NUMERO : 63

DATA : 24/03/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Brigante

MATERIA : Fisica II - Teoria + Esercizi

FISICA II

Professor: Pelizzola Alessandro
e-mail: alessandro.pelizzola@polito.it
Tel: 0115647376 / 7376

Modalità d'esame:
Esame scritto
Esame orale

Anno accademico: 2010/2011

Non esiste un orario di ricevimento particolare, ma si può avvisare prima di un appuntamento con delle e-mail.

LIBRO DI TESTO

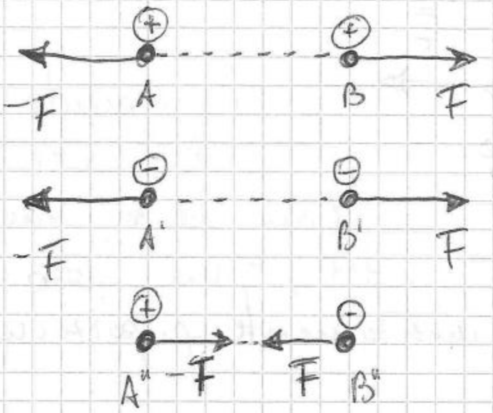
1. ELEMENTI DI FISICA VOL. 2
   ELETTROMAGNETISMO E ONDE
   P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci
2. FISICA II
   P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci

Un libro vale l'altro.

Non ci sono testi di esercizi particolari, ma bastano quelli del Mazzoldi.

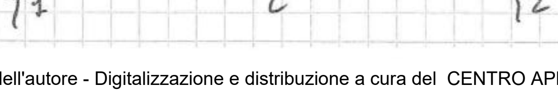
La fisica che tratteremo in questo corso sarà la fisica antica con qualche accenno alla fisica moderna (fisica quantistica).

Se prendiamo oggetti puntiformi caricati in modo diverso avremo le seguenti forze che provano su tali corpi:



La forza è sempre compiuta per le due cariche, (per quanto riguarda la direzione), i versi invece dipendono dalla tipologia di carica

La forza che il corpo **A** scambia con il corpo B è opposta sempre, qualunque sia il valore delle cariche.
Non sappiamo però ancora il modulo di tale forza F.
Per Coulomb non era affatto banale misurare la carica elettrica, e allora ha dovuto fare cose abbastanza complesse per quell'epoca, e ha così imparato che la carica poteva essere trasmessa da un corpo all'altro. Quindi ha iniziato a caricare corpi inizialmente neutri, caricandoli con una stessa carica, o con carica doppia. Ha quindi definito una carica campione per poterla confrontare con le altre.
Un corpo isolante a quei tempi era un buon materiale, perché una volta caricato (elettrizzato) e lasciato isolato, era in grado di conservare la propria carica.
Oggi gli isolanti sono considerati materiali che non disperdono cariche, ma riescono a trattenerle.
Poi ci sono i conduttori che sono materiali che acquisiscono e cedono cariche elettriche ad altri materiali.
Allora Coulomb progettò il cosiddetto elettroscopio a foglie d'oro o alluminio in grado di valutare il valore della carica.
Per la determinazione del modulo della Forza, Coulomb proseguì nel seguente modo: Prese due cariche q_1 e q_2 distanti r



Il problema della definizione delle unità di misura di tale formula, consiste nella definizione della costante K.

UNITÀ DI MISURA DELLA CARICA ELETTRICA

La carica elettrica ha come unità di misura il Coulomb.

$$1\ C\ (\text{COULOMB}) = 1\ A \cdot 1\ s$$

Il Coulomb non è quindi una unità di misura fondamentale.

$$1\ C \simeq 6{,}27 \cdot 10^{18}\ e \qquad e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C \rightarrow \text{Carica elementare}$$

Allora la costante K a questo punto è specificata ed è pari a:

$$K \cong 9 \cdot 10^{9} \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2}\right]$$

Molto spesso K viene espressa rispetto ad un'altra costante solo ed esclusivamente per ragioni di comodità

$$\boxed{K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}}$$

dove ε_0 è chiamata **costante dielettrica del vuoto**.

Andando a calcolare ε_0 otteniamo:

$$\varepsilon_0 \simeq 8{,}85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right] \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$$

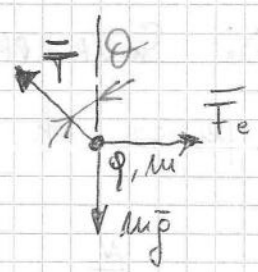
Scriveremo quindi la legge di Coulomb nella formula seguente:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\ \vec{u}_{12}} \qquad \text{LEGGE DI COULOMB}$$

Che deriva dall'aver sostituito la costante K.

$$\bar{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2}\ \bar{u}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\ \bar{u}_{12}$$

$$\begin{cases} F_e = T \sin\vartheta \\ mg = T\cos\vartheta \end{cases}$$



Facendo il rapporto tra le forze avremo

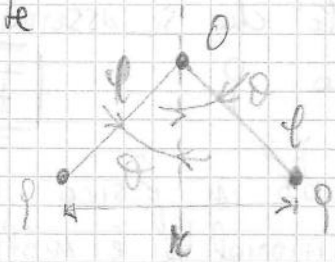
$$\boxed{\frac{F_e}{mg} = \tan\vartheta}$$

Scomponendo F_e avremo

$$\boxed{F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mg\tan\vartheta$$

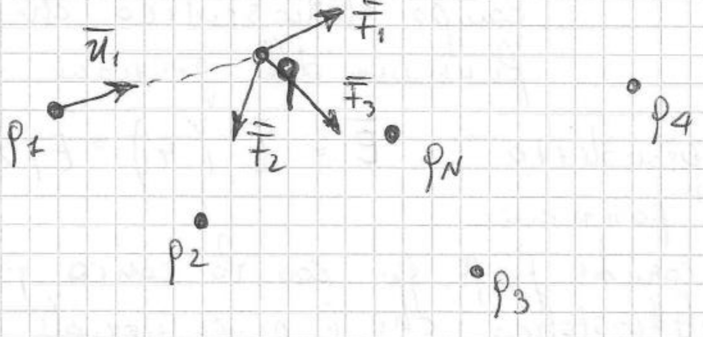
dove r e q saranno rispettivamente



$$r = 2l\sin\vartheta \qquad q^2 = 4\pi\varepsilon_0 r^2 mg\,tg\vartheta$$

$$q = 4l\sin\vartheta\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\tan\vartheta}$$

In un sistema discreto, formato da diverse cariche, vogliamo sapere l'effetto di tali cariche su una determinata carica q. Allora ognuna delle cariche esercita su q una forza che può essere attrattiva o repulsiva a seconda del segno di tale carica.



$$\bar{F}_1 = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,\bar{u}_1$$

F_i = forza di una generica carica i.

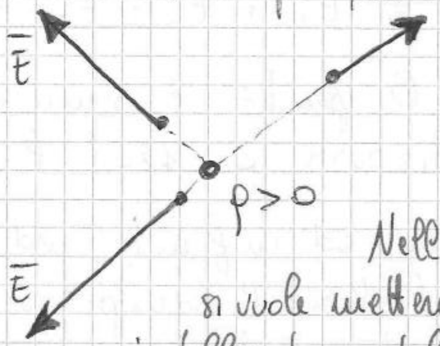
$$\bar{F}_i = \frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\,\bar{u}_1 \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

Anche per la forza elettrostatica vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u} \rightarrow \text{Forza elettrostatica}$$

$$\boxed{\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u}} \quad \text{Campo elettrostatico}$$

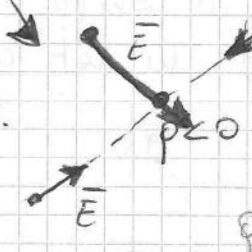
Quindi a seconda della distanza o posizione nello spazio della carica che il campo può variare.



Questo avviene quando la carica $q > 0$

Nel caso in cui la carica è negativa il campo è attrattivo

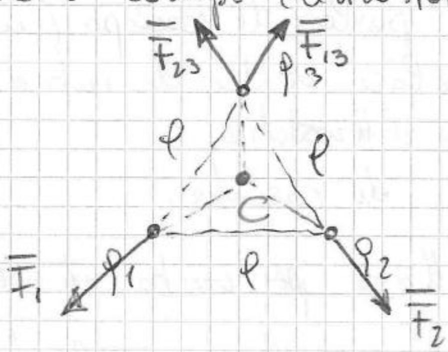
Nella figura si vuole mettere in evidenza i differenti moduli di $\bar{E}$ al variare della distanza da q.



Quindi se $q>0$ campo repulsivo, se $q<0$ campo attrattivo

Esempio 1.5

Forza e campo elettrostatico



$$q_1 = q_2 = q_3 = q > 0$$

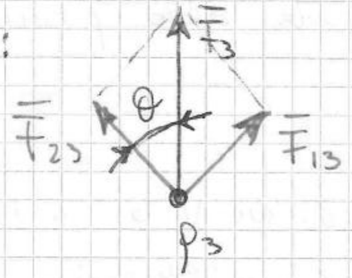
Triangolo equilatero

Calcolare la forza elettrostatica agente su ciascuna carica e il campo nel punto C ($\bar{E}_C$)

In una condizione così simmetrica è necessario calcolare la forza su una carica e ricavare la risultante, per simmetria.

→ q_3 non esercita una forza su se stessa.

Prendiamo q_3:



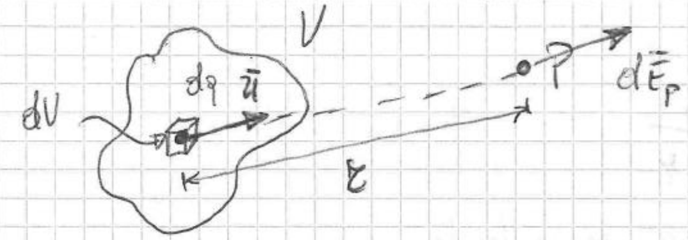
$$\bar{F}_{13} = \bar{F}_{23} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2}$$

$$\bar{F}_3 = 2 F_{13}\cos\theta = \frac{q^2\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0\ell^2}$$

Essendo un triangolo equilatero $\theta = \frac{\pi}{6}$ e quindi

$$\bar{F}_3 = \frac{\sqrt{3}\,q^2}{4\pi\varepsilon_0\ell^2}$$

Dato un generico corpo e un punto esterno P ci chiediamo quale potrebbe essere il campo $\bar{E}_P$



$$\bar{E}_P = ?$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho\, dV$$

Prendiamo un punto qualunque in dV e congiungiamo tale punto con P e calcoliamo il contributo infinitesimo di campo elettrostatico del punto P.

$$d\bar{E}_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u}$$

Passando agli integrali avrò:

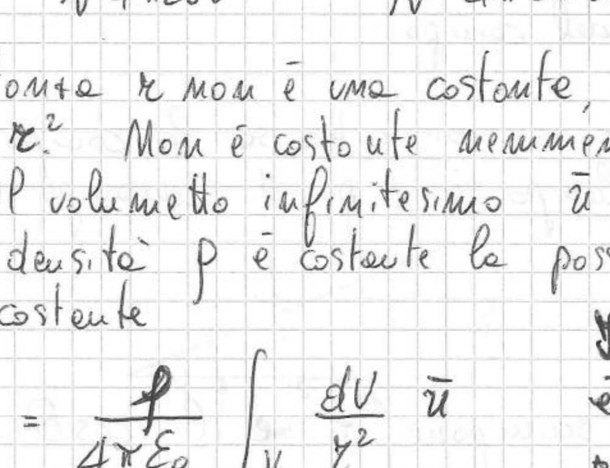
$$\bar{E}_P = \int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u} = \int_V \frac{\rho\, dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{r^2}\,\bar{u}$$

La distanza r non è una costante, e quindi non possiamo portare fuori r^2. Non è costante nemmeno il versore $\bar{u}$, infatti se sposto il volumetto infinitesimo $\bar{u}$ cambia.
~~Se~~ Se la densità ρ è costante la possiamo mettere fuori dall'integrale.
→ ρ = costante

$$\bar{E}_P = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dV}{r^2}\,\bar{u}$$

In tal caso il risultato non è più generale, ma abbiamo posto ρ = costante.

Es. **Campo elettrostatico di un anello di raggio r uniformemente carico, sul suo asse.**



L'anello porta una carica q > 0
se q < 0 il verso è opposto.
Lo spessore dell'anello è infinitesimo rispetto al suo raggio.

Considero due elementini dq sull'anello, e un punto P sull'asse e li congiungo con una linea.

