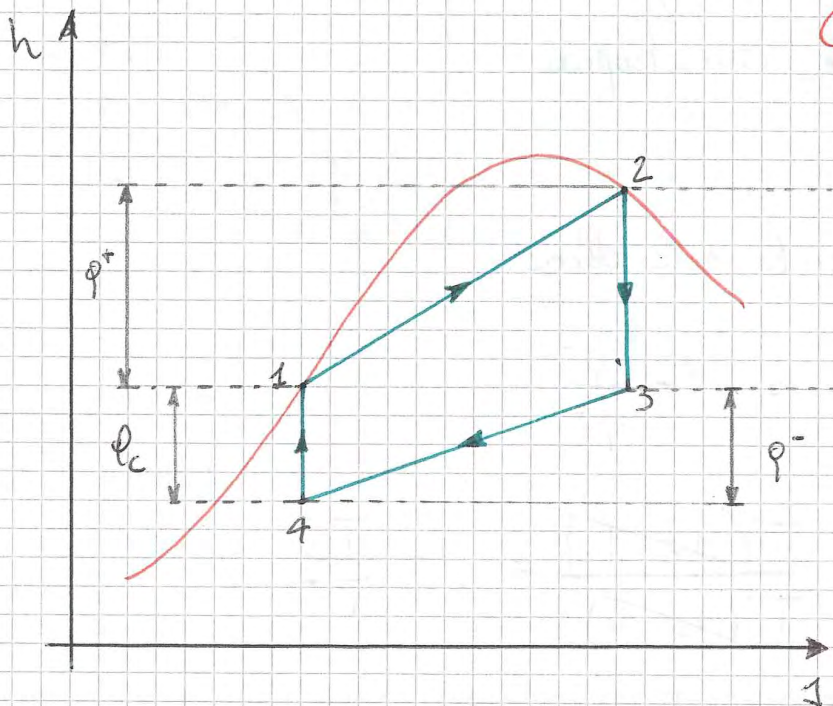
### DIAGRAMMA di GIBBS



### CICLO DI CARNOT sul (T-s)

Nota che nel ciclo di Carnot siamo sempre nelle zone del vapore umido.

### DIAGRAMMA di MOLLIER

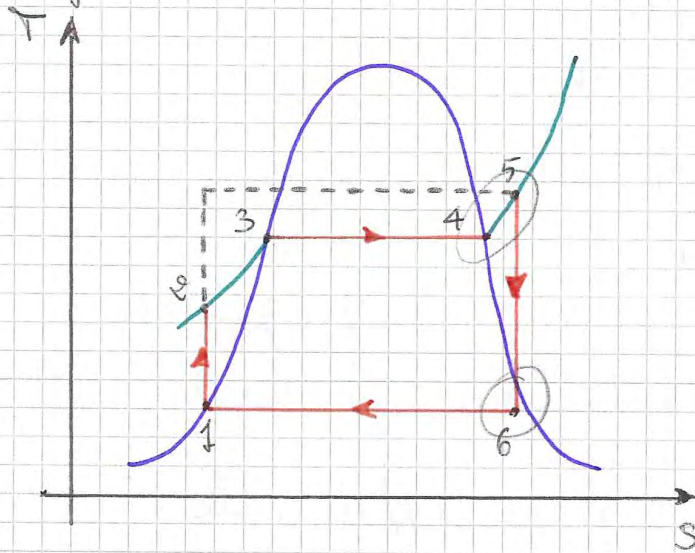


### CICLO DI CARNOT sul diagramma (h-s)

La prima cosa che bisogna fare per entrambi i diagrammi è quella di tracciare le curve limite, questo per rendersi conto dei punti in cui avvengono le trasformazioni di stato del fluido presso in condensazione, in questo caso il vapore

# CICLO RANKINE

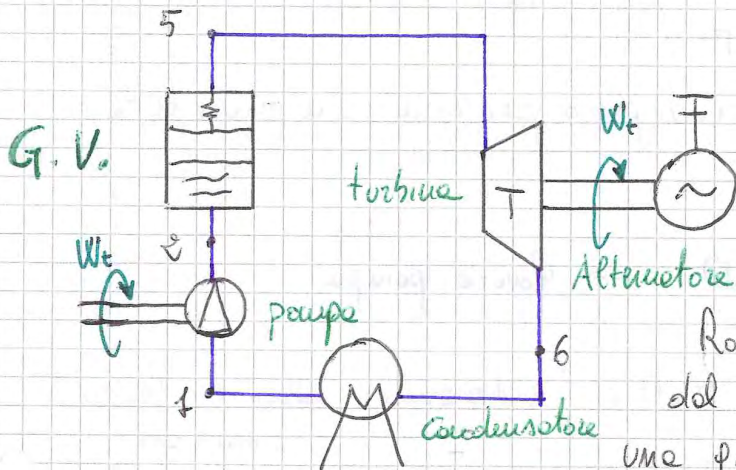
È un ciclo di Carnot modificato, e viene rappresentato nel seguente modo.



Nel grafico di fianco il ciclo tratteggiato rappresenta il ciclo di Carnot che vedo e conduttore pseudo feccio il confronto dei rendimenti con il ciclo Rankine.

Nel grafico il punto 6 è un punto interno alle curve.

Vediamo da cosa è costituito il ciclo di Rankine



Il ciclo Rankine è un ciclo di Carnot e vapore al quale sono state apportate delle modifiche.

La condensazione nel ciclo Rankine è prolungata (come si vede dal grafico) per fare in modo di sottrarre una quantità maggiore di calore, fino a

raggiungere la curva limite inferiore. Inoltre la compressione isentropica si svolge tutta nelle zone del liquido. Ciò richiede, a parità di aumento di pressione, una quantità inferiore di lavoro rispetto a quella necessaria per comprimere una miscela di liquido e vapore.

L'impianto è costituito da 4 componenti, che sono:

1. **Generatore di Vapore (G.V.):** in esso ho riscaldamento isoboro di liquido e isoboro-isoterma di vapore umido
2. **Turbine:** in esse ho un'espansione isentropica di vapore umido
3. **Condensatore o refrigeratore:** in esso ho un raffreddamento isoboro-isoterma di vapore umido
4. **Pompe:** in esse ho una compressione isentropica di liquido.

- Generatore di vapore (G.V.) ( $2 \rightarrow 5$ )

$$q = \int_2^5 \bar{T} ds = \bar{T} (s_5 - s_2) = h_5 - h_2 > 0$$

$p_t = 0$

- Turbina ( $5 \rightarrow 6$ )

$\bar{T}$  = temperatura media

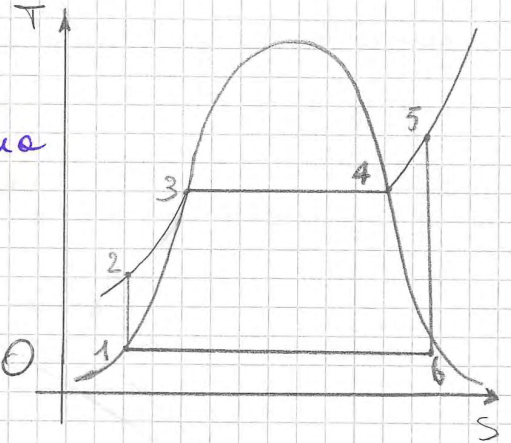
$$q = 0;$$

$$p_t = h_5 - h_6 > 0 \rightarrow \text{Lavoro turbina}$$

- Condensatore ( $6 \rightarrow 1$ )

$$q = \int_6^1 \bar{T} ds = \bar{T} (s_1 - s_6) = h_1 - h_6 < 0$$

$$p_t = 0$$



Sul diagramma di Mollier quindi attraverso le variazioni di entalpie siamo in grado di calcolare lavoro e calore.

Calcoliamo quindi ora il rendimento del ciclo Rankine

$$\eta = \frac{L_m(c)}{Q^+(c)} = 1 - \frac{q^-}{q^+}$$

poiché  $q^-$  è negativo cambia di segno all'interno delle parentesi e quindi avremo l'espressione indicata

Posso scriverlo anche come:

$$\eta = 1 - \frac{\bar{T}^- (s_6 - s_1)}{\bar{T}^+ (s_5 - s_2)}$$

poiché  $(s_6 - s_1) = (s_5 - s_2)$

poiché  $\bar{T}^- < \bar{T}^+$  il rendimento di Rankine sarà minore di  $\eta_c$

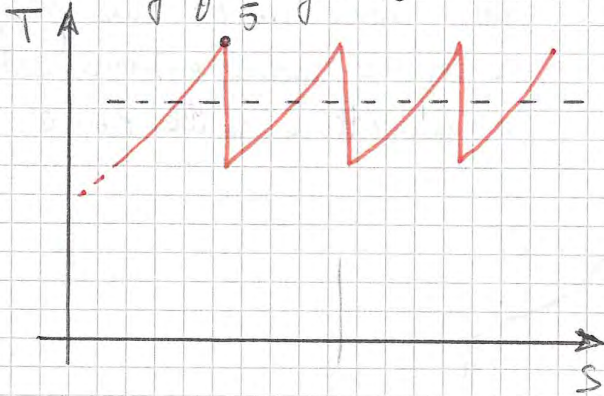
Allora avrò:

$$\eta_R = 1 - \frac{\bar{T}^- (s_6 - s_1)}{\bar{T}^+ (s_5 - s_2)} = 1 - \frac{\bar{T}^-}{\bar{T}^+} < \eta_c$$

Tale ciclo è minore del ciclo di Carnot in termini di rendimento, perché per Carnot ci dobbiamo riferire al rettangolo che passa per  $T_5$ . ( $T^+$ )

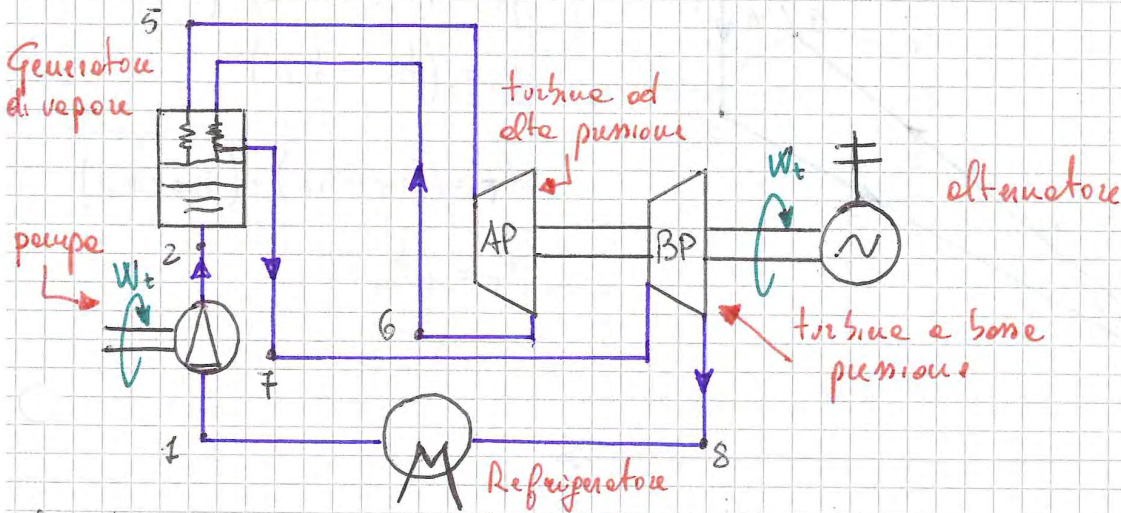
Quindi per migliorare il ciclo Rankine bisogna alzare la temperatura del punto 5, però come faccio se sono già alla temperatura massima sopportabile del materiale delle turbine?

Basta fare una trasformazione perisotermica, che si presenta come nel grafico seguente:



Note bene dal grafico, che la temperatura media delle trasformazioni è compresa tra il picco superiore e il picco inferiore.

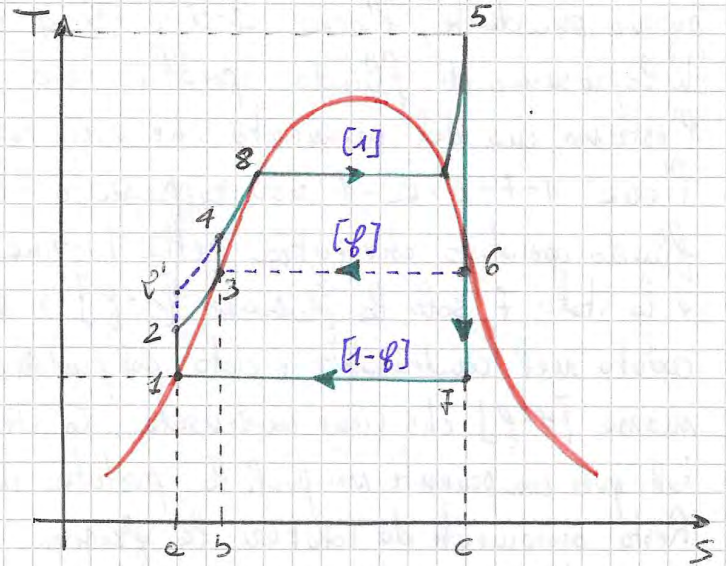
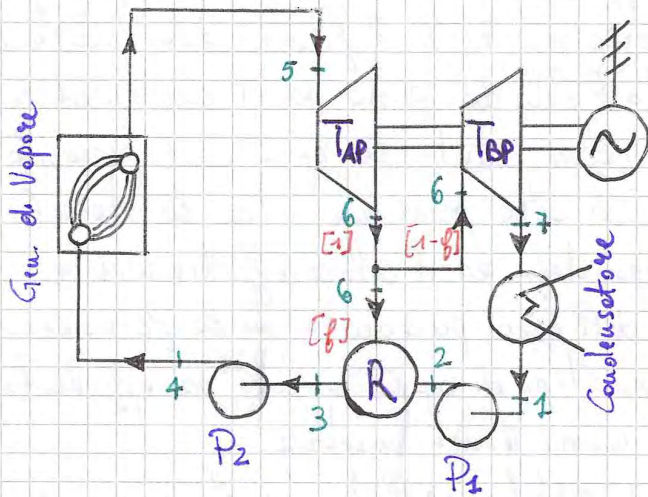
Però in genere in un ciclo non posso fare tutti i processi isocoricamente, ma mi fermo al massimo a due isocoricamente. Il ciclo allora si trasforma nel seguente modo:



In tale circuito si possono notare gli stessi componenti del circuito visto prima, con l'aggiunta di una sola turbina che ora lavora a basse pressioni. Come possiamo notare dal ciclo, fino a quando il fluido esce dalle turbine ad alta pressione il circuito è lo stesso visto prima, ma da questo punto in poi il fluido non ripete più tale percorso, ma si dirige verso il generatore che ripristinerà la temperatura al valore massimo e si dirigerà verso le turbine a basse pressioni. Da qui questo fluido genera lavoro che viene convertito in energia elettrica, per poi tornare nel condensatore (il fluido) e ripetere il ciclo dal punto iniziale.

# LA RIGENERAZIONE FRAZIONATA

Il principio di riscaldare l'acqua di alimento per rigenerazione può essere realizzato in modo conveniente, mediante il processo di estrazione o rigenerazione frazionata. Secondo queste procedure il vapore che si sta espandendo in turbina viene estratto (come piccole percentuali) o "spillato" dalle turbine stesse, in corrispondenza di vari stadi di pressione intermedi; ed è usato per riscaldare l'acqua di alimento in scambiatori di calore. Vediamo la figura seguente:



Il vapore prelevato in corrispondenza dello spillamento (che si suppone venga effettuato alla fine dell'espansione nella turbine di alta pressione) viene mescolato con l'acqua di alimento che una opportuna pompa ha portato allo stesso pressione del vapore. La quantità di vapore estratta deve essere quella necessaria e sufficiente a portare l'acqua di alimento alla temperatura di saturazione corrispondente alla  $p$  di estrazione. Supponendo la portata di fluido unitaria, il vapore mescolato entra nelle turbine di alta pressione nello stato termodinamico 5, si espande fino a raggiungere lo stato 6, dove la frazione  $[\beta]$  del vapore viene spillata, mentre la frazione  $[1-\beta]$  prosegue l'espansione nelle turbine di bassa pressione e viene quindi inviata allo scambiatore, dove viene condensata. La frazione di portata condensata viene quindi inviata, per il tramite di una pompa, nello scambiatore rigenerativo, in cui si mescola con il vapore estratto dalle turbine; come si è detto la frazione di vapore spillata è in grado, condensando, di fornire il calore necessario affinché il liquido che lascia il rigeneratore sia saturo allo stadio 3. Si noti che il liquido non è stato pompato alla pressione esistente nel generatore di calore, ma soltanto ad una pressione intermedia, quella cioè corrispondente allo stato 6; è quindi necessaria una seconda pompa per portare il liquido dalla pressione intermedia alla pressione e

Per cui il rendimento termico del ciclo assume l'espressione:

$$\eta = \frac{P_t}{Q_z} = \frac{h_5 - h_6 + (1-f)(h_6 - h_7)}{h_5 - h_3}$$

mentre se non si effettua né la rigenerazione il rendimento sarebbe stato espresso da:

$$\eta_{NR} = \frac{h_5 - h_7}{h_5 - h_1}$$

Resta il problema del dove effettuare lo spillamento, e cioè di stabilire il punto indicato con 6 sul diagramma termodinamico. Si possono considerare due casi limite, uno in cui il rigeneratore utilizza il vapore prelevato nello stato 5 (superiore nella turbina di alta pressione) e l'altro in cui si usa il vapore spillato nello stato 7 (uscita della turbina di bassa pressione). Nell'ultimo caso, il vapore che ha terminato l'espansione in turbina possiede una temperatura pari a quella del liquido che lascia il condensatore, e questo impedirebbe lo scambio termico nel rigeneratore: il rendimento sarebbe quello espresso da:

$$\eta_{NR} = \frac{h_5 - h_7}{h_5 - h_1}$$

e cioè quello di un ciclo senza rigenerazione.

Nel primo caso, spillando cioè nelle condizioni del punto 5, la frazione di potenza spillata  $[f]$  diventerebbe:

$$f = \frac{h_6 - h_1}{h_5 - h_1}$$

mentre il lavoro svolto in turbine sarebbe:

$$P_t = P'_t + P''_t = 0 + (1-f) \cdot (h_5 - h_7)$$

con un calore fornito al fluido nel generatore pari a:

$$Q_z = h_5 - h_3$$

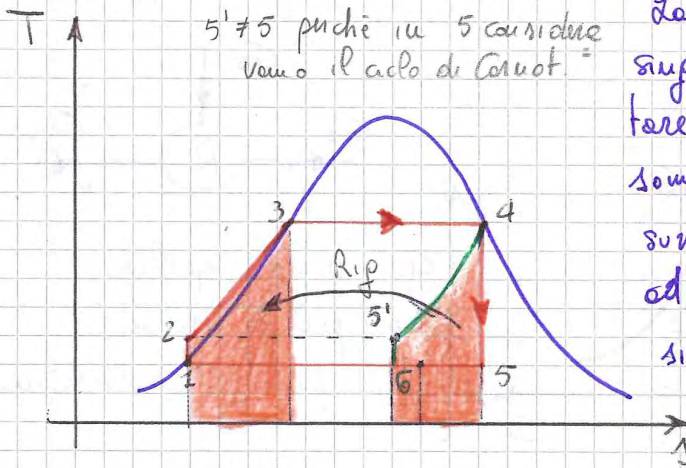
Il rendimento termico del ciclo sarebbe quindi dato dalla:

$$\eta = \frac{P_t}{Q_z} = \frac{(1-f)(h_5 - h_7)}{h_5 - h_3}$$



# LA RIGENERAZIONE

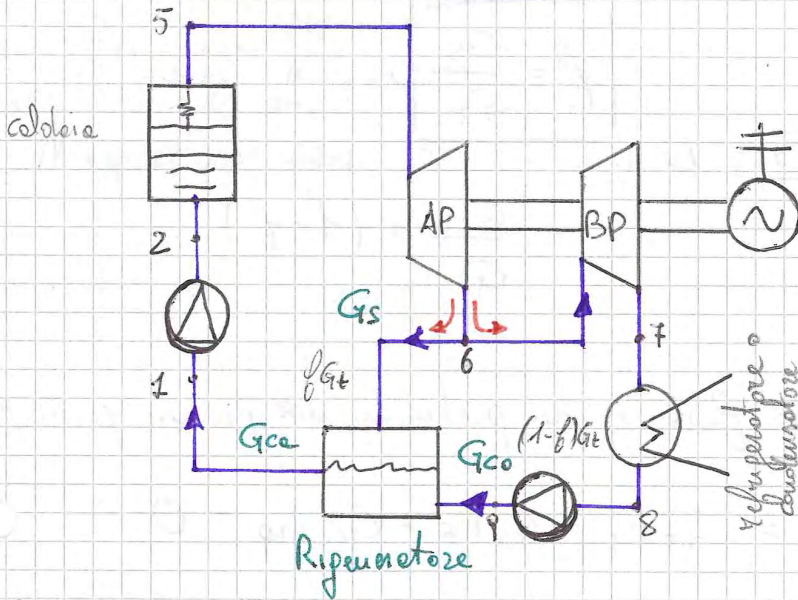
Per spiegare questo fenomeno ripartiamo dal ciclo di Hirn-Rankine, e facciamo su questo alcune considerazioni.



5' ≠ 5 perché in 5 consideriamo il ciclo di Carnot.

La rigenerazione (così come i surriscaldamenti supposti e ripetuti) è una tecnica per aumentare la temperatura media effettiva di somministrazione del calore. Mentre con i surriscaldamenti si aumenta il calore fornito ad alte temperature, con la rigenerazione si diminuisce il calore fornito a basse temperature.

Vediamo come è costituito il ciclo con la rigenerazione.



$G_s$ : portata spillata

$G_{co}$ : portata condensatore

$G_{ca}$ : portata caldaia

All'interno del rigeneratore le due portate  $G_s$  e  $G_{co}$  devono entrare con lo stesso livello di pressione.

$$G_{ca} = G_t$$

Come possiamo notare dal circuito, si ha un frizionamento dell'acqua di alimentazione. Praticamente una volta che l'acqua vaporizzata passa per il punto 6, si divide in due parti. Una portata passa per il rigeneratore ( $G_s$ ) e l'altra portata  $[(1-\phi)G_t]$  passa per le turbine e viene pompata che produce energia elettrica, per poi essere refrigerata e tramite le pompe comprese tra 8 e 9 è portata al livello di pressione del punto 6. In questo caso come sorgente di calore si utilizza una frazione di vapore che si sta espandendo, estruendolo dalla turbine. La pressione del vapore spillato è una pressione intermedia tra quella di ingresso e quella di uscita.

