www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO : 50

DATA : 24/03/2011

A P P U N T I

STUDENTE : Regis

MATERIA : Fisica I

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 148

Cinematica del punto

	CARTESIANE	POLARI	INTRINSECHE
Posizione	$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$	$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$ (angolo θ)	
Spostamento	$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$		
velocità $\frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$	$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} r\,\vec{u}_\theta$	$\vec{v} = v\,\vec{u}_T$
accelerazione $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y$	$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2v\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$	$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$$\begin{cases} x = x_0 + v(t - t_0) \\ v = v_0 \end{cases}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\ v = v_0 + a(t - t_0) \end{cases}$$

MOTO CIRCOLARE. può essere descritto mediante lo spazio percorso oppure l'angolo $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

$$\vec{a} = \underbrace{-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r}_{\vec{a}_C} + \underbrace{\left[2v\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_T}_{\vec{a}_T} \qquad a_T = \alpha R\,\vec{u}_T \qquad a_N = \omega^2 R\vec{u}$$

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{R} \qquad \left(\omega = \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}\Big) \qquad \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{a_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{a_C}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\theta = \omega t$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\,\vec{u}_r + 2v\omega\,\vec{u}_\theta$$

$\vec{v} = R\omega\,\vec{u}_\theta$ velocità tangenziale

$$\vec{a}_c = -\omega^2 R = -\frac{v^2}{R} \qquad (\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v})$$

periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad x_{max} = A$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v_{max} = \omega A$$

$$a(t) = -\omega^2 x \qquad a_{max} = \omega^2 A$$

dalle condizioni iniziali

$$x(0) = A\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$v(0) = \omega A\cos\varphi$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$A^2 = x^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

Velocità e accelerazione in fz della posizione

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}$$

... ricavata così: a funzione della posizione, $a = \frac{dv}{dt}$, $v = v[x(t)]$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v(x(t))\right] = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \rightarrow a = v\frac{dv}{dx}$$

$$\rightarrow a\,dx = v\,dv \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} a\,dx = \int_{v_0}^{v_1} v\,dv \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} a\,dx = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 148

FORZA ELASTICA $\vec{F}_{el} = -k\Delta x$ → moto armonico

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad T = \sqrt{\frac{m}{k}}\,2\pi \qquad x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

l_0 molla a riposo → no forza elastica

$l > l_0$ molla estesa → F tende alla condizione di riposo

$l < l_0$ molla compressa → F tende alla condizione di riposo

FORZA CENTRIPETA (reale)

FORZA CENTRIFUGA (apparente)

$$F = m\frac{v^2}{R}$$

PENDOLO SEMPLICE

Direzione normale: $T - mg\cos\theta = m a_n = m\frac{v^2}{L} \neq 0$

Direzione tangenz.: $-mg\,\text{sen}\,\theta = m a_T = m\alpha L$

$\alpha = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta$ (piccole oscillazioni $\text{sen}\,\theta \sim \theta$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \rightarrow \theta = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

EFFETTI DI UNA FORZA

QUANTITÀ DI MOTO $\vec{p} = m\cdot\vec{v}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ → se $\vec{F} = 0$ → $\vec{p}$ costante — TEOREMA CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

se $\vec{F}$ costante $\vec{p} = \vec{F}\Delta t$

se m non è costante $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\vec{a}$

IMPULSO $\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p}$

LAVORO [J] $W = \int_\gamma \vec{F}\,ds = \Delta K$ — TEOREMA ENERGIA-LAVORO — i vincoli non producono lavoro nemmeno forze centrifuga

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s}$

se $\vec{F}$ costante → $W = F\Delta S$

altrimenti $W = \int_\gamma \vec{F}\cdot ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

ENERGIA CINETICA [J] $K = \frac{1}{2}mv^2$

ENERGIA POTENZIALE $\Delta E = -W$

grandezza che dipende solo dalla posizione

GRAVITAZIONALE $E_p = mgh$

ELASTICA $E_p = \frac{1}{2}k\,\Delta x^2$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA $E_{p_i} + K_i = E_{p_f} + K_f$

FORZE NON CONSERVATIVE $E_{p_i} + K_i + W_{NC} = E_{p_f} + K_f$

lavoro forze non conservative

MOMENTO ANGOLARE $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $(\vec{L} \perp \vec{r}$ e $\vec{L} \perp \vec{\ })$ $\qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

se $P \equiv O$ → $|\vec{L}| = r m v_\theta$ $\quad (V_r \parallel r \rightarrow V_r \times r = 0)$

moto circolare → $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ $\qquad \vec{L} = \omega\,\underbrace{m r^2}_{I}$ MOMENTO DI INERZIA

TEOREMA CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L}$ costante

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 148

CORPO RIGIDO

6 gradi di libertà.

TRASLAZIONE	ROTAZIONE
$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} \quad \forall P$	$\vec{\omega}_P = \vec{\omega} \quad \forall P$
$\vec{p} = m\vec{v}_{CM}$	$\vec{L} = \begin{cases} \lvert\vec{L}_{//}\rvert = mR^2\omega = I_\gamma\omega \\ \lvert\vec{L}_\perp\rvert = mRv\cos\alpha \end{cases}$
$K = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$	
$\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_{CM}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_P \times \vec{F}$
$dW = \vec{R} \cdot d\vec{r}_{CM}$	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$
$\vec{R} = 0 \rightarrow \vec{p}$ costante TEOREMA CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO	$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L}$ costante se γ fisso o $\gamma \equiv CM$

$$\Delta K = W$$

- MOTO SENZA PRECESSIONE

$$\vec{L}_\perp = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{//} = I_\gamma\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_\gamma\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\gamma\vec{\alpha}$$

- MOTO DI PRECESSIONE

$$\vec{L} = \vec{L}_{//} + \vec{L}_\perp$$

I_γ dipende da densità e distribuzione rispetto a γ.

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER $\quad I_{\gamma'} = I_\gamma + Ma^2 \quad (a = d_{(\gamma-\gamma')})$.

GRANDEZZA FISICA	PUNTO TRASLATO	PUNTO MOTO CIRCOL.	CORPO RIGIDO
posizione	$\vec{r}$	θ	$\vec{r}_{CM}$ $\quad \theta$ (orientamento)
velocità	$\vec{v} = \vec{v}_T$	$\vec{\omega} \quad \vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{R}$	$\vec{v}_{CM} \quad \vec{\omega}$ asse γ
accelerazione	$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$	$\vec{\alpha} \quad \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R}$	$\vec{a}_{CM} \quad \vec{\alpha}$
inerzia	m	$I = mR^2$	$M \quad I_\gamma$
forza	$\vec{F}$	$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$	$\vec{R}^{est} \quad \vec{M}^{est} = \sum \vec{R} \times \vec{F}$
proprietà moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{R} \times \vec{P}$	$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad \vec{L} = I_\gamma\vec{\omega}$
energia	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$
lavoro	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ F cost $\rightarrow W = F\Delta s$	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$ M cost $\rightarrow W = M\Delta\theta$	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} + \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$

$\rightarrow$

$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{R}^{est} = M\vec{a}_{CM}$; $\vec{M} = I_\gamma\vec{\alpha}$
$\vec{F}dt = d\vec{P}$	$\vec{R}^{est}dt = d\vec{P}$; $\vec{M}dt = d\vec{L}$
$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{P}$ cost	$\vec{R}^{est} = 0 \rightarrow \vec{P}$ cost , $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L}$ cost

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 148

22 febbraio 2010

Attenzione! - studiare di volta in volta;
- attenzione ai particolari (non dare nulla per scontato)
- avere una visione complessiva del corso (→ connessioni)

PROGRAMMA suddiviso in 5 parti:

MECCANICA = studio del moto

- CINEMATICA = conoscere il moto, e in particolare $\vec{a}$ accelerazione, moti 2D; probl fondam (noto a trovo moto); princ. sovrapposiz (moto 3D = 3 moti 1D)
- DINAMICA = conoscere la causa dell'accelerazione $\vec{a}$
  i) DINAMICA DEL PUNTO riferita a sistemi piccoli rispetto al contesto in cui vengono studiati. $\vec{F}$ forza, energia, $\vec{q}$ quantità di moto
  ii) DINAMICA DI SISTEMI DI PUNTI: punti interagenti tra loro. $\vec{L}$ momento angolare
  iii) DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO: "sistema di punti collegati tra loro che mantengono la loro distanza, quindi non indipendenti".

TERMODINAMICA = studio del trasferimento di energia

Il modello utilizzato per studiarlo è il gas perfetto.

T temperatura, Q calore, S entropia.

PREREQUISITI di MATEMATICA

- derivata e integrale: attenzione formale ai simboli derivata ≠ rapporto;
$$a\,\frac{dy}{dt} \neq \frac{a}{dt}\,dy$$
- differenziale dy: descrive un aumento di y per un aumento infinitesimo della variabile indipendente;
- trigonometria (attenzione alle relazioni del triangolo rettangolo)
- proprietà di potenze e logaritmi
  $\log a^b = b \log a$
  $\log ab = \log a + \log b$
  - proporz. diretta $y = Kx$
  - proporz. inversa $y = \frac{K}{x}$
- funzione: relazione tra una grandezza indipendente e una dipendente
  prima si trova la legge generale e poi i valori particolari

---

Marco.Scalerandi@infm.polito.it
011 5647311

Testo: Mazzoldi - Nigro - Voci (Edises) FISICA 1

Laboratori dipartimento di fisica
frequenza + buoni risultati = +0/2 pti all'esame.

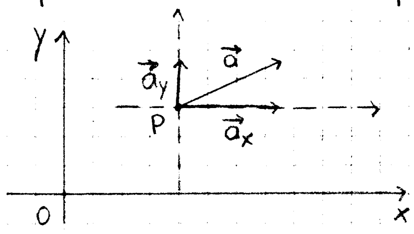
Consulenza: giovedì mattina

Esame: scritto (4 es + 3 problemi + 2 domande teoria) min 16;
+ orale 3 domande teoria
lab portare relazioni
→ MEDIA + VOTO LAB.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 148

Un vettore può avere anche un punto di applicazione diverso dall'origine:

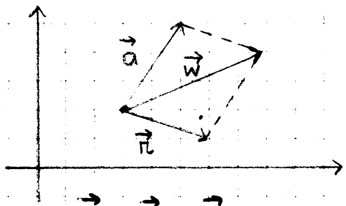


In questo caso si trasla il sistema di riferimento
$|\vec{a}_x| = |\vec{a}| \cos\theta$.

OPERAZIONI SUI VETTORI

1) SOMMA $\quad \vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$

! In fisica ha senso solo sommare vettori con lo stesso punto di applicazione.



$\vec{w} = \vec{a} + \vec{r}$

- GRAFICAMENTE regola del parallelogramma
- $\vec{w} = \vec{a} + \vec{r} = (a_x + x)\vec{u}_x + (a_y + y)\vec{u}_y$

SOMMA DELLE COMPONENTI.

NB Si confrontano solo grandezze con lo stesso significato fisico, perciò non ha senso uguagliare grandezze scalari e vettoriali.
Attenzione quindi alla compatibilità nelle equazioni $\cancel{L = I \cdot \vec{w}}$ $\quad \vec{L} = I \cdot \vec{w}$

2) PRODOTTO

★ PRODOTTO SCALARE $\quad w = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta_{ab}$ $\quad (w = 0$ se $\vec{a} \perp \vec{b})$.

★ PRODOTTO VETTORIALE $\quad \vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\theta_{ab}$ $\quad (|\vec{w}| = 0$ se $\vec{a} \parallel \vec{b})$
direzione: $\vec{w}$ perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$
verso: segue la regola della mano destra $\quad$ vettori < pollice / dita $\quad$ verso esce dal palmo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 148

iii) solo a secondo membro (dove possibile) sostituiamo la grandezza con una grandezza fondamentale;

es $[v] = \frac{[L]}{[T]}$

Se non é possibile, sostituiamo alle grandezze derivate a secondo membro altre formule e portiamo tutto a numeratore.

es $[v] = [L][T]^{-1}$

Esempio:

i) $F_{media} \stackrel{def}{=} m \cdot a_{media}$

ii) $[F_{media}] = [m][a_{media}]$

iii) $[F_{media}] = [M] \cdot \frac{[\Delta v]}{[\Delta T]}$ infatti $a \stackrel{def}{=} \frac{\text{variazione velocità}}{\text{tempo impiegato}}$

$[F_{media}] = [M] \frac{[L][T]^{-1}}{[T]} = [M][L][T]^{-2}$

A cosa serve?

- Trovare unità di misura di grandezze derivate;

  es. $F_m \stackrel{d.m}{=} \frac{Kg \cdot m}{s^2}$ (= Newton)

- Esiste una corrispondenza biunivoca fra dimensione fisiche e grandezza;

  es $\forall F \Longrightarrow [M][L][T]^{-2}$, ma anche $\forall [M][L][T]^{-2} \Longrightarrow F$

- É un ottimo strumento di controllo:

  a) in un'equazione i termini devono avere la stessa dimensione fisica a sinistra e a destra;

  es. calcoli $\leadsto$ $v = \frac{F}{m} \cdot l$

  verifico attraverso l'analisi dimensionale $[v] = \frac{[F]}{[m]}[l]$

  $[L][T]^{-1} \stackrel{?}{=} \frac{\cancel{[M]}[L][T]^{-2}[L]}{\cancel{[M]}}$

  $[L][T]^{-1} = [L]^2[T]^{-2}$ ERRORE! dimensioni fisiche diverse

  b) se in un'espressione fisica ho delle somme, tutti i termini devono avere la stessa dimensione fisica;

  c) l'argomento di una funzione deve essere adimensionale.

  es. $b \stackrel{def}{=} m v \; e^{-3t} \frac{1}{t}$ $b = ?$

  c'é una funzione esponenziale $\rightarrow$ $-3t$ deve essere adimensionale

  $[3t] = [3][T] \longrightarrow [3] = \frac{1}{[T]} = [T]^{-1}$

  quindi 3 non é un numero, ma essendo $[3] = [T]^{-1}$ é una frequenza e la sua u.d.m $= \frac{1}{s}$

  analisi dimensionale $[b] = [M][L][T]^{-1}[T]^{-1}$.

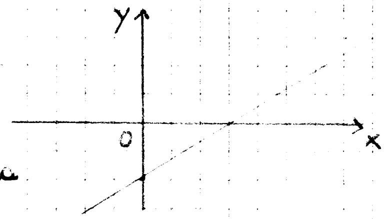
  e^{-3t} é adimensionale, quindi numero $\longrightarrow$ lo omettiamo $[b] = [M][L][T]^{-2} = [F]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 148

Esempio. $\vec{r}(t) = 3t^2\,\vec{u}_x + (t^2-2)\,\vec{u}_y$

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^2 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{x}{3}} \\ y = \dfrac{x}{3} - 2 \end{cases}$$ questa è la traiettoria



Def. La velocità è una grandezza fisica che descrive la variazione di posizione nel tempo

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ è un vettore e dipende dal tempo : $\vec{v}(t)$.