L'anello ha spessore trascurabile

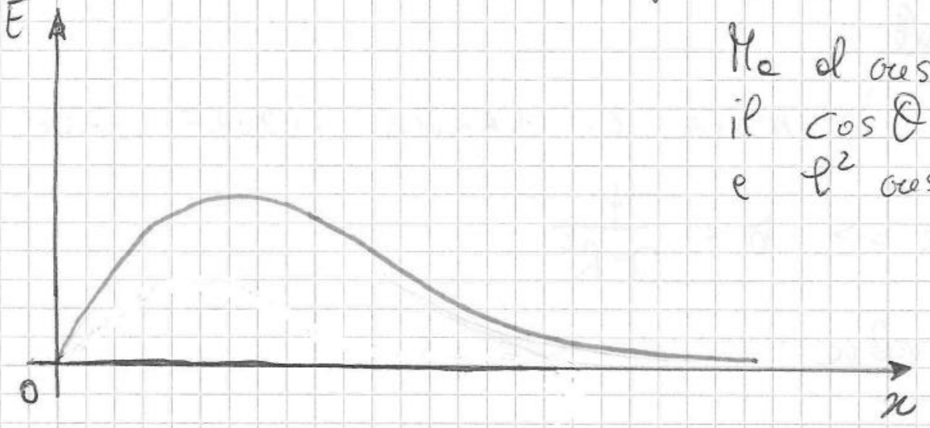
Allora il modulo diventa: perché ql indica il pezzo infinitesimo di quello

$$E = E_x = \frac{\lambda \cdot 2\pi r\, x}{4\pi \varepsilon_0 (r^2+x^2)^{3/2}}$$

ma $q = \lambda 2\pi r$ → carica totale

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}}} \leftarrow (\text{ANELLO})$$

Provando a rappresentare questa funzione su un piano (x, E) avremo qualitativamente il risultato seguente.

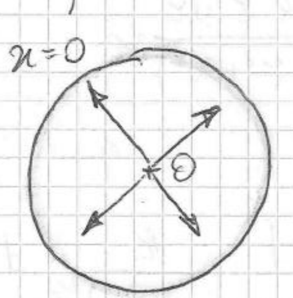


Ma al crescere di x il $\cos\theta$ cresce $\to 1$ e r^2 cresce.

Se $x \ll r \Rightarrow E \propto x$

Se $x \gg r \Rightarrow E \propto \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

Per simmetria nel centro dell'anello il campo totale $\bar{E} = 0$ questo quando $x = 0$



$\bar{E} = 0$ per $x = 0$

Invece se guardiamo tale campo da un punto P molto lontano il campo decresce.

Ad esempio se guardiamo un anello da molto lontano, l'unica cosa che vediamo è un punto.
In un punto diverso da quello del centro dell'anello è veramente molto difficile calcolare il modulo del campo, in quanto non vi è più simmetria.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 340

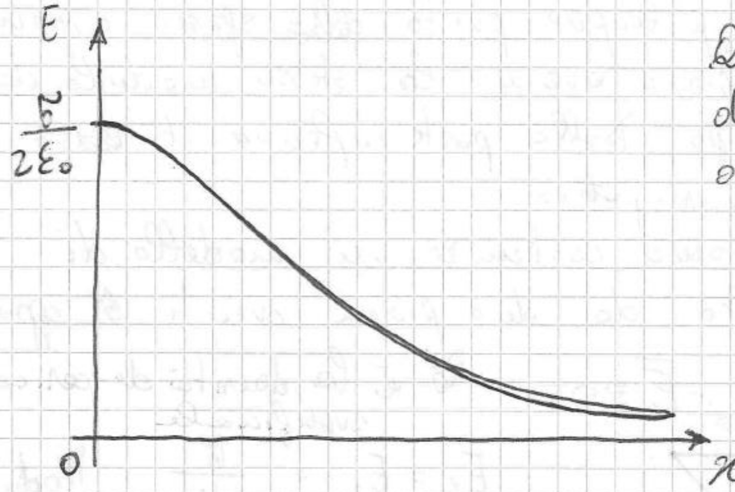
$$E = E(x) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right]_0^R$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} + \frac{1}{x}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

Cerchiamo di capire come è fatta questa funzione $E(x)$.

Se $x \ll R \Rightarrow E \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ — x non è zero, perché se no avrei un campo costante.

Se $x \gg R \Rightarrow E \approx \frac{1}{x^2}$



Qualitativamente il grafico della funzione è quello di fianco.

Per $x \gg R$ risolviamo analiticamente $\frac{R}{x} \to 0$

$$E \approx 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = 1 - \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Sviluppandolo in serie

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

Quindi diventa

$$E = 1 - \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{R^2}{x^2} + \dots\right] \simeq +\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) \underset{x\gg R}{\sim} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{R^2}{x^2} =$$

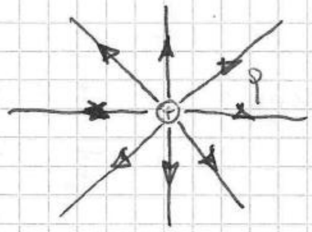
$$= \frac{q/\pi R^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{R^2}{x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

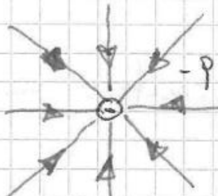
Campo elettrostatico di un disco

Se avessimo invece piani finiti, rettangoli, ciò non è più vero, nei bordi non si ha più uniformità di campo.

LINEE DI CAMPO o linee di forza del campo elettrostatico

Sono quelle linee ovunque tangenti al vettore campo elettrostatico, e concordi con lo stesso.
Ad esempio per una carica puntiforme si avrà:



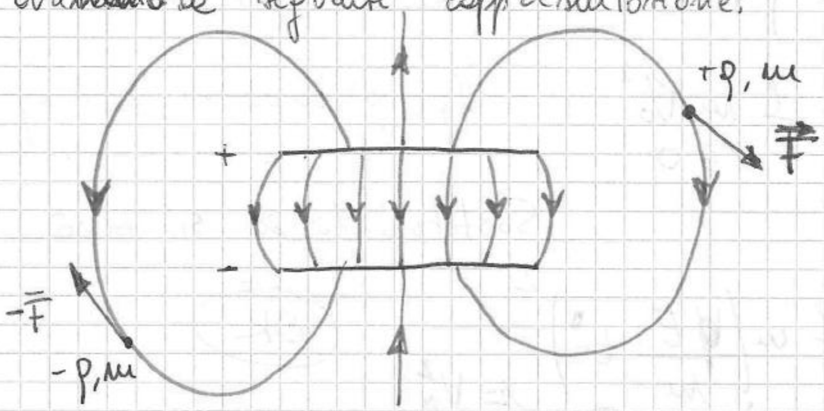


L'introduzione del concetto di campo elettros. mette in evidenza che la presenza di un sistema di cariche modifica lo spazio circostante, nel senso che una carica di prova posta in un qualsiasi pto risente della forza attribuita all'interazione con il campo.

Queste linee hanno diverse proprietà:

1. Non si intersecano mai
2. Sono più fitte dove il campo è più intenso, cioè dove il modulo di $\bar E$ è più grande e meno fitte dove $|\bar E|$ è più piccolo.

Se dovessimo rappresentare un campo elettrostatico di un condensatore finito avremmo la seguente rappresentazione:



Verso gli estremi del condensatore le linee di campo hanno direzione curvilinea.

$\bar F$ = forza

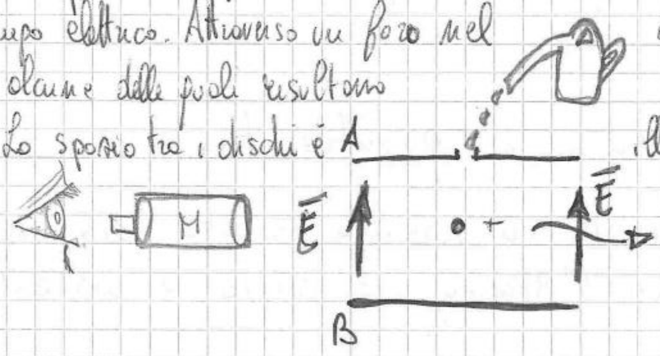
Moto di una carica in un campo elettrostatico

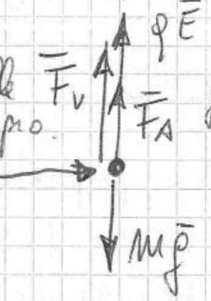
Usando la seconda legge della dinamica posso trovarmi l'accelerazione e quindi il moto della carica.

$$\bar a = \frac{\bar F}{m} = \frac{q\,\bar E}{m} \qquad\qquad \vec E = \frac{\vec F}{q}$$

$$\bar F = m \cdot \bar a \qquad\qquad \bar F = q \cdot \bar E$$

Esempio. Esperienza di Millikan: Tra due dischi A e B è possibile stabilire un campo elettrico. Attraverso un foro nel disco A passano goccioline di olio, nebulizzato alcune delle quali risultano cariche positivamente. Lo spazio tra i dischi è illuminato e il moto delle gocce è osservato con microscopio.





Per $E = 0$ → campo spento

$$ma = mg - m_a g - 6\pi r \eta v$$

massa aria

$$m - m_a = (\rho - \rho_a)\frac{4}{3}\pi r^3$$

Si può misurare lo spazio percorso da una goccia in un dato tempo e quindi la sua velocità. Sono riportati di fianco i valori di v nel caso di campo spento e acceso.

Se ci mettiamo in condizioni di velocità limite si avrà:

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_0 \\ a = 0 \end{cases} \qquad 0 = (\rho - \rho_a)\frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi \eta r v_0$$

$$r^2 = \frac{9}{2}\frac{\eta v_0}{(\rho - \rho_a) g}$$ Raggio particella al quadrato

η = viscosità dell'aria

Ma per trovare la carica accendiamo il campo elettrostatico e la relazione si modifica

$$ma = (m - m_a)g - 6\pi\eta r v - qE$$

$\Rightarrow$ VELOCITA LIMITE $\rightarrow \begin{cases} v = v_1 \\ a = 0 \end{cases}$

Sostituiamo nella formula

$$0 = (\rho - \rho_a)\frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta r v_1 - qE$$

$$q = \frac{1}{E}\left[(\rho - \rho_a)\frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta r v_1\right]$$ Carica

W non dipende dal percorso γ, solo dagli estremi A e B!

La forza è conservativa $\left[\Rightarrow W \left(\forall \text{ Percorso chiuso} \right) = 0 \right]$

Ciò significa che possiamo definire una nuova grandezza:

→ ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA $\quad \boxed{U_e \equiv U_e(\bar{r})}$

$\boxed{W = -\Delta U_e}$ Il lavoro della forza è l'opposto della variazione dell'energia potenziale elettrostatica

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = -\left[U_e(B) - U_e(A)\right]$$

$$U_e(\bar{r}) \equiv U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{costante}$$

La costante additiva non ha nessun significato fisico, e viene scelta in qualche modo conveniente, a seconda di ciò che vogliamo fare.

Generalmente si sceglie $\lim_{r \to \infty} U_e(r) = 0 \Rightarrow \text{costante} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Non sempre però si può scegliere la cost = 0

POTENZIALE ELETTROSTATICO $\quad \boxed{V \equiv V(\bar{r})}$ → funzione della posizione

$F \propto q_0 \Rightarrow W \propto q_0, \; \Delta U_e \propto q_0$

Introduciamo il potenziale elettrostatico V come energia potenziale elettrostatica per unità di carica:

$\boxed{V = \frac{U_e}{q_0}}$ Potenziale elettrostatico $\qquad F = \frac{E}{q}$

$W = -\Delta U_e$

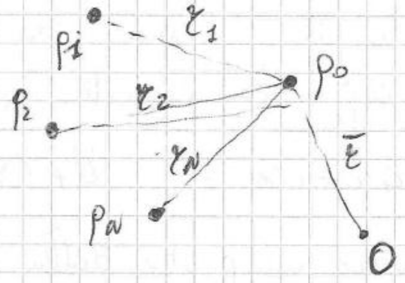
Quindi la variazione di V sarà:

$$\Delta V = V(B) - V(A) = \frac{U_e(B) - U_e(A)}{q_0} = -\frac{W}{q_0} = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

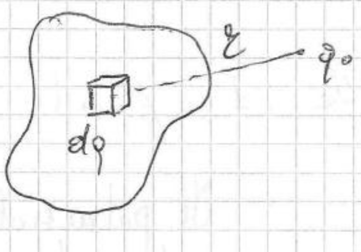
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 340

$$\Rightarrow \quad U_e(\bar{r}) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$ Se la costante $= 0$

$$V(r) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



Nel caso di una distribuzione continua di carica invece si avrà:



$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ che rivolto a tutto il corpo diventerà un integrale

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

L'integrale può diventare nel seguente modo se

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$ → volume

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho \frac{dv}{r}$$

Unità di misura del potenziale elettrostatico e delle differenze di potenziale è il Volt (V)

$$1\,V = 1\left[\frac{J}{C}\right] = 1\left[\frac{N\cdot m}{C}\right]$$

di conseguenza, per il campo elettrostatico: $1\,N/C = 1\,\frac{V}{m}$ che è molto più usato nelle applicazioni.

