appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 51

DATA : 24/03/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Regis

MATERIA : Geometria

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 170

PROGRAMMA

I. Algebra lineare
- spazi vettoriali
- sistemi lineari
- matrici
- autovalori e autovettori
- forme quadratiche e spazi euclidei

II. Geometria analitica piana e nello spazio
- coniche principali
- geometria differenziale delle curve

III. Funzioni reali di due o più variabili
- calcolo differenziale in più variabili

Paolo Valabrega

Consulenza: giovedì h 13 - 14

e-mail: D1123@studenti.polito.it

testo: Greco, Valabrega "Algebra lineare" ed 2009 (Levrotto, Bella)
Greco, Valabrega "Geometria analitica e differenziale" ed 2009

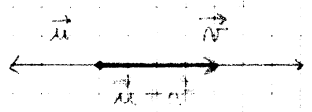
Esame: scritto + orale

Esercitatori { Luigi Corgnier LUIGI.CORGNIER@POLITO.IT
Chiara Baldovino CHIARA.BALDOVINO@POLITO.IT

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 170

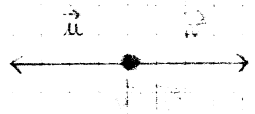
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 170

b) vettori paralleli di verso opposto



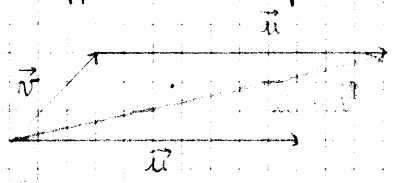
$\vec{u} + \vec{v} = \begin{cases} \text{direzione di } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \\ \text{verso del vettore di modulo maggiore} \\ \text{modulo} = \text{differenza} \end{cases}$

c) vettori di verso opposto e uguale modulo



$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ vettore nullo (segmento i cui estremi sono venuti a coincidere $|\vec{0}| = 0$).
(direzione e verso indeterminati)

REGOLA DEL PUNTA-CODA: trasliamo un vettore in modo tale che abbia come punto di applicazione la freccia dell'altro.



Questa definizione comprende tutti i casi particolari.

2. **Moltiplicazione per uno scalare** $a\vec{v}$

$a\vec{v} = \vec{w} \begin{cases} \text{direzione di } \vec{v} \\ \text{modulo } |\vec{w}| = |a||\vec{v}| \\ \text{verso} \begin{cases} \text{di } \vec{v} \text{ se } a>0 \\ \text{opposto a } \vec{v} \text{ se } a<0 \end{cases} \end{cases}$

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$a \cdot \vec{0} = \vec{0}$ e $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$a\vec{v} = \vec{0}$ se e solo se $a = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$

(T) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v}) = b(a\vec{v})$

Dim. bisogna analizzare per casi: - $a>0$, $b>0$ $\underbrace{(ab)\vec{v}}_{(ab)|\vec{v}|} = \underbrace{a(\underbrace{b\vec{v}}_{b|\vec{v}|})}_{ab|\vec{v}|}$

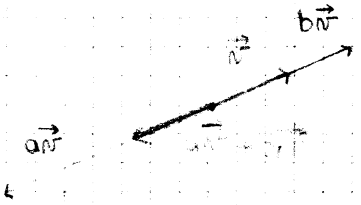
direzione e verso sono quelli di $\vec{v}$.

- $a<0$, $b>0$ etc...

(T) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

$a(\vec{v} + \vec{u}) = a\vec{v} + a\vec{u}$

Dim. Pensiamo $a>0$, $b<0$

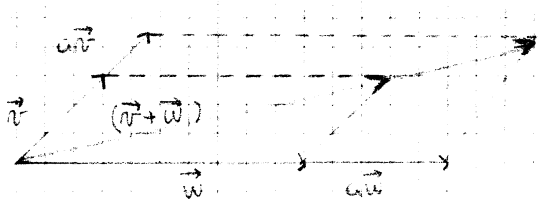


$a\vec{v}$ modulo: $a|\vec{v}|$

$b\vec{v}$ modulo: $b|\vec{v}|$

Se $a|\vec{v}| > b|\vec{v}|$, il verso di $a\vec{v} + b\vec{v}$ è quello di $a\vec{v}$ e il modulo è $a|\vec{v}| - |b||\vec{v}| = a|\vec{v}| + b|\vec{v}| = (a+b)|\vec{v}|$.

Dim.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 170

Proprietà:

- Dato $\vec{v} \neq \vec{0}$, gli si può associare il VERSORE NORMALIZZATO $\vec{v}_{norm}$, ossia il versore di modulo 1, in direzione e verso uguale a $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{v}_{norm} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

3. **Prodotto scalare** $\vec{v} \cdot \vec{u}$

$\vec{v} \cdot \vec{u}$ è un numero

$w = \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos\alpha$

- CRITERIO DI PERPENDICOLARITÀ se $\vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

  (non vale pertanto la legge di annullamento del prodotto).
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

  infatti $|\vec{v}||\vec{u}| \cos\alpha = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha$
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\vec{v} \cdot (a\,\vec{u}) = a(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (a\vec{v})\,\vec{u}$.
- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) \cdot (u_x\vec{i} + u_y\vec{j}) = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) \cdot (u_x\vec{i}) + (v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) \cdot (u_y\vec{j}) =$$
$$= (u_x\vec{i}) \cdot (v_x\vec{i}) + (u_x\vec{i})(v_y\vec{j}) + (u_y\vec{j}) \cdot (v_x\vec{i}) + (u_y\vec{j}) \cdot (v_y\vec{j}) =$$
$$= u_x v_x \vec{i} \cdot \vec{i} + u_x v_y \vec{i} \cdot \vec{j} + u_y v_x \vec{j} \cdot \vec{i} + u_y v_y \vec{j} \cdot \vec{j} = u_x v_x + u_y v_y.$$

$u_x v_x$ sono scalari, quindi possiamo trattarli come tali e raccoglierli davanti.

Il prodotto scalare rimane tra $\vec{i}$ e $\vec{i}$; $\vec{i}$ e $\vec{j}$; $\vec{j}$ e $\vec{j}$

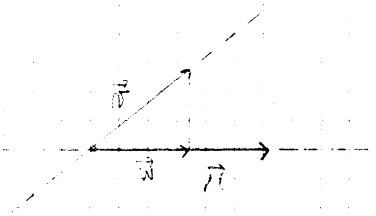
$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos 0° = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \cos 90° = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}| \cos 0° = 1$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y$$

Esercizio. Dati $\vec{v}$ e $\vec{u}$, trovare il vettore proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ ($\vec{w}$)



la proiezione ha la direzione di $\vec{u}$;

supponiamo che $|\vec{u}| = 1$

Per trovare la proiezione se $|\vec{u}| = 1$: $\boxed{\vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\,\vec{u}}$

$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cos\alpha$, infatti $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos\alpha = |\vec{v}| \cos\alpha$

Se $|\vec{u}| \neq 1$, si normalizza il vettore, e poi ci si comporta analogamente.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 170

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x\vec{i} + u_y\vec{i} + u_z\vec{k}) \times (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) =$$

$$= \cancel{u_x v_x \vec{i}\times\vec{i}} + u_x v_y \vec{i}\times\vec{j} + u_x v_z \vec{i}\times\vec{k} + u_y v_x \vec{j}\times\vec{i} + \cancel{u_y v_y \vec{j}\times\vec{j}} + u_y v_z \vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ u_z v_x \vec{k}\times\vec{i} + u_z v_y \vec{k}\times\vec{j} + \cancel{u_z v_z \vec{k}\times\vec{k}} =$$

$$= u_x v_y \vec{k} - u_x v_z \vec{j} - u_y v_x \vec{k} + u_y v_z \vec{i} + u_z v_x \vec{j} - u_z v_y \vec{i}.$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \vec{i}(u_y v_z - u_z v_y) + \vec{j}(u_z v_x - u_x v_z) + \vec{k}(u_x v_y - u_y v_x)$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i}(u_y v_z - u_z v_y) + \vec{j}(u_z v_x - u_x v_z) + \vec{k}(u_x v_y - u_y v_x).$$

<u>Esercizio</u> a) Proiettare il vettore $\vec{v} = (1,0,2)$ sulla retta definita dal vettore $\vec{u} = (-1,3,2)$

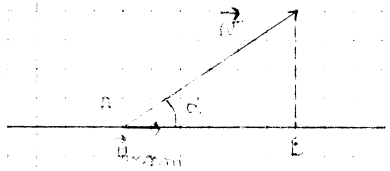
D. $\vec{u}$ serve solo la direzione $\rightarrow$ lo normalizziamo $\vec{u}_{norm} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$$\vec{u}_{norm} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,3,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$\overline{AB} = |\vec{v}|\cos\alpha = \vec{v}\ \vec{u}_{norm}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_{norm} = |\vec{v}|\cdot 1\cdot\cos\alpha$$



$$AB = -\frac{1}{\sqrt{14}} + 0 + \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$\vec{v}$ proiettato è $\vec{R} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}\vec{u}_{norm} = \left(-\dfrac{3}{14}; \dfrac{9}{14}, \dfrac{6}{14}\right)$

<u>Variante</u> Calcolare l'angolo fra $\vec{v}$ e $\vec{u}$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \frac{-1+4}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{14}}$$

b) Proiettare il vettore $\vec{v} = (1;0;2)$ sul piano perpendicolare al vettore $(1,1,1)$

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{z}$$

$$\vec{u}_{norm} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\vec{z} = (\vec{v}\cdot\vec{u}_{norm})\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right) = (1,1,1)$$

c) $\vec{u} = (1,2,3)$

$\vec{v} = (-1,3,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (2-9)\vec{i} + (-3-1)\vec{j} + (3+2)\vec{k} = -7\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1+6+3 = 8 \rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli.

oppure $(1,3,1) = (a, 2a, 3a)$ $\quad \begin{cases} -1 = a \\ 3 = 2a \\ 1 = 3a \end{cases} \rightarrow$ non sono paralleli

d) Dati $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{w} = 6\vec{i} + h\vec{j}$ trovare, se esistono, valori di h tali che $\vec{v} \parallel \vec{w}$

$$\rightarrow \vec{w} = a\vec{v} \rightarrow 6\vec{i} + h\vec{j} = a(3\vec{i} + 4\vec{j}) \rightarrow 6\vec{i} + h\vec{j} = a3\vec{i} + a4\vec{j}$$

$$\begin{cases} 6 = 3a \\ h = 4a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ \underline{h = 8} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 170

22 febbraio 2010

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ insieme di tutte le funzioni reali di variabile reale, dotato di due operazioni:

- SOMMA

$f+g: \; x \longrightarrow f(x)+g(x)$

$(f,g) \longrightarrow f+g$

$\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$

- PRODOTTO PER UN NUMERO $a \in \mathbb{R}$

$af: \; x \longrightarrow af(x)$

$(a,f) \longrightarrow af$

$\mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$

La somma di funzioni gode delle proprietà:

- COMMUTATIVA

$f+g: \; x \quad f(x)+g(x)$

$g+f: \; x \quad g(x)+f(x)$

perché $g(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R}$, pr. commutativa tra reali.

- ASSOCIATIVA

$(f+g)+h = f+(g+h)$

$x \to (f+g)(x)+h(x) \qquad x \to f(x)+(g+h)(x)$

$x \to [f(x)+g(x)]+h(x) = x \to f(x)+[g(x)+h(x)]$ perché $g(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R} \to$ pr. associativa tra reali

- $\exists$ FUNZIONE NULLA $\quad z(x)=0 \;\; \forall x$

$f+z: \; x \to f(x)+z(x) = f(x)+0 = f(x)$

- $\forall f \; \exists -f$

$f+\bar{f} = z$

$\bar{f}(x) = -(f(x))$

Il prodotto di funzioni per numero reale gode delle proprietà:

- $\exists$ ELEMENTO NEUTRO

$1f = f$

$1 \cdot f: \; x \longrightarrow 1 \cdot f(x) = f(x)$

- ASSOCIATIVA

$(a \cdot b) f = a \cdot (bf) = b(a \cdot f)$

- DISTRIBUTIVA

$a(f+g) = (af)+(a \cdot g)$ con due funzioni e un numero;

$(a+b)f = af+bf$ con due numeri e una funzione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 170

Consideriamo la stessa proprietà in $\mathbb{R}^2$: $a(a_1, a_2) = (0,0) \rightarrow a=0 \vee (a_1,a_2)=0$

D.m. (se) Ipotesi: $a=0 \vee (a_1,a_2)=0$

Tesi: $a(a_1,a_2)=0$

- $a=0 \rightarrow a(a_1,a_2) = (0\cdot a_1, 0\cdot a_2) = (0,0)$
- $(a_1,a_2)=0 \rightarrow a(0,0) = (a\cdot 0, a\cdot 0) = (0,0)$

(solo se) Ipotesi: $a(a_1,a_2)=0$

Tesi: $a=0 \vee (a_1,a_2)=0$

- $a\neq 0 \rightarrow \exists \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a}\, a(a_1,a_2) = (0,0)\frac{1}{a} \rightarrow (a_1,a_2)=0$ □.

NB! In un insieme dotato delle operazioni definite sopra vale sicuramente la legge di annullamento del prodotto.

- V insieme con somma e prodotto - SPAZIO VETTORIALE REALE

$V \times V \rightarrow V$ somma $\qquad \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ prodotto

$(v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2 \qquad (a, v) \rightarrow av$

le operazioni godono di tutte le proprietà.