Per quanto riguarda il rendimento di tale ciclo verrà dopo aver calcolato i volti calori e i loro lavori

$$l_T = \frac{W_{tAP}}{G_t} + \frac{W_{tBP}}{G_t} = \frac{G_{co}}{G_t} l_{tAP} + \frac{G_{co}}{G_t} l_{tBP} =$$

$$\Rightarrow l_T = (h_5 - h_6) + [1 - \beta] (h_6 - h_7) \quad \begin{cases} AP = \text{Alta pressione} \\ BP = \text{Bassa pressione} \end{cases}$$

Il lavoro di pompaggio invece sarà:

$$l_p = \frac{W_{p1}}{G_t} + \frac{W_{p2}}{G_t} = \frac{G_{co}}{G_t} l_{p1} + \frac{G_t}{G_{co}} l_{p2} =$$

$$\Rightarrow l_p = [1 - \beta] (h_p - h_8) + (h_2 - h_1)$$

Il calore in caldaia sarà uguale a

$$q_1 = \frac{\phi_1}{G_t} = \frac{G_t}{G_t} q_1 = (h_5 - h_2)$$

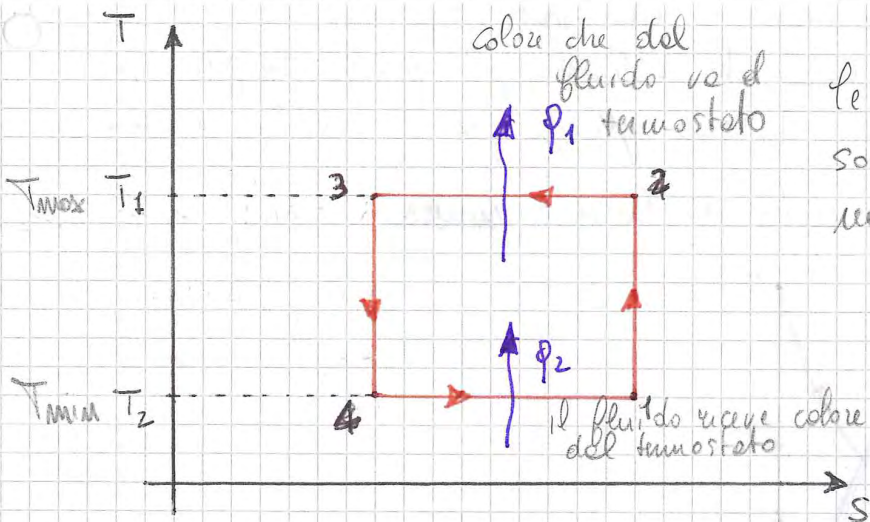
Il calore al condensatore sarà invece

$$q_2 = \frac{\phi_2}{G_t} = \frac{G_{co}}{G_t} q_2 = [1 - \beta] (h_7 - h_8)$$

Il rendimento del ciclo sarà dato da:

$$\eta = \frac{l_T}{l_p} = \frac{(h_5 - h_6) + [1 - \beta] (h_6 - h_7)}{(h_5 - h_2)}$$

Ripetiamo di nuovo del ciclo di Carnot e lo facciamo in senso inverso.



Le temperature max e min sono invariate rispetto alle macchine operative.

$$l_m = q_1 - q_2$$

$$(s_2 - s_3) = (s_1 - s_4)$$

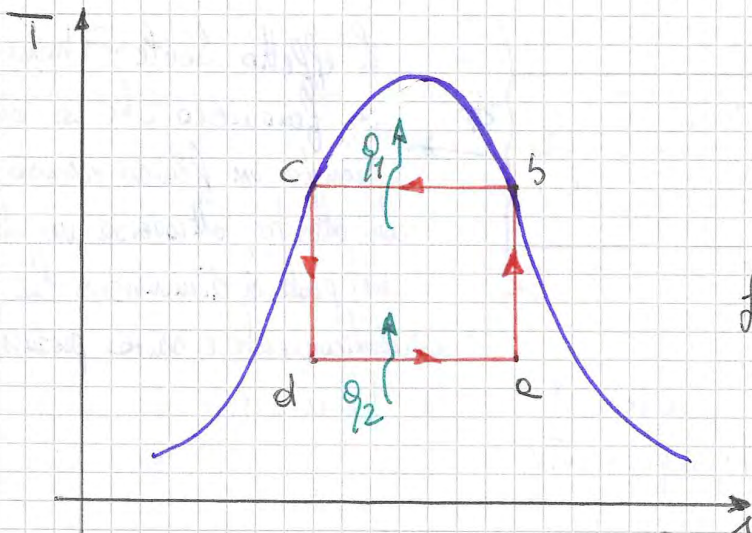
Per quanto riguarda i rendimenti, abbiamo:

$$\epsilon_F = \frac{q_2}{l_m} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{T_2 (s_2 - s_3)}{T_1 (s_1 - s_4) - T_2 (s_2 - s_3)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\epsilon_{PC} = \frac{q_1}{l_m} = \frac{q_1}{q_1 - q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{1}{\eta_0}$$

Il fluido se disegna il ciclo in questo modo e sempre allo stato gassoso anche perché non ho disegnato le curve limite del cambiamento di stato.

I cicli inversi di cui ci occuperemo sono i cicli a vapore e non a gas. Ci interessiamo quindi dei cicli a vapore inversi. Vediamo il ciclo di Carnot inverso sul diagramma di Gibbs.



In tale profilo notiamo anche il fatto di stare al di sotto della curva limite. Le curve limite disegnate non è quella dell'acqua, ma di un altro fluido.

Applico il primo principio per sistemi aperti

$$\dot{\phi} - \dot{W}_t = \dot{Q} \Delta h$$

ipotesi  $\Delta e_c = 0$  e  $\Delta e_p = 0$

Non ci sono organi che scambiano lavoro e calore, quindi diventa:

$$\dot{\phi} = \dot{W}_t = \dot{Q} \Delta h \rightarrow \Delta h = 0 \rightarrow h_2 = h_1$$

La trasformazione in questo condotto è isentropica

Applicando il teorema dell'energia cinetica per sistemi aperti avremo:

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{m}} + \frac{1}{2} v^2 + \int_p v dp + \Delta e_c + \Delta e_p = 0$$

$$e = - \int_p v dp = - \bar{v} \Delta p > 0$$

$$p_2 < p_1$$

$$e > 0 ; \bar{v} > 0 ; \Delta p < 0$$

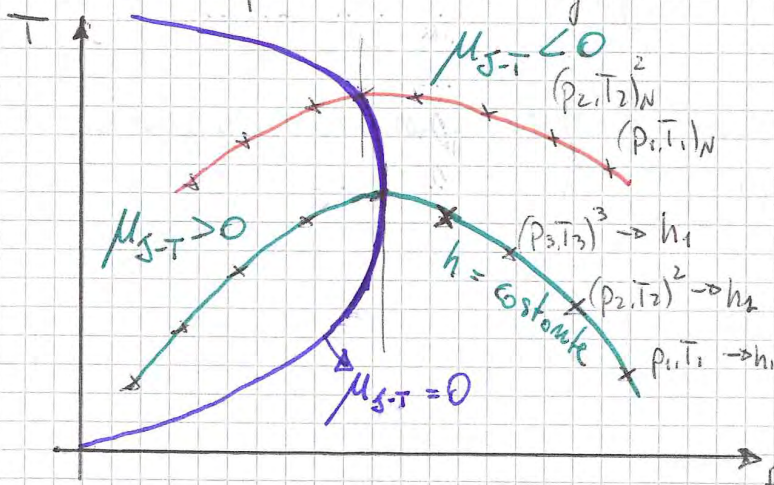
Quindi in tale condotto la pressione  $p_2$  sarà minore di  $p_1$ .  
Però poiché siamo di fronte a fluidi reali e non ideali, non vale più l'espressione

$$h = h(T) \rightarrow \text{per gas ideali}$$

Ma vale l'espressione

$$h = h(p, T) \rightarrow \text{per gas reali}$$

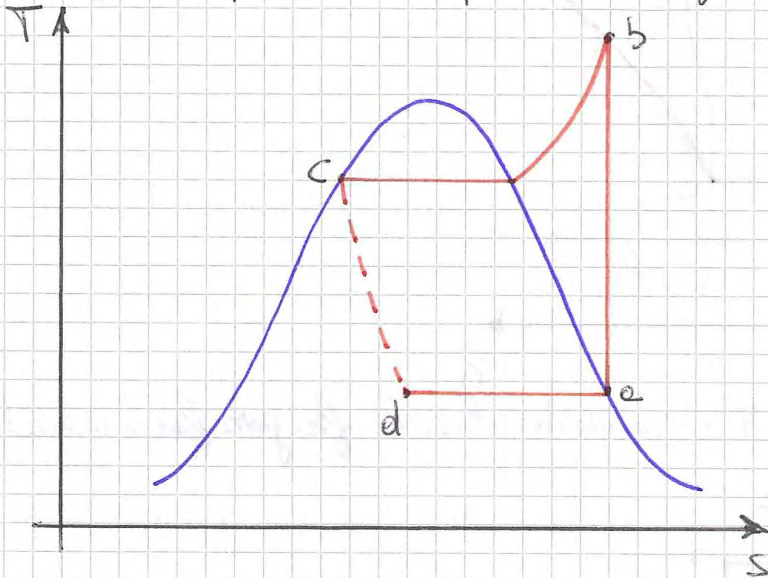
Quindi per fluidi reali si avrà come effetto ultimo un abbassamento di pressione e temperatura, così che sta succedendo dal punto c al punto d sul diagramma di GISS.



Se su tale diagramma si tracciano diverse isentropiche mantenendo costante l'entalpia e si uniscono i punti ottenuti, si ottiene una curva simile a quella rappresentata.

Nel nostro impianto quindi posso ottenere un effetto di arrotondamento di pressione e temperatura solo con una valvola che si può chiudere o aprire a nostro piacimento, secondo i comandi delle strutture, restituendo la sezione del condotto.

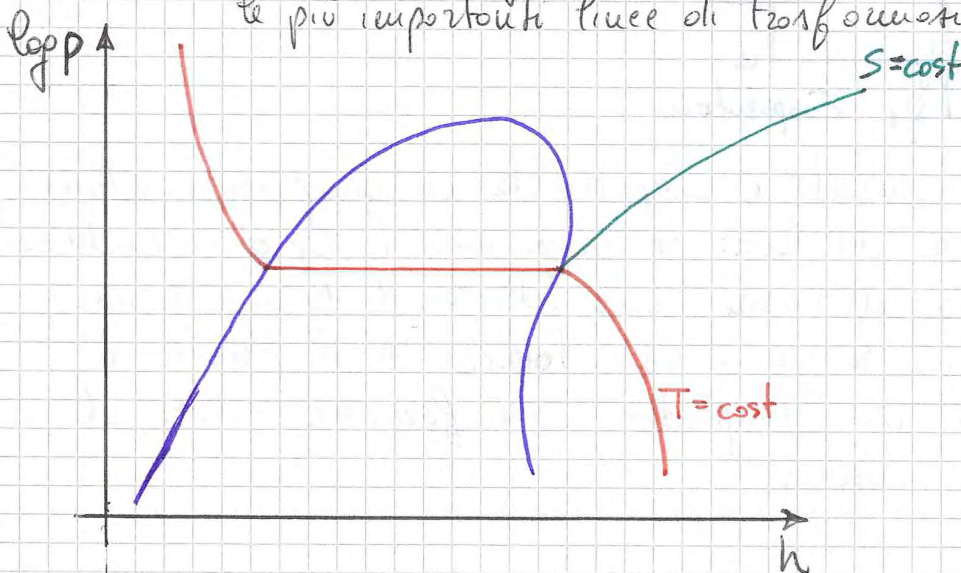
Il ciclo più semplice che possiamo fare è il seguente



È un tipo di ciclo molto economico da realizzare.

La trasformazione che va dal punto c al punto d non la conosciamo perfettamente, e quindi la disegniamo tratteggiata.

Però per i cicli interni il diagramma di Gibbs non è molto significativo, ma si utilizza molto il diagramma pressione-entropia. Vediamo tale ciclo nel diagramma (p-h) dopo aver identificato le più importanti linee di trasformazione di tale diagramma.



In tale diagramma possiamo identificare le varie trasformazioni isentropiche e isoterme che hanno l'andamento indicato. Notare il fatto che le isoterme al di sotto delle curve limite si comportano come una isobara e così anche le isentropiche.

Vediamo di calcolare il rendimento per tale ciclo

$$q_1 = h_e - h_d$$

$$q_2 = h_s - h_c$$

$$l_t = h_s - h_a$$

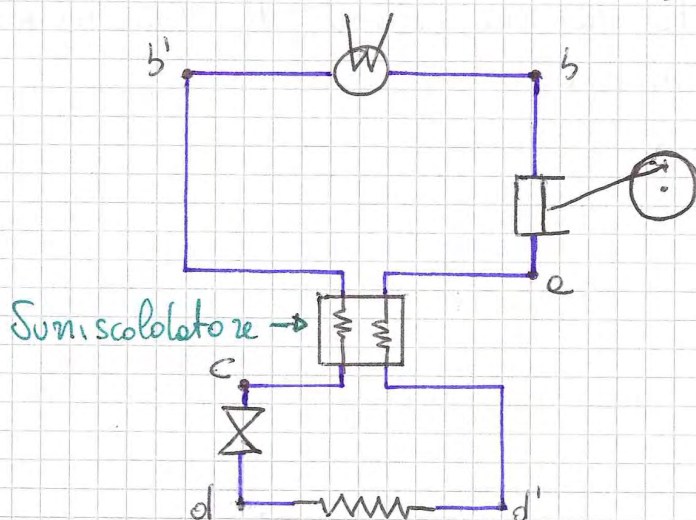
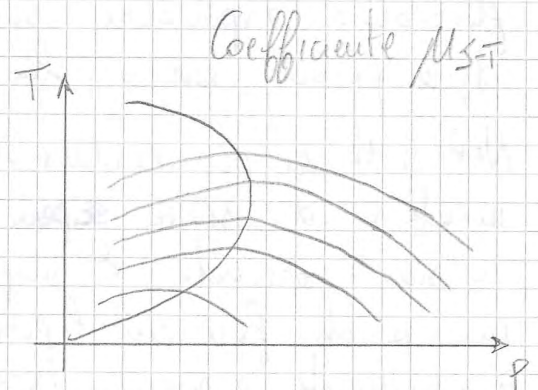
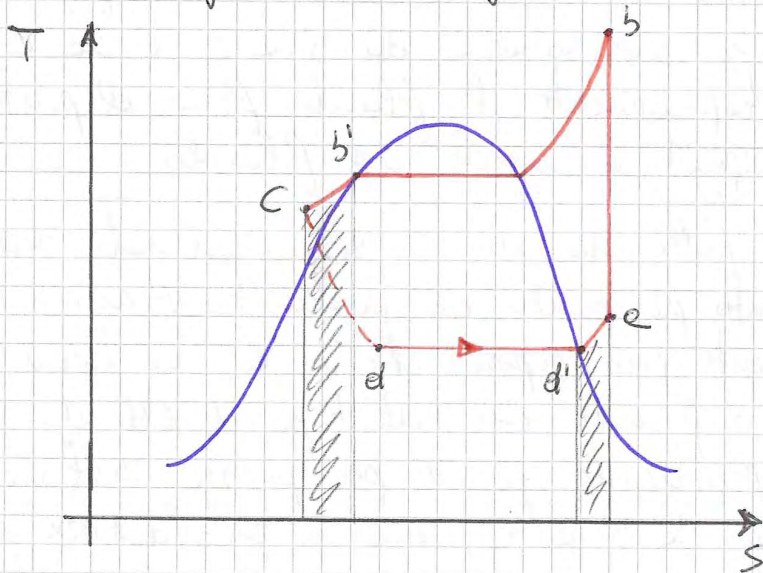
$$\epsilon_F = \frac{q_1}{l_t} = \frac{h_a - h_d}{h_s - h_e}$$

EFFICIENZA FRIGORIFERO

Il ciclo rappresentato nelle figure precedenti è il ciclo di un comune frigorifero domestico.

Vediamo come si può fare ora la regenerazione di un ciclo frigorifero per migliorarne il suo rendimento.

Il ciclo frigorifero con regenerazione è il seguente



N.B. Il fluido che passa nelle valvole di laminazione, deve ottenere la sua temperatura in risposta ad un abbassamento di pressione, questo è possibile solo se:

$$\mu_{J-T} > 0$$

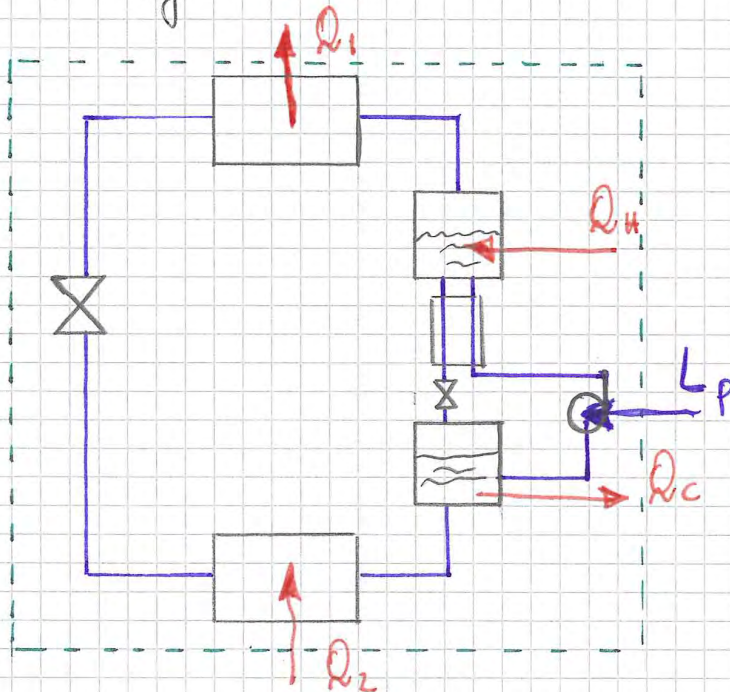
# CICLI AD ASSORBIMENTO

Sono cicli che si usano nel caso in cui non si ha la disponibilità di una fonte di energia elettrica per produrre l'energia meccanica per far comprimere il fluido. Nel circuito il compressore è sostituito da una pompa che fa aumentare la pressione del fluido, un serbatoio in cui fornisce calore, uno scambiatore di calore che riscalda il fluido che si sta portandolo a pressione più elevata e un altro serbatoio in cui cede del calore.

Il fluido che percorre il circuito che sostituisce il compressore è una miscela di due componenti, una più volatile dell'altra. La parte volatile è quella che viene usata come fluido frigorifero.

Quando fornisce calore alla miscela il fluido frigorifero si separa dal solvente e continua il ciclo mentre il solvente viene portato a pressione più bassa e viene preriscaldato dalla miscela che si sta portando a pressione più elevata.

Lo schema è il seguente:



In genere il lavoro dovuto alle pompe  $L_p$  è trascurabile

Se uso questo circuito come frigorifero avrà una efficienza pari a:

$$E_F = \frac{Q_2}{Q_H + |L_p|}$$

EFFICIENZA FRIGORIFERO

Ma se uso il circuito come pompa di calore avrà:

$$E_{PC} = \frac{Q_1}{Q_H + |L_p|}$$

EFFICIENZA POMPA DI CALORE

## MISCELE DI GAS

Una miscela di gas con sostanze condensabili è una miscela che si trova vicino alle curve limite, quindi in prossimità di emersione e condensazione.

Una miscela di gas è composta da diversi tipi di gas che sono immersi nelle stesse condizioni termodinamiche.

Per queste tipologie di miscela ogni componente si comporta e si studia, senza influenzare le proprietà degli altri gas presenti nella miscela.

Quindi si parla in tal caso di miscela di gas ideali.

Diamo alcune definizioni:

### MOLE

Si definisce mole (mol) di una sostanza una quantità di materia che contiene un numero di particelle elementari, siano esse atomi, ioni, molecole, ecc., pari a quelle contenute in 0,012 kg di carbonio e uguale al numero di Avogadro, che è pari a  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ .

### MASSA MOLARE

Rappresenta la massa di una mole, viene indicata con  $M$ , e si misura nel sistema internazionale in  $\text{kg/mol}$  e cambia a seconda del tipo di particelle e delle loro specie chimiche.

### NUMERO DI MOLE

Si ottiene dal rapporto tra la massa di una sostanza e la massa molare (o massa di una mole).

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow \text{numero di moli}$$

### FRAZIONE MOLARE

Si consideri una miscela costituita da  $N$  componenti. Se si indicano con  $n_i$  il numero di moli del componente  $i$ -esimo e con  $n$  il numero totale di moli della miscela, si dice frazione molare,  $y_i$  la grandezza definita dalle relazione:

$$y_i = \frac{n_i}{n}$$



## METODO DI AMAGAT - LEDUC

$$p_i = p$$

$$p V_i = n_i RT$$

$$pV = nRT$$

$$n = \sum n_i$$

Quindi avrò

$$V = \sum V_i$$

$p_i = p$  uguale per tutti

$n_i =$  numero di moli del componente  $i$ -esimo

E come risultato finale, la frazione molare sarà:

$$y_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n}$$

Per quanto riguarda le entalpie e le entropie, bisogna sommare gli effetti di tutti i gas.

Si suppone ora di separare la miscela di gas ideali, isolando i singoli componenti ed inserendoli in recipienti di diverso volume, in modo tale che ognuno di essi mantenga la pressione e la temperatura della miscela originale. Si può allora scrivere che:

$$pV = nRT$$

dove due sostanze A e B delle miscele

gasose avremo

$$n = n_A + n_B$$

Per i componenti quindi si ha  $\rightarrow$

$$p V_A = n_A RT$$

$$p V_B = n_B RT$$

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{pV_A}{RT} + \frac{pV_B}{RT}$$

$$\text{e cioè } V = V_A + V_B$$

Nel caso dei gas ideali il modello di Amagat porta alle seguenti conclusioni: Il volume totale è pari alla somma dei volumi occupati dai componenti, o, in altri termini, che la somma delle frazioni in volume è unitaria.

$$\frac{V_A}{V} + \frac{V_B}{V} = 1$$

$$\frac{V_A}{V} = \frac{n_A}{n} = y_A = \frac{p_A}{p}$$

$$\frac{V_B}{V} = \frac{n_B}{n} = y_B = \frac{p_B}{p}$$

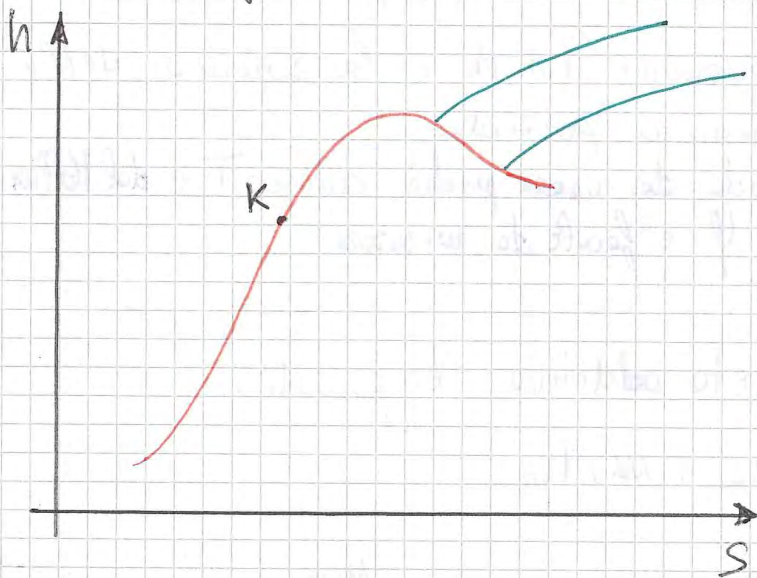
Introduciamo qualche definizione:

$$\varphi = \frac{m_v}{m_{vs}}$$

UNITA' RELATIVA

$$\varphi = \frac{m_v}{m_{vs}} = \frac{m_v/V}{m_{vs}/V} = \frac{p_v}{p_{vs}} = \frac{\frac{p_v}{R_v^* T}}{\frac{p_{vs}}{R_v^* T}} = \frac{p_v}{p_{vs}}$$

Per quanto riguarda il diagramma di Mollier dell'acqua otteniamo il seguente diagramma



Le due relazioni che possiamo scrivere per l'aria secca sono:

1.  $p_v = R_{aria}^* T$

$$R_{aria}^* = 287 \frac{J}{kgK}$$

2.  $p_v = R_{vapore}^* T$

$$R_{vapore}^* = 461,5 \frac{J}{kgK}$$

Nel caso in cui siamo in condizioni di buone premie possiamo ipotizzare il vapore d'acqua come un gas ideale.