Def. La velocità media è uno scalare

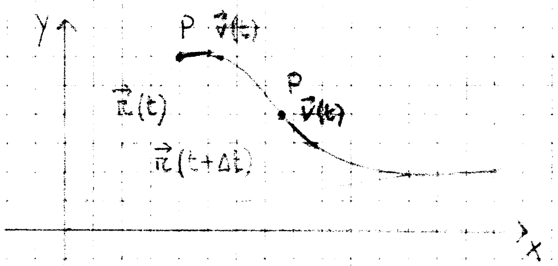
$$\left.\begin{array}{l} V_m^{(I)} \overset{def}{=} \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \\ V_m^{(II)} \overset{def}{=} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \end{array}\right\}$$ dal punto di vista fisico è un concetto ambiguo. pertanto non viene usato.

NB! $\lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|}{\Delta t}$ che è la definizione di derivata

le due definizioni coincidono quando $\Delta t \to 0$ $\quad V_m^{(I)} = V_m^{(II)} = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{v}|$

Direzione di $\vec{v}$ quando $\Delta t \to 0$, $|d\vec{r}| \equiv ds \to d\vec{r}$ risulta tangente alla curva

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ha la stessa direzione di $d\vec{r}$, e perciò è anche tangente; il verso coincide con quello di percorrenza.



25 febbraio 2010

COORDINATE CARTESIANE

Vettore posizione: $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$

Vettore spostamento: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Spazio percorso: Δs

$\lim_{\Delta t\to 0} |d\vec{r}| = ds$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ è un vettore tangente alla traiettoria

$\vec{v} = v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y$

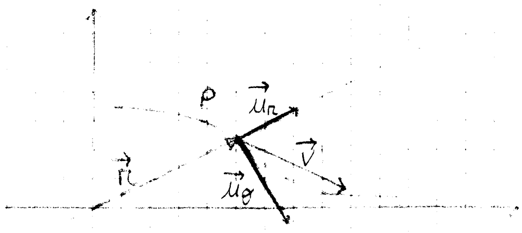
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d[x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y]}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{u}_y$$

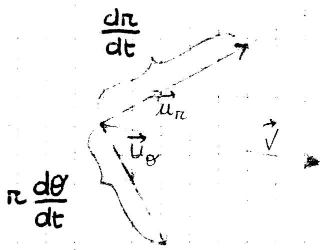
$\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ non dipendono dal tempo.

Le componenti della velocità sono le derivate delle corrispondenti componenti della posizione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 148





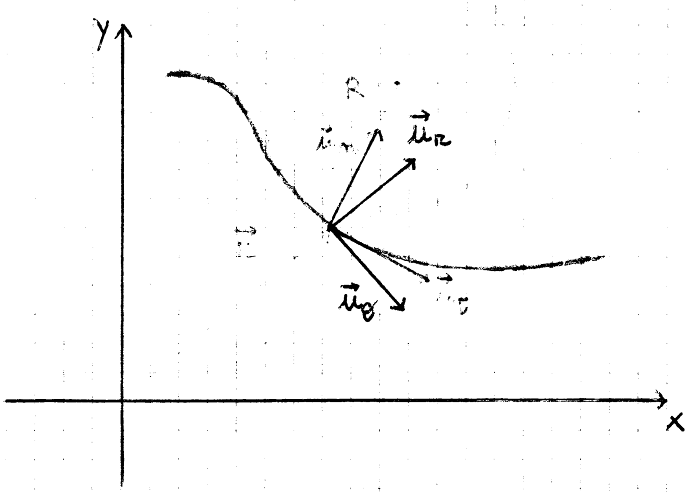
Se proietto il vettore velocità $\vec{v}$ su $\vec{u}_\theta$ trovo $r\frac{d\theta}{dt}$, componente della velocità rispetto a $\vec{u}_\theta$;
proiettando il vettore velocità $\vec{v}$ su $\vec{u}_r$ trovo $\frac{dr}{dt}$, componente della velocità rispetto a $\vec{u}_r$.

SISTEMA INTRINSECO

Introduco $\vec{u}_T$, un versore tangente alla curva e che dunque ha la stessa direzione di $\vec{v}$. Quindi $\vec{v} = v\,\vec{u}_T = v(t)\cdot\vec{u}_T(t)$.
Introduco anche un versore $\vec{u}_n \perp \vec{u}_T$.
Ho quindi definito un nuovo sistema di riferimento.

R raggio di curvatura (= raggio della massima circonferenza tangente alla curva)
é perpendicolare alla tangente : $\vec{R} \perp tg$
$\vec{u}_n$ ha la stessa direzione del raggio di curvatura $\longrightarrow$ $\vec{u}_n \perp tg$.

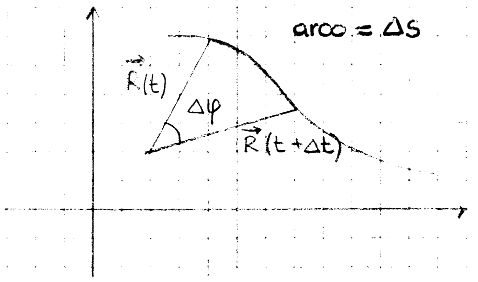
CONFRONTO DEI TRE SISTEMI DI RIFERIMENTO:



Sistema di riferimento cartesiano.
Sistema di riferimento a coordinate polari
Sistema di riferimento a coordinate intrinseche.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 148



arco = raggio · angolo

$$\Delta s = R\,\Delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\vec{u}_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\vec{u}_n = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\vec{u}_n = \frac{1}{R}\frac{|d\vec{r}|}{dt}\vec{u}_n = \frac{|\vec{v}|}{R}\vec{u}_n$$

con R raggio di curvatura

Torno ad $\vec{a}$ in coordinate intrinseche

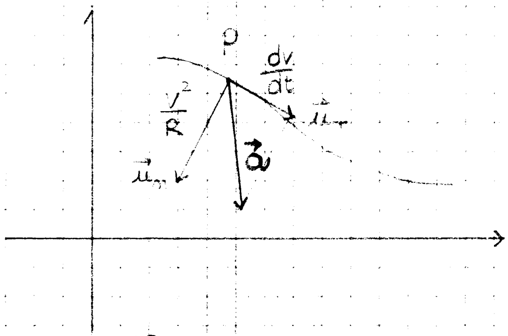
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt}$$

$a_T = \frac{dv}{dt}$ acc. tangenziale

quindi $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$.

$a_n = \frac{v^2}{R}$ acc. centripeta

(diretta verso l'interno)



NB Il vettore accelerazione non è mai diretto verso l'esterno

$$\vec{a} = a_T\cdot\vec{u}_T + a_n\cdot\vec{u}_n$$

COORDINATE POLARI

1 marzo 2010

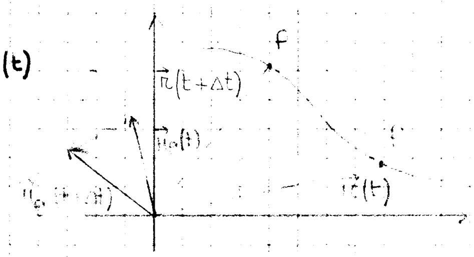
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right] = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

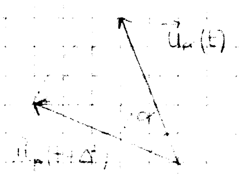
ricordiamo che $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

calcoliamo poi $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}_\theta(t+\Delta t) - \vec{u}_\theta(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\delta}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

perché quando $\Delta t\to 0$ $\vec{u}_\theta(t+\Delta t)$ descrive arco di circonferenza, inoltre corda $\to$ arco (arco = angolo al centro × raggio), quindi per $\Delta t\to 0$ $|\vec{\delta}| \to \Delta\theta$
$\underset{\Delta\theta}{\text{angolo}}$ $\underset{1}{\text{raggio}}$

$\vec{u}_\theta \perp \vec{r}(t)$





Direzione: la corda tende ad essere tangente alla curva, quindi perpendicolare a $\vec{u}_\theta$, pertanto parallelo a $\vec{u}_r$. $\vec{\delta} \perp \vec{u}_\theta \longrightarrow \vec{\delta} \parallel \vec{u}_r$

Verso: il verso è quello opposto a $\vec{u}_r$, quindi lo scriviamo $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} -\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{u}_r$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 148

PROBLEMA FONDAMENTALE della CINEMATICA

Spesso il problema è posto in modo inverso: conosciamo $\vec{a}$ e dobbiamo ricavare $\vec{r}(t)$.

- Caso semplice

$\vec{a} = \vec{a}(t)$ ha una soluzione precisa

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C_1}$$

condizione iniziale (o condizione al contorno)

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C_2}$$

seconda condizione iniziale

Es. $\vec{a}(t) = 3t^2\vec{u}_x + e^{-t}\vec{u}_y$ con $t=0$, $\vec{v}=0$; $t=2$, $\vec{r} = 3\vec{u}_x$

$$\vec{v}(t) = (t^3 + C_1)\,\vec{u}_x + (-e^{-t} + C_1')\,\vec{u}_y$$

impongo $t=0$, $\vec{v}=0 \rightarrow C_1\vec{u}_x + (C_1' - 1)\vec{u}_y = 0 \rightarrow C_1 = 0$ e $C_1' = 1$

$$\vec{v}(t) = t^3\vec{u}_x + (1-e^{-t})\,\vec{u}_y$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}(t)\,dt + C_2 = \left(\frac{1}{4}t^4 + C_2\right)\vec{u}_x + (t + e^{-t} + C_2')\,\vec{u}_y$$

impongo $t=2$, $\vec{r} = 3\vec{u}_x \rightarrow (4+C_2)\,\vec{u}_x + (2+e^{-2}+C_2')\,\vec{u}_y = 3\vec{u}_x$ — $C_2 = -1$, $C_2' = -2-e^{-2}$

- Problema reale

l'accelerazione non è solo funzione del tempo, quindi non basta più l'integrale

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{a}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

Es. goccia di pioggia che cade

$$\vec{a} = -\vec{g} + K\vec{v}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g + K\frac{dr}{dt}$$ equazione differenziale.

MOTI PARTICOLARI A UNA DIMENSIONE

Continuiamo comunque a trattare vettori. $\vec{r} = x(t)\,\vec{u}_x$

$\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_x$

$\vec{a} = a(t)\,\vec{u}_x$

i) Moto rettilineo uniforme

$a = 0$ c.i. $t=0$ $\vec{v} = v_0$; $t=0$ $\vec{r} = x_0$

c.i. $t = t_0$ $x = x_0$ $v = v_0$

$x = x_0 + v_0(t - t_0)$

$v = 0 + C_1$ $C_1 = v_0 \longrightarrow v = v_0$

$x = v_0 t + C_2$ $C_2 = x_0 \longrightarrow x = x_0 + v_0 t$

ii) Moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = a_0$ (costante) $t=0$ $\vec{v} = v_0$; $t=0$ $x = x_0$

c.i. $t = t_0$ $x = x_0$ $v = v_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\ v = v_0 + a(t-t_0) \end{cases}$$

$v = at + C_1$ $C_1 = v_0 \longrightarrow v = v_0 + at$

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2$ $C_2 = x_0$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 148

Moti nel piano

PRINCIPIO DI GALILEO (prima formulazione del relativismo)

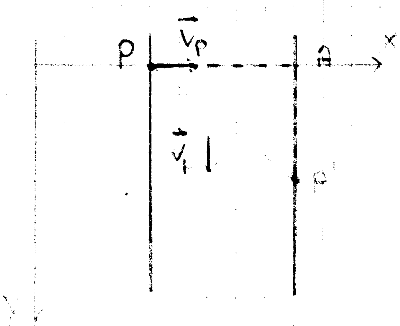
Se l'accelerazione non dipende dalla velocità, né dalla posizione, allora un moto 3D può essere scomposto in tre moti unidimensionali **indipendenti**

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$$
$$\vec{v} = \int a_x \, dt \, \vec{u}_x + \int a_y \, dt \, \vec{u}_y + \int a_z \, dt \, \vec{u}_z$$
$$\vec{r} = \int v_x \, dt \, \vec{u}_x + \int v_y \, dt \, \vec{u}_y + \int v_z \, dt \, \vec{u}_z$$

Ciascuna componente influenza solo le rispettive componenti.

Questo non vale più se l'accelerazione è funzione di più parametri.

Es persona che attraversa un fiume a nuoto.



Il moto a due dimensioni è stato scomposto lungo le sue componenti, in due moti fittizi che avvengono nello stesso intervallo di tempo da 0 a t

lungo x arriva in A

lungo y arriva in P'

COMPOSIZIONE di MOTI

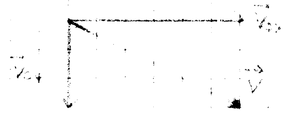
1- Moto rettilineo uniforme lungo x e lungo y.

$$\begin{cases} x = x_0 + V_{0x} t \\ y = y_0 + V_{0y} t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{V_{0x}} \\ y = y_0 + V_{0y} \dfrac{x - x_0}{V_{0x}} \end{cases}$$

La traiettoria è una retta di equazione $y = y_0 + \dfrac{V_{0y}}{V_{0x}}(x - x_0)$

dato che $m = \dfrac{V_{0y}}{V_{0x}}$, la direzione del moto sarà la direzione del vettore velocità risultante.

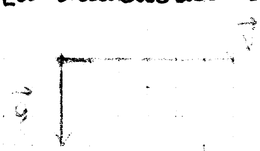
$$\vec{V} = V_{0x} \vec{u}_x + V_{0y} \vec{u}_y .$$



2- Moto rettilineo uniforme lungo x e uniformemente accelerato lungo y.

$$\begin{cases} x = x_0 + V_{0x} t \\ y = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{V_{0x}} \\ y = y_0 + V_{0y} \dfrac{x - x_0}{V_{0x}} + \dfrac{1}{2} a \left(\dfrac{x - x_0}{V_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$

La traiettoria è una parabola di equazione $y =$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 148

$$\vec{a} = \alpha R \underbrace{(\vec{u}_\gamma \times \vec{u}_R)}_{\vec{u}_T} + \omega R \omega \underbrace{(\vec{u}_\gamma \times \vec{u}_T)}_{-\vec{u}_R}$$

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T - \omega^2 R \vec{u}_R$$

$\vec{a}_T$ tangenziale

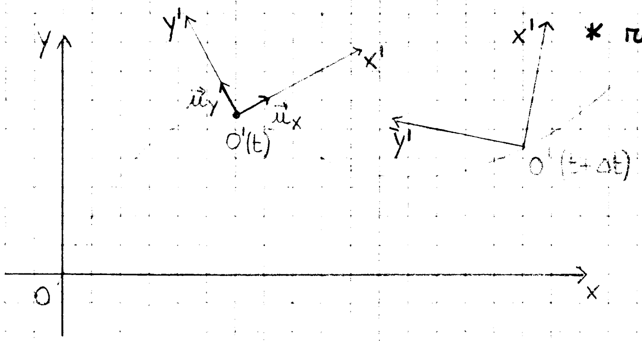
$\vec{a}_c$ centripeta o normale $\quad -\omega^2 R = -\left(\frac{V}{R}\right)^2 R = -\frac{V^2}{R} \rightarrow V = \omega R$

Moti relativi

8 marzo 2010

Si tratta di cambiare il sistema di riferimento, dunque cambiano le caratteristiche del moto e bisogna studiarne l'accelerazione.