(T) UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO

Hp. 0_V ; $\bar{0}_V$ elementi neutri

Th. $0_V = \bar{0}_V$

Dm.
$$0_V + \bar{0}_V = \begin{cases} \bar{0}_V \\ 0_V \end{cases} \longrightarrow 0_V = \bar{0}_V$$

(T) UNICITÀ DELL'OPPOSTO

Hp. $\bar{v}$ e $\bar{\bar{v}}$ opposti di v

Th. $v = \bar{\bar{v}}$

Dm.
$$v + \begin{cases} \bar{v} = 0_V \\ \bar{\bar{v}} = 0_V \end{cases}$$

$$v + \bar{v} = 0_V$$

$$\bar{\bar{v}} + (v + \bar{v}) = \bar{\bar{v}} + 0_V$$

$$\underbrace{(\bar{\bar{v}} + v)}_{0_V} + \bar{v} = \bar{\bar{v}}$$

$$0_V + \bar{v} = \bar{\bar{v}} \rightarrow \bar{v} = \bar{\bar{v}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 170

- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y\}$

Verifichiamo che è uno spazio vettoriale

somma $(x, y, x+y) + (x', y', x'+y') = (x+x', y+y', x+y+x'+y')$

è ancora un elemento di V? sì: $x+y+x'+y' = (x+x') + (y+y')$

$(0,0,0) \in V$

$(-x, -y, -(x+y))$ è opposto di $(x, y, x+y)$ e $\in V$

$-(x+y) = (-x) + (-y)$

$(x+y) + (-x) + (-y) = 0$

$x + y - x - y = 0$

$x - x + y - y = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

PROPRIETÀ

In ogni campo vettoriale la somma degli opposti è uguale all'opposto della somma

V spazio vettoriale

$W \subseteq V$; W è un sottospazio (= valgono le operazioni di V e il risultato $\in W$)

somma. $w_1 + w_2 \in W$

prodotto. $aw \in W$

Alcune proprietà (associativa e commutativa) passano ovviamente a W.

Le altre?

- $\exists 0_W / 0_W + w = w$?

Può essere $0_V \in W$ o $0_V \notin W$.

Se $W = \emptyset$ è un sottospazio ma $0_V \notin W$;

se $W \neq \emptyset$ contiene almeno $w \in W$; dato che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, $0w \in W \rightarrow 0 \in W$

Conclusione

Se un sottoinsieme ha la somma e il prodotto dello spazio vettoriale, e non è vuoto, allora contiene lo zero.

Il minimo sottospazio è quello che contiene solo lo zero, il massimo è lo spazio vettoriale stesso.

Esempi:

- $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio; $W \subseteq \mathbb{C}$ è un sottospazio? No, è tutto $\mathbb{C}$.

  $ai + bi = (a+b)i$

  $r(ai) = (ra)i$

- $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{R}$-spazio; $W \subseteq \mathbb{R}$ è un sottospazio? No, è tutto $\mathbb{R}$ perché se $w \neq \emptyset$, $\exists r \in W \rightarrow \exists \frac{1}{r} \in \mathbb{R}$ e per la chiusura rispetto al prodotto $\frac{1}{r} \cdot r \in W \rightarrow 1 \in W \rightarrow$ per la chiusura rispetto al prodotto $W = \mathbb{R}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 170

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI – per dimostrarle sono necessari numerosi calcoli; per dimostrarne alcune aspettiamo la conoscenza delle applicazioni lineari.

- Proprietà associativa

$(AB)C = A(BC)$ (dimostrazione rimandata)

NO • ~~Proprietà commutativa~~

$AB \neq BA$ può anche capitare che esista uno solo tra i due prodotti: se non sono due matrici quadrate ne esiste uno solo.

Dimostrazione (basta mostrare un controesempio)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_1C_1 = 0 + 2 \cdot 2 = 4$
$R_2C_1 = 0 + 0 = 0$
$R_1C_2 = 1 + 6 = 7$
$R_2C_2 = -1 + \ = 1$
$R_1C_1 = 0 \cdot 1 - 1 = -1$
$R_1C_2 = 0$
$R_2C_1 = -1$
$R_2C_2 = 4$

- Proprietà distributiva

$A(B+C) = AB + AC$ (dimostrazione rimandata)

$(B+C)A = BA + CA$ (le due scritture non sono ovvie perché non vale propr. commutativa)

- Prodotto per un numero

$a(A+B) = aA + aB$ (vale perché siamo in uno spazio vettoriale)

$a(A \cdot B) = (aA)B = A(aB)$ (dimostrazione rimandata)

NO • ~~Legge di annullamento del prodotto~~

$$AB = 0 = \begin{pmatrix} 0, \dots, \dots, 0 \\ 0, \dots, \dots, 0 \\ 0, \dots, \dots, 0 \end{pmatrix} \text{ se e solo se } A = 0 \vee B = 0?$$

Prendiamo due matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Elemento neutro

$\exists I / IA = AI = A$

$K^{m,m}$

$$I_m = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, \dots, 0 \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \\ 0, 0, 0, \dots, 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m} \\ a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3m} \\ \dots, \dots, \dots, \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mm} \end{pmatrix} \qquad AI = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m} \\ a_{21}, \dots, \dots, a_{2m} \\ a_{31}, \dots, \dots, \dots \\ \dots, \dots, \dots, \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mm} \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTICA di ORDINE m

NO • ~~Reciproco~~

$\exists B / AB = I_m$ con $A \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cerchiamo l'inversa $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ impossibile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 170

Matrice simmetrica coincide con la sua trasposta : $A = {}^tA$.

La matrice simmetrica è simmetrica rispetto alla diagonale. $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice antisimmetrica coincide con la sua opposta $A = -A$

La diagonale deve essere costituita di soli zeri. $a_{ij} = -a_{ji}$

nello spazio vettoriale con somma $v_1 + v_2$ e prodotto av

COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, v_2, \dots, v_n$ a coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Es: $3x + 7e^x + \operatorname{sen} x$ in $\mathcal{F}(x)$

$2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nell'insieme delle matrici.

L'insieme delle combinazioni lineari di $v_1, v_2, \dots, v_n$ è la combinazione lineare con $v_1, v_2, \dots, v_n$ fissi al variare degli a: $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subseteq V$

È un sottospazio?

Prendiamo due vettori $v_1 = (1,1,2)$ e $v_2 = (1,0,1)$.

Insieme delle combinazioni lineari $x(1,1,2) + y(1,0,1) = (x+y,\ x,\ 2x+y)$

quindi in generale $(a,b,c) / a+b=c$

i) non è vuoto

ii) la somma di due terne è ancora di quel tipo

$(x+y,\ x,\ 2x+y) + (\bar{x}+\bar{y},\ \bar{x},\ 2\bar{x}+\bar{y}) = (x+y+\bar{x}+\bar{y},\ x+\bar{x},\ 2x+y+2\bar{x}+\bar{y})$

$\rightarrow\ 2x+y+2\bar{x}+\bar{y} = x+\bar{x}+x+y+\bar{x}+\bar{y}.$

iii) $a(x+y,\ x,\ 2x+y) = (ax+ay,\ ax,\ 2ax+ay)$

$2ax + ay = ax + ay + ax$ vero

→ L'insieme delle combinazioni lineari di n vettori di uno spazio vettoriale è sempre un sottospazio.

$(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n)$ è ancora combinazione lineare?

$(a_1 v_1 + a_2 v_2) + (b_1 v_1 + b_2 v_2) = a_1 v_1 + (a_2 v_2 + b_1 v_1) + b_2 v_2 = (a_1 v_1 + b_1 v_1) + (a_2 v_2 + b_2 v_2)$

$= v_1(a_1 + b_1) + v_2(a_2 + b_2)$ Abbiamo trovato una nuova combinazione lineare, i cui coefficienti sono la somma dei coefficienti. Vale anche per $a(a_1 v_1 + a_2 v_2)$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 170

1 marzo 2010

Come trovare i generatori

- $\mathbb{R}^3$ (x, y, z)

$z = ax + by \rightarrow (x, y, ax+by) = (x, 0, ax) + (0, y, by)$

$x\underbrace{(1,0,a)}_{v} + y\underbrace{(0,1,b)}_{w}$ sono i generatori

- $\begin{pmatrix} a & 2a \\ b & -b \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mu_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mu_2} = a\mu_1 + b\mu_2$ sono i generatori

$\downarrow$

L'insieme di matrici di questo tipo è lo spazio vettoriale finitamente generato. $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2)$

- $y'' + y = 0$

$y = e^{\alpha x} \rightarrow \alpha^2 + 1 = 0$

$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$ e $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \operatorname{sen} x$

Quello cercato è quindi lo spazio vettoriale finitamente generato $\mathcal{L} = (\operatorname{sen} x, \cos x)$

1 Se uno spazio vettoriale ha un sistema finito di generatori, questo è unico?

$(x, y, x+y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{v} + y\underbrace{(0,1,1)}_{w} = xv + yw \rightarrow \mathcal{L}(v, w)$

i) il numero dei generatori può crescere indefinitamente: *

$z = (-1, 3, 2)$ $\mathcal{L} = xv + yw + 0z$ (e così via, basta che il coefficiente sia nullo).

ii) esiste un altro sistema di generatori; i generatori possono variare

Dimostrazione

$\mathcal{L}(v_1, w_1)$ con $v_1 = (2,2,4)$ e $w_1 = (-1,-1,-2) \rightarrow \mathcal{L}(v_1, w_1) = \mathcal{L}(v, w)$

$\mathcal{L}(v, w) \subseteq \mathcal{L}(v_1, w_1)$.

$(x, y, x+y) = a(2,2,4) + b(-1,-1,-2) \rightarrow \begin{matrix} x = 2a - b \\ y = 2a - b \end{matrix} \rightarrow$ verificato solo se $x = y$ $\rightarrow$ FALSO

Proviamo con altri generatori

$\left.\begin{matrix} v_2 = (1,1,2) = v + w \\ w_2 = (1,-1,0) = v - w \end{matrix}\right| \rightarrow \in$ spazio vettoriale

$(x, y, x+y) = a(1,1,2) + b(1,-1,0) \rightarrow x = a + b \quad y = a - b$

$\begin{cases} a = x - b \\ y = x - 2b \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases} \rightarrow$ risolubile $\forall a, b$

$\mathcal{L}(v, w) \supseteq \mathcal{L}(v_2, w_2)$

$x = a + b$

$y = a - b$

$\rightarrow \mathcal{L}(v, w) = \mathcal{L}(v_2, w_2) \rightarrow$ i generatori possono variare (se i sostituti sono scelti opportunamente)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 170

Come verificare se un sistema di generatori è linearmente indipendente

i) $v_1 = 0_V$ se in un sistema un vettore è nullo, allora i vettori non sono sicuramente linearmente indipendenti. $2v_1 + \dots + v_m = 0_V$

ii) $v_1 \neq 0_V$ — $v_2 \in \mathcal{L}(v_1) \rightarrow \exists a / v_2 = a v_1 \rightarrow$ non sono linearmente indipendenti

$a v_1 - v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_n = 0_V$

$v_2 \notin \mathcal{L}(v_1) \rightarrow$ procediamo vettore per vettore:

se $\exists\, i+1 / v_{1+i} \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) \rightarrow$ non sono linearmente indipendenti

se $v_{i+1} \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) \rightarrow$ sono linearmente indipendenti

<u>Dimostrazione</u>

$a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots - v_{i+1} + 0 v_{i+2} + \dots$

Suppongo per assurdo che siano linearmente dipendenti $\rightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che a_{i+1} non nullo e i successivi nulli

$a_{i+1} v_{i+1} = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_i v_i$

$$v_{i+1} = -\frac{a_1 v_1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{a_i v_i}{a_{i+1}}$$

risulta che v_{i+1} è combinazione lineare dei precedenti $\rightarrow$ assurdo (contro l'ipotesi)

17 Se uno spazio vettoriale è generato da vettori linearmente indipendenti, altri due vettori appartenenti allo spazio vettoriale e linearmente dipendenti non possono essere generatori dello stesso spazio vettoriale.

es. $(1,1,3)$, $(2,-1,4)$

$(0,3,2) = a(1,1,3) + b(2,-1,4)$

$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ 3 = a - b \\ 2 = 3a + 4b \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 3 + 3b \rightarrow b = -1 \\ a = 3 + b \rightarrow a = 2 \\ 2 = -3 + 8 \end{cases}$$

il terzo elemento è combinazione lineare dei primi due $\rightarrow$ sono linearm. indipendenti solo i primi due.

es $f(x) = x$

$g(x) = e^x$

$\exists a \in \mathbb{R} / g = af \quad \forall x \in \mathbb{R}$? no $\rightarrow$ sono linearmente indipendenti.

es $f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{sen} x$

$h(x) = \cos x$

$\exists a \in \mathbb{R} / \operatorname{sen} x = ax$

$x \rightarrow \infty \rightarrow ax \rightarrow \infty$

$\operatorname{sen} x$ è funzione limitata $\rightarrow$ x e $\operatorname{sen} x$ linearmente indipendenti

$\cos x = ax + b \operatorname{sen} x$ — se $a \neq 0$ impossibile ($a \rightarrow \infty$, $ax \rightarrow \infty$, $\cos x$ limitato)

$-1 \leq \cos x \leq 1$ — se $a = 0$ $\cos x = b \operatorname{sen} x$ $b = 1$ (unico caso possibile)

$\cos x = \operatorname{sen} x$

ci sono infiniti valori per cui non è verificato.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 170

Talvolta lo spazio vettoriale viene descritto attraverso condizioni piuttosto che attraverso un sistema di generatori.

es. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y=z\}$

Noi sappiamo trovare la base di uno spazio vettoriale solo se conosciamo un sistema di generatori, quindi quando abbiamo una condizione, troviamo prima i generatori, poi la base

Sia dato $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Conosciamo i generatori, cerchiamo la base: vediamo se sono linearmente indipend.

$$v_1 = \begin{cases} = 0_V \rightarrow \notin \text{base} \\ \neq 0_V \end{cases} \longrightarrow v_2 \begin{cases} \in \mathcal{L}(v_1) \rightarrow \notin \text{base} \\ \notin \mathcal{L}(v_1) \end{cases}$$

Si percorre l'insieme dei vettori eliminando i vettori nulli e i vettori che sono combinazione lineare dei precedenti.