→ Energia potenziale elettrostatica totale di un sistema di cariche

N cariche: $q_1, q_2, ..., q_N$ ci chiediamo quale sia il potenziale di questo sistema di cariche.

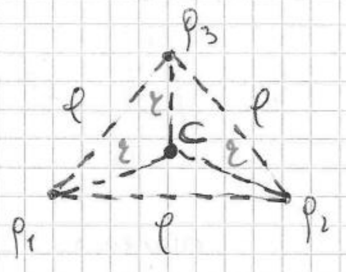
$U_e = ?$ Mi chiedo quale sia l'energ. potenziale di queste cariche fissate nello spazio.

Posso anche scriverlo nel seguente modo.

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$ Formula di scrittura del Mottoladi

Esempio: sistema di tre cariche

$$U_e = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Calcolare:
1. U_e del sistema?
2. V del centro C?
3. U_e di una carica q_0 posta in C?

1. $$U_e = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

Energia spesa per portare le tre cariche dall'infinito a quella posizione scelta.

2. $$V(c) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Attenzione che $V(c)$ non è zero anche se il sistema è simmetrico.

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} \Rightarrow V(c) = \sqrt{3}\,\frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

Il potenziale è zero solo se la somma delle cariche è nulla.

3. $$U_e = q_0 V(c) = \sqrt{3}\, q_0 \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}$$ Potenziale elettrostatico (U_e)

oppure: $$U_e = U_{01} + U_{02} + U_{03} = \ldots = \sqrt{3}\, q_0 \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

Se volessimo ora calcolare: U_e(sist: q_0, q_1, q_2, q_3)

Questa sarà uguale a:

$$U_e = U_e^{(1)} + U_e^{(3)} = U_{12} + U_{13} + U_{23} + U_{01} + U_{02} + U_{03} =$$

$= \ldots$ .. Se abbiamo 4 cariche abbiamo 6 lati.

La differenza di potenziale in due punti distinti A e B è pari all'opposto dell'integrale del campo.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{s}$$

$$dV = -\bar{E}\cdot d\bar{s}$$

→ Traiettoria infinitesima

Scomponendo il campo $\bar{E}$ nelle sue componenti lungo gli assi:

$$\left.\begin{aligned}\bar{E} &= E_x \underline{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}\\ d\bar{s} &= dx\,\underline{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}\end{aligned}\right\}$$ Sistema di riferimento cartesiano

$$\boxed{\bar{E}\cdot d\bar{s} = E_x dx + E_y dy + E_z dz}$$

$$V \equiv V(x,y,z)$$

In termini infinitesimi avremo l'espressione seguente

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad dV = -\bar{E}\,d\bar{s}$$

$$\overbrace{\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz}^{dV} = \overbrace{-E_x dx - E_y dy - E_z dz}^{-\bar{E}\cdot d\bar{s}}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}\\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\end{cases}$$

Il campo $\bar{E}$ è quindi il gradiente del potenziale espresso nel modo seguente:

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\cdot V}$$

Questa relazione ha alcune conseguenze importanti.
Abbiamo espresso il campo in un sistema di coordinate cartesiane ma avremmo potuto esprimere tale campo anche in coordinate polari lungo un piano.

CAMPO E.S. IRROTAZIONALE

$$\boxed{\text{rot}\,\bar{E} = \bar{\nabla} \times \bar{E} = 0}$$ → Per definizione di campo irrotazionale il $\text{rot}\,\bar{E} = 0$

Dimostrazione:

$$\bar{\nabla} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto vettoriale}}}{\times} \bar{E} = \bar{\nabla} \times (-\bar{\nabla} V) = -\underbrace{\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}}_{=0} \cdot V$$

($-\bar{E}$ written above $\bar{\nabla} \cdot V$)

e quindi $\bar{E} = -\bar{\nabla} V = 0$

$$-\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla} = 0$$
$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

Alternativamente in componenti avremo:

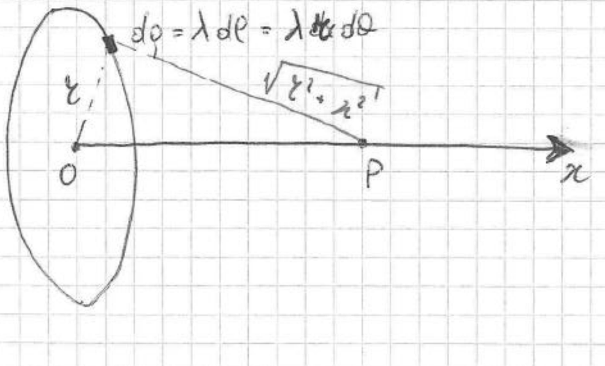
$$\bar{\nabla} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. vettoriale}}}{\times} \bar{E} = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)}^{\bar{\nabla}} \times \overbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\bar{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}\right)}^{-\bar{\nabla} V}$$

Facendo il prodotto vettoriale tra le componenti dovremmo ottenere rotore nullo.

$$\bar{\nabla} \wedge \bar{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \underline{i}\left(\underbrace{-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}}_{=0}\right) +$$

$$+ j\left(\underbrace{-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}}_{=0}\right) + \bar{k}\left(\underbrace{-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}}_{=0}\right) = 0$$

È una proprietà utilizzata in distribuzioni di campi non banali. Ad esempio potremmo calcolare il potenziale di un anello carico (sul suo asse)



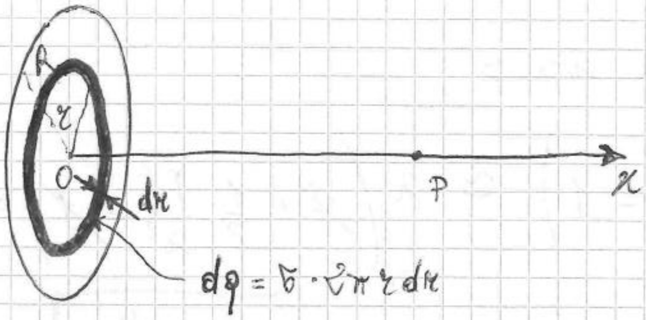
Calcoliamo il contributo infinitesimo dV e sommiamo su tutto l'anello.

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

Vediamo ora il potenziale di un disco carico (sul suo asse)

Prendiamo il nostro disco scomponendolo in anelli finiti

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$



$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma\cdot \cancel{2\pi} r\,dr}{2\,\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma\, r\,dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Sappiamo che la derivata di

$$\frac{d}{dr}\sqrt{r^2+x^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(r^2+x^2\right)^{-1/2}\cancel{2}r = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

Questo vale per le $x > 0$

Per quanto riguarda il campo avremo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}-1\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

Perché sappiamo che è diretto lungo x

Si può quindi verificare che a grandi distanze questi oggetti sono visti come punti forma.

Se $x \gg R$ mi aspetto di trovare una carica puntiforme

Ma la domanda importante è come va a zero?

$x \gg R$ il termine dominante sarà il seguente

$$\sqrt{R^2+x^2}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}-1\right)$$

$\Rightarrow V \equiv V(z)$ funzione di z

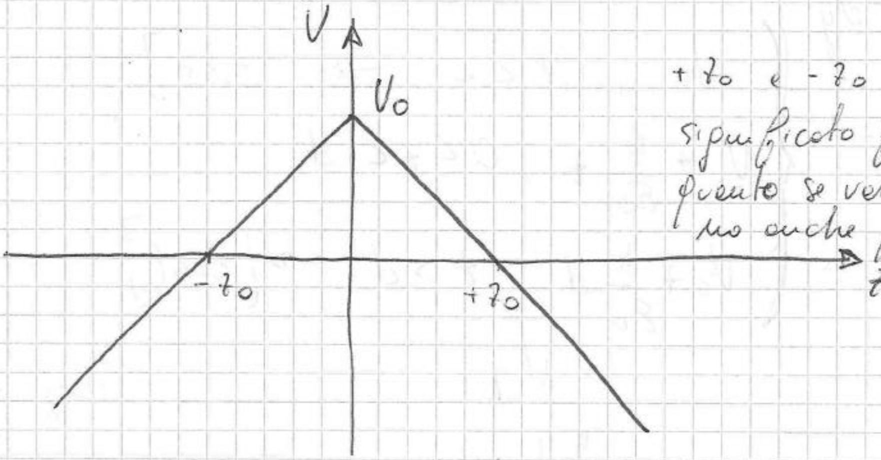
$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z \qquad [= -E_+]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z < 0 \end{cases}$$

$$V \equiv V(z) = \begin{cases} V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z > 0 \\ V_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z < 0 \end{cases}$$

dove $V_0 = V(z=0)$ è il risultato di V in $z = 0$

Possiamo rappresentare tale funzione sul piano (z, V)



$+z_0$ e $-z_0$ non hanno significato fisico, in quanto se vario V_0 variano anche questi.

In questo caso particolare qualunque sia V_0 il potenziale va sempre a $-\infty$.

Tale grafico sta ad indicare che se io metto una carica di 1C in un qualsiasi punto la risposta del potenziale sarà quella disegnata.

Se invece il piano fosse stato caricato negativamente, il grafico veniva disegnato al contrario.

Per questo e quando il condensatore ora prendiamo un altro piano carico negativamente e lo poniamo a una certa distanza che chiamiamo d.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 340

SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE

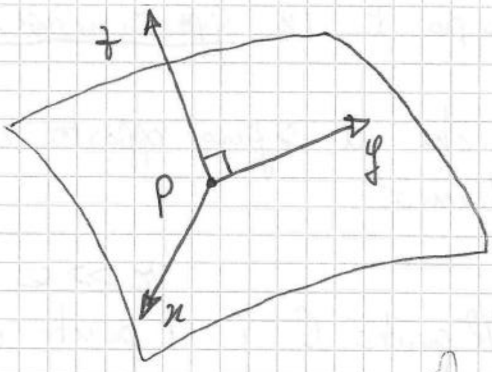
È un luogo geometrico definito dall'equazione

$$V(x, y, z) = \text{costante} \rightarrow \text{Potenziale costante}$$

Un esempio di tali superfici possono essere le curve di livello di una cartina geografica. Vediamo le proprietà di tali superfici

PROPRIETÀ DELLE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

- 2 superfici equipotenziali non si intersecano mai
- Sono perpendicolari al campo elettrostatico $\bar{E}$



x, y sono tg alla sup. e.p.

z è $\perp$ alla sup. e.p.

Vediamo le componenti del campo elettrostatico $\bar{E}$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{E} = E_z \bar{k} \perp \text{superficie equipotenziale}$$

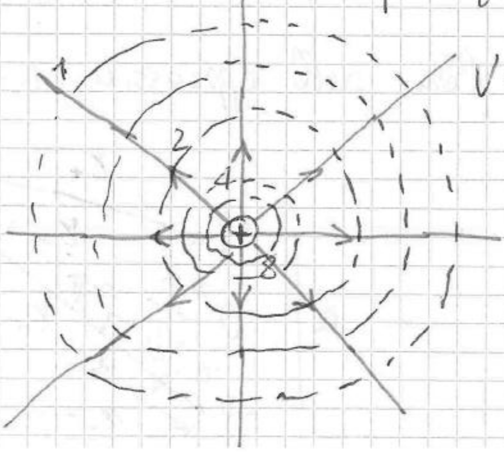
Quindi il campo $\bar{E}$ dipende solo dalla componente lungo z.

Perché su tutta la superficie il campo $\bar{E}$ è costante

Se le superfici equipotenziali sono a ΔV = costante allora sono più fitte dove il campo elettrostatico è più intenso.

Ciò significa che la variazione di potenziale è più vicina spazialmente.