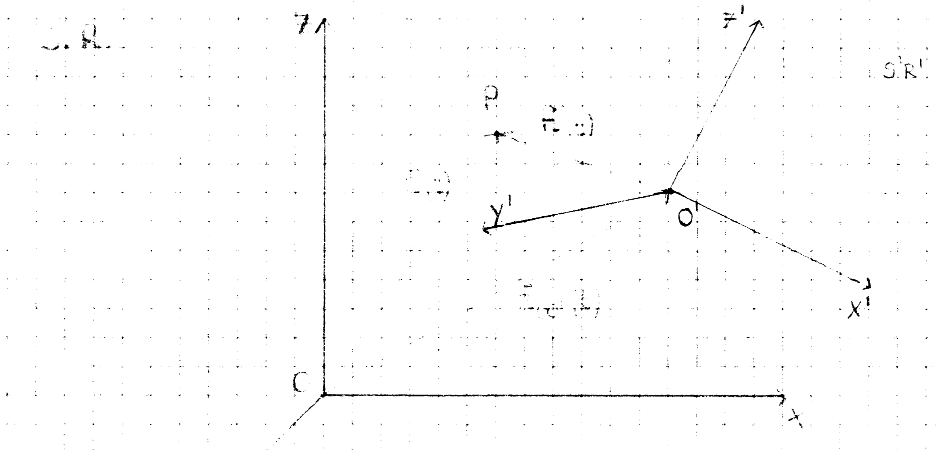
Il sistema di riferimento fino ad ora è stato fisso, adesso si muove rispetto al sistema di riferimento (altro)
* traslazione dell'origine O'
* rotazione degli assi



Vettore che descrive la variazione di posizione di O' in S.R. è $\vec{r}_{OO'}(t)$

La rotazione degli assi viene descritta con un angolo $\theta = \theta(t)$, angolo di $\vec{u}_x'$ rispetto a S.R. Quindi $\vec{u}_x'$ non è una costante ma è una funzione del tempo, o meglio, la sua direzione è funzione del tempo. La sua derivata, come abbiamo già visto è:

$$\frac{d\vec{u}_x'}{dt} = \begin{cases} \text{modulo} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \text{direzione} \perp \vec{u}_x' \end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{u}_x'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_x'.$$



$\vec{r}(t)$ = vettore posizione di P in SR $= x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{r}_{OO'}(t)$ = vettore posizione di O' in SR $= x_{OO'}\vec{u}_x + y_{OO'}\vec{u}_x + z_{OO'}\vec{u}_z$

$\vec{r}'(t)$ = vettore posizione di P in S'R' $= x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z'$.

$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}'$ → posizione traslata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 148

Quindi $\vec{V} = \vec{V}' + \underbrace{\vec{V}_{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{V_{TRASC}}$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{TRASC} + \vec{a}_{CORIOLIS}$ con $\vec{a}_{TRASC} = \vec{a}_{OO'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

con $\vec{a}_{COR} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$.

SIGNIFICATI FISICI

$\vec{a}_{OO'}$ = accelerazione di un punto (l'origine O')

$\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{velocità angolare assi}} \times \vec{r}' = \underbrace{\vec{\alpha}}_{\text{accelerazione angolare assi}} \times \vec{r}'$ = rotazione degli assi (effetto tangenziale)

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ = accelerazione centripeta dovuta alla rotazione degli assi.

$\parallel \; \perp\vec{\omega}$ dato che $(\vec{\omega} \times \vec{r}') \perp \vec{\omega}$, il prodotto vettoriale diviene prodotto di moduli

$\omega^2 r$

$\vec{a}_{TRASC}$ = contributo delle possibili accelerazioni di S'R'.

$\vec{a}_{CORIOLIS}$ = contributo legato alla velocità di rotazione, non all'accelerazione, quindi c'è anche se il sistema non accelera.

es. S'R' sistema Terra $\rightarrow$ la terra ruota attorno all'asse $\rightarrow \vec{\omega} \neq 0$

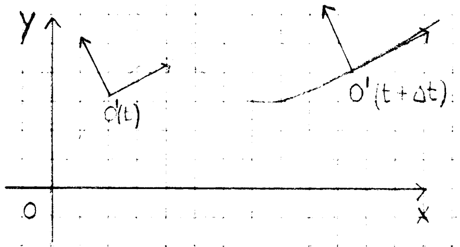
$\rightarrow$ non ha nessuna forma di accelerazione $\rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{a}_{OO'} = 0$

$\rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{CORIOLIS} + \vec{a}_{CENTRIP.}$

Quindi un corpo che si muove nel sistema di riferimento terra è soggetto alla sua accelerazione, a quella centripeta e a quella di Coriolis, che deviano le orbite.

CASI PARTICOLARI

i) TRASLAZIONE PURA DELL'ORIGINE, gli assi restano orientati in maniera fissa

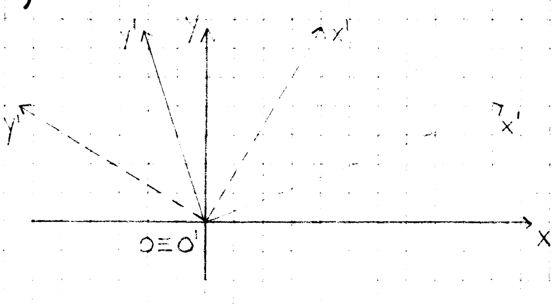


$\vec{\omega} = 0 \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$, θ costante $\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0$

$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{OO'}$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{OO'}$

ii) ROTAZIONE PURA DEL SISTEMA di RIFERIMENTO, SR' ruota rispetto a SR $O' \equiv O$



$\vec{\omega} \neq 0$

$\vec{V}_{OO'} = \vec{a}_{OO'} = 0$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \neq 0$

$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 148

DINAMICA DEL PUNTO

11 marzo 2010

__Def.__ Un punto é un oggetto di dimensioni trascurabili rispetto all'ambiente e dotato di massa.

I tre principi di Newton

__Def.__ Un principio é un'ipotesi verificata sperimentalmente e non dimostrata, per cui cioé non esiste ancora un esperimento contraddittorio.

I. PRINCIPIO di INERZIA

Un oggetto mantiene il suo stato di moto o di quiete, se non intervengono cause esterne che lo modifichino; per definizione queste cause sono le **forze**.

$\vec{V}$ costante $\longrightarrow$ $\vec{F} = 0$ $\longrightarrow$ traiettoria rettilinea

anche $\vec{V} = 0$

in modulo e direzione (quindi se un corpo non percorre traiettoria rettilinea é soggetto a forze)

II. DEFINIZIONE di FORZA

La forza, la causa del cambiamento del moto, é direttamente proporzionale all'accelerazione secondo un coefficiente di proporzionalità che é la massa del punto. La forza é una grandezza vettoriale ed agisce solo sul corpo a cui é applicata.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

m = massa inerziale = resistenza che il corpo oppone a cambiare il suo stato di moto (→ lo sforzo per una accelerazione/decelerazione é tanto maggiore quanto maggiore é la massa).

Osservazioni

i) $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_n$

$\vec{F}_{CENTRIPETA} = m\vec{a}_n = m\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n$ (traiettoria non rettilinea $\rightarrow$ $F_{CENTR} \neq 0$)

ii) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ (permette di ricavare l'equazione del moto da $\vec{F}$)

es $\vec{F} = 3t\,\vec{u}_x + (2 - e^{-t})\,\vec{u}_y$

$m = 2\,kg$

$\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{3}{2}t\vec{u}_x + \dfrac{(2-e^{-t})}{2}\vec{u}_y$

c.I. $t=0$ $\vec{r}=0$ $\vec{V}=0$

$\vec{V} = \left(\dfrac{3}{4}t^2 + c_1\right)\vec{u}_x + \dfrac{1}{2}\left(2t + e^{-t} + c_1'\right)\vec{u}_y$ $\quad c_1 = 0\,;\ c_1' = -1$

$\vec{r}(t) = \left(\dfrac{1}{4}t^3 + c_2\right)\vec{u}_x + \dfrac{1}{2}\left(t^2 - e^{-t} - t + c_2'\right)\vec{u}_y$ $\quad c_2 = 0\,;\ c_2' = 1$

iii) F costante $\rightarrow$ $\vec{a}$ costante $\rightarrow$ (1D) moto uniformemente accelerato

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

iv) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad [F] = [M]\cdot\dfrac{[L]}{[T]^2} \longrightarrow$ udm $= Kg\cdot\dfrac{m}{s^2} = N$ newton

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 148

Concetto di forza

L'evoluzione nella storia:

- CONTATTO – inizialmente si credeva che questa fosse la spiegazione delle forze
  es. uomo che spinge un carrello
- A DISTANZA – teoria della fisica classica che definiva tre tipi di forze:

  INTERAZIONI GRAVITAZIONALI – forze che si esercitano tra corpi dotati di massa sempre attrattive ($m>0$)

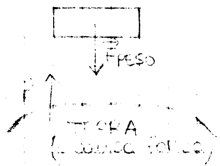
  INTERAZIONI ELETTRODEBOLI – forze che si esercitano tra corpi dotati di carica elettr attrattive o repulsive ($q>0$ o $q<0$)

  INTERAZIONI NUCLEARI FORTI – sono le interazioni più complesse (tre colori)
- SCAMBIO DI PACCHETTI DI ENERGIA – teoria della fisica moderna, per cui la forza sarebbe legata all'energia ricevuta (i pacchetti viaggiano da un corpo all'altro)
  - fotoni → elettrodebole
  - gravitoni → gravitazionale
  - gluoni → nucleare forte.
- RELATIVITÀ GENERALE – non ci sono più i concetti di forza a distanza e di scambio di pacchetti di energia → la forza è una curvatura dello spazio (è come se i corpi che producono forze deformassero un appoggio quasi fosse di gomma che quindi propaga l'effetto ai corpi circostanti).

Significato fisico:

- È una grandezza fisica che modifica lo stato di moto;
- è una grandezza fisica che produce deformazione;
- è una interazione tra la causa e un oggetto che "sente, subisce" la forza
  nell'universo quindi $\vec{F}_{TOT} = 0$;

  es. oggetto che cade



- è una grandezza vettoriale $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y$

  $\vec{F}_x = m\,\vec{a}_x \qquad \vec{F}_y = m\,\vec{a}_y$

<u>Def.</u> La risultante $\vec{R}$ è la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su un corpo

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

$$\vec{R} = m\vec{a} \qquad \vec{R} = 0 \longleftrightarrow \vec{a} = 0$$

<u>Def.</u> Equilibrio di un corpo.

$$\text{equilibrio} \longleftrightarrow \vec{v} = 0 \longrightarrow \Sigma\vec{F} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

<u>Def.</u> Per forza apparente si intende una forza legata al sistema di riferimento, ossia una forza che non ha una causa fisica (non c'è un corpo responsabile) ma che deve essere introdotta per coerenza con il cambiamento di $\vec{a}$:

cambia il sistema di riferimento; $SR \to S'R'$, $\vec{a} \neq \vec{a}' \to \vec{R} \neq \vec{R}'$

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{F}_{Apparenti}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 148

PROBLEMA del MOTO — 15 marzo 2010

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$ (3D) Quindi è necessario capire quali siano le forze in gioco

↓ scomposizione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$ 3 moti (1D)

1) **Forza gravitazionale**

due corpi dotati di massa si attirano a vicenda.

- modulo: direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza; costante di proporzionalità "G".

$$|\vec{F}_G| = G\,\frac{m_A \cdot m_B}{r^2_{AB}}$$

- direzione: lungo la retta congiungente le due masse, la stessa direzione di $\vec{r}_{AB}$.
- verso: attrattivo

$$\vec{F}_G = -\,G\,\frac{m_A\,m_B}{r^2_{AB}}\;\frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$$

(simbolico) attrazione — modulo — direzione

su B quindi $\vec{F}_G = m_B\vec{a}_B \rightarrow -G\,\frac{m_A\,\cancel{m_B}}{r^2_{AB}}\,\frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|} = \cancel{m_B}\,\vec{a}_B$

FORZA PESO: caso particolare di forza gravitazionale di un pianeta su un oggetto posto sulla superficie.

- modulo $|\vec{F}_G| = G\,\frac{m\,M_{PIAN}}{R^2_{PIAN}}$
- direzione lungo il raggio
- verso verso il centro

→ accelerazione = ACCELERAZIONE di GRAVITÀ = "$\vec{g}$"
legata solo a raggio e massa del pianeta, non del corpo.

$$\vec{a} = \vec{g} = -G\,\frac{M_{PIAN}}{R^2_{PIAN}}\cdot\frac{\vec{R}_{PIAN}}{|\vec{R}_{PIAN}|} \rightarrow |\vec{g}| = G\,\frac{M_{PIAN}}{R^2_{PIAN}}$$

$\vec{F}_{PESO} = m\cdot\vec{g}$ in N

sulla Terra $|\vec{g}| = 9{,}81\ m/s^2$.

Es. Pianeta sconosciuto → massa = $\frac{1}{2}$ massa Terra
→ raggio = $\frac{1}{4}$ raggio Terra

$g \propto m \rightarrow :2$

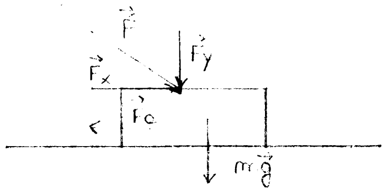
$g \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow \times 16$

L'accelerazione sul pianeta è 8 volte g

⚠ Il peso è una forza, u.d.m = N newton
è diverso dalla massa (scalare), u.d.m = Kg.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 148



$|\vec{F}_{ATTR}| = \mu_s (F + mg)$

$\vec{F}_{attrito}$ // e opposta a $\vec{F}_x$.

⚠ NB: L'attrito è una forza passiva, quindi NON PUÒ GENERARE MOTO

Pertanto il valore della forza di attrito che noi troviamo è il massimo possibile, ma esso deve comunque essere minore della forza applicata $\vec{F}_x$, altrimenti risulterebbe causa di cambiamento (impossibile).

$$|\vec{F}_{ATTR}|_{max} = \mu_s |\vec{N}| \leq |\vec{F}_x|.$$

b) ATTRITO DINAMICO (corpi che scivolano/strisciano): modulo proporzionale alla somma delle forze perpendicolari alla superficie del vincolo; direzione uguale e verso opposto alla velocità.

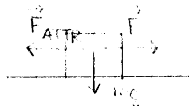
$$|\vec{F}_{ATTR.}| = \mu_d |\vec{N}|$$

⚠ $\mu_d < \mu_s$ sempre

L'attrito dinamico riduce la velocità e quando $v = 0$,

attrito dinamico $\xrightarrow{\text{diviene}}$ attrito statico

Es.