→ Si ottiene un sistema di vettori di cui nessuno dipende linearmente dai precedenti.

T <u>La cancellazione di un vettore che è combinazione lineare dei precedenti non altera la proprietà del sistema di generare lo spazio vettoriale.</u>

<u>Dimostrazione</u>

Sia $v_{i+1} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_i v_i$

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_i v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n$.

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_i v_i + a_{i+1}(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_i v_i) + \dots + a_n v_n$

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_i v_i + a_{i+1} b_1 v_1 + a_{i+1} b_2 v_2 + \dots + a_{i+1} b_i v_i + \dots + a_n v_n$.

$v = (a_1 + a_{i+1} b_1) v_1 + (a_2 + a_{i+1} b_2) v_2 + \dots + a_n v_n$.

Il vettore v_{i+1} non compare più perché è stato sostituito da una combinazione lineare che gli corrisponde.

es. $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}\text{-spazio} = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$v_1 = (1, i)$

$v_2 = (i, 1)$

$v_3 = (-1, 2i)$

$v_4 = (2i-1, 3i+1)$

$\exists a \in \mathbb{R} / \ (i,1) = a(1,i)$ no → v_1 e v_2 sono l. i.

$\exists a, b \in \mathbb{R} / \ (-1, 2i) = a(1,i) + b(i,1)$

$$\begin{cases} -1 = a + bi \quad \times i \\ 2i = ai + b \end{cases} \qquad \begin{cases} -i = ai - b \\ 2i = ai + b \end{cases}$$

$i = 2ai \rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b \notin \mathbb{R} \rightarrow v_1, v_2, v_3$ l.i

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 170

ES 1 Dimostrare che $\mathcal{L}(e_1) \oplus \mathcal{L}(e_2, e_3)$ è somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

$\rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$W_1 = \mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}((1,0,0)) \rightarrow v_1 = a(1,0,0) = (a,0,0)$

$W_2 = \mathcal{L}(e_2, e_3) = \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1)) \rightarrow v_2 = b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,b,c)$

$\forall a,b,c \quad (a,0,0) \neq (0,b,c)$ perché $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ per l.i

$\rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\} = (0,0,0)$. Inoltre e_1, e_2, e_3 sono tre vettori l.i $\rightarrow$ base.

ES 2 $W_1 \cap W_2 \subseteq V$ è un sottospazio? sì

- $0_V \in W_1 \cap W_2$
- $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_1 \cap W_2 \xrightarrow{?} (v_1 + v_2) \in W_1 \cap W_2$

$v_1 = \underbrace{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m}_{\in W_1} = \underbrace{b_1 t_1 + b_2 t_2 + \dots + b_n t_n}_{\in W_2}$

$v_2 = \dots$

$v_1 + v_2$ perciò $\in$ sicuramente all'intersezione.

- $a v_1 \in W_1 \cap W_2$ perché entrambi gli insiemi sono chiusi risp. prodotto

ES 3 $W_1 \cup W_2 \subseteq V$ è un sottospazio? NO

- $0_V \in W_1 \cup W_2$
- $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \in W_1$
  $v' = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_s w_s \in W_2$ $\rightarrow (v + v') \in W_1 \cup W_2$

$(v + v') = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b_1 w_1 + \dots + b_s w_s$

non necessariamente $v + v' \in W_1 \cup W_2$ (non è chiuso risp. alla somma)

controesempio : $w_1 = (a,0) \in W_1$, $w_2 = (0,b) \in W_2 \rightarrow w_1 + w_2 = (a,b) \notin W_1 \cup W_2$.

ES 4 Caratterizzare le coppie di sottospazi affinché la loro unione sia un sottospazio

$\forall A = A$

---

n vettori linearmente indipendenti $w_1, w_2, \dots, w_n$

m generatori $v_1, v_2, \dots, v_m$ (m' (ridotta) $\leq m$ con il metodo degli scarti)

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a_{11} v_1 + \dots + a_{1m} v_m \\ w_2 &= a_{21} v_1 + \dots + a_{2m} v_m \\ &\dots \\ w_n &= a_{n1} v_1 + \dots + a_{nm} v_m \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$$

se $w_1 \dots w_n$ sono l.i lo sono anche n righe linearmente indipend. $R_1, R_2, \dots R_n$.

m colonne

$n \leq m$

$\rightarrow$ n° generatori $\geq$ n° vettori linearmente indipendenti
m $\quad$ n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 170

$v_1, v_2, \dots, v_m$ generatori di V

$w_1, w_2, \dots, w_n$ linearmente indipendenti

$n \leq m$

Dimostrazione

i) $A \to B$ $(R_i \to R_i + aR_j)$

m righe l.i $\to$ n righe l.i

ii) A (m righe l.i) $\to$ B (n righe l.i)

$\underset{n}{\text{righe}} < \underset{m}{\text{colonne}}$ $\leftarrow$ essendo ridotta: $\underset{n}{n^\circ \text{ righe}} \leq \underset{m}{n^\circ \text{ colonne}}$

iii) m vettori l.i, m generatori

$m \geq n$

COROLLARIO

Supponiamo $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ e $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ basi di uno spazio vettoriale.

Allora $m \geq n$, $n \geq m$ $\Rightarrow n = m$

Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi.

Def: Dimensione di uno spazio vettoriale V; $\dim V$ $<$ n vettori lin. indip $\to$ base (element); n generatori spazio V $\to$ base

Infatti

⚠ BASE = $\begin{cases} \bullet \text{ numero minimo di generatori per ottenere quello spazio vettoriale} \\ \bullet \text{ sistema massimo di vettori linearmente indipendenti} \\ \quad \text{(ogni vettore aggiunto è combinazione lineare dei precedenti.} \\ \bullet \text{ insieme di vettori linearmente indipendenti di cardinalità massima} \end{cases}$

es. $v(1,1,1)$, $w(1,-1,0)$, $z(0,2,-1)$, $t(2,3,1)$

$\mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3) \to \dim \mathbb{R}^3 = 3$

È impossibile che $\mathbb{R}^3$ sia generato dai 4 vettori v, w, z, t perché il loro numero supera la dimensione dello spazio;

per lo stesso motivo è escluso che siano tutti linearmente indipendenti

almeno uno è combinazione lineare dei tre.

$\to W = \mathcal{L}(v, w, t, z) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \exists a, b \in \mathbb{R} / (0,2,-1) = a(1,1,1) + b(1,-1,0)$ $\quad \begin{cases} 0 = a+b \\ 2 = a-b \\ -1 = a \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b = a \\ 2 = -2 \\ a = -1 \end{cases}$ $\emptyset$

$\dim W = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Dato che $z \neq \mathcal{L}(v, w)$, t sarà sicuramente $t = \mathcal{L}(v, w, z)$ perché è il quarto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 170

La somma di sottospazi è sottospazio.

$W_1, W_2 \subseteq V$

Consideriamo $(W_1 + W_2) \subseteq V$ — $w_1 + w_2$

- $0 \in (W_1 + W_2)$: $0+0$
- $(w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \underbrace{(w_1 + w_1')}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w_2')}_{\in W_2}$
- $a(w_1 + w_2) = aw_1 + aw_2$.

! La base dello spazio somma non è sempre l'unione delle basi.

es. $\mathbb{R}^3$ $\quad W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

$W_1 = \{(x, y, z) \,/\, x + y = z\}$ $\quad (x+y, x+y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{v_1} + y\underbrace{(0,1,1)}_{v_2}$

$W_2 = \{(x, y, z) \,/\, x - y = z\}$ $\quad (x, y, x-y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{w_1} + y\underbrace{(0,1,-1)}_{w_2}$

Descrivere $W_1 + W_2$

$(xv_1 + yv_2) + (\bar{x}w_1 + \bar{y}w_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, \cancel{w_1}, w_2)$

il sistema composto da 4 elementi è un sistema di generatori ma non è una base perché ha 4 elementi ed è in $\mathbb{R}^3$ (dim = 3).

$(0, 1, -1) = a(1,0,1) + b(0,1,1)$

$\begin{cases} 0 = a \\ 1 = b \\ -1 = a+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0 = a \\ 1 = b \\ -1 = 1 \end{cases}$ $\quad \emptyset$ $\rightarrow$ la base è $(v_1, v_2, w_2) \rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

$v_1 \in W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

In alcuni casi $B_1 \cup B_2 = B$

Quindi la condizione deve stare in $W_1 \cap W_2$ $\begin{cases} = \{0_V\} \rightarrow \beta = \beta_1 \cup \beta_2 \\ \neq \{0_V\} \rightarrow \text{la base non è unione delle basi} \end{cases}$

$W_1 \oplus W_2$ SOMMA DIRETTA quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

(T) Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\} \rightarrow \beta = \beta_1 \cup \beta_2$

Dimostrazione

β = base del sottospazio somma diretta

$(v_1, v_2, \dots, v_r) = \beta_1$ $\quad (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r) \in W_1$

$(w_1, w_2, \dots, w_s) = \beta_2$ $\quad (b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_sw_s) \in W_2$

~~Se sono linearmente indipendenti~~ :

$(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r) + (b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_sw_s) = 0$

$\underbrace{(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r)}_{\in W_1} = \underbrace{(-b_1)w_1 + (-b_2)w_2 + \dots + (-b_s)w_s}_{\in W_2}$ $\quad$ questo elemento $\in W_1 \cap W_2$

Ma questo va contro l'ipotesi per cui $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, per cui risulta

$(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r) = (-b_1)w_1 + (-b_2)w_2 + \dots + (-b_s)w_s = 0$

$\rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$

$\rightarrow$ I sistemi di generatori di W_1 e W_2 sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base e $\dim(W_1 + W_2) = r + s$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 170

8 marzo 2010

MATRICE RIDOTTA PER RIGHE: presentas elementi non nulli e sotto tutti zeri ("el. speciale")

Per una matrice qualunque si fanno operazioni che la semplificano, ma che non me cambino la dimensione → si cerca una matrice ridotta.

$\mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, R_m)$

(E1) $R_i \leftrightarrow R_j$ inversione di due righe $\rightarrow \mathcal{L}(R_2, R_3, R_1, \dots, R_m)$

(E2) $R_i = aR_i$ $\longrightarrow \mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, aR_i, \dots, R_m) \subseteq \mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, R_m)$

e dato che è anche $R_i = \frac{1}{a}(aR_i) \rightarrow \mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_m) \subseteq \mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, aR_i, \dots, R_m)$

(E3) $R_i \leftarrow R_i + aR_j$ $\rightarrow \mathcal{L}(R_1, \dots, \underbrace{R_i + aR_j}, \dots, R_m)$

c.l. di R_i e R_j $\rightarrow \subseteq \mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, R_m)$

viceversa $R_i = (R_i + aR_j) - aR_j$, quindi $\mathcal{L}(R_1, R_2, \dots, R_m) \subseteq \mathcal{L}(R_1, \dots, R_i + aR_j, \dots, R_m)$

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho = 3$

R_1 $a_{1i_1} \neq 0$ R_2 $R_2 - \frac{a_{2i_1}}{a_{1i_1}} R_1$

$\begin{pmatrix} \boxtimes \\ a_{2i_1} \end{pmatrix}$ $a_{2i_1} - a_{2i_1} = 0$ $\begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & ? \\ & 0 \end{pmatrix}$

es. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 \to R_2 - \frac{3}{5} R_1 \\ R_1 \to 3R_1 \\ R_2 \to 5R_2 \end{matrix}$ $\xrightarrow[R_2 \to 5R_2]{R_1 \to 3R_1} \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 15 \\ 10 & -5 & 15 & 15 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 15 \\ -2 & -14 & 12 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

operazione 2

$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_3 \to 15R_3} \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 15 \\ -2 & -14 & 12 & 0 \\ -27 & 21 & 72 & 0 \end{pmatrix}$

es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ operazione 1

$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$

$v_1 = (1, 1, 3)$

$v_2 = (-1, 2, 4)$

$v_3 = (4, 4, 1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Problema quando non dobbiamo lavorare con ennuple;

ad esempio in $\mathcal{L}(e^x, x^2, \cos x)$

$(3e^x - x^2 + \cos x,\ 2x^2 - \cos x,\ e^x + 2x^2)$

$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Dimostrazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 170

$R_2 = p_{21} N_1 + p_{22} N_2 + \dots + p_{2r} N_r = p_{21}(c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}) + \dots + p_{2r}(c_{r1}, \dots, c_{rm})$

$= a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}$.

$\rightarrow a_{21} = p_{21} c_{11} + p_{22} c_{21} + \dots + p_{2r} c_{r1}$.