Vediamo le s. ep. di una carica puntiforme:



V = costante

— linee di forza

- - Tracce della sup. equipotenziale

Quindi con tali approssimazioni posso ricavare che:

$$V(r,\theta) = \frac{q\, a \cos\theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

Quello che conta è quindi solo il prodotto $q \cdot a$ che chiamiamo momento di dipolo.

$$\boxed{p = q \cdot a} \longrightarrow \text{MOMENTO DI dipolo}$$

$$\boxed{\bar{p} = p\bar{k} = q a \bar{k}} \quad \text{VETTORE MOMENTO DI DIPOLO}$$

Quindi possiamo scrivere il potenziale come:

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\bar{p}\cdot\bar{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

il versore $\bar{u}_r$ è il versore che unisce $\overline{OP}$

$$\bar{p}\cdot\bar{u}_r = |\bar{p}|\cdot|\bar{u}_r|\cos\theta$$

Per le superfici equipotenziali avremo:

$$V = \text{costante} \Rightarrow r^2 = \text{costante} = \cos\theta$$

Per quanto riguarda il campo $\bar{E}$ avremo che:

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\cdot V} \qquad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Che in componenti polari ~~avremo~~:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} & \text{Componente radiale} \\[2ex] E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \text{Componente tangenziale} \end{cases}$$

Il campo di dipolo va a zero quindi nel seguente modo

$$\begin{cases} E \sim \dfrac{1}{r^3} \\[2ex] V \sim \dfrac{1}{r^2} \end{cases}$$

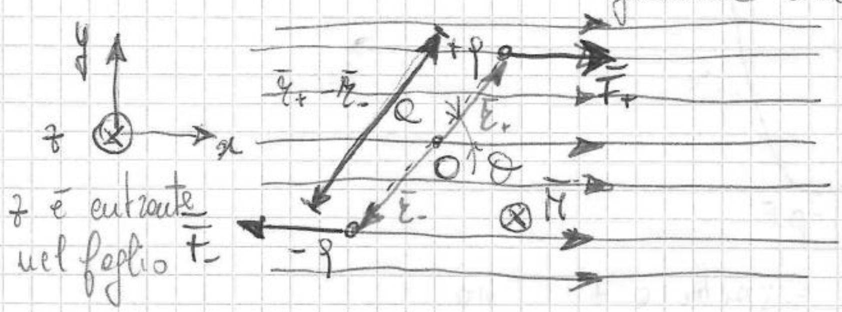
Il campo di dipolo va a zero più velocemente di quello di una carica puntiforme. Per una carica puntiforme infatti si aveva:

$$\begin{cases} E \sim \dfrac{1}{r^2} \\[2ex] V \sim \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

Vediamo cosa succede quando prendiamo un dipolo e lo sottoponiamo ad un campo elettrostatico costante nello spazio.

$\overline{E}$ = costante

Disegno il dipolo in una orientazione generica nello spazio



$$\begin{cases} \overline{F}_+ = +q\overline{E} \\ \overline{F}_- = -q\overline{E} \end{cases}$$

L'inclinazione del dipolo non è perpendicolare alla direzione del campo ma è inclinata di un certo angolo θ

Risultante delle forze

$$\overline{F}_+ + \overline{F}_- = 0$$

Risultante dei momenti rispetto a O

$$\overline{M} = \overline{r}_+ \wedge \overline{F}_+ + \overline{r}_- \wedge \overline{F}_- = \overline{r}_+ \wedge q\overline{E} + \overline{r}_- \wedge \underbrace{(-q\overline{E})}_{\text{verso opposto al campo}} =$$

$$= q(\overline{r}_+ - \overline{r}_-) \wedge \overline{E} = \overline{p} \wedge \overline{E} \qquad p = q \cdot a$$

Il dipolo tende ad orientarsi verso la direzione del campo.
Calcoliamo il momento introducendo l'angolo θ di inclinazione del dipolo rispetto al campo. $\qquad (\overline{r}_+ - \overline{r}_-) = \overline{a}$

$$\boxed{M_z = p E \sin\theta}$$

l'asse z è perpendicolare al campo

La risultante del momento M_z è perpendicolare al campo e il verso può essere entrante o uscente.
Ma se volessi essere coerente con θ applico la regola della mano destra. Poichè θ è antiorario il segno di z sarà positivo.
Se invece θ fosse stato orario il verso di z doveva essere negativo.
Calcoliamo il **momento d'inerzia** rispetto a z.
Possiamo scrivere:

$$M_z = -\frac{dE_p}{d\theta}$$

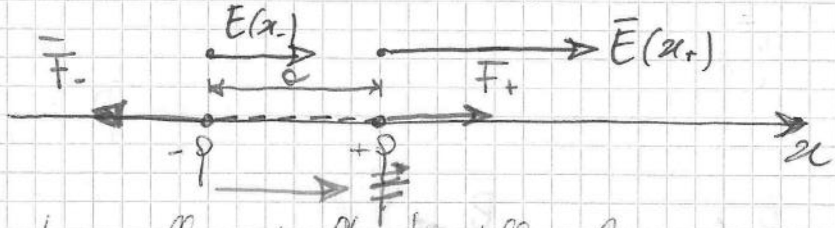
Equazione assimilabile a quella di un pendolo semplice.

dove: $E_p = -pE\cos\theta = -\overline{p} \cdot \overline{E}$ → prodotto scalare

Vediamo ora cosa succede in un campo non uniforme.

$$\bar{E} = E(x)\,\bar{i} \qquad \bar{p} = p\,\underline{i}$$

Supponiamo che il dipolo sia parallelo all'asse x.



Cosa posso dire sulla risultante delle forze

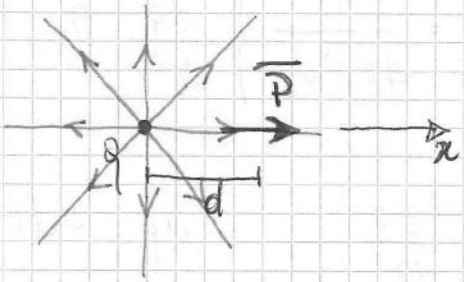
Risultante delle Forze

$$\bar{F} = \bar{F}_+ + \bar{F}_- = q\,\bar{E}(x_+) - q\,\bar{E}(x_-)$$
$$= q\left[E(x_+) - E(x_-)\right]\underline{i} =$$
$$\simeq q a \frac{\partial E}{\partial x}\,\underline{i} = p\,\frac{\partial E}{\partial x}$$

La risultante delle forze è nella direzione di x con verso positivo che chiamiamo $\bar{F}$.

Esercizio 2

Un dipolo elettrico di momento $\bar{p}$ è posto a $d = 1\,m$ da una carica puntiforme $q = 10^{-10}\,C$ parallelamente al campo elettrico generato da q. Se sul dipolo agisce una forza $F = 1N$, quanto vale $\bar{p}$? Come deve essere orientato il dipolo affinché la forza sia attrattiva?



$$U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$$

Consideriamo solo la direzione x di traccia.

$$F = F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-pE\cos\theta\right)$$

$$= p\cos\theta\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$F = -\frac{p\cos\theta\, q}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

la forza attrattiva si ha per $F<0$ e se $\cos\theta > 0$

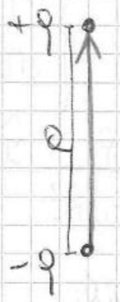
Sostituendo i valori numerici si ha:

$\cos\theta = 1$

$x = d$

$$\longmapsto\ p = \frac{F\,2\pi\varepsilon_0 d^3}{q} = 0{,}55\ C\cdot m$$

Quando p è parallelo ad $\bar{E}$ si genera una forza verso il campo elettrico in modulo maggiore. In questo caso è attrattiva, perché il maggior modulo si ha vicino la carica e diminuisce man mano che ci si allontana dalla carica.



$$\boxed{\bar{p} = q\,a\,\bar{u}}$$

Il verso positivo va da $-q$ a $+q$ e la direzione è quella di a.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 340

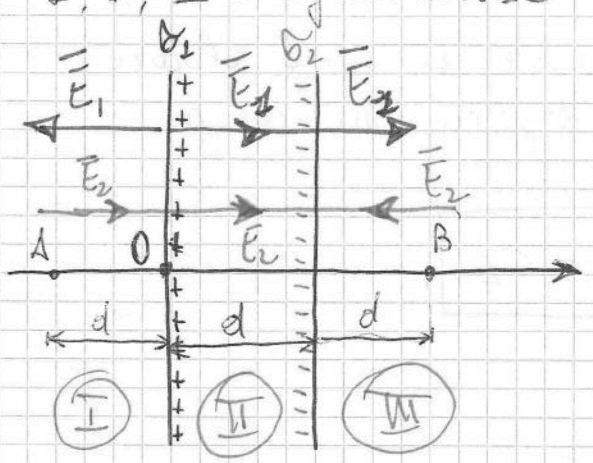
Per la semicirconferenza di destra invece si avrà un risultato analogo. Facendo la somma avrò:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{u}_r$$

Esercizio 4

Due conduttori piani paralleli posti a distanza d molto piccola rispetto alla loro estensione.

I, II, III: regioni diverse



$$d = 0{,}01\ m$$
$$\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$$
$$\sigma_2 = -10^{-8}\ C/m^3$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V \rightarrow E = -\frac{dV}{dx}$$

In caso unidimensionale

$$dV = -\bar{E}\,dx$$

$$V = -\int E\,dx$$

Sappiamo che il campo E_1 ed $\bar{E}_2$ sono:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \\[2ex] \bar{E}_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\bar{E}_I = \frac{|\sigma_2| - |\sigma_1|}{2\varepsilon_0}\,\hat{u}_x$$

$$\bar{E}_{II} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\,\hat{u}_x$$

$$\bar{E}_{III} = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\,\hat{u}_x$$

Il campo è uniforme nella regione II

$$V = -\int E\,dx = -E\int dx$$

Se il campo $\bar{E}$ è costante si ha tale espressione

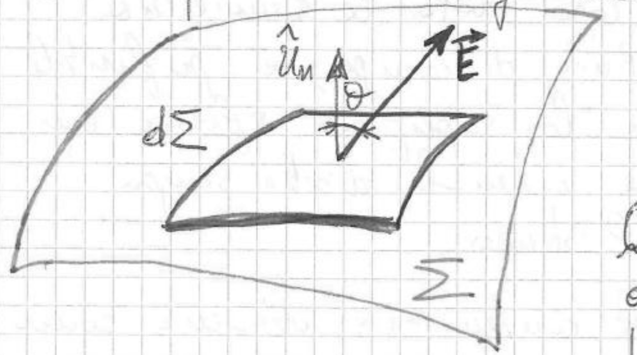
Abbiamo visto che il campo E.S. è un campo conservativo, e come tale ammette potenziale. Ora vediamo la legge di Gauss applicata ad un campo Elettrostatico.

LEGGE DI GAUSS

È una legge che ci permette di calcolare il campo elettrostatico in modo più elegante ~~di~~ quello visto fino ad ora e si applica in particolari condizioni di simmetria.

Supponiamo che il campo elettrostatico ~~è~~ un campo centrale, cioè dipende solo dall'intensità delle cariche e dalla loro distanza.

Supponiamo di avere una superficie elementare $d\Sigma$ sulla quale individuo un versore normale a tale superficie. Immaginiamo che in un punto dello spazio vi sia un sistema di cariche quindi sarà definito un certo campo elettrico $\vec{E}$. Definiamo il flusso elementare del campo elettrico lungo $d\Sigma$ che indichiamo con $d\Phi$, come:



$$\boxed{d\Phi = \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma}$$

FLUSSO DEL CAMPO E.S.

Quindi lungo tutta la superficie Σ avremo l'espressione seguente:

$$\boxed{\Phi = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma}$$

È un integrale di superficie del prodotto scalare di due vettori. Il flusso non è definito solo per il campo elettrostatico, ma in generale per qualsiasi tipo di campo, pensiamo ad esempio al flusso di un liquido, è solo che in questo caso non si sposta alcuna materia!

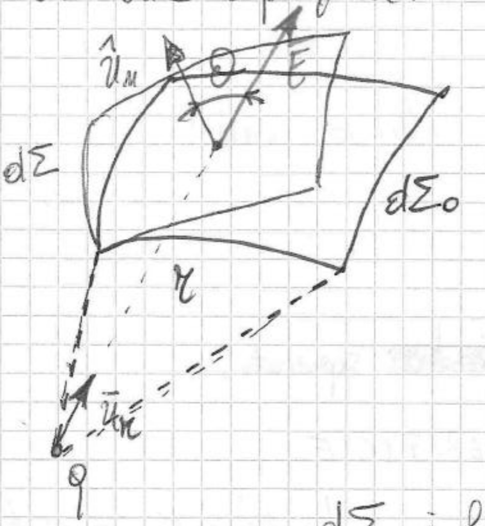
Se la superficie è chiusa si indica mettere un cerchio sul simbolo dell'integrale, e in tal caso il teorema di Gauss dice che:

$$\boxed{\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{\sum_i q_i^{int}}{\varepsilon_0}}$$

TEOREMA DI GAUSS Per superficie chiusa

Proviamo ora a dimostrare la Legge di Gauss partendo appunto dalla conoscenza del campo E appena trovata, e calcolando il flusso Φ attraverso una superficie.