$v = 2\,m/s$
$F = 3N$
$m = 10kg$
$\mu_d = 0,1$
$\mu_s = 0,2$

$|\vec{F}_{ATTR.}| = \mu_d \cdot |\vec{N}| = 0,1 \cdot 100N = \cancel{10N}$

↘ L'attrito sarà $3N = \vec{F}_x$ (non può essere superiore!)

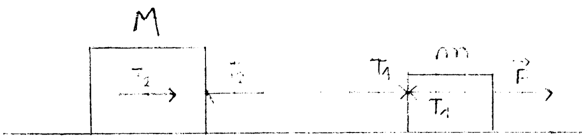
c) ATTRITO VOLVENTE (corpo che ruota su un altro)

ii) solido - fluido → ATTRITO VISCOSO una forma possibile per questo attrito è

$$\vec{F}_{ATTR} = -K\vec{v}$$

18 marzo 2010

4) Tensione di funi



F su $m \rightarrow a_m \neq 0$

$a_M \neq 0 \rightarrow \exists F_1$ su M

i) $\vec{F}$ su $m \rightarrow$ m applica una forza $\vec{T}_1$ sulla fune $\rightarrow$ la fune applica una forza $-\vec{T}_1$ su m.

ii) La fune esercita una forza $\vec{T}_2$ su M $\rightarrow$ M esercita una forza $-\vec{T}_2$ sulla fune.

(m) $F - T_1 = m a_m$

(M) $T_2 = M a_M$

(fune) $T_1 - T_2 = M_F a_F$ (NB: per una fune qualunque $T_1 \neq T_2$!)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 148

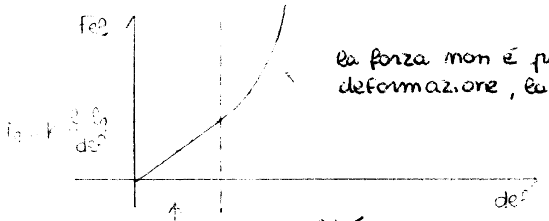
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 148

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo della molla $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

FORZE ELASTICHE REALI

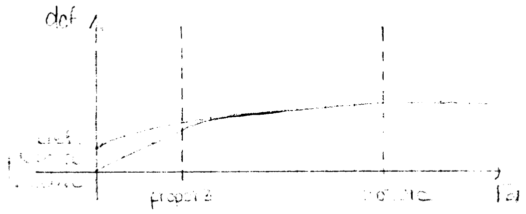
- Deformazioni elevate $\rightarrow$ la forza non è più proporzionale alla deformazione



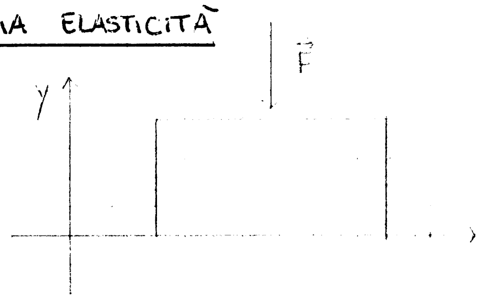
la forza non è più proporzionale alla deformazione, la forza aumenta di più

vale la proporzionalità

- Plasticità $\rightarrow$ oltre un certo carico si ha la rottura della molla; carico di rottura della molla = forza massima affinché non si rompa;
inoltre quando viene lasciata andare dopo la compressione non torna alla lunghezza iniziale; deformazione plastica residua = grado di danneggiamento del materiale.



TEORIA ELASTICITÀ



Se comprimo un oggetto con una forza lungo y, essa produce deformazione lungo x e lungo y
Quindi una forza elastica lungo un asse ha contributi di deformazione lungo x, y e z.

6) Forza centrifuga

forza apparente, che quindi è presente solo se il sistema S'R' ruota di moto circolare (quindi solo per sistemi di riferimento non inerziali)

- modulo $|F_c| = m\frac{v^2}{R}$
- direzione lungo il raggio R della circonferenza
- verso verso l'esterno.

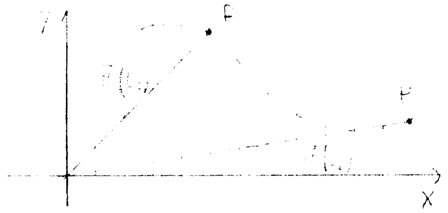
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 148

EFFETTI DI UNA FORZA

Una forza fa variare la velocità, la forza agisce mentre l'oggetto si sposta, intanto che il tempo passa.

Quindi si possono guardare gli effetti della forza al variare del tempo oppure al variare della posizione del corpo mentre percorre uno spazio.



$\vec{F}$ agisce da t_1 a t_2
$\vec{F}$ agisce lungo la traiettoria } diverso significato fisico

- QUANTITÀ DI MOTO
- ENERGIA
- MOMENTO ANGOLARE

① FORZA CHE AGISCE NEL TEMPO

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \qquad d\vec{J} = \vec{F}\,dt$$

$\vec{J}$ IMPULSO DELLA FORZA — l'effetto nel tempo è un vettore

$$\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p}$$
$$d\vec{J} = \vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

Caso particolare:

$\vec{F}$ costante in modulo e direzione $\quad \vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$

Se $\vec{F}$ non è costante $\quad J = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = m\int_{v_1}^{v_2} dv = mv_2 - mv_1$

$$\vec{J} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

QUANTITÀ DI MOTO $\quad \vec{p} = m\vec{v}$

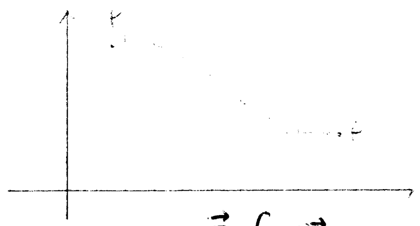
Quindi $\quad \vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

② FORZA CHE AGISCE LUNGO UNA TRAIETTORIA

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

W LAVORO — l'effetto nello spazio è uno scalare

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \Delta K$$
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



dividiamo la traiettoria in tanti intervalli ds → integrale di linea $\quad d\vec{s} = d\vec{r}$.

i) $\vec{F}$ costante $\quad W = \vec{F}\cdot\int_\gamma d\vec{s}$

ii) $\vec{F}$ non costante $\quad W = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \underbrace{d\vec{s}}_{d\vec{r}} = \int_\gamma m\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\vec{r}$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

infatti $\frac{d\vec{r}}{dt} = d\vec{v} \qquad \vec{v} /\!/ d\vec{v} \qquad \vec{v}\cdot d\vec{v} = v\cdot dv$

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

ENERGIA CINETICA $\quad K = \frac{1}{2}mv^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 148

LAVORO effetto di una forza che agisce su un percorso.

def. $\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}}$

W è scalare

$[W] = [F][L] = \frac{[M][L]}{[T^2]}[L] = [M][L^2][T^{-2}]$ u.d.m $= \text{Kg}\frac{m^2}{s^2} = J$

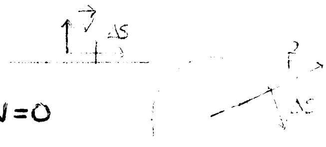
dimensioni fisiche dell'energia

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

i) $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ se $\vec{F} \perp d\vec{s}$

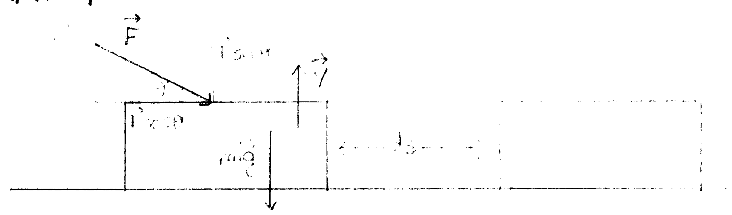
→ i vincoli non producono mai lavoro $\vec{V} \rightarrow W = 0$

→ forza centrifuga non produce mai lavoro $\vec{F}_{CENTR} \rightarrow W = 0$



ii) $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}||d\vec{s}|\cos\theta = |\vec{F}|\cos\theta \, d\vec{s} = |\vec{F}_{//}||d\vec{s}|$

$dW = |\vec{F}_{//}||d\vec{s}|$ componente della forza parallela allo spostamento



$dW = \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} = F_{//} \cdot ds$

$dW = F\cos\theta \, dx$

iii) $\vec{F}$ costante in modulo e direzione (→ possiamo considerarla 1D)

$\vec{F} = F_x \vec{u}_x$

Anche se la forza è diretta in un'unica direzione, lo spostamento può essere diverso (ad esempio può avere una velocità iniziale).

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int (F \cdot \vec{u}_x)(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y)$ $[\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 \text{ e } \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0]$

$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx = F\Delta x$ (vale solo nel caso di forza costante!)

iv) W è legato a variazioni di energia cinetica

TEOREMA ENERGIA CINETICA $\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta K}$

$K = \frac{1}{2}mv^2$ $\Delta K = K_{fin} - K_{in}$

- $\underline{W > 0} \rightarrow \Delta K > 0 \rightarrow K_{fin} > K_{in}$ LAVORO POSITIVO → aumenta velocità del corpo → aumenta energia di m → F cede energia a m.
nell'ipotesi di m costante $V_{fin} > V_{in}$
- $\underline{W < 0} \rightarrow \Delta K < 0 \rightarrow K_{fin} < K_{in}$ LAVORO NEGATIVO → m cede energia → il corpo rallenta

v) ENERGIA CINETICA

def. $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$ energia che possiede il corpo perché in moto

K è scalare, è un'energia e quindi u.d.m $= J$.

$K = 0 \longleftrightarrow V = 0$. Dipende solo dal modulo di $\vec{v}$.

$(\vec{p} = m\vec{v})$ $K = \frac{1}{2}|\vec{p}|\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{|p^2|}{m} \rightarrow p = \sqrt{2mK}$

SISTEMA a MASSA FISSA:

$\vec{p}$ cost $\longrightarrow$ K cost

$\vec{p}$ cost $\cancel{\longleftarrow}$ K cost (può cambiare direzione)

$|\vec{p}|$ cost $\longleftarrow$ K cost

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 148

b) Abbiamo definito la variazione dell'energia potenziale, ma non abbiamo definito il valore di E.

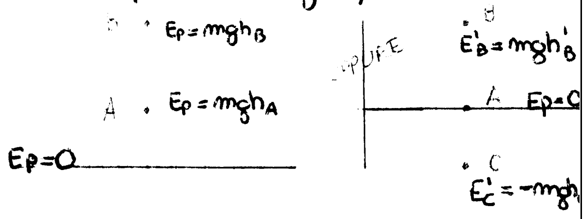
Definiamo E a meno di una costante additiva arbitraria:

$$E_A = E'_A + C \qquad \Delta E' = \Delta E = -W$$
$$E_B = E'_B + C$$

Bisogna sempre definire un riferimento per le energie, ossia una posizione in cui essa è nulla

Es. forza peso

$$E_p = mgR + cost$$



Esempi di forze conservative: 25 marzo 2010

1) FORZA PESO $E_p = mgR$

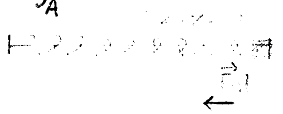
$$W = mg(R_B - R_A) = W_{BA}$$

$\Delta E_p = -W$ ma è necessario definire un sistema di riferimento (R in cui $E_p = 0$).

$$E_{fin} - E_{in} = -mgR_B + mgR_A$$

2) FORZA ELASTICA

$$W = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r}$$



$$F_{el} = -Kx$$

$$\vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -Kx\,dx$$

$$W_{AB} = \int_A^B -Kx\,dx = \left| -\frac{1}{2}Kx^2 \right|_A^B = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2$$

$$\Delta E = -W$$

$$E_B - E_A = -\frac{1}{2}Kx_A^2 + \frac{1}{2}Kx_B^2$$

Osservazioni energetiche

ii) molla

$$x\uparrow \to E_p\uparrow \to \Delta E > 0 \to W < 0 \to \Delta K < 0 \to K\downarrow \to |V|\downarrow$$

aumenta la deformazione

i) peso

$$R\downarrow \to E_p\downarrow \to \Delta E_p < 0 \to W > 0 \to \Delta K > 0 \to |\vec{V}|\uparrow$$

TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Per il teorema energia-lavoro $\Delta K = W \to K_{fin} - K_{in} = W$

W è sempre compiuto da forze $W = W_{CONS} + W_{NON\ CONS}$

$$W = -(E_{p_{fin}} - E_{p_{in}}) + W_{NON\ CONS}$$

$$K_{fin} - K_{in} = -E_{p_{fin}} + E_{p_{in}} + W_{non\ cons}$$

$$\boxed{K_{fin} + E_{p_{fin}} = K_{in} + E_{p_{in}} + W_{non\ cons.}}$$

descrive l'energia scambiata oggetto/esterno non dell'oggetto!

W proprietà delle forze applicate non conservative

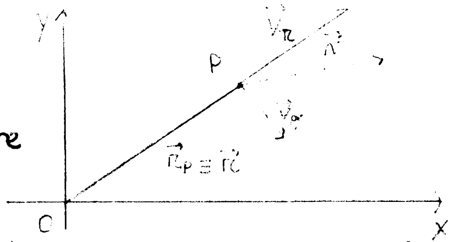
K + Ep = ENERGIA MECCANICA del CORPO

K propr. dell'oggetto - energia dovuta al moto

Ep propr. dell'oggetto - energia dovuta a posizione (punto in cui agisce una forza conservativa)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 148



Caso particolare

$P \equiv O$

$\vec{r}_P$ coincide con il vettore posizione

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Si sceglie un sistema di riferimento a coordinate polari, la velocità si può perciò scomporre in $\vec{v}_r \parallel \vec{r}$ e $\vec{v}_\theta \perp \vec{r}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$\vec{r} \times \vec{v}_r = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{r} \parallel \vec{v}_r$$

$$\vec{r} \times \vec{v}_\theta = |\vec{r}||\vec{v}_\theta| \quad \text{perché} \quad \vec{r} \perp \vec{v}_\theta \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta \Rightarrow |\vec{L}| = r m v_\theta$$

Nel caso di MOTO CIRCOLARE

$$\vec{v}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}_\theta| = \omega r$$

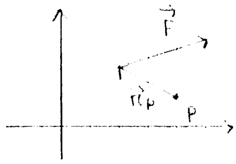
$|\vec{L}| = mr^2\omega \qquad \vec{L} \perp \vec{r}, \ \vec{L} \perp \vec{v}$ poiché $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ e $\vec{\omega} \perp \vec{v}$

$$\rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

$$\rightarrow \vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

$I = mr^2$ momento di inerzia.

Momento della forza



$$\vec{M} = \vec{r}_P \times \vec{F}$$

se $P \equiv O \rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE ([illegible])

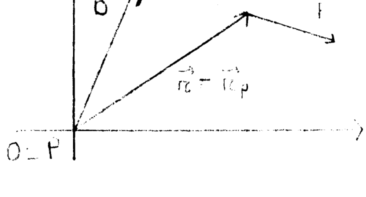
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0 \ \vec{v} \parallel \vec{v}} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{q}}{dt}}_{= \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

$\boxed{\vec{M} = 0 \longleftrightarrow \vec{L} \text{ costante}} \quad (\vec{L}_{fin} = \vec{L}_{in})$

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \begin{cases} \text{se } \vec{F} = 0 \\ \text{se } \vec{r} = 0 \quad (F \text{ applicata in } O) \\ \vec{r} \parallel \vec{F} \end{cases}$$

Come calcolare il modulo di $\vec{M}$.