$R_m = p_{m1} N_1 + p_{m2} N_2 + \dots + p_{mr} N_r$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} c_{11} + \dots + p_{1r} c_{r1} \\ p_{21} c_{11} + \dots + p_{2r} c_{r1} \\ \dots + \dots + \dots \\ p_{m1} c_{11} + \dots + p_{mr} c_{r1} \end{pmatrix} = c_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \dots \\ p_{m1} \end{pmatrix}}_{P_1} + \dots + c_{r1} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \dots \\ p_{mr} \end{pmatrix}}_{P_r}$$

$C_1 = c_{11} P_1 + \dots + c_{R1} P_r$

$C_2 = c_{12} P_1 + \dots + c_{R2} P_r$

$\dots$

$C_m = c_{1m} P_1 + \dots + c_{rm} P_r$

$\rightarrow \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_m) \subseteq \mathcal{L}(P_1, P_2, \dots, P_r)$

$\dim \mathcal{C} \leq \dim \mathcal{R} (= r)$

Ripetendo lo stesso ragionamento per le righe $\dim \mathcal{R} \leq \dim \mathcal{C}$ $\Big] \rightarrow \dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{C}$.

11 marzo 2010

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 4x - y + 2z - t = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

m equazioni e n incognite; $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ $(\mathbb{K})$

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$

$\dots \quad \dots + \dots + \dots = \dots$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$

Se tolgo le incognite x e i termini noti b ottengo una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Posso scrivere anche una matrice con una sola colonna di termini noti

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad e \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo scrivere $AX = B$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots + \dots + \dots + \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oppure possiamo anche scrivere $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

ossia $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = B$ (Ogni soluzione ha due tempi)

$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = B$ ha soluzioni se $\exists\, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ tale che $A\bar{X} = B$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 170

Avendo la base e un elemento dello spazio vettoriale, ho le componenti di quell'elemento rispetto alla base; queste componenti sono definite in maniera univoca.

$$\underbrace{\bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n}_{n-r \text{ libere}} \longrightarrow \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$$

$$\boxed{\begin{cases} n = r & 1 \text{ sola soluzione} \\ n > r & \text{infinite soluzioni, } \infty^{n-r} \end{cases}}$$

Es. $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ 2x-y+3t=0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 2 = \dim C_A$

Le colonne che formano una base sono C_1 e C_2 $\rightarrow$ scelgo z e t come incognite libere

$$\begin{cases} x+y = z-t+1 \\ 2x-y = -3t \end{cases}$$

$$x = \frac{1+z-4t}{3} \qquad y = 1+z-t-\frac{1+z-4t}{3} = \frac{2z+t+2}{3}$$

$\rightarrow$ ho ∞^2 soluzioni

Es. $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ 2x-y+2t=0 \end{cases}$ $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \\ C_1 \qquad\qquad C_4 \end{array}$

$C_1 = C_4 \rightarrow$ non posso assegnare valori a piacere a y e z

$\begin{cases} y+t = 1+z-x \\ 2x+2t = y \end{cases}$ $\begin{cases} y+t = 1+z-x \\ 2(x+t) = y \end{cases}$ non sempre ammette soluzione

ad esempio $y=2$, $z=5$ $\begin{cases} x+t=4 \\ 2(x+t)=2 \end{cases}$ impossibile

---

$AX = 0$ è sempre compatibile con $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$r = \rho(A)$ ∞^{n-r}; se $n > r \rightarrow$ infinite soluzioni.

Es $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x-y+2t=0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$r=2$; $n=4 \rightarrow 4-2=2>0 \rightarrow \infty^2$ soluzioni

$r \leq \begin{cases} m \\ n \end{cases}$ se $m < n$ abbiamo $r \leq m < n \rightarrow$ ci sono soluzioni diverse da tutti zero

$AX=0$ l'insieme delle soluzioni $S \subseteq \mathbb{K}^n$ è spazio vettoriale:

$$\begin{array}{l} AX_1 = 0 \; + \\ AX_2 = 0 \\ \hline A(x_1+x_2) = AX_1 + AX_2 = 0+0 = 0 \end{array}$$ chiuso rispetto alla somma, con elem. neutro

$A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha 0 = 0$ chiuso rispetto al prodotto

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 170

Es. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x \quad +2z-t=0 \\ x \quad -2t=2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$

$x = 2+2t$

$2+2t+2z-t=0 \rightarrow 2z+t=-2 \rightarrow z=-1-\frac{t}{2}$

⚠ Si inizia a risolvere dall'ultima riga perché è dove ho più zeri.

$y+2+2t-1-\frac{t}{2}+t=1 \rightarrow \frac{5}{2}t+y=0 \rightarrow y=-\frac{5}{2}t$

Quindi $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-\frac{5}{2}t \\ z=-1-\frac{t}{2} \end{cases}$ $\left(2+2t, -\frac{5}{2}t, -1-\frac{t}{2}, t\right)$

Se invece è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ è ridotta la matrice completa ma non quella dei coefficienti

$\rho(A)=3 \rightarrow$ risulta risolubile

$\begin{cases} a+b=1 \\ a=0 \\ a+2b=1 \\ a=-b=-2 \end{cases}$ non riesco a risolverla (impossibile)

SERVE RIDURRE PER RIGHE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI CON GLI ELEMENTI SPECIALI A SINISTRA della SBARRA.

$AX=B \rightarrow A'x=B'$

$(A|B) \rightarrow (A'|B')$

15 marzo 2010

$AX=B$

$(A|B) \rightarrow (A'|B')$ $\quad R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, $b_2 \rightarrow b_2 - b_1$

$A'x=B'$ sistema ridotto

A' è matrice ridotta:

- Se non ci sono righe nulle, rango = n° righe
- Se ci sono righe nulle significa $a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1$

  $0=b_1 \neq 0 \rightarrow$ sistema incompatibile

METODO SICURO DI RISOLUZIONE

$\rho(A)=r$ con n incognite

$$\begin{array}{l} \boxed{a_{11}}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots+\boxed{a_{22}}x_2+\dots+\dots=b_2 \\ \dots\dots+\dots+\dots=\dots \\ \dots\dots+\boxed{a_{rr}}x_r+\dots=b_r \end{array} \xrightarrow[\text{associata}]{\text{matrice}} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rr} & b_r \end{array}\right) \uparrow$$

i) ricavo x_r dalle incognite successive: $x_r : x_{r+1}, \dots, x_n$ (i termini precedenti sono nulli)

ii) sostituisco nella penultima riga x_{r-1} in funzione delle successive, ma x_r non c'è più, quindi resta dipendente: $x_{r-1} : x_{r+1}, \dots, x_n$

iii) scrivo tutte le variabili in $n-r$ incognite: $x_i : x_{r+1}, \dots, x_n$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 170

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{11}+\dots+a_{1n}x_{n1}=1 \\ a_{11}x_{12}+\dots+a_{1n}x_{n2}=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{21}x_{11}+\dots+a_{12}x_{n1}=0 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\dots+a_{1n}X_n=(1,0,0,\dots,0) \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\dots+a_{2n}X_n=(0,1,0,\dots,0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\dots+a_{nn}X_n=(0,0,0,\dots,1) \end{array}$$

I due sistemi coincidono : $a_{11}X_1 = a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+\dots+a_{1n}x_{n1}=1$

$a_{12}X_2 = a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\dots+a_{1n}x_{n2}=0$

Es. $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} X_1+2X_2=(1,0) \\ 4X_1-X_2=(0,1) \end{array}\right| \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\4&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-9&-4&1\end{array}\right)$$

$x_1+2x_2=(1,0) \rightarrow x_1+\left(\frac{8}{9};-\frac{2}{9}\right)=(1,0) \rightarrow x_1=\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$

$-9x_2=(-4,1) \rightarrow x_2=\left(\frac{4}{9};-\frac{1}{9}\right)$

$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$

Se la matrice non è invertibile

$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l}x_1+x_2=(1,0)\\2x_1+2x_2=(0,1)\end{array}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\2&2&0&1\end{array}\right)$ $\emptyset$

D $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} $\quad (1\ 2)\rightarrow(1\ 2)$ permutazione di classe pari $\oplus$

$(1\ 2)\rightarrow(2\ 1)$ permutazione di classe dispari $\ominus$

i) si moltiplicano tra loro elementi che sono su righe e colonne diverse. $(a_{11};a_{22})$

ii) si stabilisce il segno valutando la permutazione:

- se è pari (ottenuta con un numero pari di scamb.) $\rightarrow \oplus$
- se è dispari (ottenuta con un numero dispari di scamb.) $\rightarrow \ominus$

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\oplus$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ pari

$a_{11}a_{23}a_{32}$ $\ominus$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ dispari – 1 scamb.o

$a_{12}a_{21}a_{33}$ $\ominus$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ dispari – 1 scamb.o

$a_{12}a_{23}a_{31}$ $\oplus$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1&2&3\\ & & \end{pmatrix}$ pari – 2 scamb.

(T) Il numero di scamb. per passare da un ordine ad un altro può essere diverso, ma è sempre pari ($\rightarrow$ permutazione di classe pari) o dispari ($\rightarrow$ permutazione di classe dispari)

Quindi ogni permutazione mantiene il segno, a prescindere dai passaggi effettuati per ottenerla.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 170

PRIMO TEOREMA di LAPLACE

Il determinante di A si può ottenere moltiplicando gli elementi di una riga per i rispettivi complementi algebrici, sommando infine i prodotti ottenuti. (Si può fare lo stesso con una colonna)

$$\det A = a_{i1}\bar{A}_{i1} + a_{i2}\bar{A}_{i2} + \dots + a_{in}\bar{A}_{in}$$

$$\det A = a_{1j}\bar{A}_{1j} + a_{2j}\bar{A}_{2j} + \dots + a_{nj}\bar{A}_{nj}$$

con $\bar{A}_{ij}$ COMPLEMENTO ALGEBRICO: determinante che si calcola cancellando la riga e la colonna dell'elemento ij con il segno così definito: $(-1)^{i+j}$

$$(-1)^{i+j}\bar{A}_{ij} = A_{ij}$$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\,8 = -8$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{4R_2-R_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{4} \xrightarrow{2R_4+R_1} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{5R_3} \frac{1}{8}\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -5 & 10 & 0 & 15 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2}$$

$$\frac{1}{40}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -19 & 0 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \frac{1}{40}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -19 & 0 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{40\cdot 7}]{7R_4-8R_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 11 \\ -19 & 0 & 0 & -7 \\ 124 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \frac{1}{40\cdot 7}\,124(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{124}{40\cdot 7} + (-7)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{124}{40}(-20) = -62$$

Anche riducendo per colonne si arriva allo stesso risultato.

Moltiplicare ELEMENTI DI UNA RIGA X COMPLEMENTI ALGEBRICI DI UN'ALTRA = 0

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \dots = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \end{pmatrix}$$

- Ora prendo i complementi algebrici e scambio righe e colonne

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{C} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} \qquad |A| \neq 0$$

Quindi $AC = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A|\,I$

INVERSA

$$\boxed{A\frac{C}{|A|} = I}$$

se $|A| \neq 0 \rightarrow A\frac{C}{|A|} = I \rightarrow \frac{C}{|A|}$ è l'inversa

se $|A| = 0 \rightarrow AB = I$? IMPOSSIBILE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 170

es. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$

z libera

$\begin{cases} x+y=1-z \\ 2x-y=-3z \end{cases}$

Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4z-1}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3z-2(1-z)}{-3} = \frac{-3z-2+2z}{-3} = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$$

Ci occupiamo di applicazioni tra spazi vettoriali

$f: A \longrightarrow B$

$A \in K^{m,n}$ $\quad X \in K^{n,1}$ $\quad AX \in K^{m,1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$f: x \longrightarrow y$ $\qquad f: K^n \longrightarrow K^m$

$x \longrightarrow AX$

È un morfismo: $\begin{cases} f(x_1+x_2) = A(x_1+x_2) = A(x_1) + A(x_2) = f(x_1) + f(x_2) \\ f(ax) = A(ax) = aAX = af(x) \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f: V \to W \quad \text{applicazione lineare} \\ f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(av) = af(v) \end{array}}$$

La moltiplicazione a sinistra è il più semplice esempio di applicazione lineare.

es. $\varphi: C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$\varphi(f) = f'$

$\varphi(f+g) = (f+g)' = f'+g' = \varphi(f) + \varphi(g)$

$\varphi(af) = (af)' = af' = a\varphi(f)$

es. $\mathbb{R}_2[x]$ polinomi di grado massimo 2 $\qquad \varphi: \mathbb{R}_2(x) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$\varphi(P(x)) = x^2P'' + xP' + P$

$\varphi(Q(x)) = x^2Q'' + xQ' + Q$

$\varphi(P+Q) = x^2(P+Q)'' + x(P+Q)' + P+Q = x^2(P''+Q'') + x(P'+Q') + P+Q = \varphi(P)+\varphi(Q)$

È un'applicazione lineare.

es. $f(x,y) = (x+1, y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x',y') = (x'+1, y')$

$f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = (x+x'+1, y+y')$ non è appl. lineare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 170

Considero l'insieme

- $\{w \in W / \exists v \in V$ tale che $f(v) = w\}$ è l'immagine della funzione

$Im f \subseteq W$ è un sottospazio:

i) $0_W \in Im f \rightarrow f(0) = 0$

ii) $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ $\quad w_1 + w_2 = f(v_1 + v_2) \in Im f$

iii) $a w_1 = f(a v_1) \in Im f$

es. $f(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 2x)$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$Im f = \{(a,b,c) / a = x+y,\ b = x-y,\ c = 2x\} = (x(1,1,2) + y(1,-1,0) \rightarrow \dim = 2 \neq \mathbb{R}^3$

es. $f(x,y,z) = (x+y, z)$ $\quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

è applicazione lineare:

$f(x',y',z') = (x'+y', z')$ $\qquad f(x+x', y+y', z+z') = (x+y+x'+y', z+z')$

$f(ax, ay, az) = (ax+ay, az)$ $\qquad f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+y+y', z+z')$

$(a(x+y), az)$

è suriettiva:

$\exists (a,b,c) / a = x+y,\ c = z$ $\qquad Im f = (a, a-y, c)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$ $\quad x = a - y$

☆ $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ basi

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \xrightarrow{A} A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$f: V \longrightarrow K^n$

Il passaggio alle componenti è un ISOMORFISMO (giustifica il passaggio alle componenti di un vettore per scrivere una matrice)

- è un'applicazione lineare;
- è iniettiva: $Ker f = \{v / f(v) = (0,0,\dots,0)\} = \{0_V\}$
- è suriettiva (ad ogni ennupla corrisponde un vettore).