A suo tempo, abbiamo detto che oltre un certo valore di entalpia alcune isoterme diventano isoentalpiche e questa è una caratteristica molto importante del diagramma di Mollier.

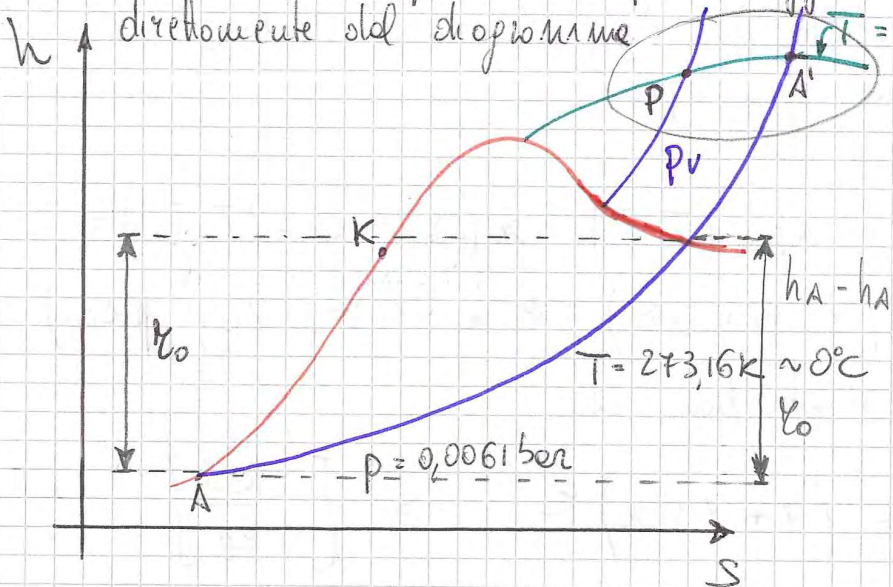
Nel diagramma (T-s) di pagine precedenti, la pressione di saturazione ( $p_s$ ) è la pressione parziale del vapore in condizioni di imminente condensazione e dipende dalla temperatura della miscela.

La pressione  $p_i$  (come si può vedere) si trova al di sotto di  $p_s$ . A quelle pressioni parziali non possiamo pensare di raggiungere la condensazione in due modi:

1. Mantenendoci alla pressione  $p_i$  e diminuendo la temperatura, in questo modo la  $p_i$  diventa la nuova pressione di saturazione.

2. Appioppando vapore, cioè muovendolo in verso sinistra lungo le linee T e quindi raggiungendolo la saturazione alla pressione  $p_s$ .

Se a trionimo nel punto P posso leggere l'entalpia che mi serve direttamente dal diagramma



In questa zona archata le isoterme diventano isoentalpiche

A: Punto triplo dell'acqua

Quindi quando calcolo l'entalpia del vapore dobbiamo tener presente che:

$$h_v = z_0 + c_{pv} (T - T_0) = z_0 + c_{pv} \Theta$$

$$h_{1+x} = c_{pa} \Theta + x [z_0 + c_{pv} \Theta]$$

$$c_{pa} \sim 1 \text{ kJ/kgK}$$

$$c_{pv} \sim 1,9 \text{ kJ/kgK}$$

$$z_0 = 2500 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$x = \frac{m_v}{m_a} \quad (\text{Titolo})$$

$$h_{1+x} = 2500 x + (1 + 1,9x) \Theta$$

Nel grafico sopra abbiamo preso come punto di riferimento il punto triplo dell'acqua e abbiamo tracciato sul diagramma h-s le curve relative alle pressioni del vapore e alle pressioni del punto triplo.

Dato che l'aria la prendiamo come gas ideale sappiamo che

$$h_a = c_{pa} (T - T_0) = c_{pa} \Theta$$

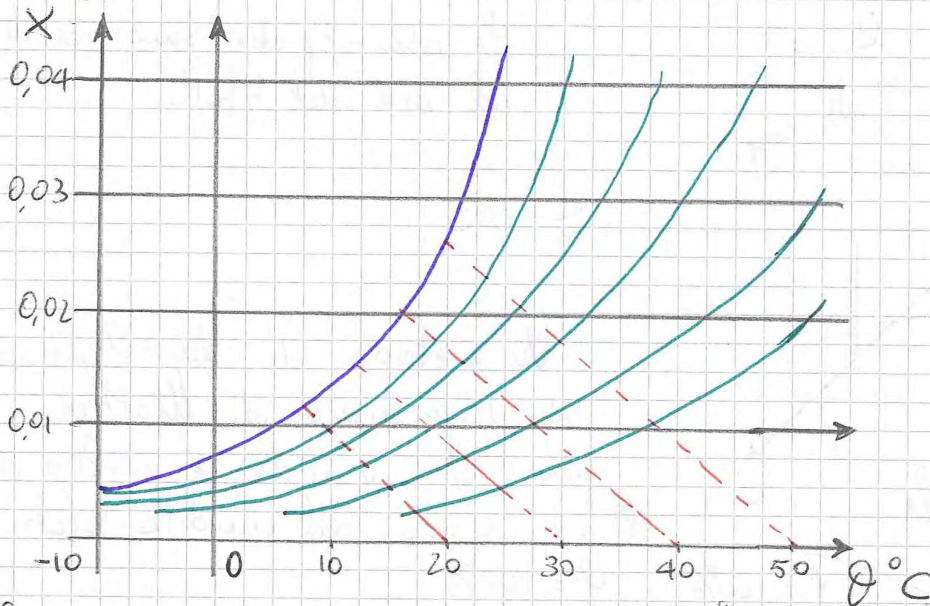
$\Theta$  indica che posso esprimere allo stesso modo usando sia K che  $^{\circ}\text{C}$ . Come si può vedere dal grafico, per quanto riguarda il vapore posso scrivere che:

$$h' = h(p_s, T) = z_0 + c_{pv} (T - T_0)$$

In questo diagramma sulle ascisse è rappresentato il titolo e sulle ordinate è rappresentata l'entalpia specifica delle miscele ( $h_{1+x}$ )

L'axe del titolo è inclinato in modo tale da far diventare le isoterme ortogonali, mentre le isoentropiche sono inclinate e parallele all'axe del titolo.

## Diagramma di Carrier

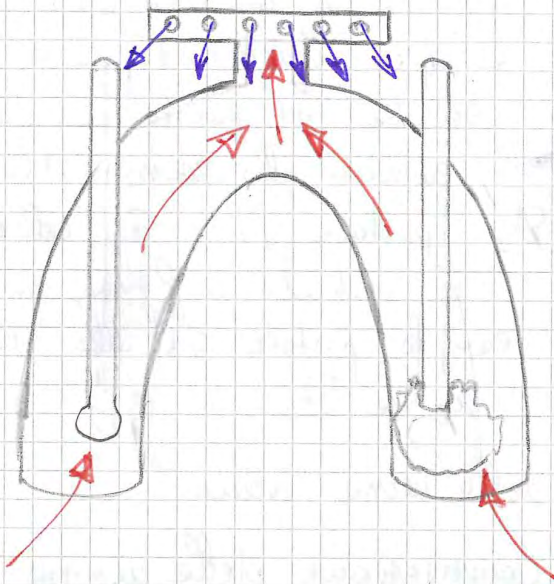


Come si vede dal grafico il "di Carrier" ha sulle ascisse le temperature e sulle ordinate il titolo.

Da tale diagramma si possono ricavare le seguenti temperature:

- $D_{ew}$ : è la temperatura di rugiada, che è la temperatura misurata dopo aver raffreddato la miscela a titolo costante fino ad ottenere la condensazione
- $D_{50}$ : è la temperatura a bulbo umido, che è la temperatura misurata con un termometro il cui sensore è ricoperto con un fazzoletto umido.
- $D_{55}$ : temperatura a bulbo secco, è la temperatura misurata in condizioni normali.

Se prendiamo uno strumento chiamato **PSICROMETRO**, formato da due termometri, come indicato in figura

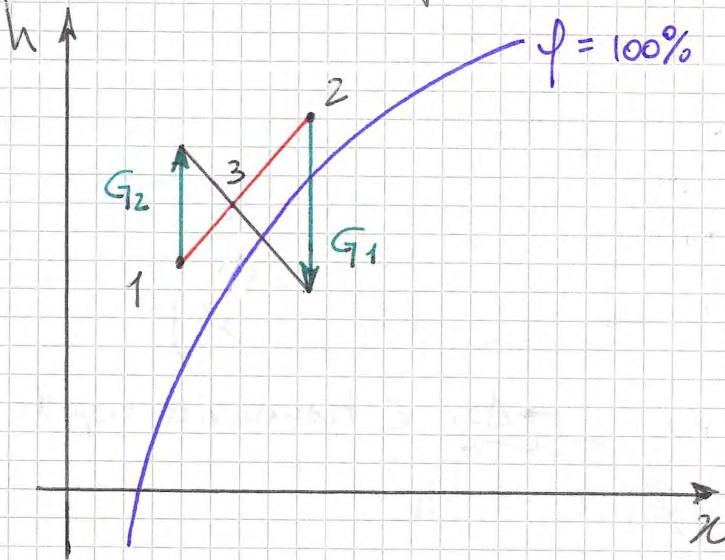


Se un termometro vi è avvolto vicino il bulbo del cotone umido, sull'altro bulbo invece non vi è niente

Immersando le temperature dei termometri (asciutto e inumidito) mesco e trovo i valori indicati nel grafico di pagine precedente.

Vi è però ancora un'altra temperatura importante legata al punto A che è la temperatura di rugiada ottenuta scendendo verticalmente sul grafico fino alla curva limite di saturazione.

Rappresentandolo sul diagramma di Mollier ovvero:



I punti 1 e 2 di partenza sono quelli indicati nel grafico, e il punto 3 sarà sulle linee che congiungono 1 e 2. Disegno nel punto 1 un segmento proporzionale a  $G_2$  e nel punto 2 un vettore proporzionale a  $G_1$ .

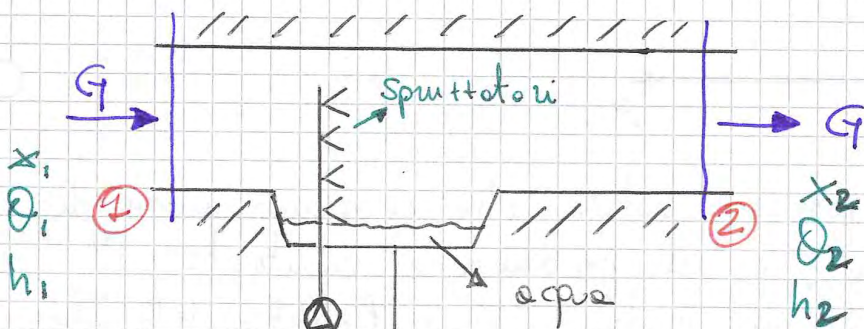
Se applico nel punto 1 e 2 dei segmenti proporzionali a  $G_1$  e  $G_2$  e unisco i loro vertici, riesco a trovare il punto 3 sul segmento 12.

N.B. Se la portata  $G_2 = 0$  il punto 3 di miscela coincide con il punto 1.

Vediamo ora un altro tipo di miscelazione

### UMIDIFICAZIONE ADIABATICA

Prendiamo un condotto del tipo indicato in figura



$G_2$ : portata di liquido ( $H_2O$ )

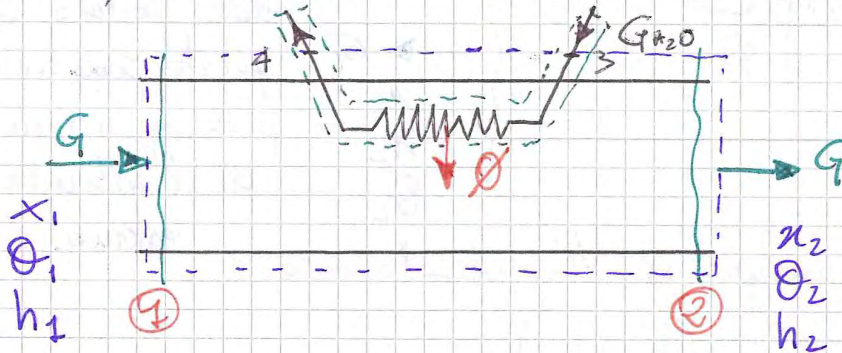
$G$ : portata di aria secca

Si fa entrare dell'aria secca nel condotto 1 e si spruzza dell'acqua, che verrà raccolta e riportata per essere spruzzata di nuovo all'interno del condotto.

La portata di aria così si arricchirà di umidità ad ogni passaggio, cambiando quindi il suo titolo, e le altre coordinate termodinamiche.

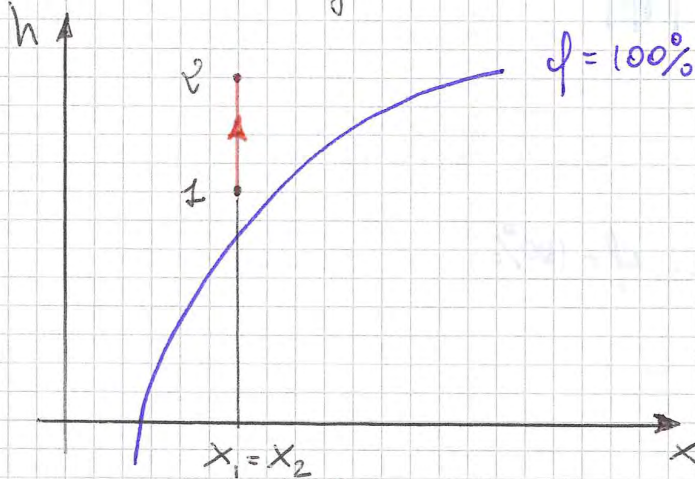
# RISCALDAMENTO A TITOLO COSTANTE

Prendiamo un condotto con sezione di ingresso uscite come indica to in figura, con un sistema di scambiatore di calore con l'aria, che immette nel condotto una certa potenza termica  $\phi$ .



Prendiamo ad esempio di avere tanti tubi in cui passa una certa portata di  $H_2O$  fredda o calda che chiamiamo  $G$ . Questi tubi sono attraversati da una corrente di aria che scambia potenza termica  $\phi$ . In questo caso il titolo del fluido è costante

Vediamolo sul diagramma di Mollier



Se prendo VC in blu non ho la potenza termica scambiata con il sistema, invece se prendo il VC in verde ho scambio di potenza termica  $\phi$ .

Applicando il primo principio per sistemi aperti avrò:

$$\dot{\phi} - \frac{W}{t} = \sum_i G_i h_i$$

Prendo VC indicato in blu

$$-G h_1 + G h_2 - G_{H_2O} h_3 + G_{H_2O} h_4 = 0$$

$$G (h_2 - h_1) = \frac{G_{H_2O} (h_3 - h_4)}{\phi}$$

$$h_2 = h_1 + \frac{|\phi|}{G}$$

Se invece prendiamo nel volume di controllo solo il condotto avremo:

$$\phi = G_{H_2O} (h_4 - h_3)$$

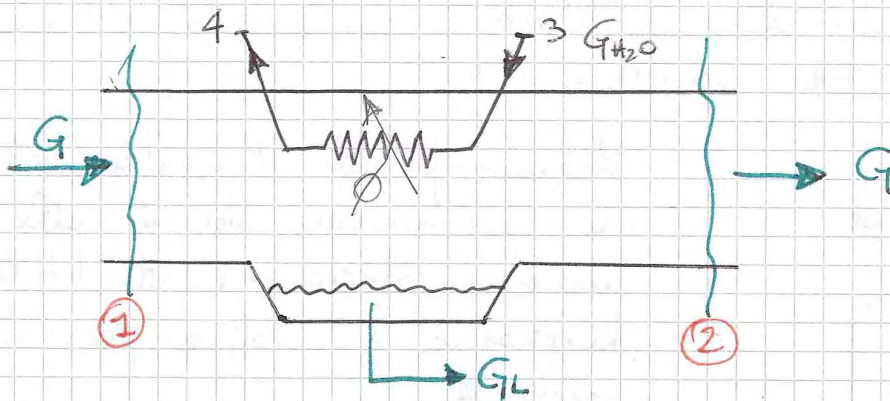
$$-|\phi| = G_{H_2O} (h_4 - h_3)$$

$$|\phi| = G_{H_2O} (h_3 - h_4)$$

$G_{H_2O} (h_4 - h_3)$  può essere visto come il fluido scambiato nel tubo ma di segno opposto dato che prima si faceva riferimento all'acqua e non all'aria.

## RAFFREDDAMENTO CON DEUMIDIFICAZIONE

Prendiamo il nostro condotto con vaschetta di condensazione

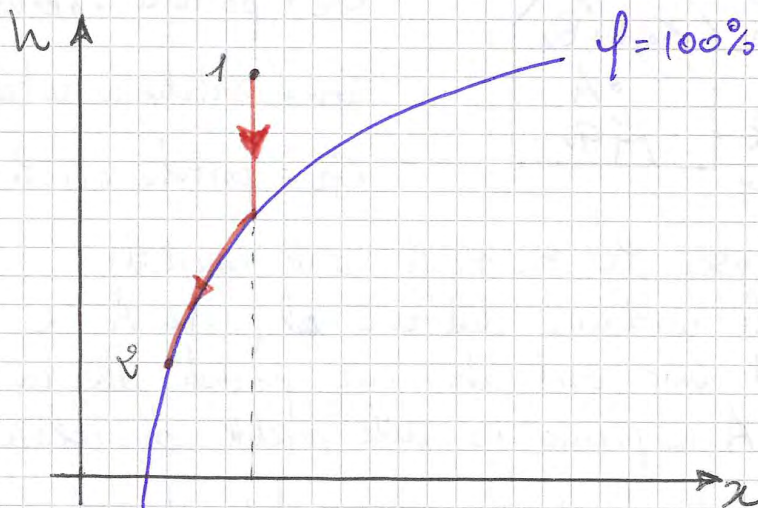


Applicando il primo principio per sistemi aperti avremo

$$G(h_2 - h_1) + \underbrace{G_{H_2O}(h_4 - h_3)}_{|\Phi|} + G_L h_L = 0$$

$$h_2 = h_1 - \frac{|\Phi|}{G} - \frac{G_L}{G} h_L \approx h_1 - \frac{|\Phi|}{G}$$

Che sul diagramma di Mollier diventa



Quindi il titolo non è più costante ma sta variando e sta variando in diminuzione.

Dallo schema di pag precedente, se io continuo a raffreddare incontrerò le curve limite con  $\phi = 100\%$ . Se continuo ancora a raffreddare mi sposto non più a titolo costante ma variando il titolo perché sono obbligato a muovermi sulle curve  $\phi = 100\%$ , e così il vapore inizia a condensarsi.



Applicando la legge di conservazione della massa nel circuito visto prima ovvio:

$$-Gx_i - G_v + Gx_A = 0$$

$$G(x_A - x_i) = G_v$$

$$\phi - \underset{=0}{W_t} = \sum G_i h_i \rightarrow \text{Primo principio sistemi aperti}$$

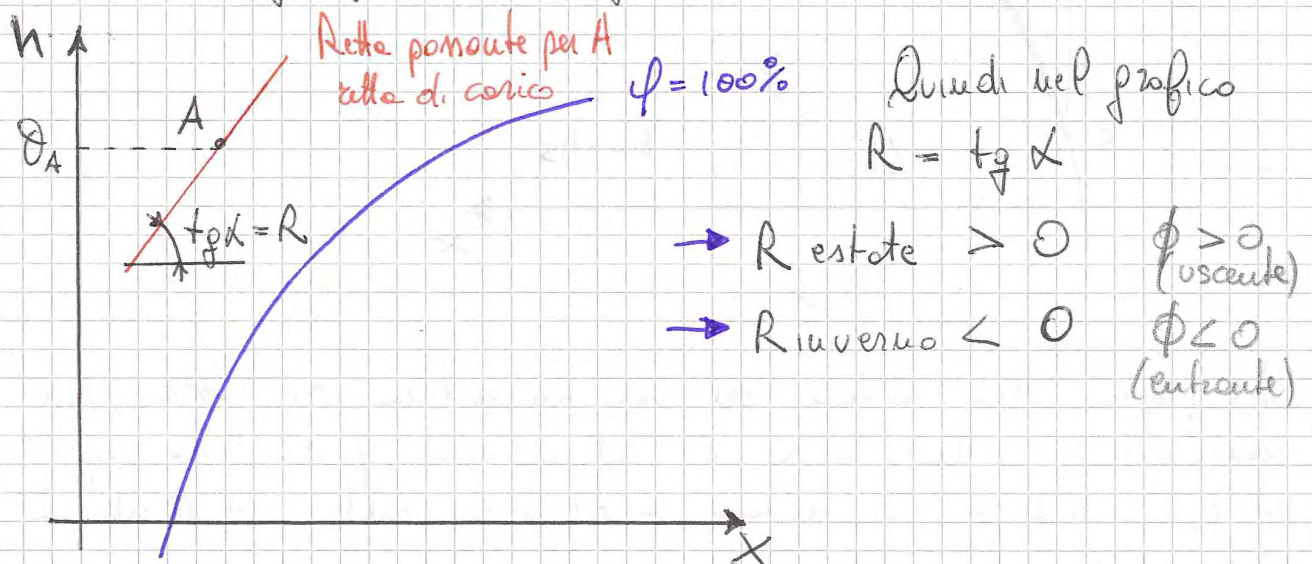
$$\phi = G(h_A - h_I) - G_v h_v$$

$$h_A - h_I = \frac{\phi}{G} + \frac{G_v}{G} h_v$$

Se calcoliamo il rapporto tra la variazione di entalpia e la variazione di titolo otteniamo:

$$R = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_A - h_I}{x_A - x_I} = \frac{\phi}{G_v} + h_v$$

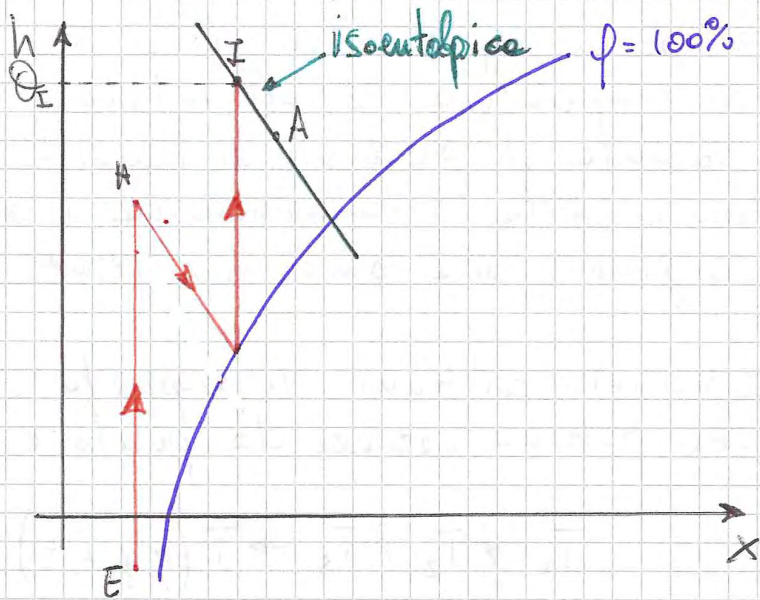
Vediamo cosa significa sul diagramma di Mollier.