DIMOSTRAZIONE della LEGGE DI GAUSS



$$d\Phi = \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n}\, d\Sigma$$

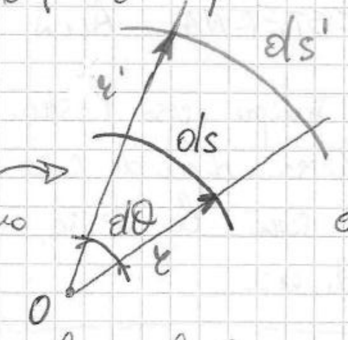
$$\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n = |\hat{u}_r| \cdot |\hat{u}_n| \cdot \cos\theta$$

$d\Sigma_0$ è la proiezione di $d\Sigma$ nella direzione del versore $\hat{u}_r$, proiezione su una sfera di raggio r applicata sulla carica q. Quindi diventa:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r$$

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d\Sigma_0}{r^2}\right)$$

dove: $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\theta$

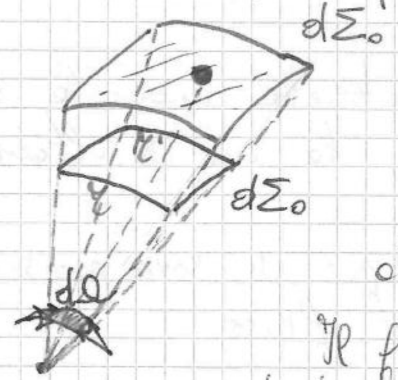


Il rapporto tra ds e r è costante

Per la definizione di angolo abbiamo

$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds'}{r'}$$

In questo caso però si parla di angolo solido, cioè di angolo in tre dimensioni, visto cioè tra due superfici che si intersecano: Vediamo tale angolo:



Il rapporto indicato di seguito è sempre costante

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{d\Sigma_0'}{r'^2}$$

Per la stessa definizione di angolo solido abbiamo le formule sopra.

Il flusso dipende solo da $d\Omega$ e non dalla distanza della superficie $d\Sigma$.

Se a priori posso scegliere una superficie chiusa in cui è presente il sistema di cariche posso sapere già il valore del campo.

$$\Phi = \oint \overline{E}\, \hat{u}_n\, d\Sigma = \oint \left(\Sigma_i \overline{E}_i\right) \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = \Sigma_i \underbrace{\left[\oint \left(\overline{E}_i \cdot \hat{u}_n\right) d\Sigma\right]}_{\Phi_i}$$

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \frac{q_i^{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_i q_i^{int}}{\varepsilon_0}$$

questa dim è un classico della Fisica II

Passiamo ora dalla forma scritta ad integrale alla forma scritta differenziale. Dimostrazione della legge di Gauss per la forma differenziale.
Prendiamo il teorema della divergenza che dice:

$$\Phi = \oint_\Sigma \overline{E} \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = \int_{\tau_\Sigma} \overbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \overline{E}\right)}^{\text{divergenza}} d\tau = \int_{\tau_\Sigma} \left(div \cdot \overline{E}\right) d\tau$$

Quindi a primo e secondo membro avremo nella legge di Gauss

$$\boxed{\int_{\tau_\Sigma} \overline{\nabla} \cdot \overline{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau_\Sigma} \rho\, d\tau}$$

LEGGE di GAUSS in forma differenziale

E' valida se le due funzioni integrande sono uguali, e cioè se:

$$\boxed{\overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

la funzione integranda a primo membro deve essere uguale alla funzione integranda a secondo membro.

Facendo un piccolo riepilogo sappiamo che per il campo elettrostatico, avevamo:

$$\boxed{\overline{E} = -\nabla V}$$

Il campo $\overline{E}$ è l'opposto del gradiente per il potenziale

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

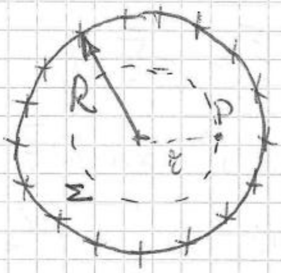
$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

FORMA CONTRATTA

E' utile in situazioni particolari

Ora vediamo cosa succede all'interno della sfera:

$\boxed{r < R}$



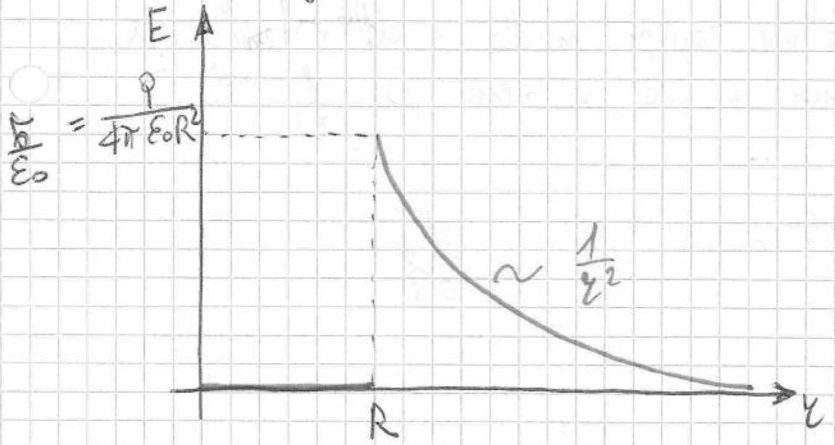
Avremo il valore

$$E 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$$

Le cariche interne sono zero e quindi il campo E sarà nullo.

Valgono gli stessi ragionamenti di simmetria visti prima.

Facciamo un grafico (E, r) e vediamo come è distribuito il campo $\bar{E}$



Abbiamo un punto di discontinuità che è sulla superficie della sfera

Si può esprimere anche in base alla densità di carica σ.

$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma} = \frac{q}{\Sigma} = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Valore della discontinuità sull'asse $\bar{E}$.

Vediamo il potenziale di tale sfera. Sappiamo che per definizione:

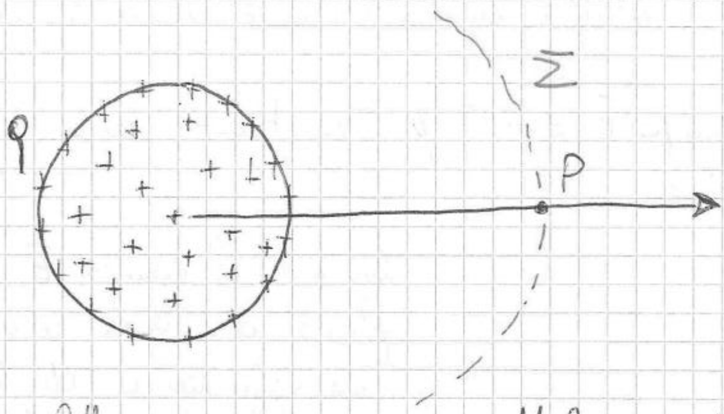
$$V_A - V_B = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} \qquad \Delta V = -\int_A^B E \cdot ds$$

Si otterrà una espressione che è la stessa di quella della carica puntiforme, però qui q è la carica totale.

$\boxed{r > R}$ $\quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$

Ipotizziamo ora di avere una distribuzione uniforme nel volume di una sfera e vediamo cosa cambia dal caso visto prima.

$r > R$



Σ è la superficie arbitraria di Gauss.

Il campo elettrico va per raggi. Nel caso di punto esterno non cambia niente.

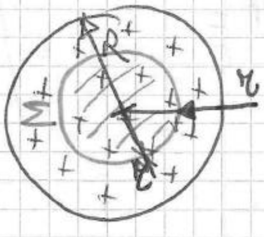
$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \Sigma E = E 4\pi r^2 \qquad \boxed{\Sigma = 4\pi r^2}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r > R$$

È la stessa distribuzione, basta quindi che la simmetria sia sferica.
Vediamo cosa cambia all'interno

$r < R$ $$E 4\pi r^2 = \frac{q^{int}}{\varepsilon_0}$$

Di tutte le cariche devo considerare solo quelle interne



Poichè abbiamo ipotizzato distribuzione di carica uniforme avremo

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \to \tau$$

$$q^{int} = \int_{\tau_\Sigma} \rho \, d\tau = \rho \tau^{int} = \frac{q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} \cdot \cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r^3 \qquad dq = \rho \, d\tau$$

$$q^{int} = q \frac{r^3}{R^3} \qquad \overbrace{E 4\pi r^2}^{\Phi} = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \sum_i q_i^{int}$$

Per $r > R$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{C}$$

Non ci sono costanti additive perchè ho già propagato all'∞

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

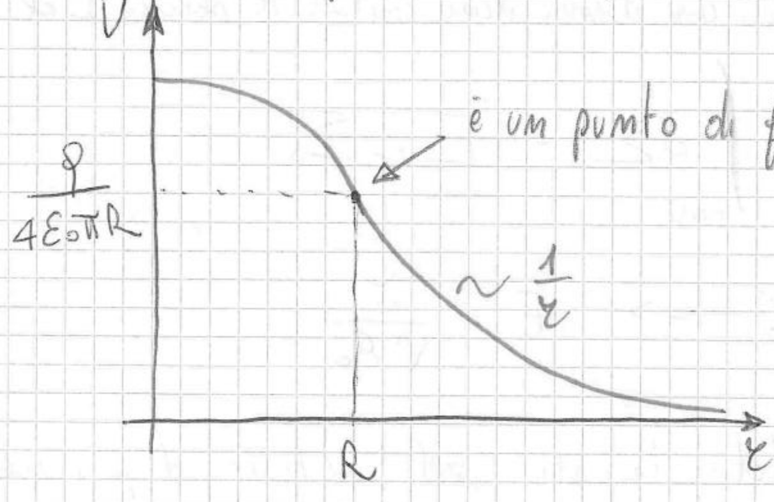
Ovviamente devo avere $V(r) = V(R)$ perchè si devono saldare.
Per $r < R$ sostituisco nelle formule trovate prima

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Che scritto in modo diverso diventa:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

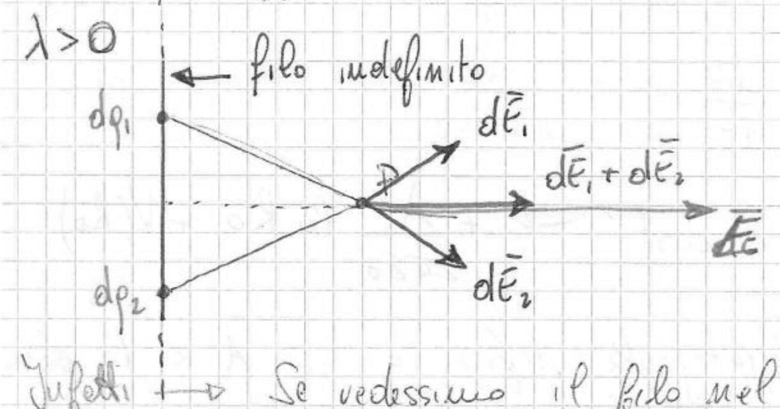
Vediamo ora il grafico del potenziale

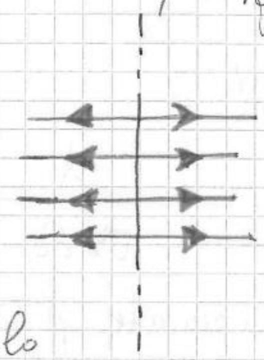


Vediamo ora il caso di SIMMETRIA CILINDRICA: Filo indefinito uniformemente carico, avente densità di carica pari a λ.

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost}$$

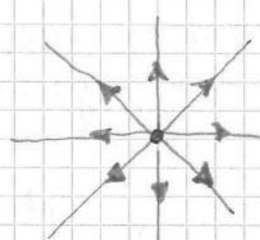
Disegniamo le linee di campo che non sono equispaziate





In queste figure sembra essero equidistanti ma non lo sono.