$f^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

22 marzo 2010

☆ $f: V \rightarrow W$ applicazione lineare

iniettiva $\longleftrightarrow Ker f = \{0_V\}$

suriettiva $\longleftrightarrow Im f = W$

$\Big\}$ biettiva $\rightarrow$ isomorfismo

$f^{-1}: W \rightarrow V$

$f(v) = w \rightarrow f^{-1}(w) = v$

$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

L'inversa di un'applicazione lineare è applicazione lineare

☆ $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ non è applicazione biunivoca perché se non è una base, non è detto che siano linearmente indipendenti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 170

(T) $f, g : V \to W$ applicazioni lineari

$f+g : v \to f(v) + g(v)$

$af : v \to a f(v)$

La somma di applicazioni lineari è applicazione lineare

<u>Dimostrazione</u>

$(f+g)(v+w) = (f+g)(v) + (f+g)(w) = f(v) + g(v) + f(w) + g(w) = f(v+w) + g(v+w)$

$(f+g)(av) = f(av) + g(av) = a f(v) + a g(v) = a(f(v) + g(v)) = a(f+g(v))$

☆ $\mathcal{L}(V, W)$ spazio vettoriale (dove $\mathcal{L}(V,W)$ è l'insieme di tutte le applicazioni di V in W)

$(-f) : v \to -f(v)$ (opposto)

$v \to 0_W$ (el. neutro)

$V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_m)$

$f : V \to W$

$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ sono combinazioni lineari di $w_1, w_2, \dots, w_m$

Quindi

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \\ f(v_2) &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \\ &\dots \\ f(v_n) &= a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \end{aligned} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ ogni vettore di uno spazio vettoriale si può scrivere come combinazione lineare della base dello spazio stesso.

$f(v) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \dots + x_n f(v_n)$

$f(v) = x_1 (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n (a_{1n} + \dots + a_{mn} w_m)$

$f(v) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) w_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) w_m$

[Le righe della matrice sono le componenti per cui devo moltiplicare le x per ottenere le componenti dell'immagine di v.

$v \to x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y$

[Le colonne sono le componenti delle immagini $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$. $f(e_1), f(e_2) \dots f(e_n)$??

$$\boxed{Y = AX \quad \text{APPLICAZIONE LINEARE}}$$

Tutte le applicazioni lineari sono prodotti a sinistra per una matrice.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 170

25 marzo 2010

$T = B(Ax) = (BA)x \rightarrow T = Cx$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rm} \end{pmatrix} \qquad (BA)x = \begin{pmatrix} 1^a \text{ riga di } (BA) \times X \\ \\ \end{pmatrix}$$

1^a riga: $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1m}a_{m1})x_1 + \dots + (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \dots + b_{1m}a_{mn})x_m$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad B(Ax) = \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + b_{1m}(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \\ \uparrow 1^a \text{ riga di } B \times AX \end{pmatrix}$$

Analizzando le prime righe di $(BA)x$ e $B(Ax)$ coincidono anche se sono scritte mettendo in evidenza elementi diversi.

→ La matrice dell'applicazione composta è il prodotto delle due matrici.

$g \circ f \rightarrow C = B \cdot A$ con B matrice di g e A matrice di f.

Ora consideriamo la composizione di tre funzioni

$h \circ (g \circ f) \qquad h((g \circ f)(v)) = h(g(f(v))) \qquad (M_h M_g) M_f$

$(h \circ g) \circ f \qquad (h \circ g)(f(v)) = h(g(f(v))) \qquad (M_h M_g) M_f$

Vale la proprietà associativa della composizione di funzioni. Dato che le applicazioni lineari possono essere associate, allora anche le matrici godono della propr. associativa del prodotto.

La matrice associata all'applicazione identica è la matrice identica.

$V \xrightarrow{i} V \qquad i(v) = v \qquad M_i^{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$B \qquad B$

Ora consideriamo altre basi dello spazio vettoriale

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{i_v} \mathbb{R}^2 \qquad B_1 = e, \quad B_2 = ((1,1),(0,2))$

$B \qquad B_2$

$$M_i^{BB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$(1,0) \rightarrow (1,0) = a(1,1) + b(0,2)$

$(0,1) \rightarrow (0,1) \quad // \qquad a = 0 \quad b = \frac{1}{2}$

La matrice associata risulta completamente diversa, conserva solo il rango.

LE MATRICI ASSOCIATE AD UNA APPLICAZIONE LINEARE SONO INFINITE E DIPENDONO DALLE BASI

Caso particolare (eccezione)

$\varphi: V \rightarrow V \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(v) = 0_V \quad \varphi(v_1) = 0_V$

La matrice associata all'applicazione nulla è **sempre** la matrice nulla, indipendentemente dalle basi.

(vale anche se cambio un insieme)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 170

La matrice dell'applicazione inversa è l'inversa della matrice

$$f: \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{C}}{W}$$

$\rho(A) = m = n$ A invertibile

$y = Ax \qquad x = A^{-1}y$

Inoltre se $AB = I \to BA = I$, ossia l'inversa a destra e a sinistra sono la stessa cosa.

$$\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{W} \xrightarrow{f^{-1}} \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{W}$$

$y = Ax \to f \circ f^{-1} = i_W \to w \to w \qquad AB = I$

$x = A^{-1}y \to f^{-1} \circ f = i_V \to v \to v \qquad BA = I$

es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x+y,\ x-2y)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y,\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$

es. $f(x,y) = (x+y,\ 2x+2y)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im} f = \mathcal{L}((1,2))$

f^{-1} di un elemento ha senso anche se la funzione non è invertibile

è l'insieme delle controimmagini di un elemento.

$f^{-1}(1,-1) = ?$ non ha controimmagine $\begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+2y = -1 \end{cases}$ $\emptyset$

$\boxed{\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0)}$

* **T** <u>Dimostrazione</u>

$\mathrm{Ker} f = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_r) \subseteq V \qquad \dim \mathrm{Ker} f = r$

$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n) = \mathcal{B} \qquad \dim V = n$

$f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_r) = 0 \quad , \quad f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$

$\to \mathrm{Im} f = \mathcal{L}(f(v_{r+1}), \dots, f(v_n))$

Vogliamo <u>dimostrare</u> che questi $n-r$ vettori sono linearmente indipendenti, e pertanto formano una base dell'immagine. $\dim \mathrm{Im} f = n-r$ TR: $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

Supponiamo per assurdo che non lo siano:

$a_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0_W$

$f(\underbrace{a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n}_{\text{significa che deve appartenere al nucleo}}) = 0_W$

$a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$

$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r - a_{r+1} v_{r+1} - \dots - a_n v_n = 0_V$

$\to$ i coefficienti devono essere nulli perché vettori zero linearmente indipendenti perché sono base dello spazio vettoriale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 170

Il passaggio da una base all'altra si effettua attraverso la moltiplicazione per una matrice di passaggio P:

$$(w_1, w_2, \dots, w_n)\, P^{-1} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Torniamo ora all'applicazione lineare $V \to V$ rispetto alle basi

$$f: \begin{array}{l} V \to V \\ \mathcal{B} \to \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \to \mathcal{C} \end{array} \qquad \begin{array}{l} M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = B \\ M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = C \end{array}$$

→ significa che $Y = BX$ sono le equazioni dell'applicazione lineare in termini di componenti

Cosa succede se cambio la base? Come cambiano le componenti?

$Y = BX$ significa $\quad v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

$$f(v) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

Se consideriamo la base $\mathcal{C}$, il vettore viene definito attraverso altre componenti:

$\overline{Y} = C\overline{X} \qquad \overline{v} = \overline{x}_1 w_1 + \overline{x}_2 w_2 + \dots + \overline{x}_n w_n$

$$f(\overline{v}) = \overline{y}_1 w_1 + \overline{y}_2 w_2 + \dots + \overline{y}_n w_n$$

Studiamo la relazione che esiste tra X e $\overline{X}$ e tra Y e $\overline{Y}$

$v = (w_1, w_2, \dots, w_n)\,\overline{X} = (v_1, v_2, \dots, v_n)\,X$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)\,P\overline{X} = (v_1, v_2, \dots, v_n)\,X$

Dato che si tratta di una base, c'è unicità di scrittura, quindi $P\overline{X} = X \quad (\overline{X} = P^{-1}X)$

Allora esiste la stessa relazione tra Y e $\overline{Y}$: $\quad P\overline{Y} = Y \quad (\overline{Y} = P^{-1}Y)$

$\overline{Y} = C\overline{X}$

$P^{-1}Y = CP^{-1}X$, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per P otteniamo

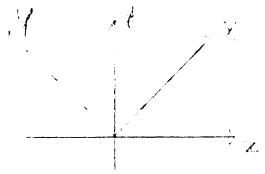
$$\boxed{Y = PCP^{-1}X}$$ relazione tra le Y e le X

$Y = BX$ con $B = PCP^{-1} \qquad C = P^{-1}BP$

P si dice MATRICE DI PASSAGGIO

due matrici legate da questa relazione si dicono SIMILI

Es.



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$-spazio)

$f(a+ib) = a - ib$

f è applicazione lineare ← $\begin{cases} \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}' \\ \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z} \end{cases}$ vero se $\alpha \in \mathbb{R}$ (altrimenti no)

Prendiamo due basi $\mathcal{B} = (1, i)$ e $\mathcal{C} = (1+i, 1-i) \qquad B = M_f^{\mathcal{B}}$

$B = M_f^{\mathcal{B}}$. Costruiamo B rispetto alla base $\mathcal{B} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C = M_f^{\mathcal{C}}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ perché $f(i+1) = 1-i$ e $f(1-i) = 1+i$

$B \neq C \to \exists\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice di passaggio

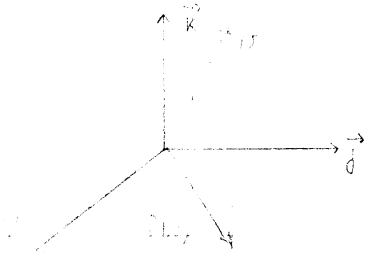
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad P^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 170

Es $f(x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}) = (x\vec{i} + y\vec{j})$



$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$f(\vec{v}) = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad m_1 = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad m_2 = 2$

$V_{\lambda_1} = \ker f$ è l'insieme dei multipli del vettore $\vec{k} \rightarrow z\vec{k}$

$x = 0 \,;\, y = 0$

$V_{\lambda_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Es $\varphi(P) = x^2 P'' + xP' + P$

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ endomorfismo

Troviamo autovalori e autovettori rispetto alla base $\beta = (1, x, x^2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 & m_2 = 1 \\ \lambda_3 = 5 & m_3 = 1 \end{array}$

T $f : V \rightarrow V$ 29 marzo 2010

$\beta \rightarrow \beta$

$A = M_f^{\beta} \qquad |A - \lambda I| = 0$

$\exists\, v \neq 0_V \,/\, f(v) = \lambda v$

ottengo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalori per cui vale $(A - \lambda_i I)x = 0$

se $d_i = \dim V_{\lambda_i}$ e m_i = molteplicità di λ_i

$m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n$

$d_1 + d_2 + \dots + d_r \leq n$

$\rightarrow \boxed{1 \leq d_i \leq m_i}$

Es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(x, y, z) = (x + z, y, 2z)$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & m_2 = 1 \end{array}$$

$\lambda = 1$: $z = 0 \quad (x, y, 0) \quad \beta = ((1,0,0), (0,1,0))$

dim autospazio = 2 = molteplicità autovalore

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -x + z = 0 \quad x = z \\ -y = 0 \\ (x, 0, x) \quad \beta = (1, 0, 1) \end{array}$

dim autospazio = 1 = molteplicità autovalore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 170

→ se $d_1 + \dots + d_r = n$ troviamo una base di V formata da autovettori, la cui matrice è estremamente semplice perché è diagonale

→ si tratta di un <u>endomorfismo semplice</u>

Condizioni necessarie:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$
$$d_1 + d_2 + \dots + d_r = n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Cambiando la base l'equazione non cambia

$\mathcal{B}$ qualunque

$\mathcal{C}$ autovettori

$P^{-1}AP =$ diagonale

$$P = \begin{pmatrix} \text{autovettori} & \text{autovettori} \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0 \qquad |B - \lambda I| = 0$

$B = M_f^{\mathcal{C}} = P^{-1}AP$

Gli autovettori non dipendono dal modo in cui li calcolo

$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$

$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I P$

$B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$

$|B - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = |A - \lambda I|$

$\frac{1}{|P|} \qquad |P|$

→ $|B - \lambda I| = |A - \lambda I|$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{matrix} d_1 = 1 & m_1 = 2 \\ d_2 = 2 & m_2 = 1 \end{matrix}$

$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho = 1 \\ d_1 = 3 - 1 = 2 \end{matrix}$

$A \rightarrow B = P^{-1}AP \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Es. $f(x,y) = (y, -x)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Es. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$\varphi(P) = x^2 P'' + x P' + P$

$(1, x, x^2)$ base di autovettori

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ già diagonalizzata → è endomorfismo semplice

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 170

8 aprile 2010

S[illegible]

V_3 : $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ $\qquad V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{w} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = aa' + bb' + cc'$

<u>Def.</u> Si definisce <u>prodotto scalare</u> un'applicazione lineare con le seguenti proprietà:

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$
- $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (a\vec{w})$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ se e solo se $\vec{v} = 0_V$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ lunghezza o norma

$\|\vec{v}\| \geq 0$ e $\|\vec{v}\| = 0$ se e solo se $\vec{v} = 0_V$

$|a| \|\vec{v}\| = \|a\vec{v}\|$

<u>DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE</u> $\quad \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

<u>Def.</u> Due vettori si dicono ortogonali se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$,

Consideriamo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

È conveniente utilizzare la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ perché $\vec{v} \cdot \vec{i} = a$, $\vec{v} \cdot \vec{j} = b$, $\vec{v} \cdot \vec{k} = c$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiamo così il prodotto scalare tra ennuple:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

due ennuple sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo

Inoltre $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ e $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ se e solo se $\forall i \; x_i = 0$

<u>Es.</u> $C(I) \quad I = [a, b]$

$f \cdot g = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$

$f \cdot f = \int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0$

$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$

$a \leq x_0 \leq b \qquad f(x_0) \neq 0 \qquad [f(x)]^2 > 0$

Dato che f è continua, si può applicare il teorema della permanenza del segno. $\exists I(x_0) \,/\, x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$

f^2 è strettamente positiva $\longrightarrow \varepsilon m \geq 0$

Quindi per SPAZIO VETTORIALE con prodotto scalare si intende uno spazio in cui è definita un'operazione che ad ogni coppia di vettori associa un numero, e con specifiche proprietà.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 170

$\sqrt{}$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ortonormale $\quad e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

$\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ortonormale $\quad f_i \cdot f_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) P$$

le p_{ij} sono le componenti di f rispetto alla base delle e.