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen}\theta = |r| \operatorname{sen}\theta |F| = b|F|$$

$r \operatorname{sen}\theta = b$ (b = distanza polo/retta vettore $\vec{F}$)

$$|\vec{M}| = b|\vec{F}|$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 148

RIEPILOGO SUL PUNTO MATERIALE

8 aprile 2010

m = massa

$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{L}_P = \vec{r}_P \times m\vec{v} \rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ se il polo P è fisso

$\vec{L}$: direzione di rotazione

<u>Caso particolare</u>: moto circolare attorno a P

$\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}_T = \vec{R} \times m(\vec{R} \times \vec{\omega})$

$\vec{R} \times \vec{\omega} \perp \vec{R}$ e $\vec{R} \perp \vec{\omega}$

$|\vec{L}| = mR\omega$

direzione $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{L} = mR^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$ $\quad$ $I = mR^2$ MOMENTO DI INERZIA, equivalente della massa

$\vec{L}$ descrive il moto rotatorio perché è legato alla velocità angolare ω

$\vec{p} = m\vec{v}$ $\quad$ m descrive la resistenza del corpo a cambiare $\vec{v}$

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ $\quad$ I descrive la resistenza del corpo a cambiare $\vec{\omega}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow{m \text{ cost}} m\vec{a}$

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \xrightarrow{I \text{ cost}} I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\alpha$

Energia $\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ dovuta al moto} \\ \text{en. potenziale dovuta alla posizione} \end{cases}$

moto circolare $|\vec{v}| = \omega R \rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

Lavoro $\Delta K = W$ $\quad$ $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

passando alle rotazioni si ha dunque $dW_{ROT} = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$

PUNTO MATERIALE

m	$I = m r_P^2$	resistenza a cambiare moto
$\vec{p}$	$\vec{L}$	cambiamento del moto
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{ROT} = \frac{1}{2}I\omega^2$	variazione energia
$\Delta K = W$		
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW_{ROT} = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$	

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 148

FORZE e MOMENTI

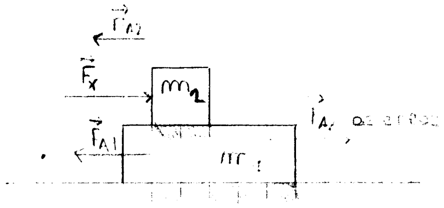
Le forze sono applicate in punti precisi → devono essere definite su ogni punto.
Se su m_i agisce una forza $\vec{F}_i$, $\vec{F}_i$ è la risultante delle forze F sulla massa.
Sulla massa m_i agiscono due tipi di forze:

i) FORZE ESTERNE la causa non appartiene al sistema;

ii) FORZE INTERNE la causa è una delle altre N-1 particelle

le forze interne sono a coppie uguali ed opposte per azione e reazione.

es. sistema di due punti materiali



su m_1 $\vec{F}_{A1}$ (causa = pavimento → Festerna)
$\vec{F}_{A2}$ (causa = m_2 → Finterna)

su m_2 $\vec{F}_x$ (causa esterna → Festerna)
$\vec{F}_{A2}$ (causa = m_1 → Finterna)

su m_i agisce una forza $\vec{F}_i$: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{est} + \vec{F}_i^{int}$

$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ (corrisponde alle interazioni tra particelle distinte).

$\vec{F}_{ij}$ = forza applicata dalla particella j su quella i $\quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Forza totale su i: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{est} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ → Momento $\vec{M}_i = \vec{r}_{P_i} \times \vec{F}_i$

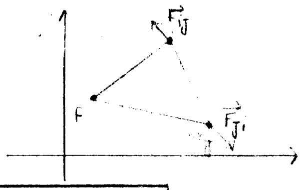
Forza totale sul sistema

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{est} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{est} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j \neq i} F_{ij} \right)}_{=0} \rightarrow \boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{est}}$$

$$F_{12} + F_{13} + \ldots + \cancel{F_{1N}} + F_{21} + F_{22} + \ldots + F_{2N} + \ldots + F_{N1} + \ldots + F_{NN-1} = 0$$

Momento totale della forza che agisce sul sistema

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_P \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{P_i} \times \vec{F}_i^{est} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{P_i} \times \vec{F}_i^{int}}_{=0}$$



$-\vec{F}_{ij}$

$$\vec{M}' = \vec{r}_{P_i} \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_{P_j} \times \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{M}' = (\vec{r}_{P_i} - \vec{r}_{P_j}) \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$$

$$\vec{r}_{ij} \parallel \vec{F}_{ij}$$

$$\boxed{\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{est}}$$

Legame $\vec{F} - \vec{P}$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = \vec{P}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\Sigma m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F} \qquad \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{est}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 148

TEOREMI DI CONSERVAZIONE

12 aprile 2010

QUANTITÀ DI MOTO $\vec{P}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\,est} = \vec{R}^{\,est}$$

$\vec{R}^{\,est} = 0 \longrightarrow \vec{P}$ costante ma $\vec{P}_i \neq$ costante

$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \rightarrow \sum m_i \vec{v}_i^{\,in} = \sum m_i \vec{v}_i^{\,fin}$

Es. particella m_1 urta con velocità $\vec{v}_1$ una particella m_2 ferma.

Dopo l'urto m_1 rimbalza con velocità $-\frac{\vec{v}_1}{2}$ lungo x.

$\vec{F}_{int} \neq 0 \qquad N = 2$

$\vec{F}_{est} = 0 \rightarrow \vec{P}$ costante, 1D $\rightarrow \vec{P}_x$ costante

$P_{in}^{x} = P_{fin}^{x}$

$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = m_1\left(-\frac{v_1}{2}\right) + m_2 v_2$

MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_E - \vec{V}_P \times \vec{P} \qquad \text{con } \vec{V}_P \text{ velocità del polo P}$$

I due termini della somma devono essere entrambi nulli:

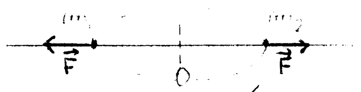
i) $\vec{V}_P \times \vec{P} = 0$
- $\vec{V}_P = 0$ polo fermo
- $\vec{P} = 0 \rightarrow \vec{P} = \vec{P}_{CM} = M\vec{V}_{CM}$ centro di massa fermo
- $\vec{V}_P \parallel \vec{P}$

ii) $\vec{M}_E = 0$

Se sono verificate entrambe le condizioni $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L}_{in} = \vec{L}_{fin}$ ma $\vec{L}_i^{\,in} \neq \vec{L}_i^{\,fin}$

(La conservazione è una proprietà globale del sistema).

Es



$m_1 = m_2$

O fisso

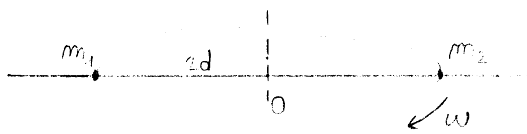
il sistema ruota con velocità ω

$CM \equiv O$

due forze spostano le due masse a una nuova posizione mentre il sistema continua a ruotare

massa dell'asse trascurabile

? Quanto vale la velocità angolare finale



F_{int} = forze gravitazionali

$\vec{F}_{est} \neq 0 \qquad$ Polo $\equiv O$ fisso $\qquad \vec{M}^E = 0 \qquad \vec{F}_{EST} \parallel$ braccio

$\vec{L}_{in} = \vec{L}_{fin}$

$\vec{L}_{in} = \vec{d} \times m_1\vec{v} + \vec{d} \times m_2 \vec{v} \qquad \vec{v} = \vec{d} \times \vec{\omega}$

$\vec{L}_{in} = m_1 d^2 \vec{\omega} + m_2 d^2 \vec{\omega} = I_1 \omega + I_2 \omega$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 148

Energia dissipata per attrito se li considero indipendentemente,

$m_1 \rightarrow W_1 = (-)\mu_d m_1 g \cdot x_1$

$m_2 \rightarrow W_2 = \mu_d m g \cdot x_2$

$W_{TOT} = W_1 + W_2$.

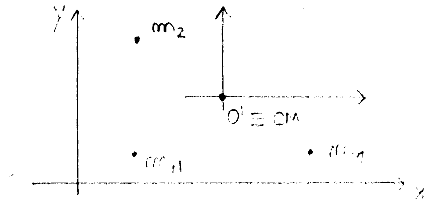
Se li considero come un sistema unico posso usare il teorema energia-lavoro

$\Delta K = W^{INT}$

$K_f - K_i = W^{INT} \rightarrow \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_1'^2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2\right) = W^{INT}$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Def. Il sistema di riferimento del centro di massa $S'R'$ ha l'origine $O \equiv CM$ e gli assi paralleli agli assi del sistema di riferimento inerziale.



O' si muove con il centro di massa

$\vec{a}_{cm} \neq 0$, quindi $S'R'$ è un sistema di riferimento non inerziale.

PROPRIETÀ:

i) nel sistema $S'R'$ $CM \equiv O$;

ii) la velocità del centro di massa in $S'R'$ è nulla;

iii) l'accelerazione del centro di massa in $S'R'$ è nulla.

i) Coordinate

in $SR \rightarrow \vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \neq 0$

in $S'R' \rightarrow \vec{r}\,'_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}\,'_i}{\sum m_i} = 0 \longrightarrow \sum m_i \vec{r}\,'_i = 0$

ii) velocità

in $S'R' \rightarrow \vec{v} = \dfrac{\sum m_i \vec{v}\,'_i}{\sum m_i} = 0$

iii) accelerazione

in $S'R' \rightarrow \vec{a} = \dfrac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = 0$

iv) quantità di moto

in $S'R' \rightarrow \vec{P}\,' = M\vec{v}\,'_{cm} = 0 \qquad \vec{P} \neq \vec{P}\,' \quad S'R'$ NON È INERZIALE

$\vec{P}\,'$ costante $\longrightarrow \sum F^{ext} = 0 \qquad \vec{F}^{ext} = \underbrace{\vec{F}^{ext}}_{\text{in } SR} + \vec{F}^{APP} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 148

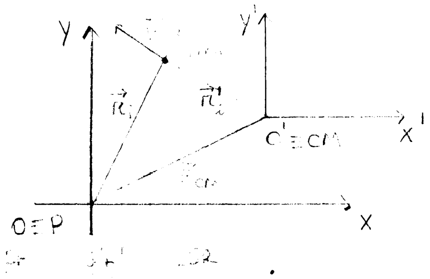
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 148

TEOREMI DI KONIG

Riguarda le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \vec{L} \neq \vec{L}_{CM} \\ ② \ K \neq K_{CM} \end{array}\right\} \text{cerca una relazione tra i due membri}$$

I TEOREMA di KONIG



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$

Il polo resta costante, sempre messo in O per entrambi i sistemi di riferimento, quindi anche il braccio resta lo stesso in SR e in S'R', in entrambi è $\vec{r}_{P_i} = \vec{r}_i'$

$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$

Sostituendo nell'equazione del momento angolare otteniamo

$\vec{L}_i = (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})$

$\vec{L}_i = \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}\, m_i$

Trovato il momento angolare della singola particella possiamo ricavare il momento angolare totale in S'R'

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i =$

$\sum \vec{r}_i' \times \underbrace{m_i\vec{v}_i'}_{\vec{P}_i'} = \vec{L}'$ momento angolare totale in S'R' rispetto al polo $O' \equiv CM$.

$\vec{r}_{CM} \times \sum m_i\vec{v}_i' = 0$

$\sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_{CM} = \left(\sum m_i\vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_{CM} = 0$

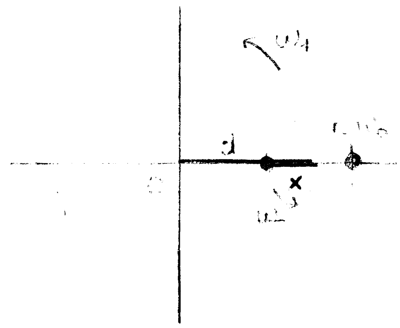
$\sum \vec{r}_{CM} \times m_i\vec{v}_{CM} = \left(\sum m_i\right)\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} = \vec{L}_{CM}$

calcolato in SR rispetto al polo O.

$\rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$

- $\vec{L}$: momento angolare in SR rispetto a O
- $\vec{L}_{CM}$: momento angolare del centro di massa in SR rispetto a O
- $\vec{L}'$: momento angolare in S'R' rispetto al CM

Es.



$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$

$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega}_1 = M\, d^2 \cdot \omega_1$ (moto circolare rispetto a O)

$\vec{L}'$ (moto circolare rispetto a CM)

$\vec{L}' = m x^2 \vec{\omega}_0 + m x^2 \vec{\omega}_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 148

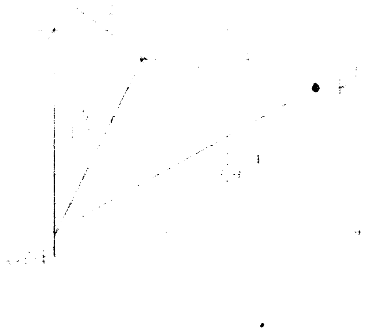
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 148

$\vec{R}$ è l'insieme delle forze che modificano il moto del centro di massa.

$\vec{M}$ è l'insieme dei momenti che modificano il moto di rotazione.

Cerchiamo una relazione tra $\vec{M}$ e $\vec{R}$

$\vec{M} \neq \vec{B} \times \vec{R}$



$$\vec{M}_{i0} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_{P'i} + \overline{OP'}) \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_0 = \Sigma \vec{M}_{i0} = \Sigma \vec{r}_{P'i} \times F_i + \Sigma \overline{OP'} \times \vec{F}_i =$$

$$= \vec{M}_{P'} + \overline{OP'} \times \Sigma \vec{F}_i =$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{P'} + \overline{OP'} \times \vec{R}.$$

Conclusioni

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{P'} + \overline{OP'} \times \vec{R}$$

i) il momento di un sistema di punti dipende dalla scelta del polo.

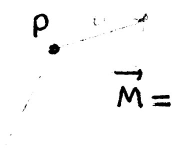
ii) il momento non è legato alla risultante $\cancel{\vec{M}_0 = \vec{B} \times \vec{R}}$

Caso particolare – COPPIA DI FORZE

Due forze uguali, parallele ed opposte che agiscono su due diverse rette di azione

la risultante è nulla $\vec{R} = 0$

$\vec{R} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0$



$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}_1$

$\rightarrow \vec{M}_0 = \vec{M}_{P'}$

Quindi il momento non dipende dal polo.

! Una coppia di forze ha un momento unico indipendente dalla scelta del polo.