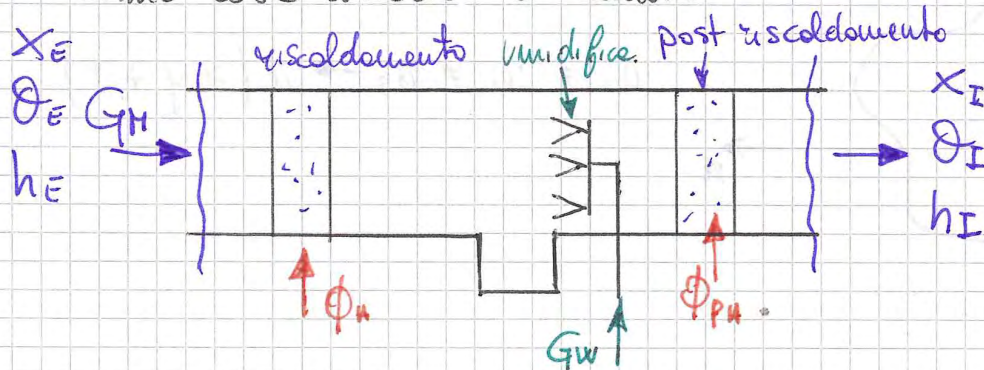
Il punto di introduzione dell'aria trattata dall'impianto deve piacere sulle rette di carico. Quindi per l'aria comunque in ambiente si sceglie la combinazione ottimale di portata e temperatura con l'obiettivo di rendere minimo il fabbisogno per gli occupanti.

# UNITA' DI TRATTAMENTO ARIA NEL CASO INVERNALE

Vediamo sul diagramma di Mollier



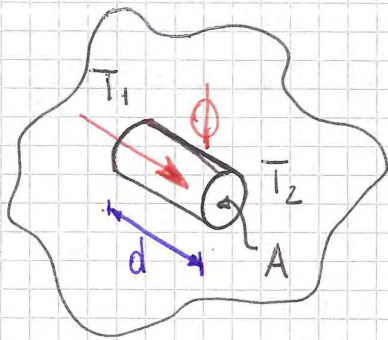
Vediamo cosa succede al condotto



Come posso notare dal diagramma di Mollier, prendo aria dell'ambiente esterno alla temperatura  $\theta_E$  molto bassa, la riscaldo fino al punto H e poi mi sposto sulla isoentropica fino alla curva di saturazione, proprio all'impianto di umidificazione mostrato nel condotto.

A questo punto una volta in saturazione riscaldo di nuovo fino al punto I che ha temperatura  $\theta_I$  maggiore di quella dell'ambiente A, per via delle perdite di calore.

Prendiamo ad esempio un corpo avente forme qualsiasi:



dove i termini indicano

$d$  = spessore del materiale

$A$  = superficie del materiale

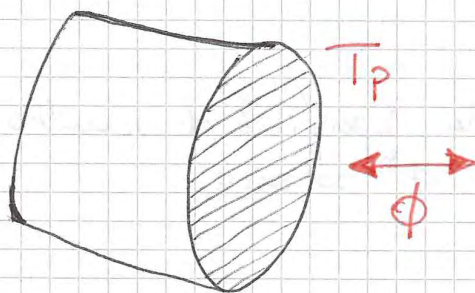
$$T_1 > T_2$$

$$\phi \propto \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d}$$

$\lambda$  è chiamata conduttività del materiale o ologicamente conducibilità termica del materiale. Dipende dal materiale e più è elevato, più viene scambiato flusso termico, quindi sarà conduttore, più invece sarà piccolo, meno sarà scambiato flusso termico, quindi sarà isolante.

## 2. CONVEZIONE

La convezione è lo scambio di energia termica tra una parete solida e un fluido in moto che la lambisce



$T_p$  = temperatura parete  
 $T_f$  = temperatura fluido

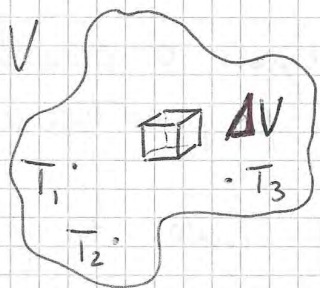
Le legge di Newton dice che:

$$\phi_{\text{conv.}} \propto A (T_p - T_f) \quad \text{se } T_p > T_f$$

dove abbiamo definito prima con  $T_p$  la temperatura della parete solida e con  $T_f$  la temperatura del fluido molto lontano dalla parete.

## LA TEORIA DEI CORPI CONTINUI

Come è più stato detto per avere questi scambi di flusso termico devo avere in ogni regione differenti temperature. Quindi il mio corpo non è più omogeneo, però è lo stesso continuo quindi, per quanto si prende in considerazione un volume piccolo del mio corpo, al suo interno ci sarà sempre materia e si esprime nel seguente modo:



$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{M}{\Delta V} = \rho \neq 0$$

Inoltre in termodinamica parliamo di gradiente. Il gradiente di una certa funzione  $U = U(x, y, z, t)$  è dato da:

$$\vec{\text{grad}} U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

Se il gradiente non a forme non a sarebbe il flusso termico e quindi scambio di calore. La conduzione può essere elettronica o fononica. L'elettronica è dovuta al fatto che gli elettroni liberi si possono muovere, e si muovono perché dove vi è alta temperatura questi elettroni si eccitano maggiormente e acquistano energie. Un buon conduttore elettrico conduce bene il calore per conduzione elettronica. Nella conduzione fononica il reticolo del materiale è rigido, quindi gli elettroni non possono spostarsi, ma se forniscono calore il reticolo si eccita e conduce tale energia per via delle vibrazioni che lo trasmettono ai reticoli vicini.

La conduttività termica del materiale è la sua capacità di condurre calore. Se la conduttività cambia a seconda della direzione (carbonio) allora il materiale si dice anisotropo, invece se la conduttività non cambia a seconda della direzione (rame) il materiale si dice isotropo. Tale proprietà si indica nel seguente modo:

$$[\lambda] = \frac{W}{mK}$$

Per trovare e per il differenziale di  $U$ , possiamo scriverlo come:

$$\frac{d(U)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV \rightarrow \frac{dU}{dt}$$

Vediamo di chiarire le idee sui termini  $\phi_s$  e  $\phi_v$ .

$$\phi_s = - \int_S \vec{p}_s \cdot \vec{n} dS$$

Il flusso è positivo quando è entrante nella superficie e poiché abbiamo preso la normale  $\vec{n}$  uscente, sarà negativo.

Faccendolo diventare un integrale di volume, ovvero:

$$\phi_s = - \int_V \text{div}(\vec{p}_s) dV \quad \text{Teorema di Gauss} \quad \begin{cases} [\phi_s] = \frac{W}{m^2} \\ [\phi_v] = \frac{W}{m^3} \end{cases}$$

Per questo e per il termine  $\phi_v$  ovvero:

$$\phi_v = \int_V \rho_v dV \Rightarrow - \int_V \text{div}(\vec{p}_s) dV + \int_V \rho_v dV = \int_V \frac{dU}{dt} \rho dV$$

Quindi sull'elemento  $dV$  deve valere:

$$- \text{div}(\vec{p}_s) + \rho_v = \rho \frac{dU}{dt} \quad \text{Questa equazione non è ancora l'equazione differenziale della conduzione}$$

Non è l'equazione differenziale della conduzione, perché non compare ancora la temperatura, il materiale, ecc... Per arrivare a questa equazione dobbiamo introdurre le equazioni costitutive. Vediamone alcune:

### IPOTESI DI FOURIER

$$\phi \propto A \frac{\Delta T}{\Delta s}$$

$$\begin{aligned} d\phi &= -\lambda \cdot dA \cdot \frac{(T+dT) - T}{ds} = \\ \phi_s &= \frac{d\phi}{dA} = -\lambda \frac{dT}{ds} \end{aligned}$$

Quindi secondo tale ipotesi l'equazione delle conduttività diventa

$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{ds}$$

il segno indica che il flusso si muove in direzione contraria alle  $T$  crescenti.

Spero questa esposizione è nota nelle sue forme semplificate, però prima di vedere queste forme approssimiamo un'altra caratteristica delle conduttività.

Sappiamo che nello spazio vale

$$\Lambda = \Lambda(x, y, z, T)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x(T) \\ \lambda_y(T) \\ \lambda_z(T) \end{bmatrix}$$

Per corpi omogenei però vale

$$\Lambda = \Lambda(T)$$

→ nelle tre direzioni si comporta in modo uguale.

Per i corpi isotropi invece abbiamo in un punto specifico

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda(x, y, z, T)$$

Quindi ora introduciamo una semplificazione dell'esposizione per analizzarla.

✓ In caso stazionario abbiamo

1.  $\rho_v = 0$

2.  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

3. STATIONARIETA'

$$\nabla^2 T = 0$$

IPOTESI DI LAPLACE

✓ Invece in caso non stazionario abbiamo un'altra ipotesi

1. NON STATIONARIETA'

2.  $\rho_v = 0$

3.  $\lambda = \text{cost} \rightarrow \frac{1}{e}$

$e =$  diffusività termica

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{e} \frac{dT}{dt}$$

IPOTESI DI FOURIER

$$e = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Vediamo ora invece l'ipotesi di Poisson

1. Stazionario

2.  $\lambda = \text{cost}$

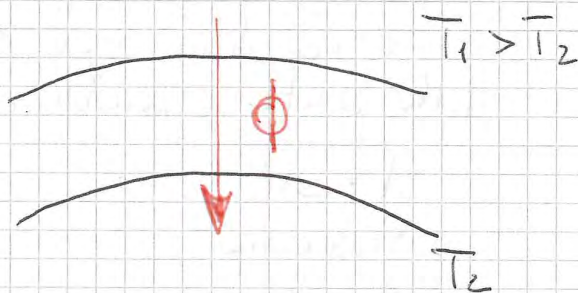
IPOTESI DI POISSON

$$\nabla^2 T + \frac{\rho_v}{\lambda} = 0$$

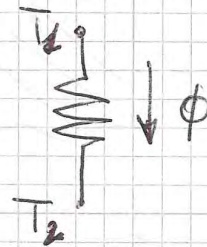
# R. RESISTENZA TERMICA

Prendiamo in considerazione due espansioni, una che fa riferimento a una espansione piana monodimensionale e l'altra che fa riferimento ad una espansione cilindrica.

Consideriamo due superfici isoterme a diverse temperature:



Indichiamo la resistenza con il simbolo di seguito:



$\Delta V = R \cdot I$  Dal punto di vista elettrico

$\Delta T = R \cdot \phi$  Dal punto di vista termico

Ma sappiamo che dal punto di vista termico

$$R = \frac{\Delta T}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\Delta T}{R}$$

$$\frac{\phi}{A} = \psi = \frac{\Delta T}{RA}$$

Perché si possa utilizzare il concetto di resistenza termica occorre che ci sia un flusso termico che passa da una superficie a temperatura più alta a una superficie a temperatura più bassa e che si possano trascurare gli effetti di bordo ai confini delle superfici. Quindi la Resistenza termica si può indicare con due forme, totale e specifica:

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$

Resistenza termica totale

$$\psi = \frac{T_1 - T_2}{\phi A} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = R_T \cdot A$$

Resistenza termica specifica

Quindi l'andamento di  $T$  rispetto a  $x$  possiamo scriverlo anche come:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\Delta} (x - x_1) \quad \begin{array}{l} \Delta = \text{spessore} \\ \Delta = (x_2 - x_1) \end{array}$$

Per quanto riguarda il flusso termico invece sappiamo che:

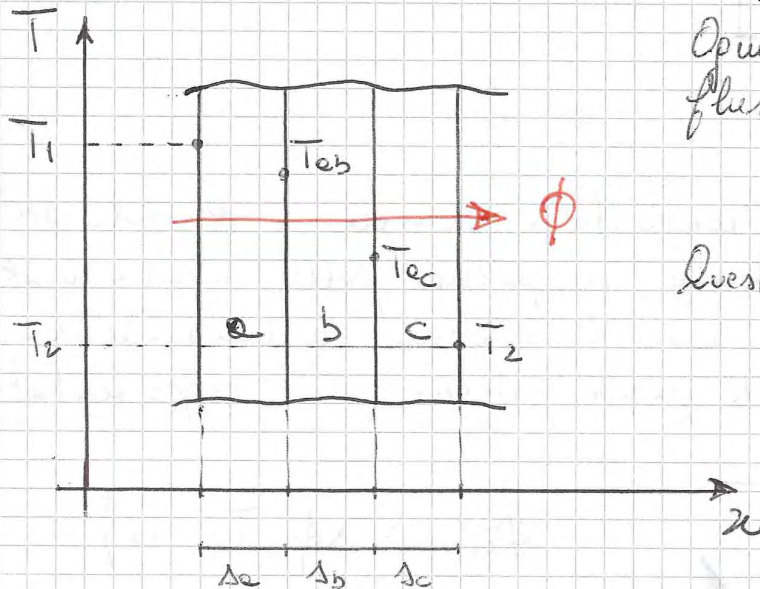
$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{dx} = -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} = A \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta}{\lambda}}$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta}{\lambda A}} \rightarrow R = \frac{\Delta}{\lambda A} \quad \Sigma = \frac{\Delta}{\lambda}$$

Quindi con l'analogue elettrico  $T_1 \text{ --- } \overset{\frac{1}{\lambda A}}{\text{---}} \text{ --- } T_2$

$$\frac{\phi}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta}{\lambda}}$$

Assumiamo di avere tre strati della parete termica



Ogni strato vede passare lo stesso flusso termico di energia

$$\phi_a = \phi_b = \phi_c = \phi$$

Questa è una ipotesi di stazionarietà

Per ogni strato però posso scrivere quello visto prima per uno strato singolo.

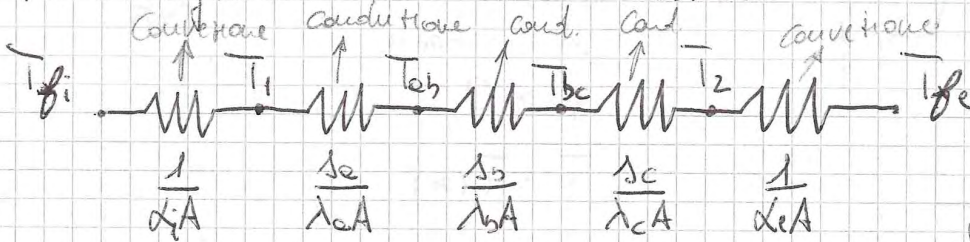
$$\phi_a = A \frac{(T_1 - T_{eb})}{\frac{\Delta_a}{\lambda_a}} ; \quad \phi_b = A \frac{(T_{eb} - T_{ec})}{\frac{\Delta_b}{\lambda_b}} ; \quad \phi_c = A \frac{(T_{ec} - T_2)}{\frac{\Delta_c}{\lambda_c}}$$



Ma le resistenza convettiva possiamo esprimerle come:

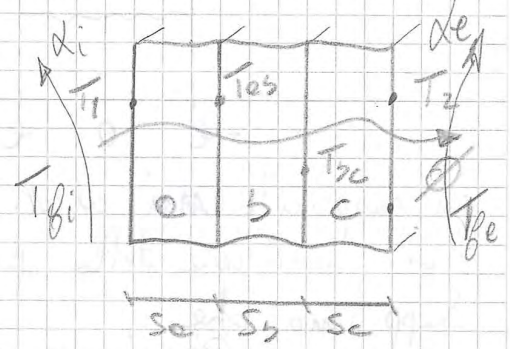
$$R = \frac{1}{\alpha A} \quad \text{e quindi} \quad \sum \frac{1}{\alpha}$$

Per analogia al caso elettrico otteniamo:



$$\phi = \frac{\Delta T_{TOT}}{R_{TOT}}$$

$$T_{bi} - T_{be} = \left[ \frac{1}{\alpha_i A} + \frac{1}{A} \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_e A} \right] \phi$$



$$\phi = \frac{A (T_{bi} - T_{be})}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_e}}$$

$$\phi = U A \Delta T$$

dove

$$U = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_e}}$$

TRASMITTANZA

Vediamo ora di trovare le condizioni al contorno:

$$T_0 = -\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 - C_1 l + C_2 \quad \text{per } x = -l \quad (1)$$

$$T_0 = -\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 + C_1 l + C_2 \quad \text{per } x = +l \quad (2)$$

$$+\cancel{C_1} l = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 = T_0 + \frac{\rho_V}{2\lambda} l^2$$

Sostituendo  $C_1$  e  $C_2$  abbiamo:

$$T = -\frac{\rho_V}{2\lambda} x^2 + T_0 - \frac{\rho_V}{2\lambda} l^2$$

$$T = T_0 + \frac{\rho_V}{2\lambda} (l^2 - x^2)$$

Faccendo la differenza tra (1) e (2) otteniamo il risultato:

$$T_0 - T_0 = -\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 - C_1 l + C_2 - \left[ -\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 + C_1 l + C_2 \right]$$

$$\cancel{T_0} - \cancel{T_0} = \cancel{-\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2} - C_1 l + \cancel{C_2} + \cancel{\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2} - C_1 l - \cancel{C_2}$$

$$-\cancel{C_1} l = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Sostituendo  $C_1 = 0$  in una delle due equazioni si trova  $C_2$ :

$$T_0 = -\frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 - \cancel{C_1} l + C_2 \Rightarrow C_2 = T_0 + \frac{\rho_V}{2\lambda} l^2$$

quindi la temperatura in funzione di  $x$  sarà:

$$T = -\frac{\rho_V}{2\lambda} x^2 + \frac{\rho_V}{2\lambda} l^2 + T_0$$

$$T = \frac{\rho_V}{2\lambda} (l^2 - x^2) + T_0$$

Andando ora a determinare le costanti  $C_1$  e  $C_2$  ovvero:

$$\bar{T}_i = C_1 \ln r_i + C_2$$

$$\bar{T}_e = C_1 \ln r_e + C_2$$

Se costanti  $C_1$  e  $C_2$  le otteniamo imponendo le condizioni al contorno, ovvero  $\bar{T}_i$  e  $\bar{T}_e$ .

$$\bar{T}_i - \bar{T}_e = C_1 \ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)$$

$$C_1 = \frac{(\bar{T}_i - \bar{T}_e)}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)}$$

Sostituiamo ora  $C_1$  nelle prime equazione sopra, e otteniamo  $C_2$ .

$$C_2 = \bar{T}_i - \frac{(\bar{T}_i - \bar{T}_e)}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)} \ln(r_i)$$

$$T = C_1 \ln r + C_2$$

Quindi ovvero che:

$$T = \frac{\bar{T}_i - \bar{T}_e}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)} \ln(r) + \bar{T}_i - \frac{\bar{T}_i - \bar{T}_e}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)} \ln(r_i)$$

Ma può essere scritta anche come:

$$T = \bar{T}_i + \frac{\bar{T}_i - \bar{T}_e}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)} \ln \left( \frac{r}{r_i} \right)$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{(\bar{T}_i - \bar{T}_e)}{\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right)} \cdot \frac{1}{r}$$

Questo per quanto riguarda la temperatura, ora invece andiamo a vedere il flusso scambiato:

$l$  = lunghezza cilindro

$$\phi = -\lambda A \frac{dT}{dr} = \lambda \cancel{v} \pi r l \frac{1}{r} \frac{(\bar{T}_i - \bar{T}_e)}{\ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right)}$$

Stiamo calcolando  $\phi$  al perimetro doppio  $r$  e poiché abbiamo ipotesi di stazionarietà,  $\phi$  è costante per tutti gli  $r$ .

Cioè il flusso sarà uguale per tutte le circonferenze del tubo considerate.

Proprietà dei logaritmi  $\rightarrow -\ln \left( \frac{r_i}{r_e} \right) = \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-1} = \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right)$

Faccendo la somma di tutte le resistenze, abbiamo:

$$\phi = \frac{T_{pi} - T_{pe}}{\frac{1}{A_i \alpha_i} + \sum_{l=1}^{NS} \frac{\rho_{ul} \left( \frac{r_{i+l}}{r_i} \right)}{2\pi \lambda_l l} + \frac{1}{A_e \alpha_e}} \quad NS = \text{numero strati}$$

Raccogliendo le superficie interne diventa in forma compatta:

$$\phi = A_i U_i \Delta T$$

Dove:

$$A_i U_i = \frac{1}{\frac{1}{A_i \alpha_i} + \sum_j \frac{\rho_{ul} \left( \frac{r_{j+1}}{r_j} \right)}{2\pi \lambda_j l} + \frac{1}{A_e \alpha_e}}$$

$$= A_i \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + A_i \sum_j \frac{\rho_{ul} \left( \frac{r_{j+1}}{r_j} \right)}{2\pi \lambda_j l} + \frac{A_i}{A_e \alpha_e}}$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \cancel{2\pi} r_i l \sum_j \frac{\rho_{ul} \left( \frac{r_{j+1}}{r_j} \right)}{\cancel{2\pi} \lambda_j l} + \frac{\cancel{2\pi} r_i l}{\cancel{2\pi} r_e l \alpha_e}}$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + r_i \sum_j \frac{\rho_{ul} \left( \frac{r_{j+1}}{r_j} \right)}{\lambda_j} + \frac{r_i}{r_e \alpha_e}}$$

TRASMITTANZA

L'equazione che dobbiamo risolvere è la seguente:

$$\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + q_v = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{q_v}{\lambda} r$$

$$r \frac{dT}{dr} = - \frac{q_v}{2\lambda} r^2 + C_1 \frac{dT}{dr} = - \frac{q_v}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r}$$

Quindi l'integrale della temperatura sarà:

$$T = - \frac{q_v}{4\lambda} r^2 - C_1 \ln r + C_2$$

Che sotto così non va bene perché  $\ln(0) = -\infty$ , quindi fisicamente è impossibile che vada a  $-\infty$ .  
Imponendo le condizioni al contorno otteniamo:

$$\dot{Q} = -\lambda A_e \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r_e} = \pi r_e^2 l q_v$$

$$-\lambda 2\pi r_e l \left( - \frac{q_v}{2\lambda} r_e + \frac{C_1}{r_e} \right) = \pi r_e^2 l q_v$$

$$\cancel{\pi r_e^2 l q_v} - 2\pi \lambda l C_1 = \cancel{\pi r_e^2 l q_v} \rightarrow C_1 = 0$$

$$T_e = - \frac{q_v}{4\lambda} r_e^2 + C_2$$

$$C_2 = T_e + \frac{q_v}{4\lambda} r_e^2$$

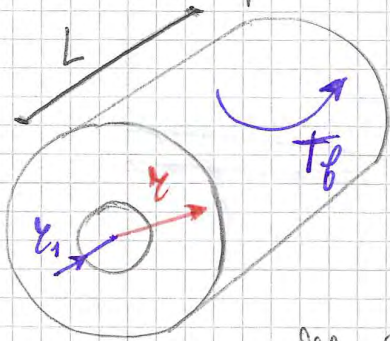
Quindi:

$$T = - \frac{q_v}{4\lambda} r^2 + T_e + \frac{q_v}{4\lambda} r_e^2$$

$$T = T_e + \frac{q_v}{4\lambda} (r_e^2 - r^2)$$

## IL RAGGIO CRITICO NEL CILINDRO CAVO

Si prende in considerazione un cilindro cavo con temperatura imposta sulla parete interna, ma che sulla parete esterna scambia calore per convezione con un fluido.