$p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + \dots + p_{n1} e_n = f_1$

$p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + \dots + p_{n2} e_n = f_2$

$f_1 \cdot f_2 = (p_{11} e_1) \cdot (p_{12} e_1) + (p_{11} e_1) \cdot (p_{22} \cdot e_2) + \dots + (p_{n1} e_n) \cdot (p_{n2} e_n) =$

$= p_{11} p_{12} e_1 \cdot e_1 + \dots + p_{21} p_{22} e_2 \cdot e_2 + \dots + p_{n1} p_{n2} e_n \cdot e_n =$

$= p_{11} p_{12} \cdot 1 + 0 + \dots + p_{21} p_{22} + \dots + 0 + 0 + \dots + p_{n1} p_{n2} = 0$

↳ 1^ colonna · 2^ colonna

$f_1 \cdot f_1 = p_{11}^2 + p_{21}^2 + \dots + p_{n1}^2 = C_1 \cdot C_1 = 1$

Colonne e righe sono ortonormali, quindi la matrice che si ottiene è ortogonale

$\mathcal{B}$ base ortonormale $\xrightarrow[\text{ortogonale}]{P \text{ matrice di pass}}$ $\mathcal{C}$ base ortonormale

Siano (e_1, e_2) e (f_1, f_2) basi ortonormali.

$f_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2$

$f_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2$

$f_1 \cdot f_1 = (p_{11} e_1 + p_{21} e_2) \cdot (p_{11} e_1 + p_{21} e_2) = (p_{11} e_1)(p_{11} e_1 + p_{21} e_2) + (p_{21} e_2)(p_{21} e_2) =$

$= p_{11}^2 e_1 \cdot e_1 + p_{11} p_{21} e_1 \cdot e_2 + p_{21}^2 e_2 \cdot e_2 + p_{21} p_{11} e_2 \cdot e_1 =$

$= p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1$

$C_1 \cdot C_1 = (p_{11} \;\; p_{21}) \cdot (p_{11} \;\; p_{21}) = 1 \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

$f_1 \cdot f_2 = 0$

$(p_{11} p_{12}) + (p_{21} p_{22}) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 170

T $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovettori distinti

$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_r}$ con rispettive basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$

$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim V = n$

→ una base ortonormale di autovettori si ottiene dall'unione di basi ortonormali degli autospazi:

$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \mathcal{B}_r$ è base ortonormale di autovettori.

<u>Dimostrazione</u>

In V_{λ_1} ho autovettori; la base $\mathcal{B}_1$ non è necessariamente ortonormale ma la posso normalizzare

Ottengo così r basi ortonormali → $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ è base ortonormale di autovettori.

$v_1 \cdot v_2 = 0$ per il teorema appena enunciato.

T $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ endomorfismo autoaggiunto

→ allora tutti gli autovalori sono reali

<u>Dimostrazione</u>

$\lambda = \alpha + i\beta$, devo dimostrare che $\beta = 0$

$\exists\, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \,/\, AZ = \lambda Z \qquad Z = X + iY,\ z_1 = x_1 + i y_1$

$A(X+iY) = \lambda(X+iY)$

$\qquad\qquad \| $

$(\alpha + i\beta)(X+iY) = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$

$A(X+iY) = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$

uguagliando le componenti si ottiene

$$\begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \qquad \begin{cases} {}^tYAX = {}^tY\alpha X - {}^tY\beta Y \\ {}^tXAY = {}^tX\beta X + {}^tX\alpha Y \end{cases}$$

$${}^tYAX - {}^tXAY = \cancel{{}^tY\alpha X} - {}^tY\beta Y - {}^tX\beta X - \cancel{{}^tX\alpha Y}$$

Analizziamo ${}^tYX$ e ${}^tXY$

$(y_1, \dots y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$y_1x_1 + \dots + y_nx_n = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ perché vale la proprietà commutativa

${}^tYAX - {}^tXAY = -\beta\left({}^tYY + {}^tXX\right) = -\beta\left(\|Y\|^2 + \|X\|^2\right)$

$(x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$\underbrace{{}^tXAY - {}^tYAX}_{\downarrow} = \underbrace{\beta\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right)}_{\text{è un numero}}$

Quindi anche questo membro deve essere un numero, lo posso pensare come una matrice con una riga e una colonna

Allora posso scrivere ${}^t({}^tXAY) - {}^tYAX = \beta\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 170

APPLICAZIONE di MATRICI SIMMETRICHE.

12 aprile 2010

$(x, y) \quad ax^2 + bx^2 + 2cxy$

la matrice associata alla forma quadratica è $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ simmetrica

Vale anche la scrittura $(x \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

In generale $q(x_1, x_2, \dots, x_N) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$

con le regole per definirlo a_{ij} $\quad i = j \to a_{ii}x^2$

$i \neq j \to a_{ij}x_ix_j$

Si ottiene così una matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Es. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz - 4xy$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es. Ricerca di massimi e minimi

$$f(x) - f(x_0) = \boxed{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2} + \underline{\qquad\qquad}$$

Per conoscere il verso della concavità interessa il segno

IL SEGNO di una QUADRATICA

$q(x_1, x_2, \dots, x_n)$

> 0 "definita positiva"

< 0 "definita negativa"

≥ 0 "semidefinita positiva"

≤ 0 "semidefinita negativa"

$\gtrless$ "indefinita"

Es. $3x^2 + 2y^2$ definita positiva

$x^2 - y^2$ indefinita

COME STUDIARE IL SEGNO

$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \to q(X)$

$r(y) = q(PY)$

$X = PY$ con P matrice invertibile di passaggio

Se X è una colonna possiamo scrivere $q(x) = {}^tXAX = {}^t(PY)A(PY)$

quindi $q(x) = {}^tY(\underbrace{{}^tPAP}_{\text{nuova matrice diagonale}})Y = {}^tYBY = {}^tY(P^{-1}AP)Y$

Se chiamo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori posso scrivere $q(x) = \lambda_1y_1^2 + \dots + \lambda_ny_n^2$

se $\lambda_i > 0 \ \forall i \to$ definita positiva se con qualche nullo "semidefinita +"

se $\lambda_i < 0 \ \forall i \to$ definita negativa se con qualche nullo "semidefinita −"

se $\lambda_i \gtrless 0 \to$ indefinita

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 170

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

15 aprile 2010

DOMINIO

$f(x_1, \dots, x_n)$

$D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Es. $f(x) = \sqrt{1-x^2-y^2} \rightarrow D \quad x^2+y^2 \leq 1$

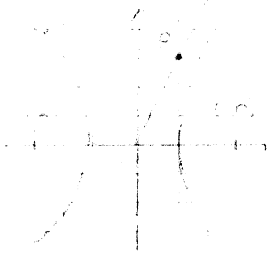
Es. $P(x,y) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2+y^2}$

$1-x^2+y^2 \geq 0$

$1-x^2+y^2=0 \longrightarrow x^2-y^2=1$

retta OP $\quad y = 10x \quad P\left(\frac{1}{2}; 5\right)$

$\rightarrow 1-x^2+100x^2 = 1+99x^2$



Per P generico $P(x_0, y_0)$ la retta passante per O e per P è $y = mx$ con $m = \frac{y_0}{x_0}$: $y = \frac{y_0}{x_0}x$

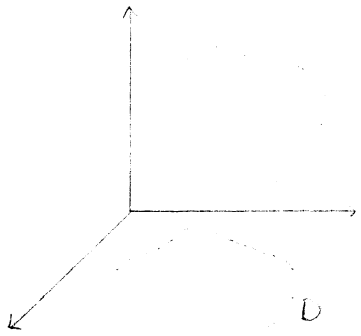
La nuova funzione in due variabili sarà $1-x^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2$

in $x=0 \; >0$, in $x=x_0 \; <0$

Dato che è una funzione continua si applica il teorema di esistenza degli zeri; qui c'è almeno uno zero $\rightarrow$ la retta taglia l'iperbole.

Il luogo dei punti in cui $1-x^2+y^2 \geq 0$ è l'insieme di punti per i quali le rette passanti per l'origine non intersecano l'iperbole.

GRAFICO



<u>Superficie</u> costituita da tutti i punti $(x, y, f(x,y))$

Ogni retta verticale incontra la superficie in un solo punto

<u>def</u>. INTORNO $= P_0 \in \mathbb{R}^n$, $r>0$

intorno di P_0 e raggio r è $U(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^n, \|P-P_0\| < r\}$

INTERVALLI

intorno $]x-\delta, x+\delta[$ Un punto è interno a I se ~~ci~~ esiste almeno un intorno del punto

<u>def</u> Un insieme della retta reale si dice intervallo aperto se ogni suo punto è contenuto un intorno del punto stesso.

<u>def</u> $x_0^{P_0}$ è PUNTO DI ACCUMULAZIONE dell'insieme I se ogni intorno aperto del punto P_0 contiene ~~contiene~~ punti diversi da x_0 dell'insieme I.

<u>def</u> Un insieme si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 170

Estendiamo il concetto a funzioni in più variabili. $f(P)$ e $g(P)$ funzioni continue.

T $f(P) + g(P)$ continua

<u>Dim.</u> $\|P-P_0\| < \delta \quad \|f(P)+g(P) - f(P_0) - g(P_0)\| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon'$ se $\|P-P_0\| < \delta'$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad |g(P) - g(P_0)| < \varepsilon''$ se $\|P-P_0\| < \delta''$.

$\|[f(P) - f(P_0)] + [g(P) - g(P_0)]\| < \varepsilon \leq \underbrace{|f(P) - f(P_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(P) - g(P_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$

$\|P-P_0\| < \begin{cases} \delta' \\ \delta'' \end{cases} \rightarrow \|P-P_0\| < \min(\delta', \delta'') = \delta$

T $f(P)g(P)$ continua (dimostrazione analoga a funzioni 2D).

$\rightarrow ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \dots$ è un polinomio, continuo.

T $\dfrac{f(P)}{g(P)}$ continua se $g(P) \neq 0$ (dimostrazione omessa)

$\sqrt[n]{f(P)}$ è anche funzione continua.

La composizione di funzioni continue è continua a patto che la seconda sia definita in una sola variabile: $f(P): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow g(f(P))$ è continua $\qquad g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

LIMITI.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$

Per le funzioni in più variabili

$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell \qquad \bar{f}(P) = \begin{cases} f(P) & P \neq P_0 \\ \ell & P = P_0 \end{cases}$

Es. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

$\exists \lim_{P \to 0} \dfrac{y}{x}$? No, perché dovrebbe valere $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & P \neq 0 \\ \ell & P = 0 \end{cases}$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|P\| < \delta \rightarrow \left\| \dfrac{y}{x} - \ell \right\| < \varepsilon$

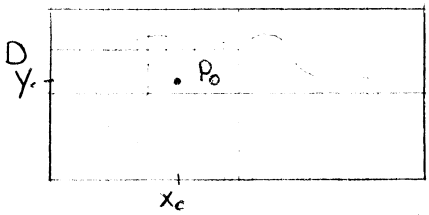
$|m - \ell| < \varepsilon$ per essere verificato dovrebbe essere $m = \ell$, ma niente condiziona questa variabile in tal modo.

Possiamo dunque concludere che $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ non ammette limite.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 170

Ora suppongo $f(P)$ illimitata



Dividiamo il dominio in quattro parti uguali, in ognuno dei quattro non è limitata, ripetiamo il procedimento e di nuovo non è limitata etc.

Ottengo così una serie di intervalli incapsulati verticali e un'altra di intervalli incapsulati orizzontali → P_0 è l'intersezione di tali intervalli incapsulati.

In P_0 la funzione è continua $\|P-P_0\| < \delta$, allora $\|f(P) - f(P_0)\| < 1$.