TEOREMA

Qualsiasi sistema di punti con le relative forze può essere ridotto a un sistema con una sola forza $\vec{R}$ con retta di azione passante per il polo e una coppia di forze (il cui momento deve essere uguale alla somma dei momenti $\vec{M} = \Sigma \vec{M}_i$)

Il sistema si riduce così ad una risultante che muove il baricentro più una coppia che descrive la rotazione attorno al centro di massa con $\vec{M}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 148

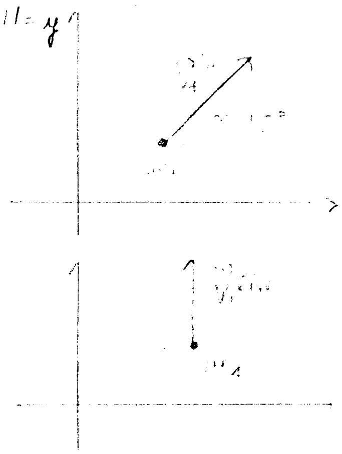
Perché un urto sia descritto correttamente bisogna conoscere le velocità iniziali e la velocità $\vec{v}$ di una particella dopo l'urto.

Es. m_1 $v = 5 m/s$ in direzione NE

m_2 ferma

dopo l'urto:

m_1 $v = 3 m/s$ in direzione N



$$\vec{v}_1^{\,in} = v_1^{in}\cos 45° \vec{u}_x + v_2^{in} \operatorname{sen} 45° \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_1^{\,fin} = v_1^{fin} \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_2^{\,fin} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y$$

Lungo x:

$$m_1 v_1^{in} \cos 45° + 0 = 0 + m_2 a$$

Lungo y:

$$m_1 v_1^{in} \operatorname{sen} 45° + 0 = v_1^{fin} m_1 + b m_2$$

2) $K_{in} \neq K_{fin}$

i) $W \neq 0$ è il lavoro compiuto dalle forze interne, mentre quello compiuto dalle forze esterne è trascurabile $[\Delta t \to 0 \quad \Delta s \to 0 \quad dW = \vec{F}^{est} \cdot d\vec{s} = 0]$

$$W = \Delta K = K_{fin} - K_{in} \neq 0$$

ii) $K \neq K_{cm}$

per il II teorema di Konig $K = K_{cm} + K'$ con K = energia cinetica in SR e K' = energia cinetica particelle nel SR del centro di massa.

$$K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \quad \text{in SR}$$

$K_{in} \neq K_{fin}$; applicando il teorema di Konig $K_{cm}^{in} + K'^{in} \neq K_{cm}^{fin} + K'^{fin}$

poiché $\vec{V}_{cm}^{in} = \vec{V}_{cm}^{fin}$, $\vec{K}_{cm}^{in} = \vec{K}_{cm}^{fin}$.

Questo significa che nel sistema cambiano le energie cinetiche del moto delle particelle rispetto al centro di massa $K'^{in} \neq K'^{fin}$, mentre resta costante quella del centro di massa.

Casi particolari:

(a) URTI ELASTICI $K_{in} = K_{fin}$

* si conserva l'energia cinetica $K_{in} = K_{fin}$
* non si dissipa energia $W = 0$

abbiamo dunque 3 equazioni $(\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin})$ + 1 equazione $(K_{in} = K_{fin})$

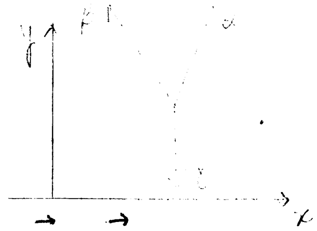
1D urto lungo una retta → abbiamo due incognite, le due velocità finali, e dunque il sistema è risolubile con le due equazioni $\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$ e $K_{in} = K_{fin}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 148

iv) CORPO RIGIDO - (SISTEMA CONTINUO di INFINITE MASSE dm)

per definire la posizione bisogna sapere:
- posizione del centro di massa (3 coordinate);
- orientamento (3 assi sistemati tra loro) _ sistema di riferimento intrinseco



Tre versori

$\vec{\alpha} = \alpha_x \vec{u}_x + \alpha_y \vec{u}_y + \alpha_z \vec{u}_z \qquad |\vec{\alpha}| = 1 \rightarrow \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$

$\vec{\beta} = \beta_x \vec{u}_x + \beta_y \vec{u}_y + \beta_z \vec{u}_z \qquad |\vec{\beta}| = 1 \rightarrow \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$

$\vec{\gamma} = \dots\dots \qquad |\vec{\gamma}| = 1$

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \rightarrow \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z = 0$

$\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \rightarrow \alpha_x\gamma_x + \alpha_y\gamma_y + \alpha_z\gamma_z = 0$

$\vec{\beta} \perp \vec{\gamma} \rightarrow \beta_x\gamma_x + \beta_y\gamma_y + \beta_z\gamma_z = 0$

Abbiamo dunque versori incogniti in 9 componenti, con sei condizioni.

→ Il sistema rigido continuo ha **6** gradi di libertà.

Dato che è continuo è costituito da masse infinitesime
V = volume ; $M = \int_V dm$ INTEGRALE di VOLUME
} DENSITÀ ρ $\quad \rho = \frac{dm}{dV}$

Caso particolare

ρ costante, una stessa dm occupa uno stesso spazio dV

$\rho = \frac{M}{V}$ la massa risulta in questo caso uniformemente distribuita.

In generale invece la densità è funzione della posizione

$\vec{P}$, $\vec{L}$ indipendenti tra loro

$\vec{} = \int_V \vec{v}\, dm = \int_V \vec{v} \rho\, dV$

$\boxed{\text{GRADI di LIBERTÀ} = 6}$ Significato: descrivono tutta la cinematica.

* 3 coordinate del centro di massa
3 componenti dei versori (orientamento degli assi)

* 3 componenti di $\vec{P}$ (traslazione)
3 componenti di $\vec{L}$ (rotazione)

* $\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ 3 componenti
$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 3 componenti

POSIZIONE
VELOCITÀ
FORZE → ACCELERAZIONE
DERIVATE
INTEGRALI con condizioni iniziali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 148

Questi due moti sono indipendenti perché sono indipendenti P e L

ROTAZIONE	TRASLAZIONE
$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}$ $\forall P$	$\vec{V}_P = \vec{V}_{CM}$ $\forall P$
$\vec{L} = \dots$	$\vec{P} = \overline{M}\vec{V}_{CM}$
$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

descritta rispetto all'asse γ, ma vale per ogni asse purché fisso

iii) Nella realtà prevale il moto di ROTO-TRASLAZIONE (il più generale)

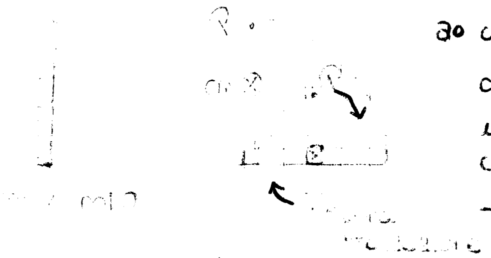
si ha quando γ non è fisso:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_{TANG} = \vec{V}_{CM} + \vec{R} \times \vec{\omega}$$ con $\vec{R}$ raggio circonferenza descritta da P

$$\vec{P} = M_{CM}$$

$$\vec{L} = ?$$

Esempio.



a• asse γ in P $\perp$ foglio

ogni punto dell'asta percorre un arco di circonferenza con centro nel punto P.

→ pura rotazione

b• asse γ in CM $\perp$ foglio

il centro di massa percorre una traiettoria con $\vec{V}_{CM}$

Q percorre una circonferenza attorno al centro di massa e quindi compie una rotazione attorno a γ

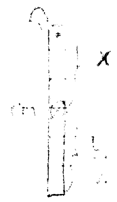
Lo stesso moto è stato descritto in due modi

a• γ in P → pura rotazione → $\vec{V}_{TRASL} = 0$, $\vec{\omega} \neq 0$

b• γ in CM → rototraslazione → $\vec{V}_{TRASL} = \vec{V}_{CM}$, $\vec{\omega}' = \omega$

(in a e b stesso angolo di rotazione $\frac{\pi}{2}$ nello stesso tempo t)

$V_Q = ?$



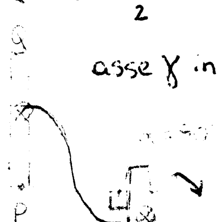
a. $\vec{V}_Q = \vec{\omega} \times \left(\frac{\vec{L}}{2} + \vec{x}\right)$

$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \frac{\vec{L}}{2}$

b. $\vec{V}_Q = \vec{V}_T + \vec{\omega} \times \vec{R}_Q$ $\qquad$ $\vec{R}_Q$ = raggio circonferenza attorno CM

$\vec{V}_Q = \vec{\omega} \times \frac{\vec{L}}{2} + \vec{\omega} \times \vec{x}$ $\qquad$ $\vec{R}_Q = x$

c. asse γ in Q $\quad$ traslazione CM + rotazione pura



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 148

Scelte diverse dell'asse γ comportano: 26 aprile 2010

$\vec{V}_{cm}$ può cambiare $\rightarrow$ $\vec{P}$ può cambiare $\rightarrow$ $\vec{R}$ può cambiare

$\vec{\omega}$ non cambia

$\vec{L}$ può cambiare

$\vec{M}$ può cambiare

$\vec{\omega} \perp \vec{R}$ e $\vec{\omega} \perp \vec{V}_T$ $\longrightarrow$ $\vec{\omega} // \gamma$

$\vec{r}$ è il braccio, dm è un punto

$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\, \vec{V}_T$

$d\vec{L} \perp \vec{r}$ $\wedge$ $d\vec{L} \perp \vec{V}_T$, quindi a differenza di quanto avviene per il punto materiale $d\vec{L}$ non è più parallelo a $\vec{\omega}$, e quindi nemmeno a γ.

Osservazioni.

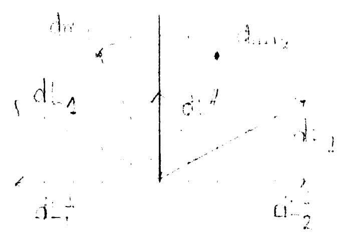
i) $\vec{L}_{//} = I_\gamma \vec{\omega}$

- $\vec{L}_{//}$ è parallelo a $\vec{\omega}$ e all'asse γ
- $\vec{L}_{//} = 0$ solo se $\vec{\omega} = 0$, mentre I_γ è sempre positivo
- Per qualunque polo P purché appartenente all'asse γ fissato, $\vec{L}_{//}$ non cambia perché $\vec{\omega}$ non cambia (indipendente dalla scelta del polo) e neanche R (in quanto dipende solo dalla scelta dell'asse).
- se si considera un asse $\gamma' \neq \gamma$ $\vec{\omega}$ non cambia, ma R sì e quindi il momento d'inerzia cambia $I_{\gamma'} \neq I_\gamma$.

  Di conseguenza cambierà anche la componente parallela del momento angolare.

ii) $\vec{L}^{\perp}$ può essere nullo anche se $\vec{\omega} \neq 0$.

es.



in questo caso $\omega \neq 0$

$dL^{//} \neq 0$

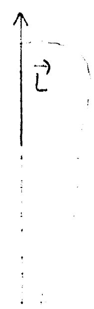
mentre $\int dL^{\perp} = 0$.

MOTO SENZA PRECESSIONE

Il momento angolare dipende unicamente dalla sua componente parallela e varia al variare di $\vec{\omega}$.

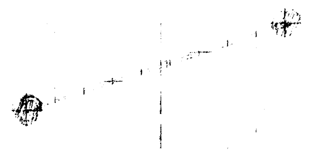
$\vec{L} = \vec{L}_{//} = I_\gamma \vec{\omega}$

$\vec{L} // \gamma$. e $\vec{L} // \vec{\omega}$.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 148



moto di precessione

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \neq$ non parallelo a γ

$\vec{L} = I_\gamma \vec{\omega} + \vec{L}_\perp$

$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$

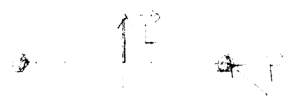
forza peso $\vec{M} \neq 0$ uguali ed opposte.

Le due forze centrifughe sono uguali ed opposte, e formano una coppia quindi il momento $\vec{M} = \underbrace{2\vec{d}}_{\text{braccio}} \times \vec{F}_c \neq 0$.

Motivo per cui le ruote dell'auto devono essere in asse $\rightarrow \vec{M} = 0 \rightarrow$ il perno non viene sollecitato

se non sono in asse si ha una maggiore usura del perno che deve lavorare per annullare il momento che per il moto di precessione non è nullo.

iii) C'è una forza costante che spinge una massa.



$L = I_\gamma \vec{\omega}$ moto senza precessione

$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} \neq 0$ (forza centrifuga e peso non influiscono sul momento)

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(I_\gamma \vec{\omega}) = I_\gamma \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\gamma \vec{\alpha}$$

Quando $\vec{M}$ cambia, ~~...~~ cambia il modulo di $\vec{L}$ e quello di $\vec{\omega}$, quindi c'è un'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$.

Conclusione

$\vec{L} = I_\gamma \vec{\omega}$ senza precessione

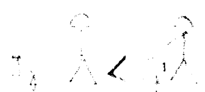
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I_\gamma \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\gamma \vec{\alpha}$$

MOMENTO di INERZIA

$$I_\gamma = \int R^2 \, dm = \int_V R^2 \rho \, dV$$

R distanza tra dm e asse γ

I_γ dipende
- dall'asse γ
- dalla geometria
- dalla distribuzione delle masse (masse in media più lontane da γ $\rightarrow I_\gamma$ cresce).



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 148

$I_{\gamma'} = I_\gamma + a^2 M$ con $a = d_{(\gamma-\gamma')}$

$\int 2ax\,\rho\,dV = 2a \int x \rho\, dV$

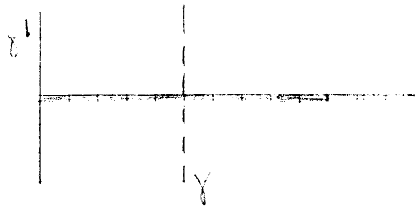
media pesata delle posizioni → x centro di massa, ∈ γ → $x_{CM} = 0$.

Conseguenza.

$I_{\gamma'} > I_\gamma$ → il momento d'inerzia è minimo se è calcolato rispetto a un asse passante per il centro di massa

→ è molto più facile far ruotare un corpo rispetto al suo centro di massa rispetto alla rotazione su un punto più esterno.