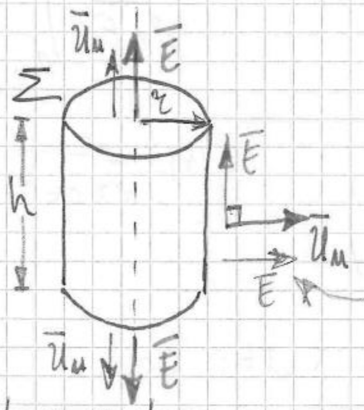
Infatti ⟶ Se vedessimo il filo nel suo profilo avremmo:



È molto simile al modello delle linee di campo di una singola carica

Prendo una superficie Σ arbitraria su tutto il filo

questo per applicare la legge di Gauss



$$\Phi_\Sigma(\bar{E}) = \oint_\Sigma \bar{E}\cdot\bar{u}_n\, d\Sigma = \frac{q^{int}}{\varepsilon_0}$$

Il campo non dovrebbe avere questa direzione?

$$q_{int} = \lambda h$$

$$\Phi_\Sigma(\bar{E}) = \underbrace{\Phi_{basi}(\bar{E})}_{\bar{E}\cdot\bar{u}_n = 0} + \Phi_{sup.\,laterale}(\bar{E})$$

Quindi si riduce a

$$\Phi_\Sigma(\bar{E}) = \int_{\Sigma_{lat}} E(r)\, \overbrace{\bar{u}_n\cdot\bar{u}_n}^{=1}\, d\Sigma = E(r)\int_{\Sigma_{lat}} d\Sigma = E(r)\cdot 2\pi r h$$

Sulla superficie laterale $|\bar{E}|$ è costante $\qquad q = \lambda h$

Mettiamo queste espressioni nella legge di Gauss e avremo:

$$E(r)\cdot 2\pi r \cancel{h} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

Ogni volta che introduciamo una lunghezza infinita il campo viene di un esponente [illegible]

CONDUTTORI

Parliamo essenzialmente di conduttori solidi metallici.
Sono materiali che hanno elettroni liberi di muoversi nei loro atomi e che sono in grado di trasportare "cariche" elettriche. Parleremo in generale di conduttori in equilibrio elettrostatico, cioè gli elettroni liberi e quindi la distribuzione media delle cariche è costante in funzione del tempo.
Questi materiali hanno le seguenti proprietà:

1. $\boxed{\vec{E} = 0}$ in qualsiasi punto interno al conduttore, questo quando siamo in condizioni di equilibrio elettrostatico.

Da questa proprietà discendono via via le altre e cioè:

2. $\boxed{V = \text{costante}}$ in qualsiasi punto interno al conduttore
3. $\boxed{\rho = 0}$ densità di carica nulla all'interno del conduttore però è possibile che sulla superficie la densità $\sigma \neq 0$

Ciò possiamo capirlo nel seguente modo:

$$\boxed{\operatorname{div} \bar{E} = \bar{\nabla} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$\bar{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$ all'interno del conduttore.

4. ~~Alla~~ superficie il campo elettrostatico sarà

$$\boxed{\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \bar{u}_n} \rightarrow \text{Teorema di Coulomb}$$

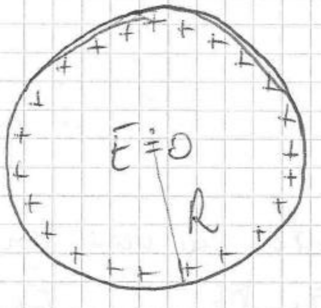
Vediamo di capire tale teorema sapendo che la superficie del conduttore è equipotenziale, e il campo $\bar{E}$ è perpendicolare sempre alla superficie equipotenziale. A proposito del modulo possiamo applicare la legge di Gauss.
Sappiamo quindi che:
1. Sup equipotenziale
2. $\bar{E} \perp$ superficie

Facciamo qualche esempio

Conduttore sferico, carico e isolato

isolato: che non interagisce con l'ambiente esterno

$\rho > 0$

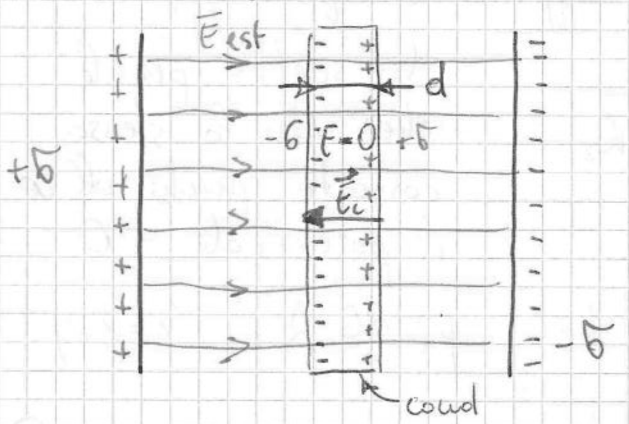


Carica uniformemente sulla superficie
Se è caricato quindi uniformemente sulla superficie, avrò $\sigma = cost$

$$\boxed{\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}}$$ densità di carica superficiale

Se tolgo una carica sulla superficie le altre si ridistribuiscono uniformemente su tutta la superf.

Lamina conduttrice piana indefinita con spessore d immersa in un campo uniforme generato da due piani infiniti (ovvero il nostro modello di condensatore)



$$\boxed{E_{est} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

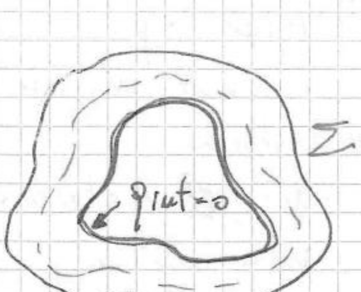
Cosa succede nel conduttore per avere campo $E = 0$.
Chiamiamo E_i campo indotto nel conduttore

$$\overline{E}_{est} + \overline{E}_i = 0 \implies \overline{E}_i = -\overline{E}_{est}$$

$$\implies E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Quindi le cariche sul conduttore saranno distribuite come in figura.
Le cariche continueranno a muoversi nel conduttore fino a quando il campo $\overline{E}$ diventerà nullo.
Questo è un esempio di induzione elettrostatica

Es. Conduttore cavo, carico



La proprietà fondamentale dei conduttori è quella di avere campo $\bar E$ nullo all'interno.
Possiamo introdurre una superficie Gaussiana che chiamiamo Σ.
Il flusso di un campo nullo è nullo. $(\Phi = 0)$

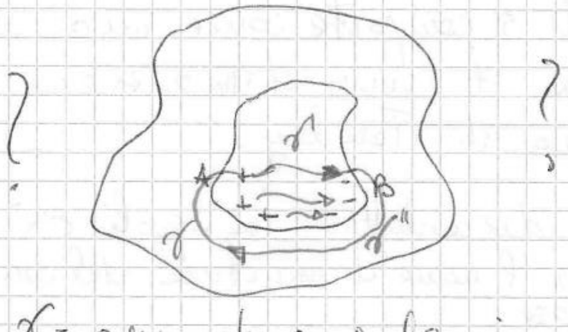
$$\Phi_\Sigma(\bar E) = \oint_\Sigma \bar E \cdot \bar u_n \, d\Sigma = 0$$

$$\Rightarrow \rho_{int} = 0$$

È possibile una situazione di questo tipo?

Non è possibile una separazione di carica in $+\rho$ e $-\rho$ sulle pareti del conduttore, ma si dice che la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre e soltanto sulla sup. esterna, anche se il cond. è cavo.

$$\boxed{\rho_{int} = 0}$$



Non ho circuitazione nulla

Calcoliamo la circuitazione lungo γ e vediamo cosa succede

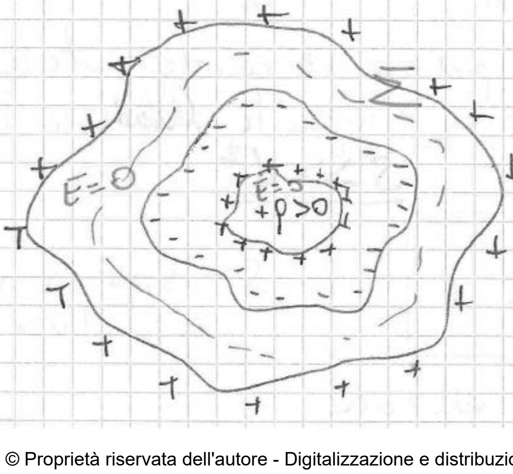
γ = curva chiusa qualsiasi

$$\oint_\gamma \bar E \cdot d\bar s = \int_{\gamma' \, A}^{B} \bar E \cdot d\bar s + \underbrace{\int_{\gamma'' \, B}^{A} \bar E \cdot d\bar s}_{=0} = \int_{\gamma' \, A}^{B} \overbrace{\bar E \cdot d\bar s}^{>0} > 0$$

IMPOSSIBILE

Questo risultato è allora impossibile.
L'interno del conduttore è insensibile rispetto a quello che accade sulla superficie dello stesso.

Conduttore cavo, neutro, che contiene al suo interno un conduttore carico.



Se prendessimo una Σ gaussiana il campo all'interno del cond. è $= 0$

$$\Phi_\Sigma(\bar E) = 0 \Rightarrow \rho_{int} = 0 =$$

$$= 0 = +\rho - \rho$$

L'unica possibilità è che nascano delle cariche negative all'interno.

Quindi la carica immagazzinata sarà proporzionale a ΔV

$$q \propto \Delta V$$

In fisica ogni volta che c'è una proporzionalità è importante la costante di tale proporzionalità.
In questo caso tale costante è chiamata capacità e indicata con C.

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \qquad \boxed{C = \frac{q}{\Delta V}} \rightarrow \text{Capacità di un condensatore}$$

Unità di misura di questa capacità è il **FARAD** (F)

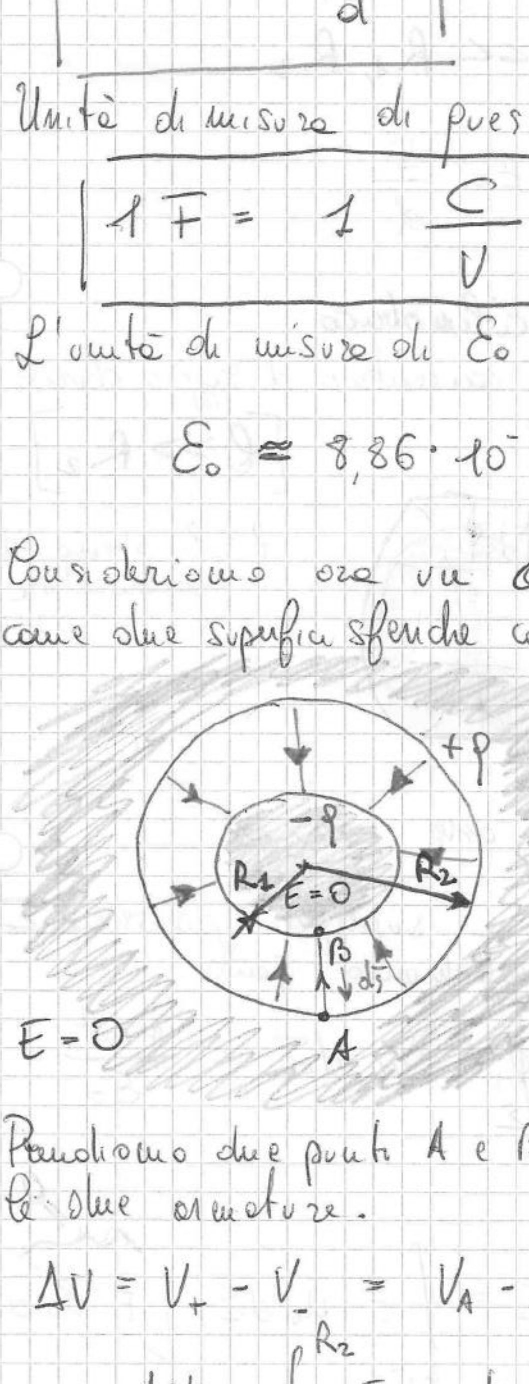
$$\boxed{1 F = 1 \frac{C}{V}}$$

È una unità di misura molto grande.

L'unità di misura di ε_0 è:

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}86 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} = 8{,}86 \frac{pF}{m} \quad \left[\frac{\text{picofarad}}{\text{metri}}\right]$$

Consideriamo ora un **condensatore sferico**; si può immaginare come due superfici sferiche concentriche.