Si vuole studiare come varia il flusso in funzione dello spessore del materiale, il che è lo stesso che dire di varare del raggio esterno.

Il flusso termico totale, espresso in funzione delle somme delle resistenze termica conduttiva nel cilindro e di quelle convettive, tra parete esterna e fluido, è:

$$\dot{Q}(r) = [R_{cd} + R_{cv}]^{-1} (T_1 - T_f)$$

Resistenza termica conduttiva:  $R_{cd} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$

Resistenza termica convettiva:  $R_{cv} = \frac{1}{\alpha 2\pi r L}$

Le derivate prime e seconde delle resistenze totali rispetto al raggio  $r$  sono:

$$\frac{dR_{TOT}}{dr} = \dot{R}_{TOT} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \left( \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\alpha \cdot r^2} \right)$$

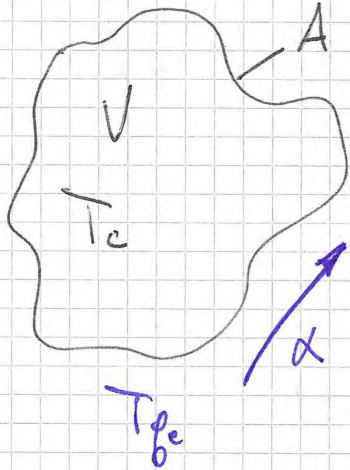
$$\frac{d^2 R_{TOT}}{dr^2} = \ddot{R}_{TOT} = \frac{1}{2\pi L \cdot \lambda} \left( \frac{2\lambda}{\alpha r^3} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Si dice **Raggio Critico**, " $r_c$ ", quello per cui le derivate prime si annulla. Si constata che la derivata seconda è positiva per cui in quel punto si trova un **minimo delle resistenze termiche** ed un **massimo del flusso**.

$$\dot{R}_{TOT} = 0 \Rightarrow r_c = \frac{\lambda}{\alpha} \Rightarrow \ddot{R}_{TOT} = \frac{\alpha^2}{\lambda^3} > 0$$

## TRANSITORIO TERMICO

Se rimuovo l'ipotesi di stazionarietà nelle trasmissione del flusso termico, mi trovo di fronte a fenomeni transitori che sono anche molto difficili da studiare. Consideriamo a tal proposito un corpo, evidenziando una superficie di controllo  $A$  che abbia una certa densità  $\rho$  e sia sottoposto a una certa temperatura del fluido esterno:



$\rho$  = densità

$c$  = calore specifico

$\lambda$  = costante

$$e = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$Bi$  = numero di Biot

Andiamo a considerare dei rapporti adimensionati

$$Bi = \frac{\text{resistenza conduttiva } (R_{cd})}{\text{resistenza convettiva } (R_{cv})} = \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha L}{\lambda}$$

dove le unità di misura delle grandezze sono

$$[\alpha] = \frac{W}{m^2 K}$$

$$[L] = m$$

$$[\lambda] = \frac{W}{m K}$$

Quindi il numero di Biot sarà un numero adimensionato.

$$Bi = \frac{L \alpha}{\lambda}$$

Il corpo posso considerarlo omogeneo solo se la resistenza dovuta alla conduzione ( $R_{cd}$ ) è molto minore di quella dovuta alla convezione ( $R_{cv}$ ), e quindi solo se il numero di Biot è molto piccolo.

Quindi ponendo  $\tau_c$  uguale alla seguente espressione avremo:

$$\frac{\rho V c}{\lambda A} = \tau_c$$

Integrando avremo:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t \frac{\lambda A}{\rho V c} dt$$

$$\ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = - \frac{\lambda A}{\rho V c} t$$

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\lambda A}{\rho V c} t}$$

$$\theta_0 = T_0 - T_p$$

E in fine avremo:

$$\frac{\lambda A}{\rho V c} t = \frac{\lambda}{\rho \frac{V}{A} c} t = \frac{\lambda}{\rho L c} t = \frac{\lambda L}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\rho L^2 c} t$$

dove:  $\frac{\lambda L}{\lambda}$  numero di Biot ( $Bi$ )

$\frac{\lambda}{\rho L^2 c} t$  numero di Fourier ( $Fo$ )

E scrivendo  $\theta$  secondo questi coefficienti avremo:

$$\theta = \theta_0 e^{-Bi Fo}$$

$$Bi = \frac{\lambda L}{\lambda}$$

$$Fo = \frac{\lambda}{\rho L^2 c} t$$



Per lo studio di questo fenomeno, viene introdotto anche un altro coefficiente detto coefficiente di Reynolds, dovuto al valore critico del pannello tra moti laminari e turbolenti del fluido.

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$$

NUMERO DI REYNOLDS

Però il numero  $Re$  può essere anche visto come:

$$Re = \frac{\text{Forza di inerzia}}{\text{Forza viscosa}}$$

Se sono su una lastra piana si ha il pannello a regime turbolento se  $Re > 10^5$ .

Mentre in un condotto si passa a regime turbolento se il numero  $Re > 2500$ .

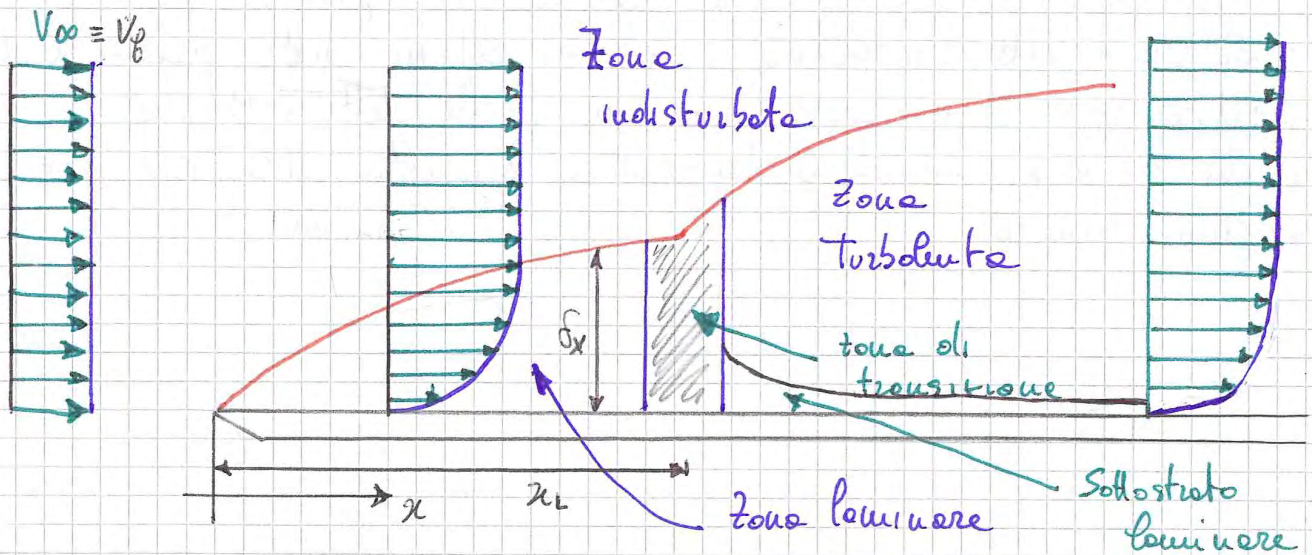
La convezione si dice forzata se ho un sistema che spinge il fluido, mentre si dice naturale se il movimento del fluido è dovuto alle disomogeneità di temperatura e densità del fluido.

La convezione è esterna se il moto non è confinato mentre è detta interna se siamo di fronte a moto confinato.

Ricordiamo comunque che se siamo di fronte a  $Re$  piccolo, siamo di fronte a regime laminare, invece se siamo di fronte a  $Re$  grande il regime è turbolento.

## DEFUSSO ESTERNO SU LASTRA PIANA

Prendiamo una lastra piana e schematizziamo l'andamento delle velocità del fluido a contatto con la lastra:



Possiamo notare che le velocità vicino la lastra è zero, ma non meno che ci allontaniamo dalla lastra le velocità aumentano, fino a quando non ritorna a  $V_{\infty}$ .

Indichiamo con  $\delta_x$  lo strato per cui vale:

$$\delta_x \Rightarrow V \leq 0,99 V_{\infty}$$

Se pensiamo di vettori velocità, dire che sono paralleli nel profilo significa considerare solo la componente  $V_x$  del vettore

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

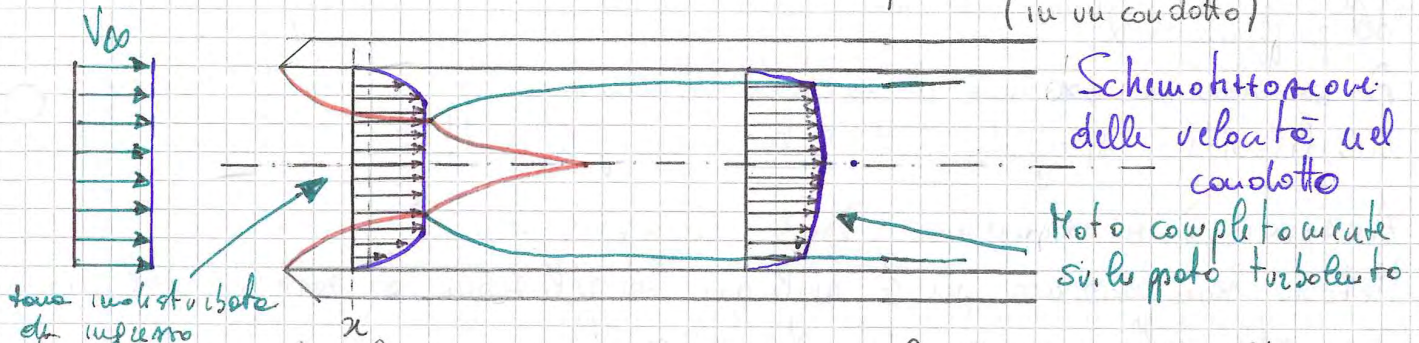
Quindi dire che si tratta di velocità parallele significa parlare di ~~moto~~ <sup>si, componente</sup> ~~laminare~~ <sup>il fluido</sup>. Nella zona di transizione non siamo in grado di dire come nel profilo è indicata anche una zona di transizione tra moto laminare e moto turbolento. La turbolenza dobbiamo pensarla come un valore medio di  $V_x$  più un valore istantaneo diverso da  $V_x$ .

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$(V_x + V_x')$$

La componente  $V_x'$  deve essere vista e lungo termine come una componente nulla, infatti se andiamo a sommare i valori istantanei per un tempo più o meno lungo avremo risultante nulla.

Possiamo ora studiare il caso di moto esterno e quello di moto interno (in un condotto)



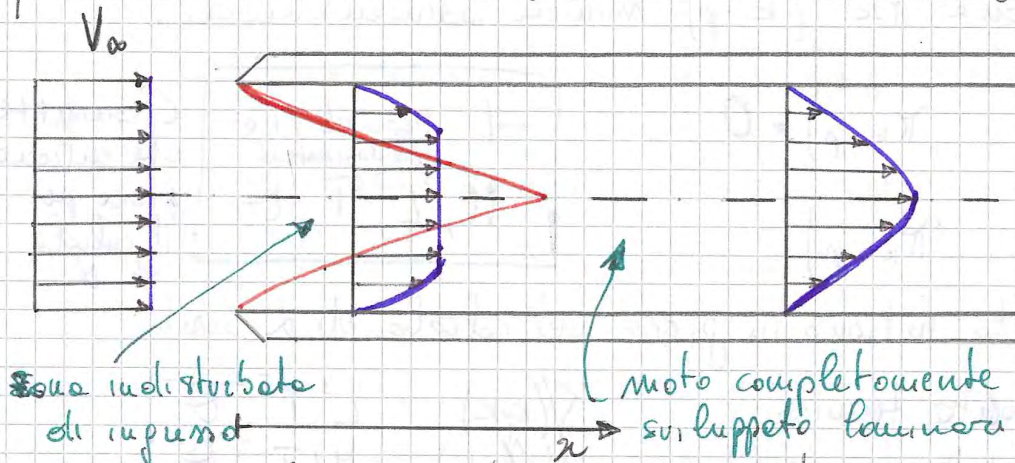
Supponiamo che la sezione abbia raggio  $R$ , e quindi l'area sarà  $\rightarrow [A = \pi R^2]$  e la portata sarà data da:

$$Q_{x=0} = \rho V_0 \pi R^2 \quad [\text{in posizione } x=0]$$

Indichiamo con  $x=0$  l'ingresso del condotto e con  $V_m$  le velocità medie. Nel punto  $x$  invece avrà una portata che sarà pari a:

$$Q_x = \rho \pi R^2 V_m \quad [\text{Nelle posizioni } x \text{ indicate in figura}]$$

Potremmo avere un caso in cui il condotto abbia un raggio tale da impedire la trasformazione del moto laminare in turbolento, e quindi in tale condotto le velocità saranno solo laminaari.



Quando si parla di moto completamente sviluppato, significa che lo strato limite ha raggiunto lo strato medio del condotto. Cioè quando nel condotto il moto è sempre laminare e non ha avuto lo spazio in senso diametrico di diventare turbolento.

L'ordine di grandezza per cui non è più completamente sviluppato laminare è circa 10 volte il diametro del condotto.

Allora il primo numero adimensionale sarà:

$$\rightarrow \pi_1 = \alpha \cdot D^{a_1} \cdot \lambda^{b_1} \cdot v^{c_1} \cdot \rho^{d_1}$$

Il secondo numero adimensionale è:

$$\rightarrow \pi_2 = v_0 \cdot D^{a_2} \cdot \lambda^{b_2} \cdot \rho^{c_2}$$

il terzo

$$\rightarrow \pi_3 = c_p \cdot D^{a_3} \cdot \lambda^{b_3} \cdot v^{c_3} \cdot \rho^{d_3}$$

Partiamo da  $\pi_1$  e facciamo l'analisi dimensionale:

$$\pi_1 = M T^{-3} \Theta^{-1} \cdot L^{a_1} \cdot (M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot \Theta^{-1})^{b_1} \cdot (L^2 T^{-1})^{c_1} (M L^{-3})^{d_1}$$

$$\pi_1 = M^{(1+b_1+d_1)} \cdot T^{(-3-3b_1-c_1)} \cdot \Theta^{(-1-b_1)} \cdot L^{(a_1+b_1+2c_1-3d_1)}$$

Affinché  $\pi_1$  sia adimensionale, gli esponenti delle potenze devono essere nulli, e quindi otteniamo pertanto un sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} 1+b_1+d_1=0 & b_1=-1 \\ -3-3b_1-c_1=0 & c_1=0 \\ -1-b_1=0 & d_1=0 \\ a_1+b_1+2c_1+3d_1=0 & a_1=1 \end{cases}$$

Quindi  $\pi_1$  sarà dato da:

$$\pi_1 = \frac{\alpha D}{\lambda} = Nu$$

Numero di Nusselt

Analogamente si fa per trovare  $\pi_2$  e  $\pi_3$ ; ottenendo:

$$\pi_2 = \frac{v_0 D}{\nu} = Re$$

Numero di Reynolds

$$\pi_3 = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} = Pr$$

Numero di Prandtl

Prendendo gli integrali ovvero:

$$G_h = \int_0^R h(r, z) \rho v(r, z) 2\pi r dr$$

$$G_h = 2\pi r \rho \int_0^R h(r) \cdot v(r) r dr$$

Se torniamo alla temperatura media otteniamo:

$$T_m = \frac{G_h}{\rho G} = \frac{2\pi r \rho}{\rho \rho v_m \pi R^2} \int_0^R h(r) v(r) r dr$$

Quindi quando parliamo di velocità media e temperatura media in un condotto ci riferiamo a questi valori.

## METODI DI SIMILITUDINE

### Calcolo di $\alpha$

Il nostro problema è dovuto al fatto che voglio poter ricavare il valore di  $\alpha$ . Per poterlo fare devo conoscere il numero di Nusselt che è dato dalle seguenti formule.

$$Nu = A Re^m Pe^m + B$$

Dovrebbe essere  $\bar{Nu}$

A e B sono delle costanti.

Per calcolare Nusselt devo sapere sia Reynolds che Prandtl. Una volta ricavato il numero di Nusselt posso ricavare  $\alpha$  dalle seguenti relazioni:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda_f} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda_f Nu}{L}$$

### Deflusso laminare

La relazione del numero di Nusselt cambia e secondo del caso in cui ci troviamo. Ad esempio se siamo in deflusso laminare ovvero che:

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pe_x^{1/3}$$

Quindi la differenza di pressione sarà data da:

$$(p_1 - p_2) = f \frac{L}{D} \frac{v_{\text{m}}^2}{2}$$

Se applichiamo il teorema dell'energia cinetica al condotto possiamo scrivere che:

$$\int_{=0}^L v \, dp + \int v \, dp + \frac{\Delta e_c}{=0} + \frac{\Delta e_p}{=0} = 0$$

$$h_e = - \int v \, dp = - v \int dp$$

Abbiamo ipotizzato fuori il volume  $v$  purché consideriamo il fluido come se fosse incompressibile. Sapendo che:

$$v = \frac{1}{\rho} \quad \text{e sostituendo nella equazione otteniamo:}$$

$$h_e = - \frac{1}{\rho} \Delta p \Rightarrow \Delta p = - \rho h_e \quad h_e = \frac{f L}{D} \frac{v^2}{2}$$

Da questo scatto punto si può dire che

$$p_1 - p_2 = \rho h_e = \rho \left[ \frac{f L}{D} \frac{v_{\text{m}}^2}{2} \right]$$

Da ciò si nota che la differenza di pressione è dovuta all'attrito del fluido.

### Moto laminare in un condotto

Possiamo dire di trovarci in moto laminare in un condotto se

$$Re_D \approx 2500$$

Definendo la rugosità delle pareti come  $\epsilon = \frac{e}{D}$  con "e" delle rugosità assolute, il valore del coefficiente di attrito sarà:

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Il numero di Nusselt dipenderà se il flusso è costante o se la temperatura delle pareti è costante, dalle seguenti espressioni:

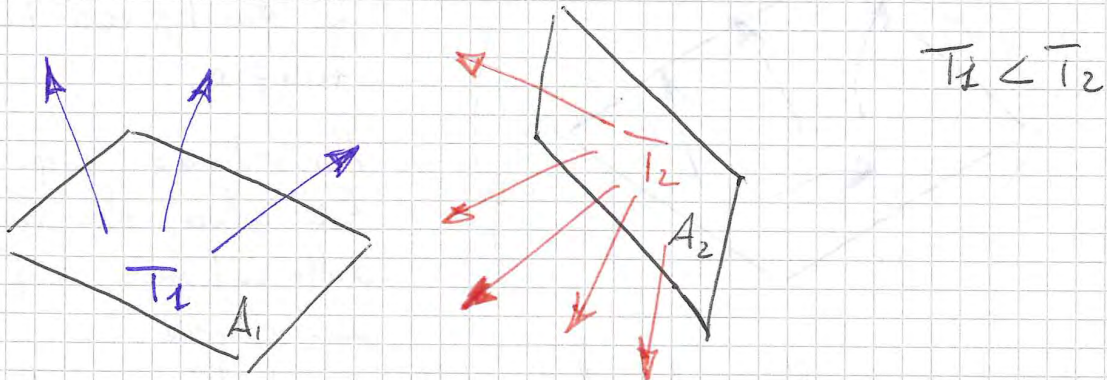
# IRRAGGIAMENTO

L'irraggiamento è il modo di scambio del calore tra i corpi grazie a dei quanti di luce e quindi, grazie a onde elettromagnetiche. I quanti di luce sono detti fotoni, e ogni fotone trasporta una ben definita quantità di energia per cui:

$$E_f = h \cdot f$$

Qualsiasi corpo emette onde elettromagnetiche, per il solo fatto di trovarsi a una certa temperatura e lo scambio con i corpi che lo circondano.  $V \rightarrow \text{temp.} > 0 \text{ Kelvin}$

Il fenomeno della radiazione è l'unico fenomeno che sembra smentire il II principio della termodinamica, ma in realtà se uno dei due corpi è a temperatura maggiore, avrà dato molto più energia all'altro. Facciamo un esempio. Prendiamo due pareti a diverse temperature

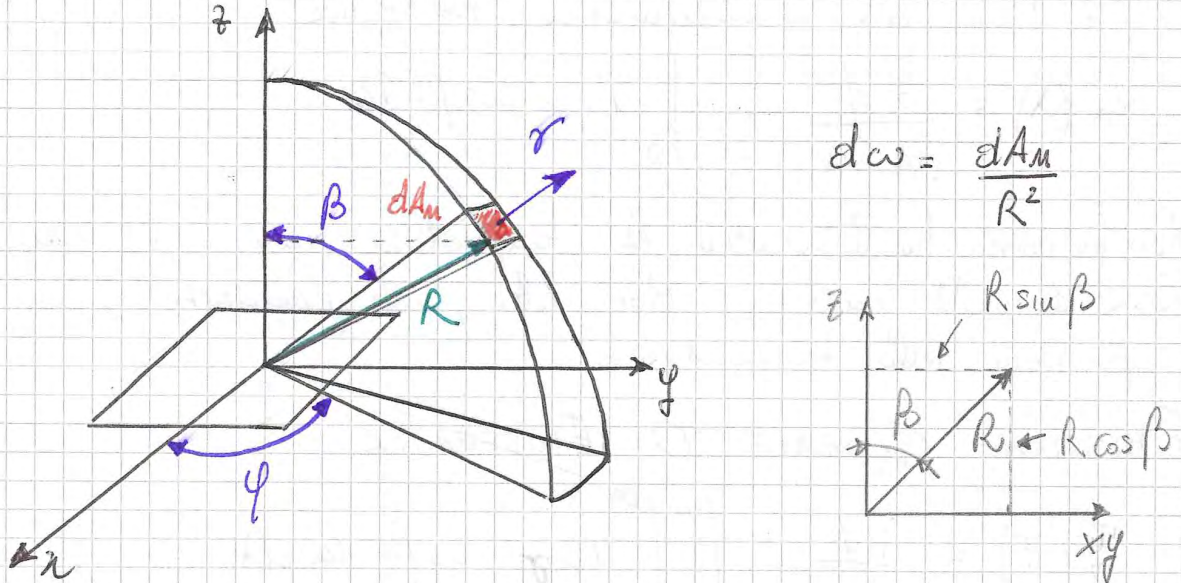


La superficie 1 anche se a temperatura minore riesce a inviare energia alla superficie 2 che è a temperatura maggiore, però nella realtà la quantità che invia di energia è molto minore di quella che riceve, cioè il bilancio tra le energie è nullo.