Es. I di asta rigida



$I_\gamma = \frac{1}{12} ML^2$ (tavole)

$I_{\gamma'} = I_\gamma + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2 > I_\gamma$

---

29 aprile 2010

TRASLAZIONE	ROTAZIONE
$\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$	$\vec{M} = I_\gamma \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$dW = \vec{R} \cdot d\vec{r}_{CM}$	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$
$\vec{R} = 0 \rightarrow \vec{P}$ costante (conservazione quantità di moto)	$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L}$ costante (mod, verso) se γ fisso o $\gamma \equiv CM$ (conservazione momento angolare solo dovuto a forze esterne)
	dato $\vec{M} = \vec{r}_P \times \vec{F}$, $\vec{M} = 0$ → $\vec{F} = 0$; $\vec{r}_P = 0$; $\vec{F} // \vec{r}_P$
	$\vec{L}$ costante
	* $\lvert\vec{L}\rvert$ costante → no precessione $\vec{L} = I_\gamma \vec{\omega}$
	I_γ dipende da densità e da distribuzione rispetto γ
$\Delta K = W$	* direzione costante

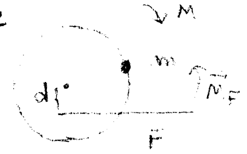
! Le forze devono essere definite con punto di applicazione + asse di rotazione

! SISTEMA VINCOLATO → NO TRASLAZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 148

Variante $\vec{M}$ F forza applicata in un punto qualsiasi che non cambia



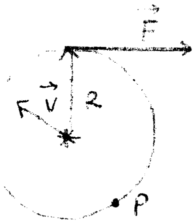
$F = 4N \vec{u}_x$

$\vec{R} = \vec{F}$

$\vec{F}$ non ha momento nullo $\vec{M}_F = \vec{d} \times \vec{F}$ $|\vec{M}_F| = d \cdot F$

$|\vec{M}'| = d\, F - M$

(2) θ positivo orario



Piano orizzontale senza attrito

CM fisso sul piano

tempo per compiere due giri

i) γ per il centro di massa, perpendicolare al foglio.

a) traslazione CM fermo $\rightarrow \vec{a}_{CM} = 0 \rightarrow \vec{F} + \vec{V} = 0 = \vec{R}$

! NB il vincolo impedisce ogni traslazione

b) rotazione il vincolo ha momento nullo → non produce rotazione

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} + 0 \times \vec{V}$

$M = R \cdot F$

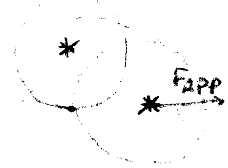
ii) $\vec{L}$ ed energia

M costante $\rightarrow \Delta L = M \Delta t \rightarrow I_\gamma \omega_f = M \Delta t$

non c'è energia potenziale $\rightarrow \Delta K = W \rightarrow \frac{1}{2} I_\gamma \omega_f^2 - 0 = M \cdot \underset{6\pi}{\theta}$

"SCELTA ASSURDA": pongo asse γ fisso in P e perpendicolare al foglio.

rotazione → ogni punto deve fare una rotazione attorno a P



FISICAMENTE questo non succede → la rotazione non basta

→ + traslazione fittizia così che il centro di massa viene riportato al suo posto:

$\vec{a}'_{CM} \neq 0 \rightarrow$ forze apparenti per traslazione

Aggiungendo una rotazione cambia il momento d'inerzia

$\gamma \rightarrow \gamma' \Rightarrow I_\gamma \rightarrow I_{\gamma'}$, posso applicare il teorema di Steiner $I_{\gamma'} = I_\gamma + MR^2$

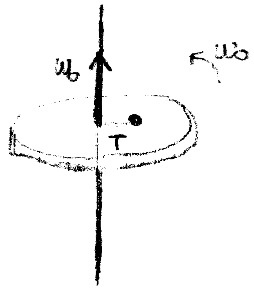
Inoltre le forze apparenti hanno un loro momento $\rightarrow \vec{M} = 2\vec{R} \times \vec{F} + \vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{F}_{APP}$

$\rightarrow \vec{M} = 2RF + RV + RF_{APP}$

$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ $I_{\gamma'}\, \omega_f = M \cdot t$

il momento nei due sistemi di riferimento è diverso!

(3)



disco massa M e raggio R

pallina m sul disco attaccata ad un filo e incastrata in una scanalatura.

Tiro il filo → pallina si sposta a distanza $\frac{d}{2}$

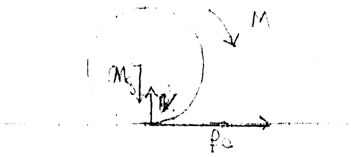
$m << M \rightarrow CM_D = CM_{SIST}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 148

La condizione necessaria per avere rotolamento puro è $\mu_s \geq \frac{F_A}{Mg}$

ii) L'origine del rotolamento è un momento puro applicato.



Se considerassimo solo il momento non ci sarebbe una risultante causa della traslazione. Dobbiamo avere quindi altre forze → l'attrito statico in C

(Il solo momento fa spostare C verso sinistra).

Traslazione $\begin{cases} x \rightarrow F_A = m a_{cm} = mR\alpha \\ y \rightarrow V - Mg = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \alpha = \frac{F_A}{mR}$

Rotazione $M - F_A R = I_{cm}\alpha$

$$M - F_A R = I_{cm}\frac{F_A}{mR} \rightarrow F_A = \frac{M}{R + \frac{I}{mR}} \leq \mu_s mg$$

OSSERVAZIONI

- $v_{cm} = \omega R$; $a_{cm} = \alpha R$
  μ_s sufficientemente grande
  } sono condizioni necessarie

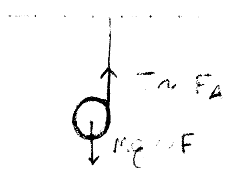
- energia cinetica

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}m v_{cm}^2}_{TRASL} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{ROTAZ}$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 R + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(mR^2 + I_{cm})}_{\substack{\text{T.H Steiner} \\ I_C}}\omega^2 = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Il moto di puro rotolamento equivale a una pura rotazione attorno all'asse γ per C ; γ non è un asse fisso.

- Esistono altri casi di rotolamento



yo yo, il moto può essere studiato come puro rotolamento.

- Rotolamento non puro

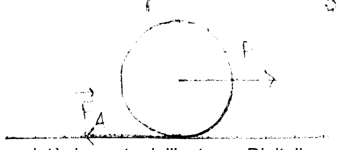
un corpo rotola e striscia ma l'attrito non è sufficiente a produrre puro rotolamento e $v_{cm} \neq \omega R$

$$v_{cm} = \omega R + v_{sciv}$$

$$a_{cm} = \alpha R + a_{sciv}$$

il punto C non è più fisso

L'attrito quindi è uguale al massimo possibile : $F_A = \mu_d mg$



$$F - \mu_s mg = m a_{cm} = m(\alpha R + a_{sciv})$$

$$\mu_s mg R = I_{cm}\alpha$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 148

TERMODINAMICA

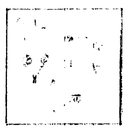
Ramo della fisica che studia i bilanci di energia; si studiano i gas perfetti che sono un caso particolare. Servono sistemi con un numero elevato di particelle per cui $N \sim N_{AV} = 6 \cdot 10^{23}$

$m_i \quad E_i \rightarrow M \quad E$ GRANDEZZE COMPLESSIVE del sistema: <u>variabili di stato</u>

le variabili di stato sono proprietà macroscopiche riferite all'intero sistema.

Teoria cinetica lega in modo statistico le proprietà macroscopiche a quelle microscopiche.

Esempio: Gas. Pressione = rapporto tra forza e superficie
↓
macroscopica



$m_1 \rightarrow v_1$

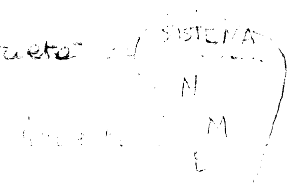
$V = \langle v_i \rangle = 0$ moto browniano, tutte le velocità sono casuali

consideriamo l'urto delle singole particelle

$$F_{media\,i} = \frac{\Delta p_i}{\Delta t}$$

La parete destra è urtata solo dalle particelle con $V_x > 0$ $\rightarrow$ $\langle F_{media\,i} \rangle \neq 0 \rightarrow$ Pressione

Def. Sistema termodinamico = sistema fisico con date caratteristiche:
- N grande ($N \sim N_{AV}$)
- occupa un dato volume V (variabile di stato perché è proprietà del sistema)
- ha delle pareti che contengono il volume



Def. Ambiente = quello che è fuori dal volume

Def. Universo = unione di sistema termodinamico e ambiente

INTERAZIONI TRA IL SISTEMA E L'AMBIENTE
- scambio di massa (es. palloncino forato che si sgonfia cede aria)
- scambio di energia (es. pentola calda lentamente scalda l'ambiente)

Def. Sistema chiuso = sistema in cui non sono permessi scambi di materia; aperto è il sistema che invece li permette

Def. Sistema isolato = sistema in cui non sono permessi scambi di massa, né di energia.

TRE VARIABILI DI STATO sono presenti in tutti i sistemi termodinamici:

Volume V

Pressione $p = \frac{dF}{dS_{sup}}$, se p è costante $\rightarrow p = \frac{F}{S}$

Temperatura T

Anche l'ambiente ha alcune proprietà di stato: p_{AMB}, T_{AMB}

Def. Equilibrio termodinamico = situazione in cui le variabili di stato non variano nel tempo

Ogni sistema termodinamico tende spontaneamente all'equilibrio.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 148

6 maggio 2010

Se un sistema A è in equilibrio termico con un sistema C e lo stesso è in equilibrio con il sistema B, allora il sistema A è in equilibrio termico con il sistema B. $T_A = T_B$

→ A e B hanno una grandezza che assume lo stesso valore → è la temperatura.

Uso il termometro per misurare la temperatura di riferimento

$$T_{RIF} = a X_{RIF} \rightarrow a = \frac{273,15}{X_{RIF}}$$

A questo punto misuro una temperatura diversa da quella di riferimento

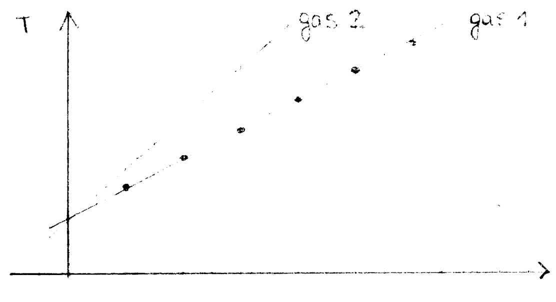
$$T = \frac{273,15}{X_{RIF}} X$$ ← misuro x

Perché 273,15 ?

Intrinsecamente due termometri diversi danno misure diverse di una stessa temperatura.

Termometro a gas perfetto $pV = nRT \rightarrow T = \frac{V}{nR} p$

misuro la temperatura quando l'acqua bolle



A seconda del termometro e del gas ottengo misure diverse.
Ripetendo tante volte la misura però per $p \rightarrow 0$ T non dipende dal termometro scelto.
Applicando questa procedura all'acqua che bolle $\lim_{p \to 0} T = 373,15K$

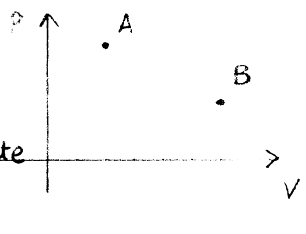
Sapendo poi che il punto triplo è a 0°C, possiamo ricavare la temperatura $T_{TR} = 273,15K$ (in ogni caso si è assunto $T_R = 100$)

Sistema che subisce una trasformazione → cambiano le variabili di stato

A stato iniziale di equilibrio

↓

B stato finale di equilibrio



Trasformazione dovuta a una causa → ambiente
↘ pareti

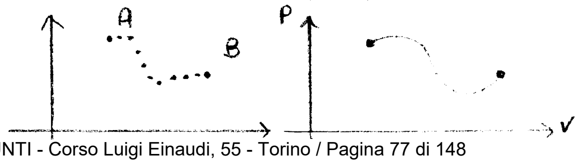
→ C'è un'interazione con l'ambiente esterno che si manifesta come scambi di energia
- lavoro (energia meccanica) → energia utilizzabile
- calore (energia termica) → energia inutilizzabile.

La trasformazione avviene attraverso stati intermedi che differiscono in modo infinitesimo dallo stato intermedio precedente. Ci sono due possibilità

i) Tutti gli stati intermedi sono stati di equilibrio → TRASFORMAZIONE REVERSIBILE

→ gli stati intermedi possono essere rappresentati come punti nel grafico p-V

→ trasformazione = curva



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 148

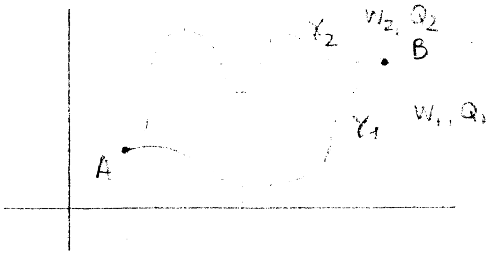
Osservazioni

a) Dallo stato A allo stato B → infinite trasformazioni possibili

b) trasformazione definite da $p = f(V)$ o $p = G(V)$

c) note f o G posso trovare W_{AB} e Q_{AB}

d) cambiando la trasformazione con A e B fissi cambio $f \rightarrow f_1 \Rightarrow W_{AB} \neq W^1_{AB}$
e $Q_{AB} \neq Q_{1\,AB}$



e) $W^{REV}_{AB\,\gamma_1} = - W_{BA\,\gamma_1}$ e $Q^{REV}_{AB\,\gamma_1} = - Q^{REV}_{BA\,\gamma_1}$

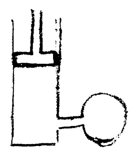
f) SOLO PER TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI

$p = G(V)$ infinite curve possibili di cui per ognuna
$T = H(V)$ infinite curve possibili

scelgo $\gamma_1 \rightarrow p = G(V)$ fissata $\rightarrow W^{IRR}_{AB\,\gamma_1}$

!!! Torno da B ad A lungo la stessa γ_1 MA potrei usare una $H(V)$ diversa
$W^{IRR}_{AB\,\gamma'} \neq - W^{IRR}_{BA\,\gamma'}$

Es.



TRASFORMAZIONI

10 maggio 2010

.) stato iniziale → stato finale
equazione → punti

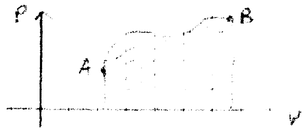
ii) REVERSIBILI → $p = f(V)$
IRREVERSIBILI → $p = G(V)$
$T = H(V)$

iii) scambio energia
a) Lavoro W
b) Calore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 148

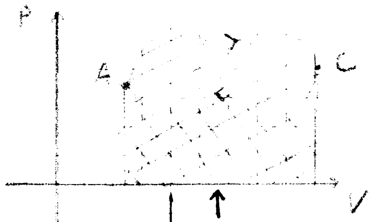
Significato geometrico



l'integrale corrisponde a un'area

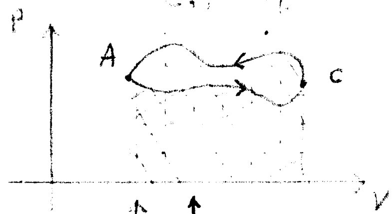
$$\text{area} = \int_A^B p\,dV = W$$

* TRASFORMAZIONI CICLICHE



W_{AC}, positivo

W_{CA}, negativo



W_{AC}, positivo

W_{CA}, negativo

$$W_{AA} = W_{AC} + W_{CA}$$

W_{AA} = area del ciclo

$W_{AA} > 0$ se il ciclo è percorso in verso orario perché il lavoro positivo è maggiore di quello negativo

$W_{AA} < 0$ se il ciclo è percorso in verso antiorario perché il lavoro positivo è minore di quello negativo.