Calcoliamo la d.d.p. e introduciamo la capacità.
Il campo all'interno dei conduttori sarà certamente $= 0$

Per le linee di campo; vanno dirette da $+q$ a $-q$.

$$d\bar{s} = dr\,\bar{u}_r$$
$$\bar{E} = -E(r)\,\bar{u}_r$$

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \quad \text{Campo}$$

Prendiamo due punti A e B e calcoliamo la d.d.p. tra le due armature.

$$\Delta V = V_+ - V_- = V_A - V_B = -\int_{B_A}^{A_B} \bar{E}\cdot d\bar{s} = \int_B^A \underbrace{E \cdot ds}_{\text{moduli}} =$$

ha verso opposto $d\bar{s}$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \propto q$$

Quindi il flusso sarà:

$$\Phi_\Sigma = -E(r) \cdot 2\pi r \ell = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon_0 \ell r}} \qquad R_1 \leq r \leq R_2$$

Vediamo di calcolare la d.d.p. tra A e B.

$$\Delta V = V_+ - V_- = V_A - V_B = -\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

$$\Delta V = \int_B^A E(r)\, dr = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon_0 \ell} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

perché $\begin{cases} \bar{E} = -E(r)\bar{u}_r \\ d\bar{s} = dr\, \bar{u}_r \end{cases}$

Quindi la d.d.p. avrà l'espressione seguente

$$\Delta V = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \propto \quad \rho$$

Definisco la capacità come:

$$\boxed{C = \frac{\rho}{\Delta V} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Capacità del condensatore cilindrico

Facciamo anche per la condizione limite del condensatore piano. Cioè assumiamo che le due superfici sono molto vicine tra loro e non ci accorga così della curva. Avremo così:

$R_2 - R_1 << R_1, R_2$ chiamiamo: $h = R_2 - R_1$

→ dall'analisi ricordiamo che

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \ell}{\ln\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)}$$

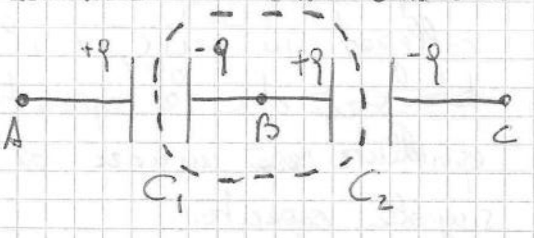
$\ln(1+x) = x + O(x^2)$ quindi posso approssimarlo con l'espressione di fianco

$$C \simeq \frac{2\pi \varepsilon_0 \ell}{\frac{h}{R_1}} = \varepsilon_0 \frac{\overbrace{2\pi R_1 \cdot \ell}^{\text{Area}}}{h}$$

La capacità equivalente di un condensatore equivalente collegato in parallelo è quindi sempre maggiore di quella di ciascun componente del condensatore equivalente (C_{eq}).

CONDENSATORI IN SERIE

Lo schema di due condensatori collegati in serie è:



Poiché il condensatore è un componente neutro deve esserlo anche il suo collegamento in serie. Quindi:

$$q_1 = q_2 = q$$

Vediamo la d.d.p. tra A e B.

$$\Delta V_1 = V_A - V_B$$

Invece tra B e C avremo

$$\Delta V_2 = V_B - V_C$$

Se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale ΔV_1, per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura affacciata e $+q$ sull'armatura di C_2 a questa collegata, dovendo essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica $-q$ sull'armature di C_2 a potenziale ΔV_2.

Se invece lo vediamo nel complesso abbiamo

$$\Delta V = V_A - V_C = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Si è scambiato rispetto al collegamento in parallelo. Il valore della carica è lo stesso nei due condensatori.

Sappiamo che

$$C_1 = \frac{q}{\Delta V_1} \qquad C_2 = \frac{q}{\Delta V_2}$$

Quindi la capacità equivalente sarà uguale a

$$C_{eq} = \frac{q}{\Delta V}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

È la somma dei reciproci delle capacità.

Nel collegamento in serie la capacità è sempre minore della capacità di ciascun condensatore.

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_2 + C_1}$$

Energia del campo elettrostatico

Il processo di carica di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero alla situazione $(+q, -q)$ con una d.d.p. $V = \frac{q}{C}$ tra le armature, consiste in una separazione di cariche e richiede un determinato lavoro che essendo il campo conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e da quello finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo.

Per eseguire il calcolo possiamo immaginare che la carica di un condensatore avvenga sottraendo una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine una carica $+q$ è stata trasferita da un'armatura all'altra, lasciando la prima con una carica $-q$, e si è stabilita tra le armature la d.d.p. V; la carica totale è in ogni istante nulla.

Se in una fase intermedia del processo la d.d.p. tra le armature è V', in quanto è già stata trasferita la carica $q' = CV'$ il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la d.d.p. V' è:

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche è:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Esso dipende quindi solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore.

Questo lavoro viene immagazzinato nel sistema sotto forma di energia potenziale elettrostatica. Assumendo che tale energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$ e scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C, carico con carica q e d.d.p. V:

$$C = \frac{q}{V}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Per semplicità di notazione indichiamo con V la d.d.p. e quindi la ~~capacità~~ del condensatore: $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

V indica la ddp

Per due condensatori in serie avremo:

$$U_e = \frac{Q^2}{2C_{eq}} = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2}$$

Perché per la serie di condensatori: $\rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$

Per due condensatori in parallelo invece abbiamo

$$U_e = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2$$ perché avevamo

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

Facciamo il caso di un condensatore piano

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \qquad V = E \cdot d \qquad V \text{ indica la d.d.p.}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Analizziamo ora la seguente espressione

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{\cancel{d}} E^2 \cdot d^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{S\, d}_{\text{Volume } \tau}$$

Introduciamo ora una densità di energia potenziale elettrostatica.

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Caso assolutamente GENERALE cioè anche se $\bar{E} \neq \text{cost}$.

$\tau = S \cdot d$ $\qquad$ τ è il volume di tutto il condensatore

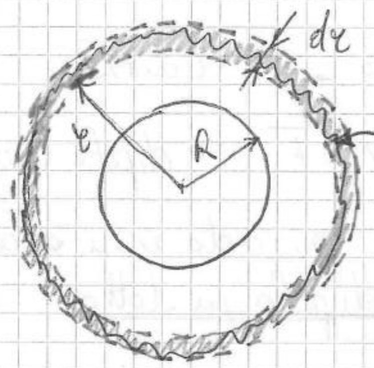
Integrandole su tutto lo spazio quindi avremo i seguenti casi:

$\rightarrow u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \rightarrow$ per $r > R$

$\rightarrow u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = 0 \rightarrow$ per $r < R$

$\equiv u_e(r)$ dipende solo da r.

$U_e = u_e \cdot \tau = \frac{1}{2} C V^2$



$d\tau = 4\pi r^2 dr$ In coordinate sferiche diventa:

$$U_e = \int u_e \, d\tau = \int^{\infty} u_e(r) \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{R^2} = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 R}$$

Abbiamo verificato il risultato anche con questo metodo.

Vediamo qualche proprietà dei condensatori per i materiali isolanti.

DIELETTRICI (ISOLANTI)

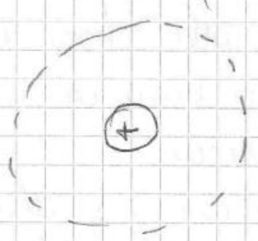
I dielettrici non hanno cariche libere, e quindi non ci sono elettroni liberi, cioè non ci sono orbitali che occupano tutto il volume del materiale, e sono elettricamente neutri.

Vediamo ora cosa succede a queste molecole o atomi neutri immersi in un campo elettrostatico $\bar{E}$. Possiamo avere:

1. Molecole: $\bar{p} = 0$ (non hanno momento di dipolo)

$\rightarrow E = 0$ (Se il campo è spento)

la distribuzione delle cariche è la seguente



CENTRO$_-$ $\equiv$ CENTRO$_+$

Quindi se il campo $\bar{E}$ è spento il centro delle cariche negative coincide con il centro delle cariche positive e per questo il momento di dipolo è nullo.

DIELETTRICI

Abbiamo visto che la carica di un conduttore si distribuisce sempre sulla sua superficie in modo tale che il campo generato da essa e da altre cariche eventualmente presenti sia nullo all'interno del conduttore. Questo è dunque equipotenziale e il valore del potenziale dipende dalla distribuzione di tutte le cariche presenti.
Vogliamo studiare come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene riempito con un materiale isolante.
Consideriamo un condensatore piano carico e isolato, in modo che la carica sulle armature resti costante. Se q_0 è il valore della carica, distribuita con densità uniforme σ_0, tra le armature c'è un campo elettrico E_0 e una d.d.p. V_0 dati da:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad\qquad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$

C_0 è la capacità e h è la distanza tra le armature.
Introduciamo tra le armature senza toccarle, una lastra conduttrice di spessore $s < h$: si osserva che la d.d.p. tra le armature diminuisce.
Infatti sulle facce della lastra si formano due distribuzioni di densità σ_0 con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra; all'esterno invece il campo resta invariato e pertanto:

$$V = E_0 (h - s) < V_0$$

indipendentemente dalla posizione della lastra.
La presenza della carica indotta sulle facce della lastra può essere messa in evidenza toccando una faccia con una sferetta conduttrice sostenuta da un manico isolante e portando la sferetta a contatto con un elettroscopio; in tal modo si può anche verificare che sulle due facce le cariche sono di segno opposto.
Ripetiamo questo esperimento con una lastra di materiale isolante.
La d.d.p. tra le armature diminuisce e l'effetto, a parità di spessore s, è minore di quello rilevato con la lastra di conduttore. La d.d.p. diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore s della lastra e assume il valore minimo V_K, quando tutto lo

POLARIZZAZIONE DEL DIELETTRICO

$$\boxed{\langle \bar{p} \rangle = cost. \bar{E}}$$

la polarizzazione si indica con $\vec{P}$ ed è data da:

$$\vec{P} = \frac{N \langle \bar{p} \rangle}{\tau}$$

$\langle \bar{p} \rangle$ → proporzionale al campo $\bar{E}$

N/τ: Num. di dipoli × Unità di Volume

$\vec{P}$: momento di dipolo per unità di volume

Quindi avremo:

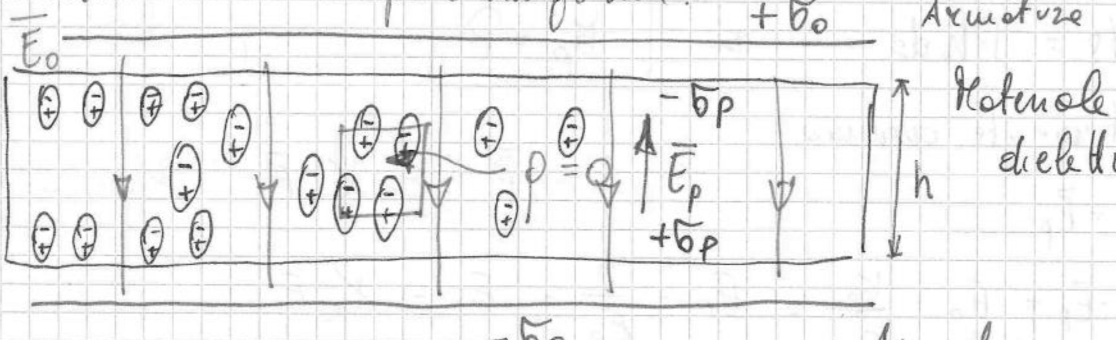
$$\boxed{\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}}$$ → Tale relazione è una relazione empirica e non esatta

χ_e : **suscettività elettrica** ed è un numero puro

Più grande è χ_e più polarizzato è il materiale in esame, cioè χ_e è la predisposizione di un materiale alla polarizzazione.

Quindi $\bar{P}$ non è una legge fondamentale della fisica, ma è una approssimazione che vale per piccoli campi.

Vediamo come si comporta un dielettrico nel suo insieme quando è immerso in un campo $\bar{E}$ uniforme.



Caso di un condensatore piano con all'interno una lastra di materiale dielettrico. Allora il dielettrico si polarizza come nel disegno. Quindi si accumulano sulle estremità delle cariche di polarizzazione $+\sigma_p$ e $-\sigma_p$. All'interno la densità di carica ρ è nulla.

Si usa scrivere anche

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

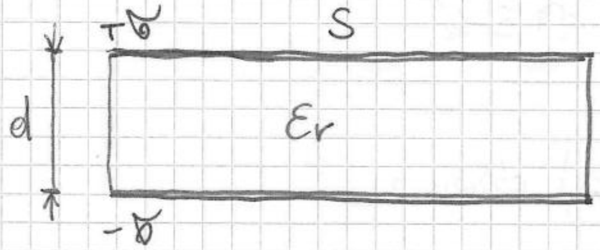
dove $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ Costante dielettrica assoluta del dielettrico

Infatti nel vuoto otteniamo

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_r = 1$$

I dielettrici sono interessanti dal punto di vista pratico. Vediamo un esempio in cui il dielettrico riempie tutto il condensatore.

Condensatore con dielettrico



Il materiale dielettrico tocca le due armature del condensatore, occupando tutto lo spazio tra le armature.