→ $f(P) < f(P_0) + 1$.

La funzione quindi è limitata nel cerchio di raggio $f(P_0)+1$, ma non nel rettangolino contenuto in esso → assurdo → la funzione $f(P)$ è limitata. □

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $|x+y| \leq |x| + |y|$

<u>Dimostrazione</u>

$|x+ay|^2 \geq 0 \qquad y^2a^2 + 2xya + x^2 \geq 0$

I polinomi di secondo grado con radici positive sono quelle col discriminante negativo o nullo: $(xy)^2 - x^2y^2 \leq 0$.

Allora $-|x||y| \leq xy \leq |x||y|$

Torniamo alla disuguaglianza triangolare ed eleviamo al quadrato:

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xy \leq \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2|x||y|$.

Vogliamo dimostrare quindi che $2xy \leq 2|x||y|$, ma questo è proprio quello che abbiamo ottenuto prima. □

La dimostrazione è facilmente applicabile anche a spazi vettoriali con prodotto scalare

DERIVATE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$f(x, y_0)$. Definizione di derivata per le funzioni in più variabili

derivata parziale rispetto a x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \left(\frac{df(x, y_0)}{dx}\right)_{x=x_0} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = f_x$$

$f(x_0, y)$ derivata parziale rispetto a y:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \left(\frac{df(x_0, y)}{dx}\right)_{x=x_0} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = f_y$$

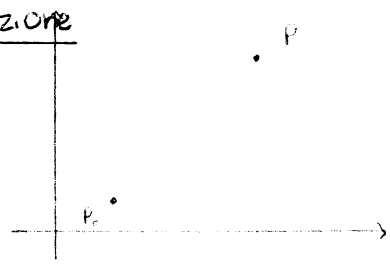
e così via per tutte le altre variabili.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 170

19 aprile 2010

Dimostrazione



$\Delta f = f(P) - f(P_0)$

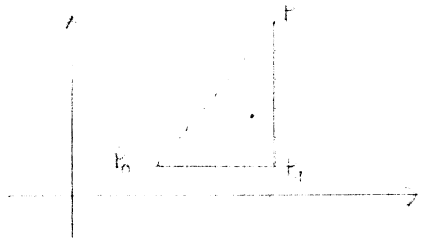
nel caso di funzioni di una variabile

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)$

Vogliamo poter scrivere anche per le funzioni in più variabili una forma analoga:

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + _____$$

$$f(P) - f(P_0) = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \omega \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



$P(x, y)$

$P_0(x_0, y_0)$

$P_1(x, y_0)$

$$[f(P) - f(P_1)] + [f(P_1) - f(P_0)]$$

varia solo la y — varia solo la x

$\downarrow$ $f_y \Delta y$ — $\downarrow$ $f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$

Quindi risulta $f_y \Delta y + f_x \Delta x + \omega_1 \Delta x + \omega_2 \Delta y$

$$\omega_1 [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)] = \omega_1 \Delta x \frac{df}{dx}(x_0 + \theta) \qquad x_0 < x_0 + \theta < x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 170

$P(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

$t \longrightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{dP}{dt} = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) = \left(\frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{x_n(t) - x_n(t_0)}{t - t_0} \right) \xrightarrow[t \to t_0]{\lim} P'(t)$$

(T) $P(t)$ è continua se sono continue tutte le sue componenti

$P(t)$ continua in $t_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |t - t_0| < \delta \rightarrow \|P(t) - P(t_0)\| < \varepsilon$

<u>Dimostrazione</u>

$\rightarrow |x_1(t) - x_1(t_0)| < |P - P_0|$.

<u>Proprietà</u>. sono definite le derivate delle operazioni

- $P(t) + Q(t)$
- $a\,P(t)$
- $P(t) \cdot Q(t) = x_1(t) y_1(t) + \dots + x_n(t) y_n(t)$

$$\frac{d}{dt}(P(t) \cdot Q(t)) = x_1'(t) y_1(t) + x_1(t) y_1'(t) + \dots + \dots = P'(t) \cdot Q(t) + P(t) \cdot Q'(t)$$

$P(t) \cdot P(t) = \|P(t)\|^2$

$$\frac{d}{dt}(P(t) \cdot P(t)) = 2\,P'(t) \cdot P(t)$$

Es. $P(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$

$\|P(t)\|^2 = 1$

$P(t) \cdot P'(t) = 0$

OP è sempre $= 1$ (raggio)

$\rightarrow$ il derivato è qualcosa di tangente alla circonf.

(PR) Se una ennupla ha norma costante, è sempre perpendicolare alla sua derivata.

- $P(t) \times Q(t)$

$$\frac{d}{dt}(P(t) \times Q(t)) = P'(t) \times Q(t) + P(t) \times Q'(t)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 170

$\xrightarrow[\text{Taylor}]{\text{Formule}}$ $F(1) - F(0) = F'(0)(1-0) + \frac{F''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + R_n =$

$= f_x h + f_y k + \frac{1}{2!}(f_{xx}h^2 + f_{yy}k^2 + 2f_{xy}hk) + R_2$.

$F(t) = F(x_0 + ht,\ y_0 + kt)$

$F'(t) = f_x h + f_y k \rightarrow F''(t) = (f_{xx}h + f_{xy}k)h + (f_{yx}h + f_{yy}k)k =$

$D f_x h = f_{xx} h$

$= f_{xx}h^2 + f_{yy}x^2 + 2f_{xy}hk$

$h = x_1 - x_0$ e $k = y_1 - y_0$

Allora la formula di Taylor risulta:

$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(x_1 - x_0) + f_y(y_1 - y_0) + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_1-x_0)^2 + f_{yy}(y_1-y_0)^2 + 2f_{xy}(x_1-x_0)(y_1-y_0)\right) + R_2$

MASSIMI e MINIMI

Se la funzione $f(x,y)$ ha un massimo in P_0 allora l'avrà anche la funzione in una sola variabile $f(x_0, y)$ $(f_y = 0,\ f_x = 0)$.

Se in x_0 la derivata prima è nulla resta la parte di secondo grado e R_2

→ come riconoscere se è massimo, minimo o punto stazionario?

Si studia il segno della derivata seconda, e se questa non è nulla si guardano la derivata terza etc.

Vogliamo dimostrare che la definizione di massimo, minimo, etc dipende proprio da

$\frac{1}{2!}\left[f_{xx}X^2 + f_{yy}Y^2 + 2f_{xy}XY\right]$ con $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$.

Supponiamo di poter trascurare $\omega[X^2 + Y^2]$,

allora

se questa è definita positiva → MINIMO

se è definita negativa → MASSIMO.

Ricordiamo che gli autovalori della forma quadratica si ricavano dalla matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: $\begin{vmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{vmatrix}$ e uguagliando il determinante a zero

$\lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$

Quando le due radici sono positive $f_{xx} + f_{yy} > 0$ e $\delta > 0$

Se invece non possiamo trascurare il resto infinitesimo in ω, bisogna approfondire l'analisi.

In realtà si può dimostrare che $\omega(X^2 + Y^2)$ non perturba affatto il segno della forma quadratica

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 170

Es. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$f_x = 2x\, e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$

$f_y = 2y\, e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_{yy} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}$

$f_{xy} = 4xy\, e^{x^2+y^2}$

$P = (0,0)$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrice hessiana

il punto P è un punto di minimo assoluto.

$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

$f_x = 2x\, e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$

$f_y = -2y\, e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_{yy} = -2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}$

$f_{xy} = -4xy\, e^{x^2+y^2}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrice hessiana

il punto $P(0,0)$ è punto di sella.

In breve

definita positiva $\longrightarrow$ minimo

definita negativa $\longrightarrow$ massimo

indefinita $\longrightarrow$ sella

semidefinita $\longrightarrow$?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 170

Supponiamo di avere due rette

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = x_1 + \ell' t \\ y = y_1 + m' t \end{cases}$$

e supponiamo che per la prima retta il punto P sia definito da un valore t, mentre per la seconda lo stesso punto P si ottiene con un valore t'.

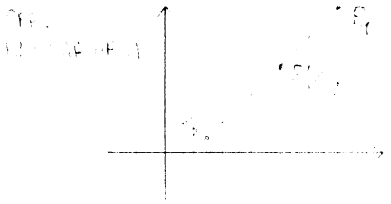
Allora possiamo scrivere $x_0 + \ell t = x_1 + \ell' t'$

$$y_0 + m t = y_1 + m' t'.$$

Ritorniamo dunque alle nostre equazioni e "cambiamo il nome" alla variabile

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t' = 1+t \\ y = 2t' = 2+2t \end{cases} \quad \text{con } t' = 1+t \quad 2t' = 2(1+t) = 2+2t$$

Quindi abbiamo dimostrato che le due rappresentazioni coincidono.



$f(x,y) \quad P_0(x_0, y_0) \quad P_1(x_1, y_1)$

$P \in r$ se $P - P_0 \parallel P_1 - P_0$

$P - P_0 = t(P_1 - P_0)$

$f(x,y) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) = F(k)$

Equazione parametriche della retta P_0P_1

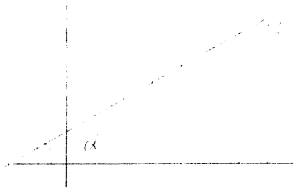
$$x - x_0 = t\,\frac{h}{x_1 - x_0} \qquad y - y_0 = t\,\frac{k}{y_1 - y_0}$$

$$x = x_0 + ht \qquad y = y_0 + kt$$

$ax + by + c = 0$

$b \neq 0$

$y = mx + n$



$m = tg\,\alpha$

se $b = 0$ $\quad ax + c = 0 \rightarrow x = \text{costante}$

<u>Rette passanti per un punto</u>

$(y - y_0) = m(x - x_0)$ ma in questo fascio non è compresa quella parallela a Oy.

aggiungo allora $x = x_0$

$\rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Presa una qualunque retta passante per il punto P_0 voglio dimostrare che esistono a e b così che l'equazione la descriva.

C'è una retta del fascio che passa per P_0 e P_1?

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo di due equazioni con infinite soluz.

Quindi posso trovare valori per cui le due equazioni coincidono $\rightarrow$ sono la stessa retta.

$a(x - x_0) + b(y - y_0)$ descrive tutte le rette passanti per P_0.

Ancora meglio se scritte come c.l. $\lambda f_1 + \mu f_2$ di due rette passanti per P_0.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 170

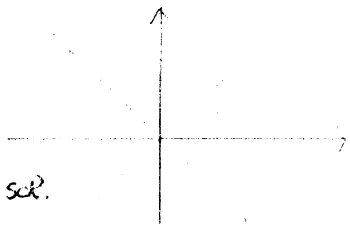
Studiamo le circonferenze apparenti

$x^2+y^2+(x+iy)(x-iy)=0$

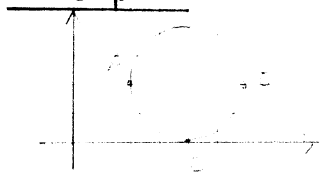
$x+iy=0$ o $x-iy=0$ sono rette non reali

Accettando soluzioni non reali, queste equazioni hanno sol.

$x^2+y^2=-1$ è una circonferenza immaginaria



Per tre punti



B - A e C - A sono paralleli?

sì → non c'è circonferenza

no → $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c_1=0 \\ x_2^2+y_2^2+\dots\dots\dots=0 \\ x_3^2+y_3^2+\dots\dots\dots=0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema di tre equazioni in tre incognite si risolve in a, b, c.

Quindi in realtà non è nemmeno necessario verificare il parallelismo.

Posizioni reciproche tra circonferenze e rette

Punti in comune: $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$

$x^2+y^2=1$ cerchiamo le tangenti per P e per Q

$P(10,0)$ $Q=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$y=m(x-10)$

$$d_{PC}\ \frac{|m(x-10)-y|}{\sqrt{1-m^2}}=\frac{|10m|}{\sqrt{1-m^2}}=1 \qquad 100m^2=1+m^2.$$

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=m\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$d_{Q,C}\ \frac{\left|-m\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1+m^2}}=1 \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-m)\right)^2=1+m^2 \qquad \frac{1}{2}(1+m^2-2m)=1+m^2$$

$$\frac{1}{2} \qquad m^2+2m+1=0 \qquad m=-1$$

→ la retta tangente per Q è $y=-x+\sqrt{2}$

! È impossibile trovare una retta tangente alla circonferenza passante per il suo centro. (nemmeno immaginaria); per trovarla è necessario uscire dal piano cartesiano e passare al piano proiettivo.

Posizioni reciproche di circonferenze

Intersecare due circonferenze è come intersecare la circonferenza con una retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x=0 \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases}$$

$$4x+4y=0$$

Questo non è possibile nel piano per circonf. concentriche:

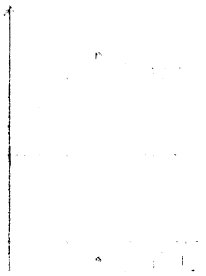
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 170

Parabola



$\begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases}$ una soluzione doppia → è tangente.

Con. che degeneri (= coppie di rette).

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$ sono i due asintoti dell'iperbole.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0$ sono due rette immaginarie

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

Dall'equazione di seconda grado ricaviamo la matrice e viceversa.