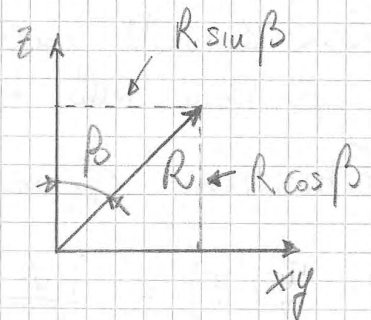
Come più detto l'irraggiamento realizza il trasferimento di energia termica tra due corpi tramite le onde elettromagnetiche. Lo scambio termico avviene in 3 direzioni quindi useremo negli integrali le coordinate sferiche:

## ANGOLO SOLIDO

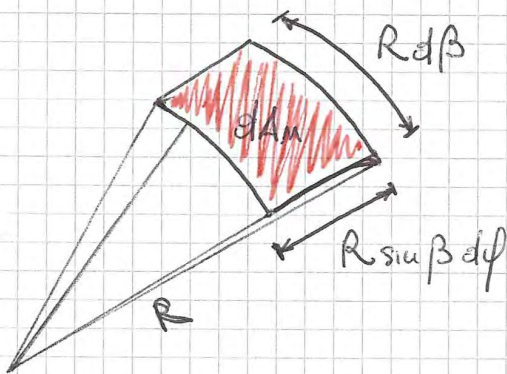
L'angolo solido è lo spazio compreso all'interno di un fascio di rette. Si esprime come la superficie intercettata dal fascio di rette diviso il raggio. Vediamo per chiarire le idee le seguenti figure:



$$d\omega = \frac{dA_m}{R^2}$$



Facciamo un ingrandimento di  $dA_m$  e vediamo che:



L'area intercettata può essere espressa in funzione di due angoli  $\beta$  e  $\phi$ .

$$dA_m = R d\beta R \sin \beta d\phi$$

Sostituendo in chiave

$$d\omega = \frac{R^2 \sin \beta d\beta d\phi}{R^2} = \sin \beta d\beta d\phi$$

## GRANDEZZE DIREZIONALI E VETTORIALI

**INTENSITA' MONOCROMATICA DIREZIONALE:** mi dice quanto energia trasmette la mia superficie per una determinata lunghezza d'onda. Viene definita come:

$$i_{r,r}(\beta, \phi, \lambda) = \frac{d^3 \phi}{dA \cos \beta d\lambda d\omega}$$

ho differenziato il flusso sia secondo la lunghezza d'onda che secondo l'angolo solido.



Allo stesso modo possiamo differenziare le radiazioni in a denti,  
e possiamo quindi definire oltre quella pianetta di riparo  
indicate con epice <sup>(i)</sup> che indica pianetta "in a denti".

$$\begin{array}{ccc}
 i_{\lambda, \sigma}^{(i)} & I_{\sigma}^{(i)} & G_{\lambda} \\
 \frac{W}{m^2 m s} & \frac{W}{m^2 s} & \downarrow \\
 & & e_{\lambda}^{(i)} \frac{W}{m^3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & & \\
 \downarrow & & \\
 E^{(i)} & \frac{W}{m^3} &
 \end{array}$$

Come si comporta un materiale che emette in equal modo radiazioni  
in qualsiasi direzione. Tale fenomeno prende il nome di **Emissione  
diffusa** ed è caratterizzato da  $I_{\sigma} = \text{costante}$ .

$$e_{\lambda} = \int_{\Omega} i_{\lambda, \sigma} \cos \beta \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} i_{\lambda, \sigma} \cos \beta \sin \beta \, d\beta \, d\varphi$$

Se è indipendente dalla direzione allora sarà funzione di solo  $\lambda$  e  
quindi posso scrivere:

$$\begin{aligned}
 e_{\lambda} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} i_{\lambda, \sigma}(\lambda) \cos \beta \sin \beta \, d\beta = \\
 &= 2\pi i_{\lambda, \sigma} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \beta}{\varphi} \frac{d\varphi \beta}{\varphi} = 2\pi i_{\lambda, \sigma} \frac{1 - [\cos 2\beta]}{4} \Big|_0^{\pi} = \pi i_{\lambda, \sigma}
 \end{aligned}$$

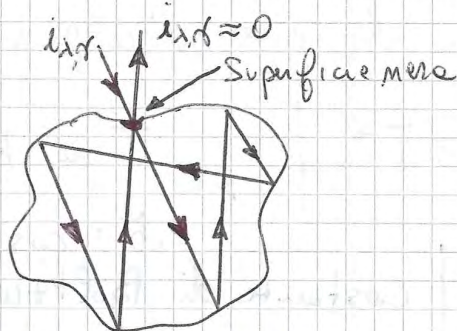
Quindi le due relazioni che caratterizzano l'emissione diffusa  
sono:

$$\boxed{e_{\lambda} = \pi i_{\lambda, \sigma}} \qquad \boxed{E = \pi I_{\sigma}}$$

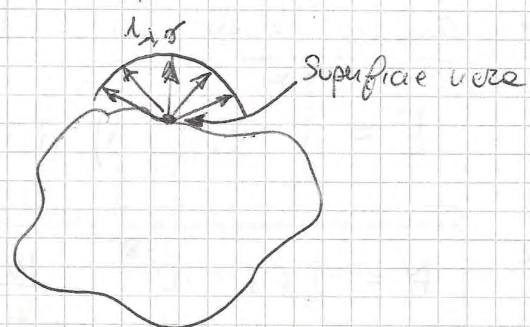
L'integrale tra 0 e  $2\pi$  perché emette energia termica solo verso  
l'esterno, quindi attraverso la semisfera.

## CORPO NERO

È un corpo ideale costituito protie e una cavità, ma il corpo nero non è la cavità, bensì la sua superficie. Il corpo nero ha un coefficiente di assorbimento per  $\epsilon = 1$ .  
 Ipotesiamo che ci sia un certo raggio che incide sulla una superficie e quindi arriva sulle pareti della cavità, questa energia viene per la gran parte assorbita e in piccole parte rimbalza su un'altra superficie, e così via rimbalzando fra una superficie e l'altra e ad ogni rimbalzo vi è un assorbimento, fino a quando non ci sembra che sia assorbita tutta. Quindi un corpo nero è un corpo che assorbe tutte le quantità di energia elettromagnetica incidente al corpo stesso.



Radiazione incidente



Radiazione emessa

Questo corpo ideale nasce da considerazioni teoriche e per questo riguarda le grandezze  $e_{\lambda, \nu}$  e  $I_{\lambda, \nu}$  dove:

$$e_{\lambda, \nu} = \frac{C_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{(C_2/\lambda T)} - 1}$$

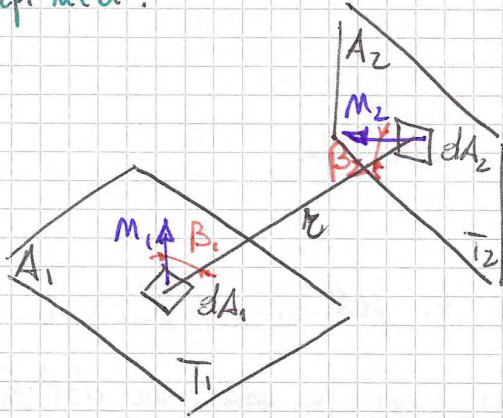
$C_1$  e  $C_2$  costanti

$$i_{\lambda, \nu} = \frac{e_{\lambda, \nu}}{\pi} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\pi [e^{(C_2/\lambda T)} - 1]}$$

# SCAMBIO TERMICO TRA SUPERFICI NERE

Prendo due superfici nere e vedo i flussi di calore che vengono scambiati:

Corpi neri:



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} ; \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{1 \rightarrow 2} - \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

Stazionaria

Temperature uniforme sulle superficie

$$I_r = \frac{\partial \Phi}{\partial A \cos \beta \partial \omega}$$

Con queste ipotesi cerchiamo di scrivere  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  e  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$

$$d\Phi_{1 \rightarrow 2} = I_{r1,m} dA_1 \cos \beta_1 \frac{dA_2 \cos \beta_2}{r^2}$$

Posso dire che

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos \beta_2}{r^2}$$

Integrando si ottiene il valore:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1} \int_{A_2} I_{r1,m} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 dA_1$$

Il fattore di forma è la frazione di energia emessa dalla superficie di un corpo che va ad incidere sull'altro corpo. È un numero adimensionale compreso tra 0 e 1  
 $0 \leq F_{ij} \leq 1$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = I_{r1,m} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 dA_1$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{1m}}{\pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 dA_1$$

Posso definire **fattore di forma** il seguente:

$$F_{12} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{\Phi_1}$$

dipende solo dalle geometrie del corpo e non dipende dal materiale

$$F_{12} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{A_1 E_{1m}} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

Posso confrontare il comportamento delle superficie reali rispetto a quelle nere, introducendo il concetto di emissività:

**Emissività:** emissione del corpo reale rispetto a quella del corpo nero.

$$\epsilon_{i,\sigma} = \frac{i_{\lambda,\sigma}}{i_{\lambda,\sigma n}}$$

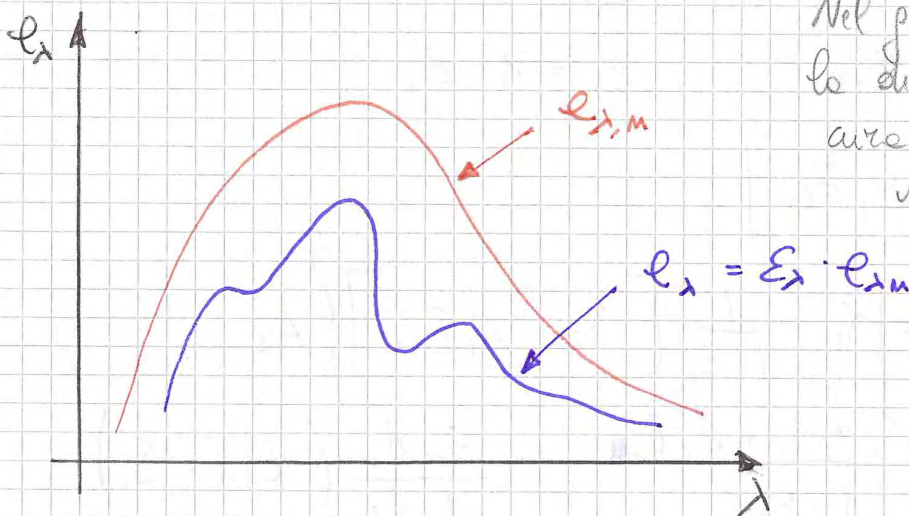
$$\epsilon_{\sigma} = \frac{I_{\sigma}}{I_{\sigma n}}$$

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{e_{\lambda}}{e_{\lambda n}}$$

$$\epsilon = \frac{E}{E_n}$$

Equazioni globali

Il corpo reale ha per ogni lunghezza d'onda un certo valore di emissività.



Nel grafico è rappresentate la differenza tra una curva del corpo nero e una curva reale.

Poiché non abbiamo a che fare con corpi reali, in pratica vengono trattati in modo troppo complesso, per semplificare le cose parliamo di **Corpo Grigio**:

$$\epsilon_{i,\sigma}(\lambda, \beta, \varphi) = \epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\lambda} = \epsilon$$

Introduciamo ora una legge chiamata **Legge di Kirchhoff** per la quale

$$\epsilon_{\lambda,\sigma} = \rho_{\lambda,\sigma} \quad \text{per il corpo nero,}$$

E quindi per il nostro corpo grigio avremo:

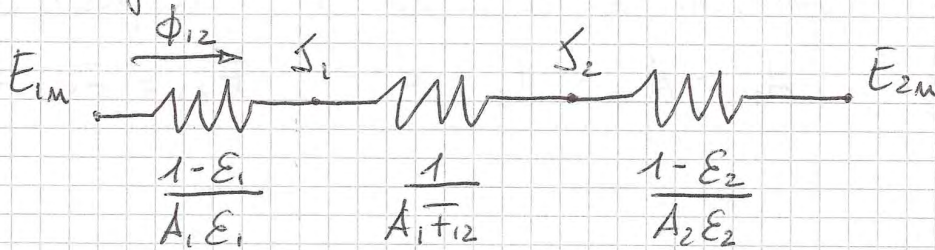
$$\epsilon = \rho \quad \epsilon \leq 1$$

$$J_1 - J_2 = \phi_{net} \frac{1}{A_1 F_{12}} \rightarrow R_{12}$$

Il pedice  $m$  sta ad indicare che si tratta del corpo nero.

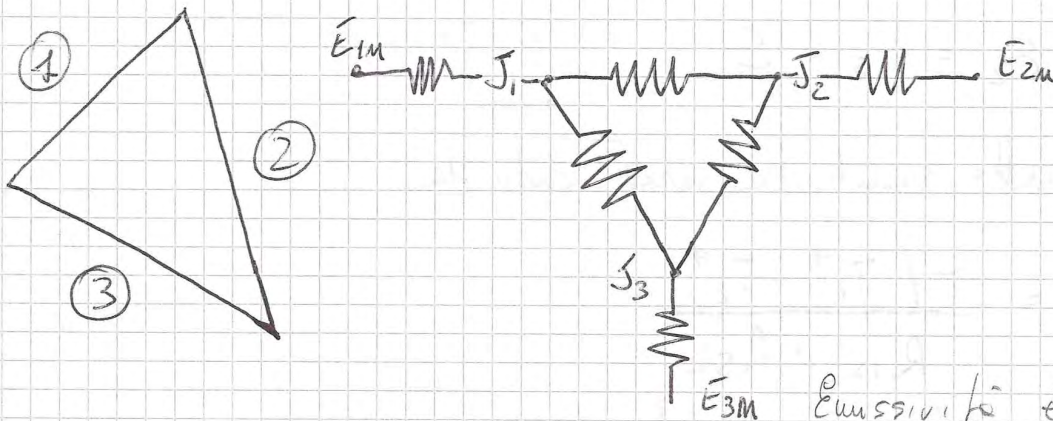
$$J_2 - E_{2m} = \phi_{net} \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \epsilon_2} \rightarrow R_2$$

Per analogie con il sistema elettrico ovvero il seguente:



$$\phi_{12} = \frac{E_{1m} - E_{2m}}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}} \rightarrow \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

Immaginiamo di avere ora tre superfici, autousoa con l'analogia del caso elettrico ovvero:

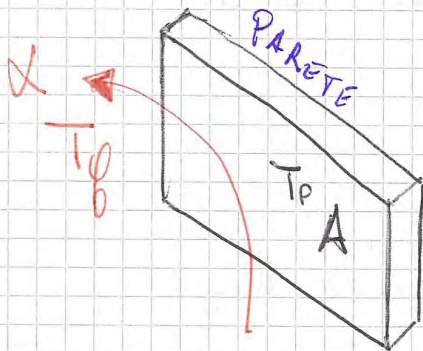


Emissività è collegato con il corpo nero.

# ALETTE E SUPERFICI ESTESE

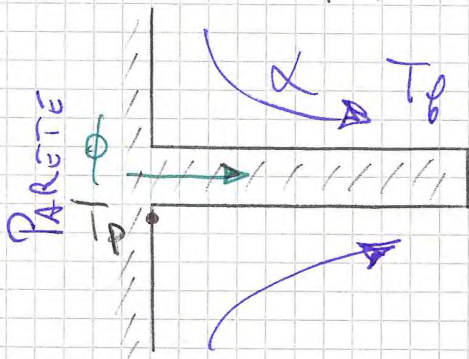
Le alette sono dispositivi che consentono di incrementare il flusso termico disperso verso l'ambiente circostante attraverso l'aumento delle superficie dispendente.

Abbiamo detto che per convezione lo scambio di potenza termica è dovuto alla relazione:

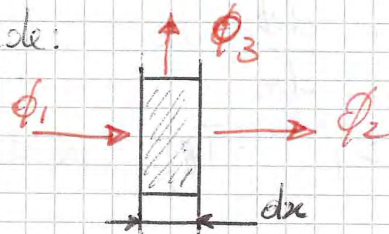


$$\phi = \alpha A (T_p - T_0)$$

Vediamo il profilo di una singola alette in sezione



Prendiamo un tratto infinitesimo della alette e cerchiamo di capire cosa succede:



La parete scambia un flusso termico con le parti dell'alette, e man mano che si allontana dalla parete verso il fluido, la temperatura diminuisce avvicinandosi <sup>sempre</sup> alla temperatura del fluido. Tale trasmissione di flusso all'interno dell'alette avviene per conduzione, e quindi bisogna scegliere per la costruzione della alette un materiale che sia buon conduttore.

Come si vede nel disegno, ci sarà un flusso conduttivo entrante e uno usante e, per tali flussi, ci sarà una differenza di flusso scambiato per convezione. Prima di procedere però a fare delle ipotesi. Consideriamo la conduttività del metallo costante, il fluido è a temperatura costante, lo spessore dell'alette è trascurabile rispetto alle altre dimensioni, la temperatura dell'alette varia solamente lungo l'asse delle x e il problema si studia in condizioni stazionarie.

Questa espressione differenziale scritta descrive la legge della variazione del flusso termico all'interno dell'oggetto

Però scritta in questo modo non è tanto buona da risolvere e per questo dobbiamo fare delle semplificazioni, e ricondurci ad un caso un po' più semplice.

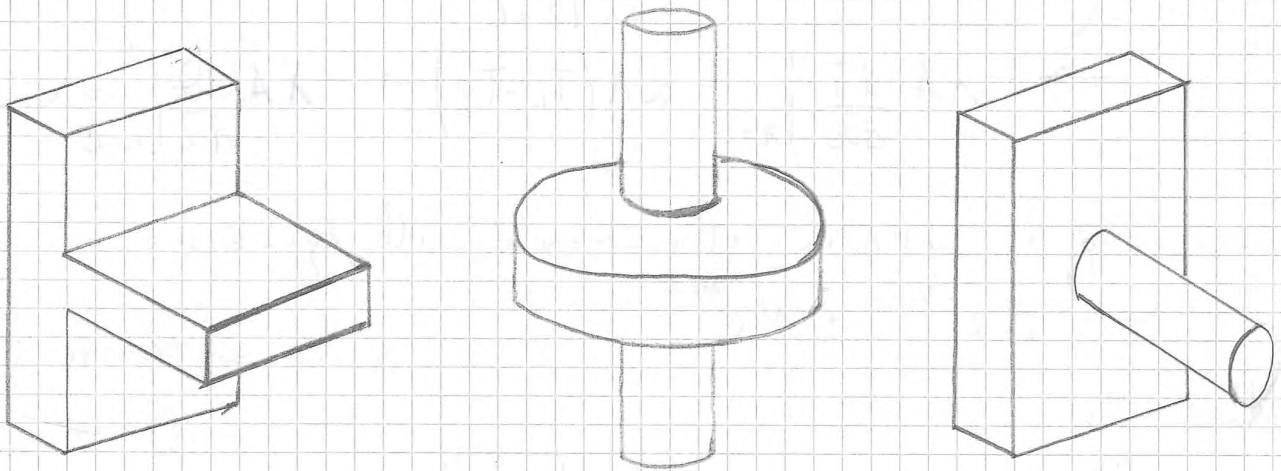
$P =$  perimetro

Poniamo:

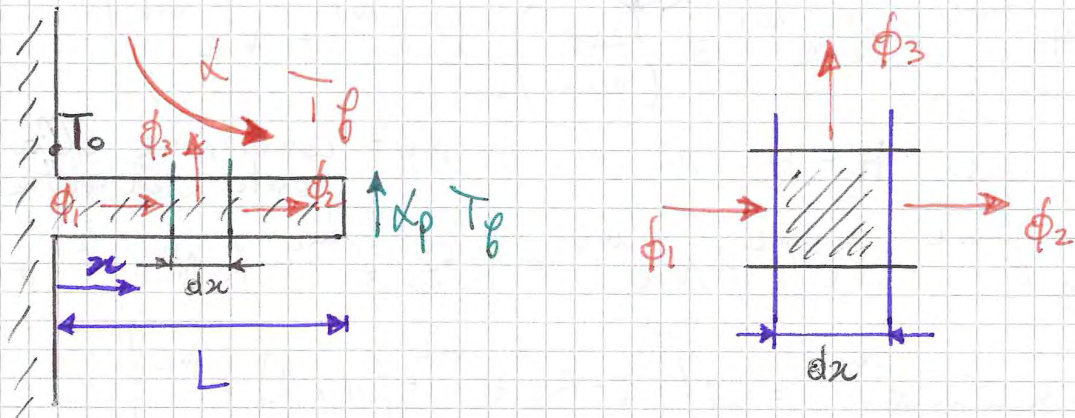
$$A(x) = A = \text{costante} \quad \text{e} \quad dS = P dx$$

$\hookrightarrow$  costante

Esempi di oggetti a geometria costante.