Supponiamo che:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad V = ? \; ; \; C = ? \; ; \; U_e = ?$$

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d \rightarrow \text{differenza di potenziale}$$

$$q = \sigma \cdot S$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\cancel{\sigma} \cdot S}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon} d} = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

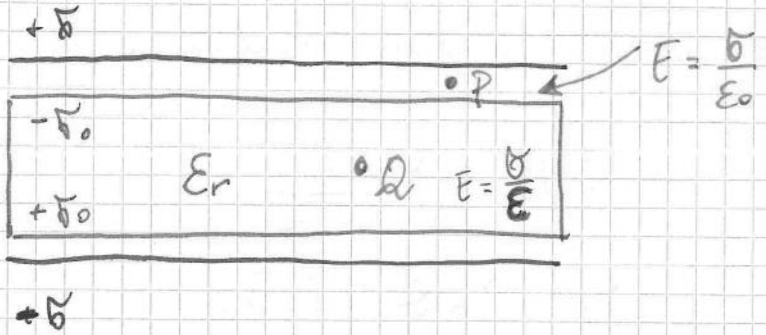
Quindi la capacità di un condensatore è proporzionale in modo diretto alla costante dielettrica assoluta.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Vediamo l'energia potenziale elettrostatica

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma \cdot S)^2}{\varepsilon \cdot \frac{S}{d}} = \frac{\varepsilon^{\cancel{2}} E^2 S d}{2 \cancel{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 (Sd)$$

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{U_e}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$



Consideriamo il punto Q e il punto P

(P) $D = \varepsilon_0 E = \sigma$

(Q) $D = \varepsilon E = \sigma$

Questo vettore quindi tiene conto solo delle cariche libere e la legge di Gauss in tal caso si scrive senza considerare le cariche di polarizzazione.

Gauss per $\bar{D}$

$$\Phi_\Sigma(\bar{D}) = \oint_\Sigma \bar{E} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = q \rightarrow \text{cariche libere}$$

In forma differenziale abbiamo

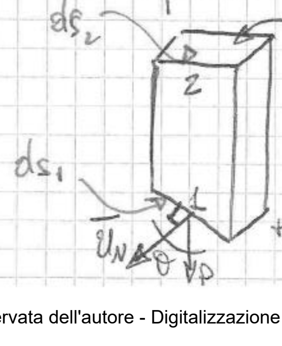
$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho \rightarrow \text{densità delle cariche libere}$$

DENSITÀ DI CARICA DI POLARIZZAZIONE

Abbiamo considerato un parallelepipedo infinitesimo

$\sigma_p = P$

Consideriamo però ora un volumetto di forma un po' diversa in modo che il versore normale $\bar{u}_n$ non sia parallelo a $\bar{P}$ e vediamo cosa succede dal punto di vista delle cariche di polarizzazione



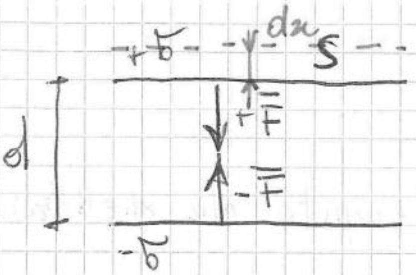
$-dq_p = -\sigma_2 \, dS_2$ $\qquad \sigma_2 = P$

$dS_1 = \frac{dS_2}{\cos\theta}$

$+dq_p = +\sigma_1 \, dS_1 = \sigma_1 \frac{dS_2}{\cos\theta}$

Esercizio 4.10 Pressione elettrostatica

Abbiamo due armature di un condensatore



Calcolare la forza $F = ?$

Calcolare la pressione elettrostatica

$$p = \frac{F}{S} = ?$$

Consideriamo l'energia elettrostatica del condensatore.

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} \cdot d$$

Immaginiamo di spostare l'armatura superiore di una quantità dx. Allora l'energia potenziale U_e aumenterà di una certa quantità pari al lavoro che dobbiamo compiere dall'esterno per spostare questa faccia di dx.

$$d \rightarrow d + dx$$

$$dU_e = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} dx = dW_{est} = F_{est}\, dx = F\, dx$$

Quindi la forza F sarà pari a:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Un modo alternativo per calcolare tale forza è quello di considerare una armatura immersa nel campo. Quindi:

$$F = q \cdot E_- = q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

il fattore $\frac{1}{2}$ è importante perché se non ci fosse calcoleremmo la forza totale sul condensatore.

Vediamo la pressione elettrostatica:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

A questo punto possiamo calcolare la d.d.p., sapendo che il campo è uniforme.

$$V = E_2 \, s + E_1 (h - s)$$

Sostituiamo i valori e otteniamo

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} s + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (h - s)$$

Calcoliamo ora la capacità del condensatore partendo dalla sua definizione:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{\cancel{\sigma} \cdot \Sigma}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon_0}\left[\frac{s}{\varepsilon_r} + (h - s)\right]} = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h - s + \frac{s}{\varepsilon_r}}$$

Questa capacità non è altro che la capacità equivalente di due condensatori in serie.

$$\frac{1}{C} = \frac{h - s + \frac{s}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 \cdot \Sigma} = \overbrace{\frac{h - s}{\varepsilon_0 \Sigma}}^{1/C_1} + \overbrace{\frac{s}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma}}^{1/C_2}$$

Confrontiamo l'espressione ottenuta con il caso in cui non ci fosse la lastra di rame.

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{h}$$

$$C = \frac{h}{(h-b)} C_0 = \dots =$$

$$E = \frac{V_0}{(h-b)} = \dots =$$

C_0 è la capacità iniziale

Sappiamo che $q = C \cdot V_0$ allora posso scrivere che:
$\hookrightarrow$ cost.

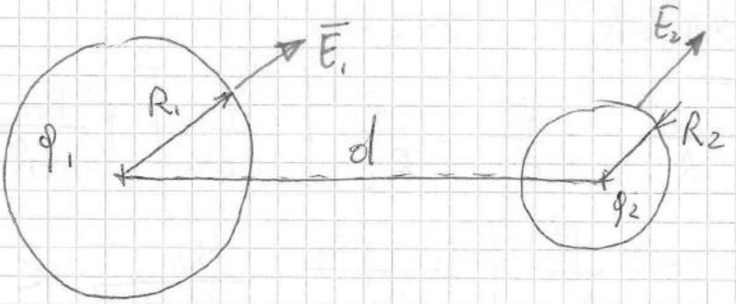
$$\Delta q = \Delta C \cdot V_0 = (C - C_0) V_0 = \left(\frac{h}{h-b} - 1 \right) C_0 V_0 =$$

$$\Delta q = \frac{b}{h-b} C_0 V_0$$

Esercizio 4.26

Due sfere conduttrici di diverso raggio:

$R_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ m
$R_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ m
$d \gg R_1$
$q = 10^{-10}$ C



Sottile filo conduttore $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ non porterà via nessuna carica

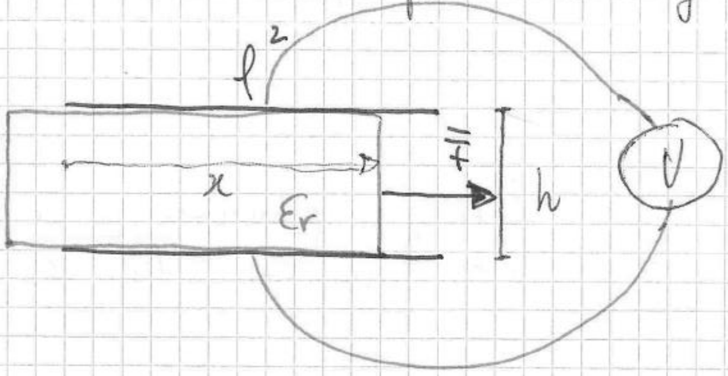
Le sfere sono collegate con un filo conduttore. Calcolare: $q_1 = ?$; q_2; $V = ?$; $E_1 = ?$; $E_2 = ?$; $\Delta V_e = ?$

La somma delle cariche è pari a q. e il potenziale è costante.

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 \\ V = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} q = q_1 + q_2 \\ \dfrac{q_1}{R_1} = \dfrac{q_2}{R_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = q \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \\ q_2 = q \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Esercizio 4.13 Forza di risucchio di una lastra nel condens.

Abbiamo un condensatore piano di lunghezza ℓ



$\varepsilon_r = 4 \quad h = 10^{-2}\,m$

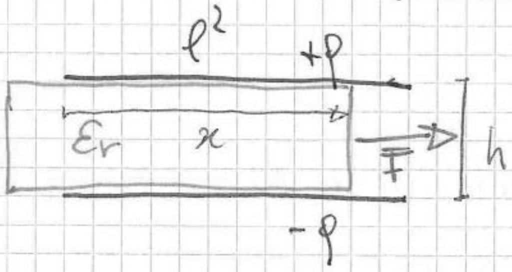
$V = 500V \quad \ell = 2\cdot 10^{-1}\,m$

$0 \le x \le \ell$

$F = ? \quad W = ?$

$U_{gen} = ?$

Se non è presente il generatore V avremo



$U_e(x) = ?$

$$U_e(x) = \frac{Q^2}{2C(x)}$$

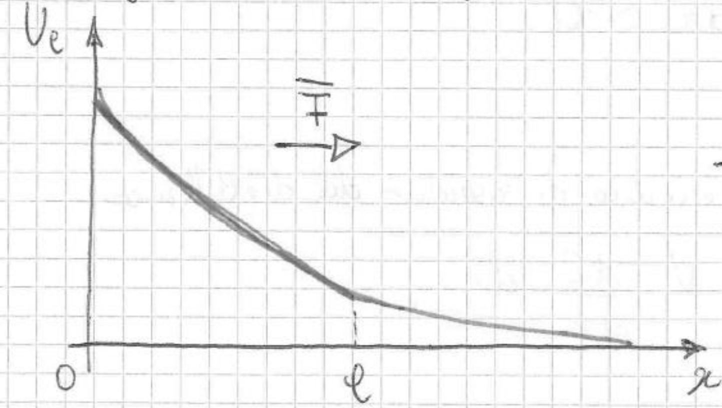
La geometria del condensatore cambia con x.
Vediamo come cambia con x.

superficie libera dal dielettrico

$$C(x) = C_{VUOTO} + C_{DIEL} = \frac{\varepsilon_0 \ell(\ell - x)}{h} + \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\ell x}{h} =$$

$$= \varepsilon_0 \frac{\ell^2}{h} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\ell}{h}x$$

Disegniamo U_e in funzione di x



U_e è funzione decrescente rispetto a x.

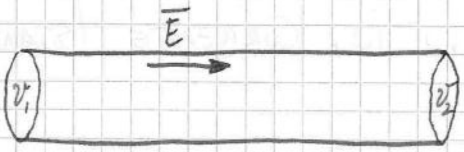
F è rivolta verso l'energia potenziale decrescente.

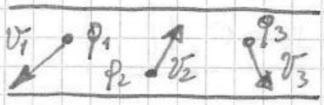
è importante questa espressione

$$F = -\frac{dU_e}{dx} = \boxed{\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}} = \frac{Q^2}{2\left[\varepsilon_0 \frac{\ell^2}{h} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\ell}{h}x\right]^2}\,\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\ell}{h}$$

LA CORRENTE ELETTRICA

Analizziamo situazioni in cui il campo elettrico non è costante nel tempo e quindi il potenziale non è costante e ciò porta ad avere un moto di cariche all'interno del conduttore. La prima situazione che consideriamo è quella di un filo conduttore sulle cui facce sono presenti due valori diversi di potenziale, ciò fa sì che le varie cariche elettriche si muovano ognuna con una propria velocità.





Se il campo elettrico è nullo le varie cariche si muovono con una propria velocità e con direzione diverse l'una dall'altra, ne segue che la velocità media dei portatori di carica (gli elettroni) è nulla:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{1}{N}\sum_i \vec{v}_i = 0}$$ VELOCITÀ MEDIA CON $\overline{E} = 0$

Se invece il campo elettrico non è nullo $(E \neq 0)$ le particelle risentono dell'azione del campo e si muoveranno tutte con la stessa velocità. Tale velocità è detta velocità di deriva e vale:

$$\boxed{\overline{v}_d = \frac{1}{N}\sum_i \overline{v}_i \neq 0}$$ VELOCITÀ DI DERIVA $\rightarrow E \neq 0$

In un modello semplificato diciamo che le velocità delle varie cariche hanno lo stesso verso, cioè il verso del campo.
Ora ciò che vogliamo fare è trovare delle relazioni tra la corrente elettrica e la differenza di potenziale.
Per avere una d.d.p. $(\Delta V = V_1 - V_2 = \text{costante})$ costante colleghiamo gli estremi del conduttore ad uno strumento detto generatore di forza elettromotrice, in questo modo si ha $\Delta V = \text{cost.}$

Definiamo la grandezza INTENSITÀ di CORRENTE ELETTRICA come la carica elettrica che attraversa ~~una~~ sezione del conduttore