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{pmatrix}$ B matrice completa dell'equazione di 2° grado

A matrice dei coefficienti dei termini di 2° grado

$(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad (x\ y\ 1)B\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

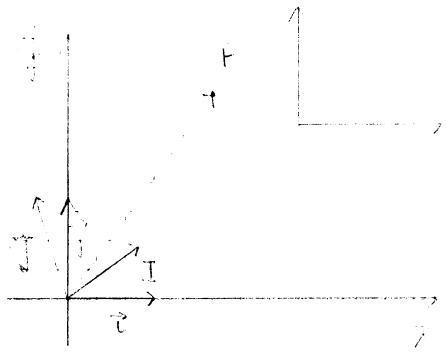
Es. $x^2 + 4y^2 - 4xy + 8x - 6y + 5 = 0$

matrice completa $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Rototraslazioni

Non tutte le equazioni di seconda grado sono riconducibili alle coniche sopra elencate.



$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J}$

matrice del cambiamento di coordinate

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

infatti se è solo rotazione le coordinate sono legate dall'angolo

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$

La retta $y - 3x = 0$ può essere scritta nell'altro sistema di riferimento come $X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha - 3(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha) = 0$ (è la stessa retta!)

Allo stesso modo $x^2 + y^2 = 1$ si scrive nell'altro sistema di riferimento $(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\dots)^2 + \dots = 0$.

! La circonferenza è sempre nella forma $X^2 + Y^2 + \dots = 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 170

→ otteniamo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_{13} x + 2b_{23} y + b_{33} = 0$

λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$

Supponiamo $b_{13} \neq 0$, dal completamento dei quadrati otteniamo

$\lambda_1 (x+a)^2 + \lambda_2 (y+b)^2 = c$

$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = c \rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1} c} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2} c} = 1$

- se λ_1 e $\lambda_2 > 0$ ellisse
- se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ iperbole

- Se $c = 0$ e λ_1 e $\lambda_2 > 0$ coppia di rette immaginarie
  $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ coppia di rette reali

- Se $\lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_2 Y^2 + 2b_{13} X + 2b_{23} Y + b_{33} = 0$
  con il completamento dei quadrati sparisce b_{23} $\lambda_2 \bar{Y}^2 + 2b_{13} x + b_{33} = 0$

$c \neq 0 \rightarrow \lambda_2 Y^2 + cX = 0$ parabola $\quad 2b_{13}\left(x + \frac{b_{33}}{2b_{13}}\right)$

$c = 0 \rightarrow Y^2 = 0$

$\lambda_2 Y^2 + d = 0$, con $d \neq 0 \rightarrow Y^2 = -\dfrac{d}{\lambda_2}$ due rette parallele o no.

Un equazione di secondo grado rappresenta **sempre** una conica

$\det B = \det B'$ le matrici conservano il determinante dopo la rotazione

$\det A = \det A'$

Come varia il determinante dopo una traslazione?

$x = X + a$

$y = Y + b$

rototraslazione. $Q = \left(\begin{array}{c|c} P & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 00 & 1 \end{array}\right)$ il determinante resta comunque invariato

$(\det {}^tQ)(\det Q) \neq 0$

Per un'ellisse o un'iperbole il determinante è diverso da zero.

$$B = \begin{pmatrix} \overset{A}{\begin{matrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le coniche degeneri hanno sempre determinante completo nullo. Questo è un criterio di distinzione tra coniche degeneri e non.

Ellisse $|A| > 0$

Iperbole $|A| < 0$

Parabola $|A| = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 170

- $x^2 - y^2 = 0$

  $(x+y)(x-y) = 0$

- $x^2 + y^2 - 4xy = 0$

  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\frac{y}{x} + 1 = 0$

  $\frac{y}{x} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

  $y = (2+\sqrt{3})x \quad - \quad y = (2-\sqrt{3})x$

- $(x+y)(x-y-1) = 0$

  $x^2 - y^2 - x - y = 0$ equazione degenere → due rette reali o immaginarie

  Prendiamo un punto qualunque, cerco una retta che passa per dalla origine

  se $y = mx$ è corretta $\begin{cases} y = mx \\ x^2 - y^2 - x - y = 0 \end{cases}$ ho infinite soluzioni

  $\rightarrow x^2 - m^2x^2 - x - mx = 0$

  $(1-m^2)x^2 + (1+m)x = 0$ Perché questa abbia infinite soluzioni deve essere $x = 0$, e quindi si devono annullare entrambi i termini

  $\begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ 1 + m = 0 \end{cases} \rightarrow m = -1 \qquad y = -x$

  Ora dobbiamo trovare l'altra retta; $x^2 - y^2 - x - y = (y+x)(y-tx)$

  e quindi dobbiamo trovare t:

  $x^2 - y^2 - x - y = y^2 - tx^2 + y(+x - tx)$

  $x^2 - y^2 - x - y = y^2 + t\,x^2 - xy(1-t)$

  $(1-t)x^2 - 2y^2 + x(t-2) - y(1$

  non possiamo risolvere, quindi proviamo ad aggiungere un termine noto

  $x^2 - y^2 - x - y = (x-y)(y - tx - 0)$

  $x^2(1+t) + y(-1-1) + (1+t)xy + (y-1)x + (y-1)y = 0$

  di nuovo non è possibile trovare m e y.

  Mancava ancora il coefficiente della y: non necessariamente è uguale!

  → bisogna usare l'equazione generica e al limite si trovano coeff. nulli.

  $x^2 - y^2 - x - y = (x+y)(ax + by + c)$

  $x^2 - y^2 - x - y = ax^2 + bxy + cx + axy + by^2 + cy$

  $(1-a)x^2 - (1+b)y^2 - (1+c)x - (1+c)y - (a+b)xy = 0$

  $\begin{cases} 1-a = 0 \\ 1+b = 0 \\ 1+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ 1-1 = 0 \end{cases}$ questa volta è risolubile

  Avessimo usato il completamento di quadrato

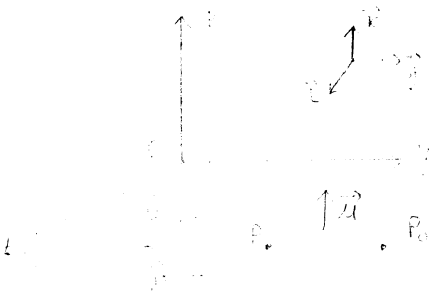
  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

  $x^2 - x - y^2 - y + ax + by + c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 170

GEOMETRIA nello SPAZIO 3 maggio 2010



$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$\vec{u}\cdot(P - P_0) = 0$

$ax + by + cz + d = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$

$P - P_0 = t\vec{v} + s\vec{w} = 0$

$x = x_0 + tv_1 + sw_1$

$y = y_0 + tv_2 + sw_2$

$z = z_0 + tv_3 + sw_3$

Es. $P_0 = (0, 2, 0)$

$x + y - z - 2 = 0$

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

$\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

$\begin{cases} x = 0 + t + s \\ y = 2 - t \\ z = 0 + s \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t + s - 2 \end{cases}$

Es. $\begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = t - s \\ z = 2t + 3s \end{cases}$ relazione tra t e s. $x + y = 1$

Es. $\begin{cases} x = 1 - 2t + s \\ y = t - s \\ z = 2t + 3s \end{cases}$ $x + z = 1 + 4s \rightarrow s = \frac{x + z - 1}{4}$

$t = y + \frac{x + z - 1}{4}$

<u>Equazione di un piano per tre punti</u> (non sempre ce ne è uno solo)

$\underline{(B - A) \times (C - A) = \vec{u}}$

Es. $A(1,0,1)$ $B(-1,1,0)$ $C(3,3,-2)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -8\vec{j} - 8\vec{k}$ vettore perpendicolare al piano

$\vec{j} + \vec{k}$

$0(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \rightarrow y + z = 1$ è lo spazio.

Es. $A(1,0,1)$ $B(-1,1,0)$ $C(3,-1,2)$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

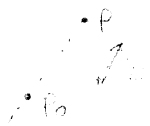
<u>Piani paralleli</u>

$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ sono paralleli se $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$

se anche $d = d'k \rightarrow$ è lo stesso piano

se questa non avviene troviamo ∞^1 soluzioni, ossia una retta.

Condizione affinché P appartenga a una retta è $P - P_0 = t\vec{v}$



$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 170

Rette ~~complanari~~ per un punto

$P_0(x_0, y_0)$

tutte le rette passanti per P_0: $f=0$, $g=0$ passano per P_0, allora ne faccio la combinazione lineare $\lambda f + \mu g = 0$

$$\lambda(x-x_0) + \mu(y-y_0) = 0$$

<u>Piani per una retta</u>

$f=0$, $g=0$

$\lambda f + \mu g = 0$ sono equazioni di piani passanti per la retta, identifica TUTTI i piani per quella retta.

<u>Dim.</u> $P=(\alpha, \beta, \gamma)$

sostituendo ottengo $\lambda \bar{f} + \mu \bar{g} = 0$

Troviamo il piano che contiene sia r che s. $\lambda(x+y-z) + \mu(x-2y+z) = 0$

$$r \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=-3z \\ 2x+y=-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{4}{3}t \\ y=\frac{5}{3}t \\ z=t \end{cases}$$

$3x=-4z \rightarrow x=-\frac{4}{3}z$ e $y=\frac{4}{3}z-3z=\frac{5}{3}z$

$P\left(-\frac{4}{3}t; \frac{5}{3}t, t\right)$

$\lambda\left(-\frac{2}{3}t\right) + \mu\left(-\frac{11}{3}t\right) = 0 \rightarrow \pi: \left(-\frac{2}{3}\lambda - \frac{11}{3}\mu\right)t = 0$

se λ e μ sono valori qualunque, l'intersezione è data da $t=0 \rightarrow$ origine

se invece λ e μ soddisfano l'equazione $-\frac{2}{3}\lambda - \frac{11}{3}\lambda$, la seconda retta s è contenuta nel piano, in quanto l'equazione è soddisfatta indipendentemente da $t \rightarrow$ tutti i punti della ~~piano~~ retta appartengono al piano.

$\rightarrow$ r e s sono complanari e π è il piano che le contiene entrambe

<u>Proiezioni retta sul piano</u>

$$(\lambda+\mu)x + (\lambda-2\mu)y + (-\lambda+\mu)z = 0$$

$$\alpha: x+y+4z=1$$

$$\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{i} + (\lambda-2\mu)\vec{j} + (-\lambda+\mu)\vec{k} = 0$$

$\lambda+\mu+\lambda-2\mu-4\lambda+4\mu=0$

$-2\lambda+3\mu=0 \qquad \lambda=3$ e $\mu=2$

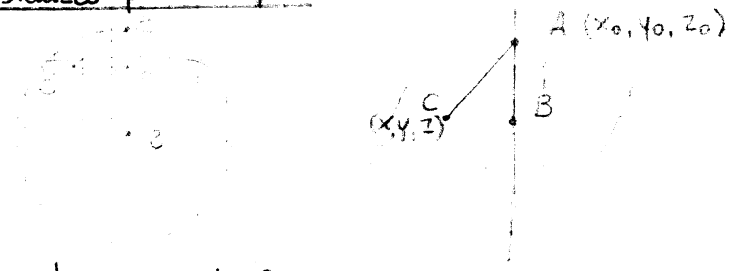
$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

Trovo i piani passanti per la retta r e in particolare definisco quello perpendicolare ad α. L'intersezione fra questi due piani è la retta proiezione di r su α

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 170

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 170

Distanza piano - sfera



è la proiezione ortogonale della distanza di un punto del piano o una della sfera sul vettore ortogonale al piano

$d: ax + by + cz + d = 0$

$$|(C-A)\cdot \vec{u}| \qquad \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

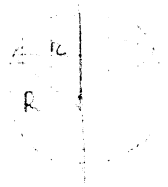
Se un piano taglia una sfera si ottiene una circonferenza, quindi l'equazione della circonferenza nello spazio è $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

es. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=k \end{cases}$

$|k|<1 \rightarrow$ circonferenza

$|k|=1 \rightarrow$ punto (piano tangente alla sfera)

$|k|>1 \rightarrow$ circonferenza immaginaria



$r: \begin{cases} c+t=x \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad C_0 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

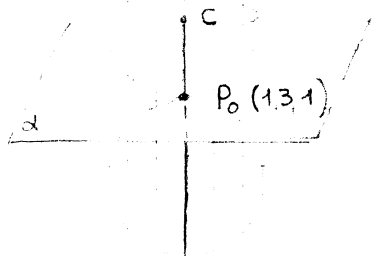
$\underset{R^2}{1} = r^2 + \frac{1}{4}$ (T. Pitagora) $\rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Date sfera, centro e raggio trovo la circonferenza

$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-1)^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$ $\quad C_0=(1,0,0)$, $r=3$

Sfera di raggio 2 tangente in P_0 $(1,3,1)$ al piano $\alpha: x+y+z=5$

$\rightarrow$ il centro della sfera appartiene alla retta perpendicolare ad α per P_0.



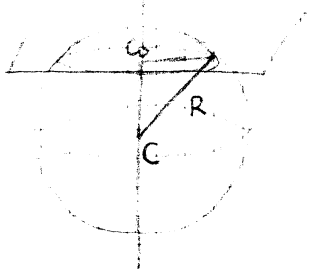
$\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{cases}$

$C(1+t, 3+t, 1+t)$

$d^2 = (\cancel{1}+t-\cancel{1})^2 + (\cancel{3}+t-\cancel{3})^2 + (\cancel{1}+t-\cancel{1})^2 = 3t^2$

$\rightarrow 3t^2 = 4 \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ (. due sfere)

Sfera passante per una circonferenza di raggio $R=2$



$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y=0 \end{cases}$

Per trovare C_0 prendo la perpendicolare al piano per C

$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$ $\quad t=0 \rightarrow$ il centro della circonferenza è l'origine centro della sfera

$C=(t,-t,0)$ $\quad d(C,P)$ $\quad$ es. $(0,0,1)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 170