Prendiamo in considerazione il caso seguente e cerchiamo di studiarlo analiticamente



Scriviamo l'equazione differenziale per tale oggetto:

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda A} Q = 0$$

Indichiamo con  $m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda A}}$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left[ \frac{(1+R)e^{mL} e^{-mx}}{(1-R)e^{-mL} + (1+R)e^{mL}} + \frac{(1-R)e^{-mL} e^{mx}}{(1-R)e^{-mL} + (1+R)e^{mL}} \right]$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left[ \frac{(1+R)e^{m(L-x)} + (1-R)e^{-m(L-x)}}{(1-R)e^{-mL} + (1+R)e^{mL}} \right]$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)} + R(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{e^{-mL} + e^{mL} + R(e^{mL} - e^{-mL})}$$

Ricordando le funzioni iperboliche otteniamo:

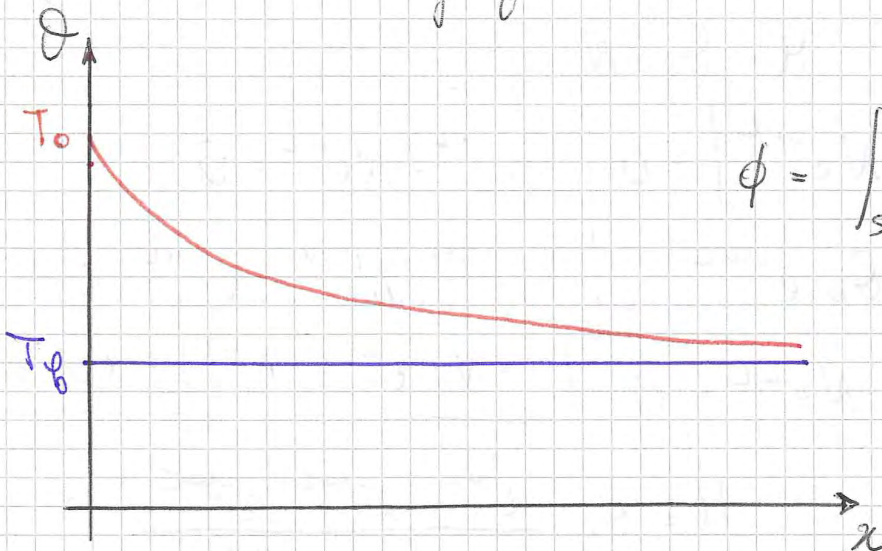
$$\rightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow \text{coseno iperbolico}$$

$$\rightarrow \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow \text{seno iperbolico}$$

La funzione della temperatura nell'intera asta:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh[m(L-x)] + R \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + R \sinh(mL)}$$

Vediamo su un grafico come evolve  $\vartheta = (T_0 - T_\theta)$



$$\phi = \int_s x \underbrace{(T - T_\theta)}_{\vartheta} ds$$

L'integrale di  $\phi$  scritto in questo modo, (sostituendo  $\vartheta$ ) è molto difficile, ma può essere semplificato nel seguente modo:



$$Q = Q_0 \frac{e^{mL} e^{-mL} + e^{-mL} e^{mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} = Q_0 \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$Q = Q_0 \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

La formula appena scritta è molto più semplificata di quella di prima, e comunque ci sono ancora altre semplificazioni. Vediamo il caso di oblette infinite (oblette talmente lunghe e sottili da essere considerate infinite).  
 Suppongo le seguenti condizioni al contorno:

$$Q_0 = M + N \quad M = Q_0 - N$$

$$CC. \begin{cases} x = 0 \Rightarrow Q = Q_0 = T_0 - T_f \\ x = L \Rightarrow Q = Q_L = 0 \quad T_L = T_f \end{cases}$$

$$Q_0 = M + N \quad M = Q_0 - N$$

$$Q_L = M e^{-mL} + N e^{mL} = 0$$

$$Q_0 e^{-mL} - N e^{-mL} + N e^{mL} = 0 \Rightarrow$$

$$N = Q_0 \frac{e^{-mL}}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

$$M = Q_0 \frac{e^{-mL} - e^{mL} - e^{-mL}}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

$$Q = Q_0 \frac{-e^{mL} e^{-mx} + e^{-mL} e^{mx}}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

Pero se abbiamo che

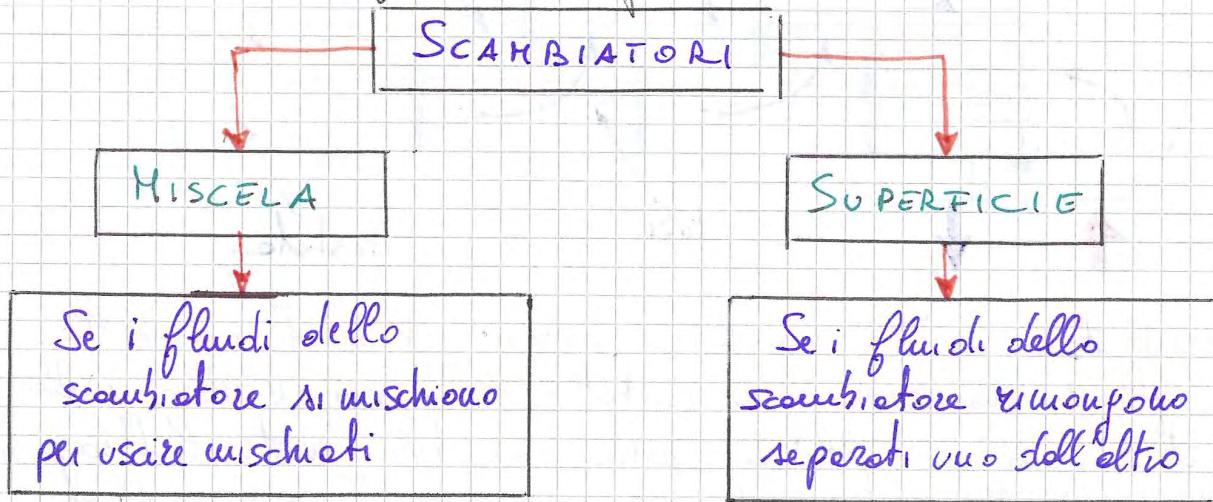
$$L \rightarrow \infty \quad Q = Q_0 e^{-mx}$$

Se introduco l'oblette accanto la superficie che scambia calore e questo è un vantaggio, però diminuisce la temperatura massima che aumenta le lampette e questo è uno svantaggio.  
 Dato che il costo di lavorazione delle oblette è costante bisogna vedere se l'introduzione delle oblette ha portato ad un reale miglioramento. Per fare questo si introduce il concetto di rendimento di un'oblette che è il rapporto tra il flusso effettivamente scambiato e quello che si potrebbe scambiare se tutte l'oblette si trovano alla temperatura della base  $Q_0$ .

# SCAMBIATORI DI CALORE

Sono dei dispositivi che consentono di scambiare energia termica tra due o più fluidi che si trovano a temperature differenti uno dall'altro.

Vediamo una classificazione degli scambiatori:



Gli scambiatori possono essere anche classificati in base a:

- **COMPATTEZZA**: se il rapporto tra superficie di scambio  $C$  è maggiore o minore di  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$ .  
 Effetti si danno

**COMPATTI**:  $C > 700 \text{ m}^2/\text{m}^3$

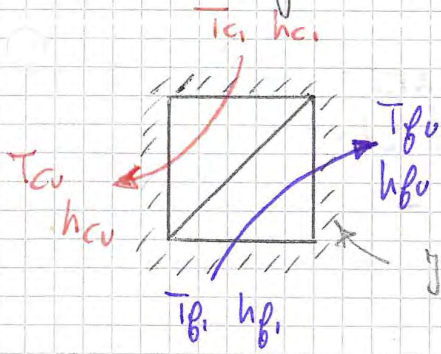
**NON COMPATTI**:  $C < 700 \text{ m}^2/\text{m}^3$

- **DEFLUSSO**: può essere miscelato se nel condotto si genera una convezione naturale del fluido.

- **TIPO DI COSTRUZIONE**: Tubolare, a piastre, superficie estesa, a pinnacoli

- **MECCANISMO DI SCAMBIO TERMICO**:  
 Convezione monofase su entrambi i lati;  
 Convezione bifase su entrambi i lati;  
 Convezione monofase su un lato e bifase sull'altro;  
 Convezione e radiazione

Una rappresentazione schematica di uno scambiatore potrebbe essere la seguente (si tratta di uno scambiatore a superficie):

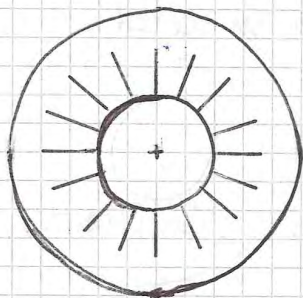


$T_{ci}, h_{ci}$  : temperatura ed entalpia fluido caldo in ingresso

$T_{fi}, h_{fi}$  : temperatura ed entalpia fluido freddo in ingresso

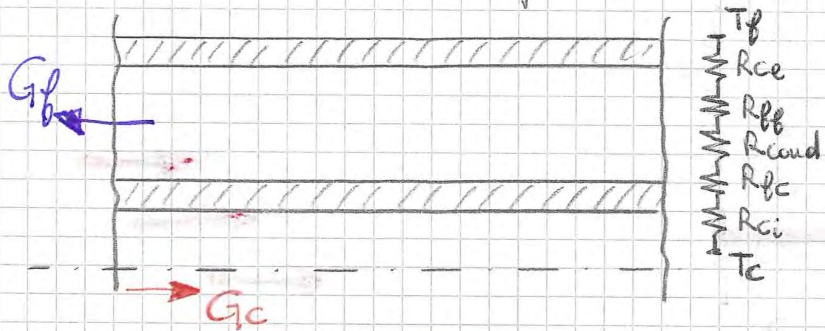
Il sys. dovrebbe essere adiabatico

Molte volte possiamo trovare sui tubi degli scambiatori, delle alette che servono a scambiare meglio il calore, ad esempio come:



Il alimetro interno è dotato di alette, invece quello più esterno ne è privo.

Possiamo ora schematizzare gli scambiatori nel seguente modo:



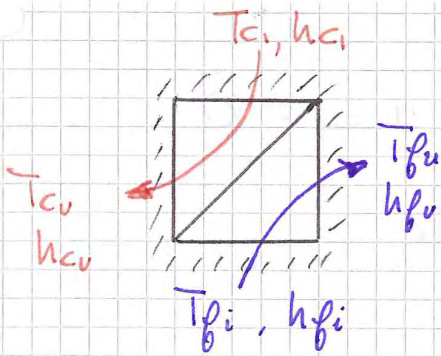
$R_c$  : sono resistenze convettive dovute ai fluidi

$R_f$  : sono resistenze di fouling dovute alla sporca

Quando vedo e considero uno scambiatore devo tener conto del fatto che il fluido che scorre all'interno di tali componenti è un fluido "sporco", su questo è ottenuto mediante fenomeni di combustione, e quindi oltre alle pareti devo considerare una resistenza dovuta alla parte di sporca depositata sui tubi. Però possiamo avere in uno scambiatore anche un fluido sporco e uno pulito, in questo caso dobbiamo distinguere le resistenze. Se in un tubo circola gas e in uno circola liquido, poiché abbiamo differenze di  $\alpha$  tra le due sostanze di diversa origine di prodotto, si potrebbe nei tubi in cui circola il gas aumentare la superficie  $A$  per migliorare il flusso termico del gas, e quindi mettere le alette sul tubo che contiene gas.

# IL BILANCIO TERMICO

Partiamo dallo schema di uno scambiatore



Applicando il 1° principio a questo sistema, facendo conto che si tratta di un sistema adiabatico:

$$\sum_i G_i h_i = 0$$

$$G_c h_{cu} - G_c h_{ci} + G_f h_{fu} - G_f h_{fi} = 0$$

$$G_c (h_{cu} - h_{ci}) + G_f (h_{fu} - h_{fi}) = 0$$

$$G_f (h_{fu} - h_{fi}) = G_c (h_{ci} - h_{cu})$$

Poiché sappiamo che  $dh = \rho dt$

$$G_f \rho_f (T_{fu} - T_{fi}) = G_c \rho_c (T_{ci} - T_{cu})$$

$$C_f$$

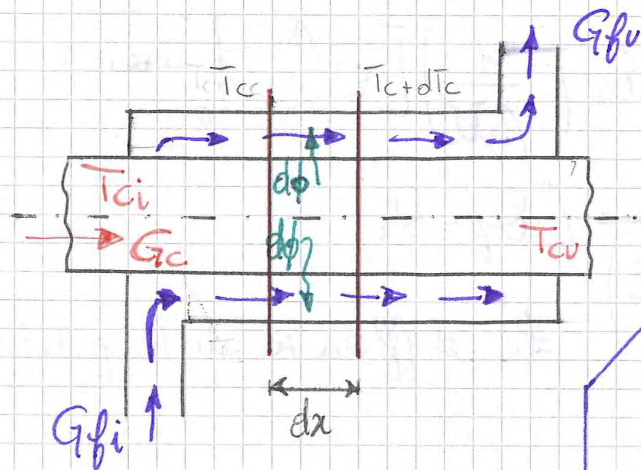
$$C_c$$

$$C_f (T_{fu} - T_{fi}) = C_c (T_{ci} - T_{cu})$$

$$\frac{C_f}{C_c} = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_f}$$

Deriva del Primo Principio

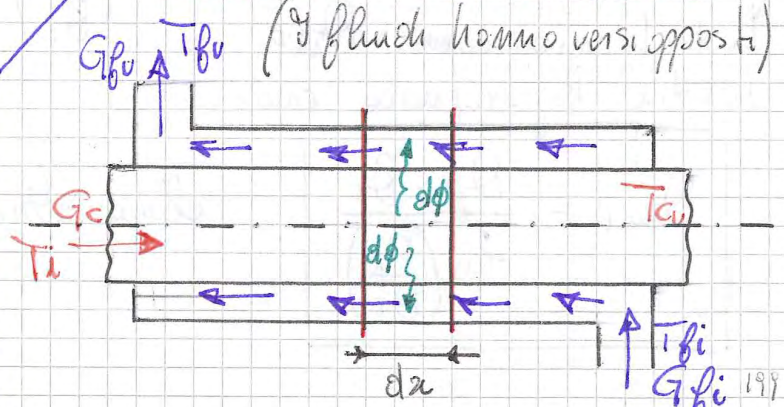
Vediamo ora uno scambiatore a alambri Coemoli



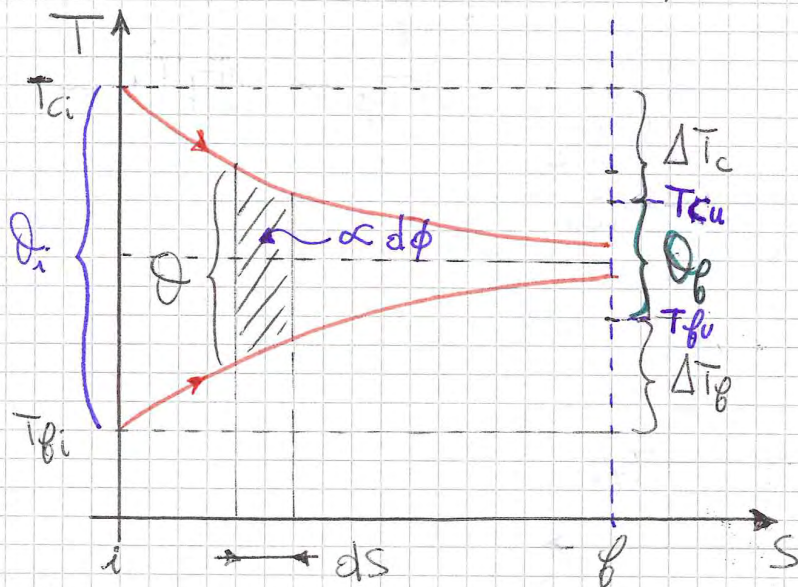
Scambiatore **co**corrente  
(il flusso dei fluidi è lo stesso per entrambi)

Di tale scambiatore prendo un pezzo in finitesimo  $dx$  e applico il 1° principio su tale pezzo in finitesimo.

Scambiatore in **contro**corrente



Se metto su un diagramma la superficie e la Temperatura, supponendo il caso di scambiatore epiconente



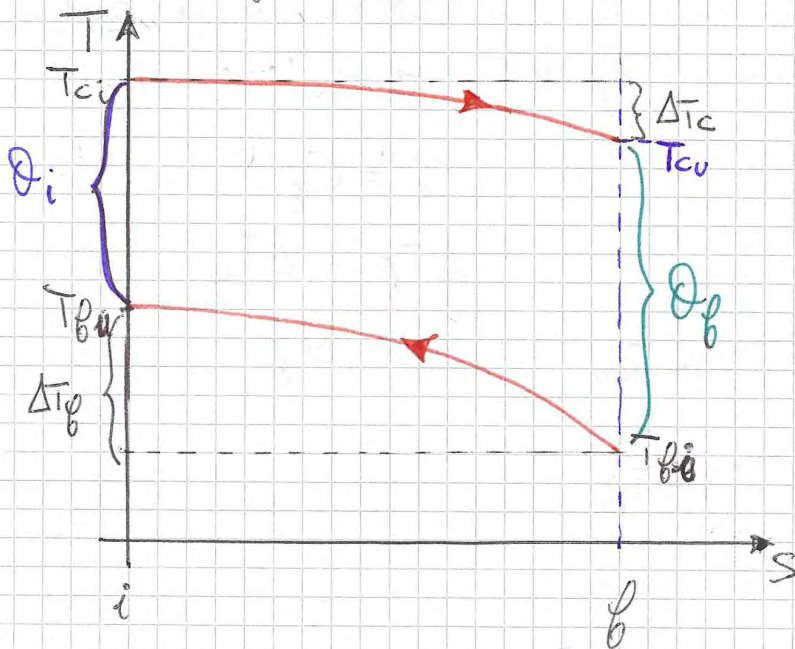
$$Q_f < Q_i$$

$$Q_i = \Delta T_{iniale}$$

$$Q_f = \Delta T_{finale}$$

Se prendiamo un  $dS$  abbiamo che l'area per  $dS$  sarà proporzionale a  $\phi$

Se invece consideriamo uno scambiatore in controcorrente avremo il seguente andamento della temperatura.



$$Q_i < Q_f$$

$$C_c > C_h$$

$$\Delta T_f > \Delta T_c$$

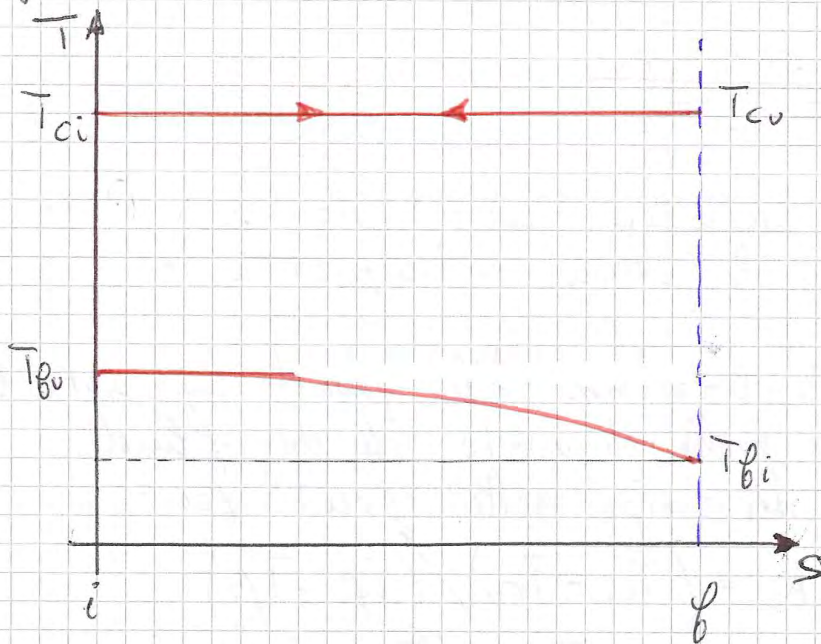
Sappiamo che  $d\phi = -C_c d\bar{T}_c = U dS (\bar{T}_c - \bar{T}_f)$

Quindi possiamo scrivere che

$$\frac{d\bar{T}_c}{dS} = -\frac{U}{C_c} \phi \quad \left| \frac{d\bar{T}_c}{dS} \right|_i < \left| \frac{d\bar{T}_c}{dS} \right|_f$$

$$\left. \frac{d\bar{T}_c}{dS} \right|_i = -\frac{U}{C_c} Q_i \quad \left. \frac{d\bar{T}_c}{dS} \right|_f = -\frac{U}{C_c} Q_f$$

Se invece ci troviamo nel caso in cui  $C \rightarrow \infty$  per uno scambiatore in controcorrente o in equicorrente, si avrà il seguente grafico.



## IL METODO LMTD

Tale metodo viene utilizzato proprio a proposito di fronte a scambiatori un po' più complessi del semplice scambiatore a alambri coassiali.

Con questo metodo si tiene conto di un fattore di temperatura che solitamente è fornito dai costruttori, indicato con  $F$ , e tale fattore tiene conto di quanto lo scambiatore considerato ha comportamento diverso da quello a tubi coassiali.

Per tali scambiatori la potenza termica è indicata con:

$$\phi = U \cdot F \cdot A_t \cdot \Delta T_{me}$$

dove  $F$  è il fattore di temperatura che è funzione di due parametri;  $R$  e  $P$ :

$$F \equiv f(R, P)$$

Con  $R$  si intende il rapporto delle capacità termiche

$$R = \frac{C_c}{C_h} = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_h}$$

## SCAMBIATORI COMPLESSI

METODO  $\epsilon$ -NTU

È un metodo che consiste nel trovare delle relazioni che colleghino l'efficienza dello scambiatore con le capacità termiche ( $\epsilon$ -NTU).

$$\epsilon = \frac{\phi}{\phi_{\max}} = \frac{\phi}{C_{\min} \Delta T_{\max}}$$

$\downarrow$   
 $(T_{ci} - T_{fi})$

$C_c \Delta T_c$   
 $C_f \Delta T_f$

Vediamo cosa indica ora l'acronimo NTU o NUT

$$\boxed{NTU = \frac{US}{C_{\min}}}$$

NUMERO DI UNITA DI TRASFERIMENTO

$U$  è la trasmittanza

Quindi l'efficienza  $\epsilon$  sarà funzione di

$$\epsilon = f\left(NTU, \frac{C_{\min}}{C_{\max}}, \text{configurazione}\right)$$

Come si vede il flusso massimo è il prodotto tra il coefficiente di scambio termico minimo e la differenza di temperatura massima. Come si può notare esso non è dato dal prodotto dei massimi di questi due parametri perché per questi due parametri vale la seguente relazione:

$$\boxed{\frac{C_c}{C_f} = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_c}}$$

che deriva a due volte del I principio per sistemi aperti

E quindi se il coefficiente del flusso ~~caldo~~ fosse massimo, non potrebbe avere la differenza di temperatura massima.

Il metodo  $\epsilon$ -NTU consiste quindi nel trovare una relazione di  $\epsilon$  che dipende dal fattore NTU, dal rapporto tra i due coefficienti e dal tipo di configurazione.

Analizziamo il caso in cui ci troviamo in epicondente.

Per quanto riguarda il metodo  $\epsilon$ -NTU la procedura di calcolo si svolge nelle seguenti fasi:

Determinare la capacità termica  $C_{\min} = \min(C_c, C_f)$

Calcolare il parametro  $NTU = (U \cdot A) / C_{\min}$

Calcolare l'efficienza utilizzando i diagrammi o le relazioni analitiche disponibili per la configurazione esaminata

Calcolare il flusso effettivamente scambiato

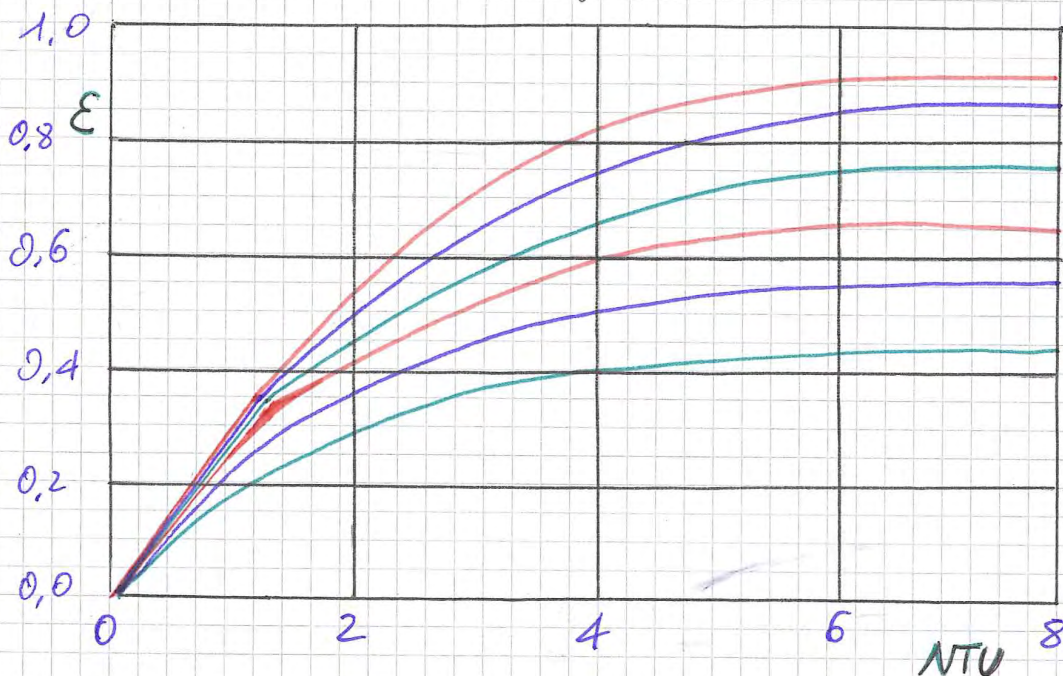
$$\phi = \epsilon \phi_{\max}$$

Calcolare le temperature di uscite dei fluidi

$$T_{c,u} = T_{c,i} - \frac{\phi}{C_c}$$

$$T_{f,u} = T_{f,i} + \frac{\phi}{C_f}$$

Vediamo un esempio di diagramma  $\epsilon$ -NTU



Le diverse curve sono costituite da diverso C

FINE



# ESERCITAZIONE I

## LE GRANDEZZE

L'origine delle grandezze nasce da una realtà fisica, e tali grandezze per essere utilizzate devono avere una certa omogeneità. Si distinguono grandezze fondamentali che sono in questo corso:

$L \Rightarrow$  lunghezza

$M \Rightarrow$  Massa

$t \Rightarrow$  tempo

$T \Rightarrow$  temperatura

E grandezze derivate formate da un insieme di grandezze fondamentali. Esempio

$$[G_d] = [L]^r \cdot [t]^s \cdot [M]^e \cdot [T]^m$$

$$W = [L] \cdot [t]^{-1}$$

$$a = [L] \cdot [t]^{-2}$$

## UNITÀ DI MISURA

Attribuiamo convenzionalmente ad ogni grandezza una scala da adottare per la loro misura e da qui sono nate le così dette unità di misura. Adottiamo per tali unità il SI che si differenzia da quello anglosassone. Vi sono le unità fondamentali che sono:

lunghezza  $[L]$  metro m

Massa Kilogrammo kg

Tempo secondo s

Temperatura Kelvin K

Quantità di sostanza mole mol

Corrente elettrica ampere A

## ESERCIZI DI CONVERSIONE

1. Convertire in  $^{\circ}\text{F}$ ,  $\text{K}$ , e  $\text{R}$  la temperatura di ebollizione dell'acqua alla pressione di 1 atm.

2. Convertire la pressione di  $3,5 \text{ kgf/cm}^2$  in unite SI

3. Convertire in unite del SI la costante universale dei gas  $R$   
 $R = 0,08205 \text{ atm l / (mol K)}$

1.  $p = 1 \text{ atm}$        $T_{\text{C}} = 100^{\circ}\text{C}$       temp. ebollizione dell'acqua.

$$T_{\text{K}} = T_{\text{C}} + 273,15 = 373,15 \text{ K} \quad \text{Gradi Kelvin}$$

$$T_{\text{R}} = \frac{9}{5} T_{\text{K}} = 671,6 \text{ R} \quad \text{Gradi Rankine}$$

$$T_{\text{F}} = T_{\text{R}} - 459,6 = 212^{\circ}\text{F} \quad \text{Gradi Fahrenheit}$$

$$2. \quad p = 3,5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$1 \text{ kgf} = 1 \cdot 9,81 = 9,81 \text{ N}$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$p = 3,5 \cdot \frac{9,81}{10^{-4}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3,43 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 3,43 \text{ bar}$$

$$3. \quad R = 0,08205 \frac{\text{atm l}}{\text{mol K}}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$$

$$R = 0,08205 \cdot \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{10^{-3} \text{ kmol K}} = 8314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{kmol K}}$$

$$R = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

## Esercizio 7.1

Un volume di liquido si riduce dello 0,04% quando la pressione aumenta di  $15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  a temperatura costante. Determinare la compressibilità isoterma  $K_T$  del liquido supponendo che questa sia costante con la pressione.

1



2

 $V_1$  $V_2$ 

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = -0,04\%$$

 $P_1$  $P_2$ 

$$\Delta P = P_2 - P_1 = +15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

 $T_1$  $T_2$ 

$$T_1 = T_2 \quad \Delta T = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -K_T dp + \frac{\beta dT}{1} \rightarrow \text{perché isoterma}$$

$$\int_1^2 \frac{dV}{V} = \int_1^2 -K_T dp$$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = -K_T (P_2 - P_1)$$

$$K_T = - \frac{\ln \frac{V_2}{V_1}}{(P_2 - P_1)}$$

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = R V = \frac{V_2}{V_1} - 1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + R V = 1 - 0,0004 = 2,667 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}$$

### Esercizio 3

Utilizzando le equazioni di stato

1. dei gas ideali  $p = \frac{R^* T}{v}$

2. di Van der Waals  $p = \frac{R^* T}{(v-b)} - \frac{a}{v^2}$

3. del viriale  $p \cdot v = R^* \cdot T \cdot z$

$$z = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \frac{D(T)}{v^3} + \dots$$

dove

$$\begin{cases} B(T) = b_0 - \frac{A_0}{R^* T} - \frac{g}{T^3} \\ C(T) = -b_0 \cdot b + \frac{A_0 \cdot a}{R^* T} - \frac{b_0 \cdot g}{T^3} \\ D(T) = \frac{b_0 \cdot b \cdot g}{T^3} \end{cases}$$

Calcolare la pressione in una massa di etano in due stati termodinamici con coordinate temperatura e volume specifico uguali a:

$\cdot \{ 0^\circ\text{C}, 0,01 \text{ m}^3/\text{kg} \} \quad \cdot \{ 0^\circ\text{C}, 0,6 \text{ m}^3/\text{kg} \}$

**A**  $\begin{matrix} T_A \\ v_A \end{matrix} \quad p_A = ? \quad \left\{ \begin{matrix} p^i \\ p^u \\ p^m \end{matrix} \right.$

**B**  $\begin{matrix} T_B \\ v_B \end{matrix} \quad p_B = ?$

Partiamo dalla prima.

In chimica sappiamo che l'equazione di stato era:

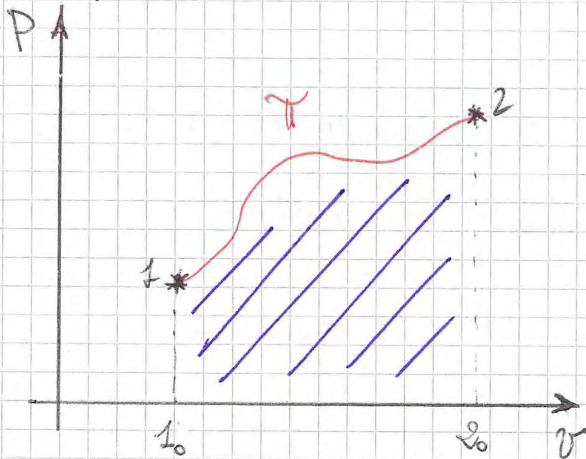
$$pV = nRT$$

# Esercitazione II

Premessa

Diagramma di Clapeyron

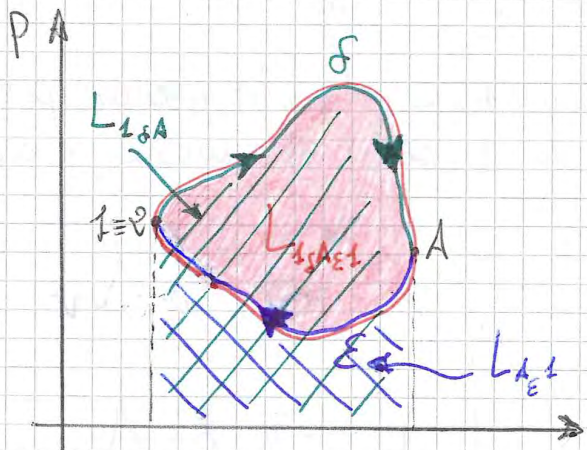
Tale diagramma mette in evidenza pressione e volume (p, V)



$$\text{AREA } 1 \rightarrow 2 = \int_{1 \rightarrow 2} p \, dV = L_{1,2}$$

Può essere comodo per avere una informazione sul lavoro effettuato per andare da 1 e 2.

Per una trasformazione ciclica avremo:



Se compo questo ciclo nel punto A, otterpo due trasformazioni E e S e otterpo i seguenti risultati

$$L_{1 \to A} = \int_{1 \to A} p \, dV > 0$$

$$L_{A \to 1} = \int_{A \to 1} p \, dV < 0$$

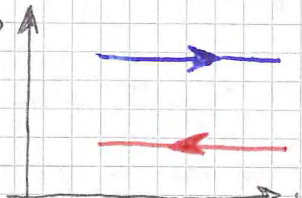
$$L_{1 \to A \to 1} = L_{1 \to A} + L_{A \to 1} > 0$$

In tutti i processi ciclici, l'area del ciclo rappresenta il lavoro totale del ciclo in esame.

Nel grafico possiamo notare che il lavoro compiuto spostandosi da sinistra a destra rispetto all'asse di p è positivo, invece quando ci si muove verso l'asse delle pressioni tale lavoro diventa negativo

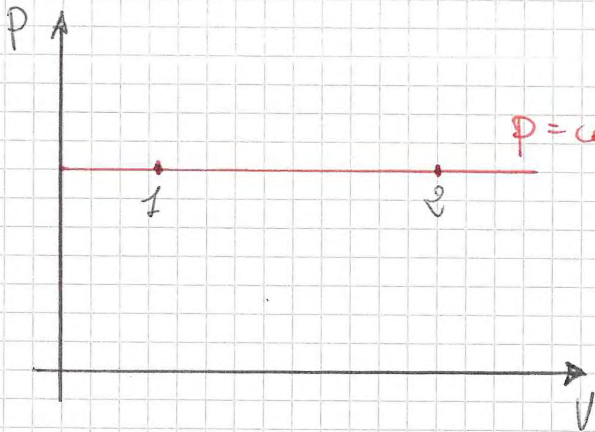
$$L > 0 \quad \text{se} \quad \rightarrow$$

$$L < 0 \quad \text{se} \quad \leftarrow$$



# TRASFORMAZIONE ISOBARA

$p = \text{costante}$



$$\tilde{Q} = C_p dT$$

$$Q = \int_{1,2} C_p dT = \int M C_p dT$$

$$L = \int_{1,2} p dV = p (V_2 - V_1)$$

Le equazioni sopra possono sempre essere scritte.

Per questo spesso invece un processo si possono fare le seguenti semplificazioni.

$$p v = R^* T$$

$$\frac{v}{T} = \text{costante}$$

$$\boxed{\frac{V}{T} = \text{costante}}$$

Ricordando che

$$p \frac{V}{M} = R^* T \quad \text{e per i punti 1 e 2}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 V_1 &= M R^* T_1 \\ p_2 V_2 &= M R^* T_2 \end{aligned} \right\}$$

$$L = M R^* (T_2 - T_1)$$

Sapendo che  $C_p = f(T)$  avremo

$$Q = \int M C_p(T) dT$$

# TRASFORMAZIONE ISOTERMA

$$T = \text{costante}$$

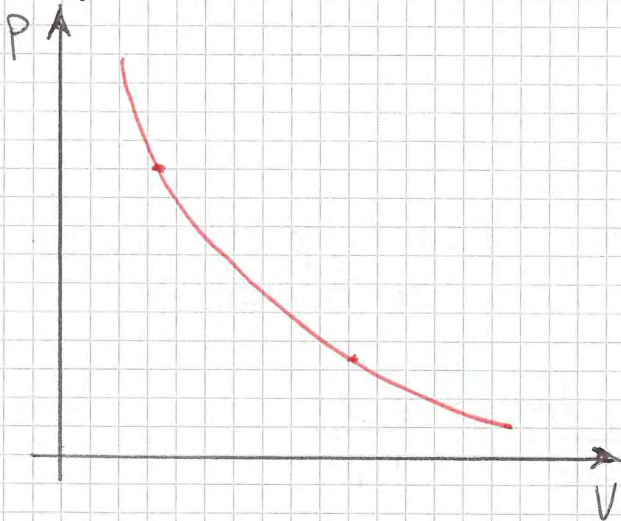
$$\left. \begin{aligned} L &= \int p \, dV \\ Q &= \int \Lambda_V \, dV = \int \Lambda_p \, dp \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Questo posso dirlo} \\ \text{in generale sempre} \end{array}$$

Per poter tracciare il grafico abbiamo bisogno delle relazioni tra pressione, volume e temperatura e quindi a priori non possiamo tracciarlo come per le altre trasformazioni.

Partendo dall'espressione dei gas ideali avrò:

$$p \frac{V}{M} = R^* T \Rightarrow \boxed{pV = \text{costante}}$$

Per un gas ideale quindi posso tracciare il seguente grafico.



Solo per i gas ideali il calore scambiato coincide con il lavoro scambiato.

$$L_{i,R} = \int_{1,2} \left( \frac{MR^*T}{V} \right) dV = MR^*T \int_{1,2} \frac{dV}{V} = MR^*T \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$Q = \int p \, dV \equiv L$$

In una isoterma il calore coincide con il lavoro scambiato. Se fossimo partiti infatti dall'altra espressione costitutiva avremmo ottenuto:

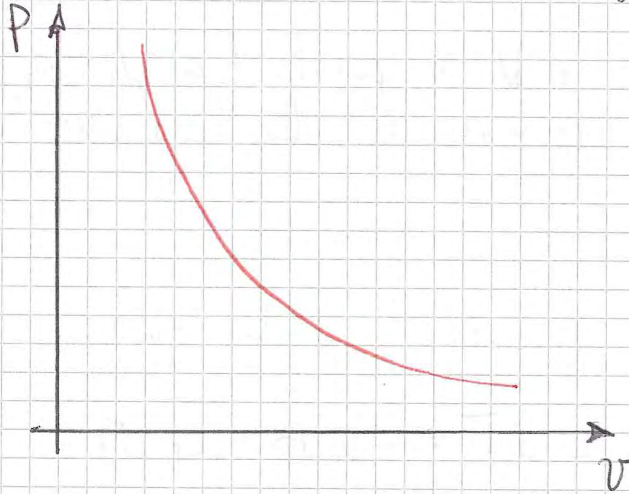
$$Q = \int V \, dp$$

$$C' = \ln(p) + \gamma \ln(v)$$

$$C' = \ln(pv^\gamma)$$

$$pv^\gamma = \text{costante}$$

Posso allora adesso tracciare il grafico della trasformazione



$$R^* = c_p - c_v$$

$$p v^\gamma = \text{costante}$$

Per quanto riguarda il lavoro eseguito per un gas ideale:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = p v^\gamma$$

$$p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{v^\gamma} \quad p \text{ pressione}$$

$$L = \int p \, dV = \int_{1,2} (p_1 V_1^\gamma) \frac{dV}{v^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \int_{1,2} \frac{dV}{v^\gamma} =$$

$$= p_1 V_1^\gamma \int V^{-\gamma} \, dV = p_1 V_1^\gamma \left( \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{1-\gamma} \left[ V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right]$$

Un errore tipico che si fa è quello di adottare tale espressione anche per il vapore, perché questa eq. è valida solo per i gas ideali.

Vediamo ora come queste quattro trasformazioni possono essere riassunte in una trasformazione politropica.



$$(C - C_p) p dv = -(C - C_v) v dp$$

Ora chiamo  $m$  il rapporto tra i calori specifici

$$m p dv = -v dp$$

$$m = \frac{C - C_p}{C - C_v}$$

$$m \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p}$$

Pensando agli integrali dtempo:

$$m \ln(v) = - \ln(p) + C$$

$$m \ln(v) + \ln(p) = C$$

$$C = \ln(p v^m) \quad C \text{ è la costante di integrazione}$$

$$p v^m = \text{costante}$$

Nel lavoro puvoli avremo ovolopamente

$$L = \int p dv = \int_{1,2} (p_1 v_1^m) \frac{dv}{v^m} = \frac{p_1 v_1^m}{1-m} [v_2^{1-m} - v_1^{1-m}]$$

Quindi tutte le altre trasformazioni possono essere con particolari di una trasformazione politropica. Vediamo la tabella seguente:

	$m$	$C$
ISOBARA	0	$C_p$
ISOCORA	$\infty$	$C_v$
ISOTERMA	1	$\infty$
ADIABATICA Revers.	$\gamma$	0

Espressioni politropiche

$$\left[ \begin{array}{l} p v^m = \text{costante} \\ p^{\frac{1}{m}} v = \text{costante} \end{array} \right.$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Abbiamo una variazione di volume

$$dV = -V K_T dp$$

Quindi andandolo a sostituire nella prima espressione avrò:

$$L_i = L_{se} = \int p dV = \int p (-V K_T) dp = -K_T \int p V dp$$

Sapendo che la densità  $\rho$  è per  $\rho = \frac{M}{V}$

$$V_1 = \left( \frac{M}{\rho} \right) = 559,910414 \text{ cm}^3$$

$$\int \frac{dV}{V} = - \int K_T dp$$

$$\ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -K_T (p_2 - p_1) \quad V_2 = V_1 e^{-K_T \Delta p} = 559,910414 \text{ cm}^3$$

la variazione di volume in questa trasformazione non ha alcun significato pratico. Quindi accettiamo che su questo solido il volume possa essere costante.

$$L_i = \int p dV = \int p (-V K_T) dp = -K_T \int p V dp \approx K_T V \int p dp$$

$$L_i = -K_T V \left[ \frac{p^2}{2} \right]_1^2 = -\frac{K_T V}{2} [p_2^2 - p_1^2] = -21,6 \text{ J}$$

Per quanto riguarda i calcoli possiamo utilizzare le relazioni:

$$\lambda_v = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

che per Van der Waals vale:

$$\lambda_v = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{R^* T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right)_v = \frac{T}{v-b} R^* \left( \frac{\partial T}{\partial T} \right)_v = \frac{R^* T}{v-b}$$

$$\begin{aligned} Q = \Delta q &= M \int \lambda_v dv + \underbrace{c_v dt}_{=0 \text{ isoterma}} = M \int \frac{R^* T}{v-b} dv = \\ &= MR^* T \int_A^B \frac{dv}{v-b} = MR^* T \ln \left( \frac{v_B - b}{v_A - b} \right) = -3,61 \text{ MJ} \end{aligned}$$

La loro differenza con il lavoro è dato dalla variazione di energia interna, in quanto non è un gas ideale (He) e quindi sarebbe meglio utilizzare Van der Waals.

## Trasformazione 2-3 (ADIABATICA)

$$L = \int p dV = \int p_2 V_2^\sigma \frac{dV}{V^\sigma} = p_2 V_2^\sigma \int V^{-\sigma} dV =$$

$$p_2 V_2^\sigma = p_3 V_3^\sigma = p V^\sigma \quad = p_2 V_2^\sigma \frac{V^{-\sigma+1}}{-\sigma+1} \Big|_2^3 =$$

$$p = \frac{p_2 V_2^\sigma}{V^\sigma} \quad = p_2 V_2^\sigma \frac{V^{-\sigma+1}}{-\sigma+1} \left[ V_3^{1-\sigma} - V_2^{1-\sigma} \right] =$$

$$p_2 = \frac{\mu R^* T_2}{V_2} \quad \text{ma} \quad \sigma = 1,3 \text{PP} \quad Q_{2,3} = 0$$

$$L = p_2 V_2^\sigma \frac{V^{-\sigma+1}}{1-\sigma} \left[ V_3^{1-\sigma} - V_2^{1-\sigma} \right] = -2,74 \text{ KJ} \neq Q_{2,3}$$

Il lavoro è negativo in quanto sull'asse delle coordinate si spostano da destro verso sinistra.

## Trasformazione 3-1 (ISOBARA)

$$L_{3,1} = 0$$

$$Q_{3,1} = \mu \int \underbrace{\lambda v}_{=0} dv + c_v dT = \mu \int c_v dT$$

trasformazione isocora

$$\begin{cases} R^* = c_p - c_v & R^* = \sigma c_v - c_v \\ \sigma = \frac{c_p}{c_v} & R^* = c_v (\sigma - 1) \end{cases}$$

$$c_v = \frac{R^*}{(\sigma - 1)}$$

$$Q_{3,1} = \mu \int_3^1 c_v dT = \mu c_v (T_1 - T_3) = -2,74 \text{ KJ}$$

$$L_{TOT} = L_{1,2} + L_{2,3} + L_{3,1} = -0,56 \text{ KJ}$$

$$Q_{TOT} = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,1} = -0,56 \text{ KJ}$$

Conviene con ciò che dice il primo principio, cioè che il calore convulso con il lavoro in un ciclo.

# ESERCITAZIONE III

## Esercizio 3.1

Un cilindro adiabatico, chiuso ad una estremità da un pistone mobile, è pieno di un gas che inizialmente si trova a  $p_1 = 1 \text{ MPa}$  e occupa  $V_1 = 1 \text{ m}^3$ . Il gas si espande irreversibilmente fino a  $p_2 = 200 \text{ kPa}$  e a  $V_2 = 3 \text{ m}^3$  con una trasformazione che su  $p-V$  è approssimata con una retta.

Se il lavoro fatto sull'esterno è  $204 \text{ kJ}$ , calcolare la variazione di energie interne, il lavoro delle forze interne ed il lavoro di attrito.

$$\Phi = 0 \Rightarrow Q = 0$$

1

2

$$L_{se} = 204 \text{ kJ}$$

$$p_1 = 1 \text{ MPa}$$

$$p_2 = 200 \text{ kPa}$$

$$V_1 = 1 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 3 \text{ m}^3$$

$$\Delta U = ?$$

$$L_i = ?$$

$$L_{ie} = ?$$

Se il problema non è specifico utilizziamo sempre l'equazione del gas ideale.

Scriviamo il I Principio

$$\cancel{Q} - L_i = \Delta U$$

= 0 trasformazione adiabatica

Dall'equazione dell'energia anche otteniamo

$$L_i = L_{se} = \frac{\Delta E_c}{=0}$$

$$L_i = L_{se} = 204 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = -L_i = -204 \text{ kJ}$$

Per quanto riguarda il lavoro di attrito  $L_{ie}$  avremo l'espressione

$$L_i = L_{iR} - L_{ie} \rightarrow L_{ie} = L_{iR} - L_i$$

$$L_{iR} = \int_{1 \rightarrow 2} p dV$$

$\gamma$  è la linea della trasformazione che in questo caso è una retta.