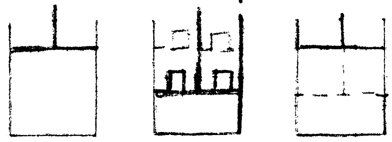
ⓑ trasformazione irreversibile

$$W = \int p_{est}\, dV \qquad dW = p_{est}\, dV$$

[[$dV > 0 \rightarrow dW > 0$
espansione → lavoro positivo
il sistema compie un lavoro sull'ambiente
→ energia va da sistema a ambiente
comprimere un gas → $W<0$]]

i) p_{est} costante → $W = p_{est}\, dV$

es.



A B C

= TRASF CICLICA

A) $p = p_{ATM}$ $\quad V = V_A \quad T = T_{AMB}$

$$V = \frac{mRT_{AMB}}{p_{ATM}}$$

B) $p = p_{ATM} + p_F = p_{ATM} + 2mg \cdot \frac{1}{\Sigma}$ $\quad T = T_{AMB}$ $\quad V_B < V_A \quad V_B = \dfrac{mRT_{AMB}}{p_{ATM} + 2mg \cdot \frac{1}{\Sigma}}$

c) $p = p_{ATM}$ $\quad T = T_{AMB}$

AB) $p'_{est} = p_{ATM} + \dfrac{2mg}{\Sigma}$ costante

$$W_{AB} = p'_{est}(V_B - V_A)$$

BC) $p''_{est} = p_{ATM}$ costante

$$W_{BC} = p''_{est}(V_C - V_B) = p''_{est}(V_A - V_B)$$

Il lavoro compiuto per "l'andata" è diverso da quello compiuto per il "ritorno". questo fenomeno è tipico delle trasformazioni irreversibili.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 148

→ durante la transizione si ha uno scambio di calore → calore latente

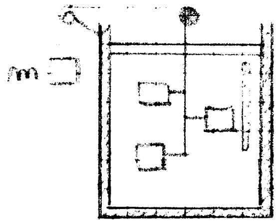
$$\Delta Q = m \cdot \lambda_{TR}$$

λ_{TR} = calore latente per unità di massa, ~~dip~~ propria della trasformazione.

es. goccia d'alcol sulla mano evapora immediatamente; nel processo di evaporazione assorbe calore latente ΔQ che prende dalla mano → la mano cede ΔQ → sensazione di freddo.

Il calore è un'energia

Dimostrazione attraverso l'esperimento del mulinello di Joule.



pareti adiabatiche

(acqua)

termometro

Ob. dimostrare che l'energia meccanica viene trasformata in calore

mulinello a pale inizialmente fermo, mosso da carrucola

I se non c'è acqua vale la conservazione dell'energia

m scende di Δh, V_f, ω_f

$$mgh = \frac{1}{2} m V_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

II se c'è acqua c'è attrito con le pale del mulinello

m scende di Δh, $V'_f < V_f$, $\omega'_f < \omega_f$

$$mgh - W_{ATTR} = K_{FIN}$$

osservo inoltre una variazione della temperatura e ricavo $\Delta Q = mc\Delta T$

➡ Misurando ΔQ e W_{ATTR} al variare di h, vediamo che

$$\frac{\Delta Q}{W_{ATTR}} = \text{costante} = 4{,}186 \ \text{cal}/\text{J}$$

→ il lavoro si trasforma totalmente in calore, secondo un fattore di trasformazione di 4,186 → sono entrambe energie.

Udm di Q = caloria

1 caloria = 4,186 J.

Calorimetria studia gli scambi di calore tra sistema e ambiente

Il calore ceduto dal sistema deve essere uguale a quello assorbito dall'ambiente

Calore ricevuto >0 → $\Delta T > 0$

$$\Delta Q_{SIST} = -\Delta Q_{AMB}$$

Es. 1kg acqua a 30°C $c = c_0$

Supponiamo di immergere una massa di 100g di ferro a 120°C $c = c_{Fe}$

$T_{fin} = ?$

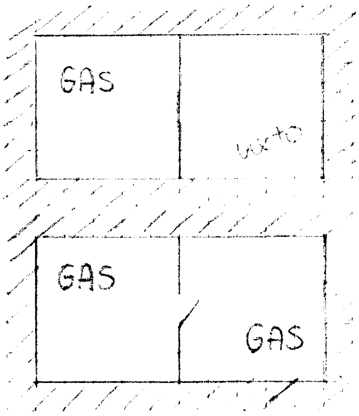
Considero il ferro il sistema, l'acqua l'ambiente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 148

APPLICAZIONI del PRIMO PRINCIPIO:

ESPANSIONE (nel vuoto) LIBERA (e irreversibile) di JOULE



pareti adiabatiche e due vani separati da rubinetto

Rubinetto chiuso

$V_1 = \frac{V}{2}$ $\quad p_1 \quad T_1$ (misurato)

apro rubinetto, vedo una rapida trasformazione perché il gas va ad occupare il vuoto

$V_2 = V$ $\quad p_2 \quad T_1$ (misurata uguale a prima)

↳ trasformazione isoterma irrevers.

analisi energetica:

$\begin{cases} Q = 0 & \text{per pareti adiabatiche} \\ W = 0 & \text{perché } p_{est} = 0 \text{ (vuoto)} \end{cases}$ $\rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow U_1 = U_2 \rightarrow$ U non dipende né da V né da p (altrimenti avrebbe variazioni

$\boxed{\text{U dipende solo da T} \quad U = U(T)}$ $\leftarrow$

Conseguenze:

i) trasformazione isoterma (T costante) $\rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow U_{fin} = U_{in}$

$Q - W = 0 \rightarrow Q = W$

quindi in un'espansione a temperatura costante $dW > 0$ e $dQ > 0$

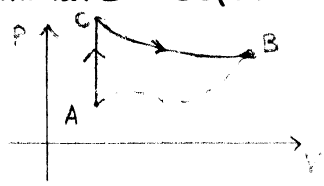
ii) calcolo di ΔU

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = ?$

dato che non dipende dalla trasformazione, costruiamo una trasformazione da A a B per cui AC → trasformazione isocora

CB → trasformazione isoterma

$U_C = U_B \;,\; T_C = T_B$



Allora $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = U_C - U_A$

$\rightarrow \Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} = Q_{AC} - W_{AC} = \underset{\text{(V costante)}}{m c_v \Delta T} - 0$

! Qualunque trasformazione può essere scomposta in due trasformazioni, isocora ed isoterma: $\Delta U_{AB} = m c_v (T_B - T_A)$

$dU = m c_v \, dT$

RELAZIONE di MAYER tra c_p e c_v

Trasformazione isobara reversibile → p costante

$dQ = m c_p \, dt$ $\quad$ p cost.

$dW = p dV = d(pV) = d(mRT) = mR \, dT$

$d(pV) = dp\,V + p\,dV$

I principio $\quad dU = dQ - dW$

$\cancel{m} c_v \cancel{dT} = \cancel{m} c_p \cancel{dT} - \cancel{m} R \cancel{dT} \rightarrow \begin{cases} c_v = c_p - R \\ c_p = c_v + R \end{cases} \rightarrow c_p > c_v$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 148

Riassunto 17 maggio 2010

- Trasformazione isocora reversibile V cost

  $W = 0$ $\quad Q = m\,C_v\,\Delta T$ $\quad Q = \Delta U$

  se P aumenta, aumenta la temperatura $\rightarrow Q > 0$ $\quad T = \frac{PV}{mR}$

  se P diminuisce, diminuisce la temperatura $\rightarrow Q < 0$

- Trasformazione isobara reversibile P cost

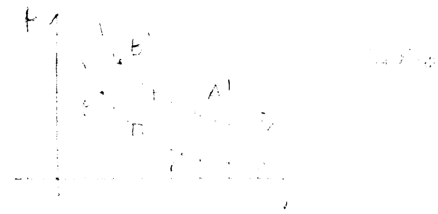
  $W = P\Delta V$ $\quad Q = m\,C_p\,\Delta T$ $\quad \Delta U = m\,C_v\,\Delta T$

  se V aumenta, aumenta la temperatura $Q > 0$, $W > 0$ $\quad \Delta U > 0$

  se V diminuisce, diminuisce la temperatura $Q < 0$, $W < 0$ $\quad \Delta U < 0$

- Trasformazione isoterma reversibile T costante PV costante

  $W = mRT \ln \frac{V_B}{V_A}$ $\quad Q = W$ (1° principio) $\quad \Delta U = 0$

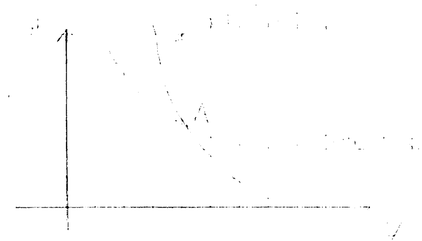
  

  compressione (V diminuisce) $W < 0$, $Q < 0$

  espansione (V cresce) $W > 0$, $Q > 0$

- Trasformazione adiabatica reversibile PV^{γ} costante

  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$

  $W = -\Delta U$ (I principio) $\quad Q = 0$ $\quad \Delta U = m\,C_v\,\Delta T$

  se V aumenta, T diminuisce $\Delta U < 0$

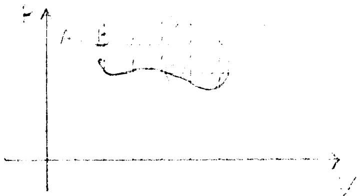
  se V diminuisce, T aumenta $\Delta U > 0$

- Trasformazione qualsiasi reversibile

  $P = f(V)$ $\quad W = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV$ $\quad \Delta U = m\,C_v\,\Delta T$ $\quad Q = \Delta U + W$ (1° principio)

- Trasformazioni cicliche

  $\Delta U = 0$ stato iniziale = stato finale $\quad W = Q$

  Se è reversibile W = area interna

  $\rightarrow W > 0$ se il ciclo è percorso in verso orario, $Q > 0$

  $\rightarrow W < 0$ se il ciclo è percorso in verso antiorario, $Q < 0$

$$W = Q_{ASSORBITO} + Q_{CEDUTO} = Q_{ASSORBITO} - |Q_{CEDUTO}|$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 148

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}} = 1 - \frac{-(nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_A})}{-nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_0}{T_1} < 1$$

$$W = Q_{CD} - |Q_{AB}| = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} - \left| -nRT_0 \ln \frac{V_D}{V_C} \right| = nR \ln \frac{V_D}{V_C} (T_1 - T_0)$$

Conseguenze

i) $\eta = 1$ solo se $T_0 = 0K$ v $T_1 \to \infty$ impossibile per il III principio.

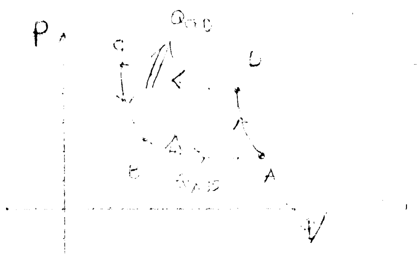
ii) caso realistico $T_1 = 373,15K$ $T_0 = 273,15K$ $\eta = 1 - \frac{273.15}{373.15} \simeq 0,33$

iii) per aumentare η: aumento T_1 v diminuisco T_0 v aumento ΔT

Macchina frigorifera

def. macchina termica che usa il lavoro per diminuire il calore del sistema $W<0$

$$W = Q_{ASS} - |Q_{CED}| < 0 \rightarrow Q_{ASS} < |Q_{CED}|$$



def. efficienza $\xi = \frac{Q_{ASS}}{|W|}$

considero il ciclo di Carnot inverso (senso antiorario)

Calcolo l'efficienza

$$\xi = \frac{Q_{ASS}}{|W|} = \frac{Q_{BA}}{|W|}$$

$$Q'_{BA} = -Q_{AB} = nRT_0 \ln \frac{V_A}{V_B} > 0$$

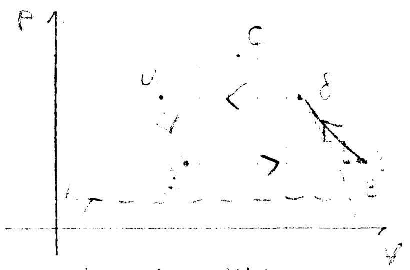
$$W' = -W = nR \ln \frac{V_D}{V_C} (T_0 - T_1)$$

$$\xi = \frac{nRT_0 \ln \frac{V_A}{V_B}}{nR \ln \frac{V_D}{V_C} (T_1 - T_0)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 148

esempio. frigorifero (motore = compressore + liquido refrigerante)



ciclo antiorario $W<0$
per la trasformazione uso energia

α (start) tutto liquido → il fluido viene lasciato andare in un contenitore più grande → - pressione

β coesistenza fluido-gas cominicia la transizione liquido-gas

γ completamente trasformato in gas → entra in funzione il motore (compressore che aumenta la pressione)

δ miscela di liquido-gas a temperatura costante torna alla situazione iniziale → liquido

(I principio: conservazione energia, se è vero $\Delta U = Q - W$ → trasformazione possibile)

Secondo principio della termodinamica

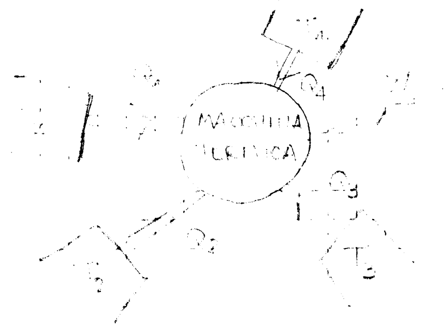
Non tutte le trasformazioni termodinamiche che conservano energia sono possibili. Quindi la condizione $\Delta U = Q - W$ è necessaria ma non sufficiente; in natura esiste una direzione privilegiata delle trasformazioni: se la trasformazione non la segue non è possibile.

★ Postulato di Clausius: il calore fluisce spontaneamente dal caldo al freddo e mai viceversa. $Q_{CEDUTO} \neq 0$ sempre. (non c'è trasformazione senza calore ceduto, ma il calore assorbito può essere nullo.)

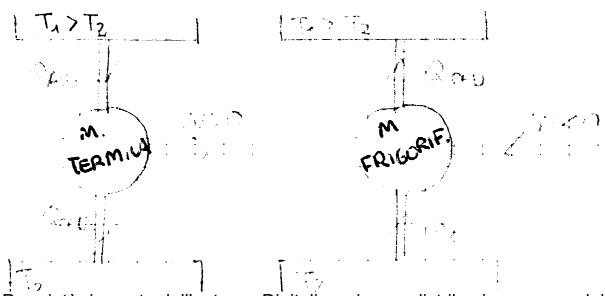
★ Teorema di Carnot $\eta \le \eta_C$ le macchine termiche hanno sempre un rendimento minore o uguale al rendimento della macchina di Carnot.

★ Teorema di Clausius (entropia) $\sum \frac{Q_i}{T_i} \le 0$
l'entropia dell'universo cresce per conseguenza della direzionalità; nelle trasformazioni si crea energia non utilizzabile

MACCHINA TERMICA – sistema di trasformazione ciclica $\Delta U = 0$, $Q = W$, $W = Q_{ASS} - |Q_{CED}|$
scambia calore e lavoro con l'ambiente (= più sorgenti a temperatura fissa)



MACCHINA A DUE SORGENTI



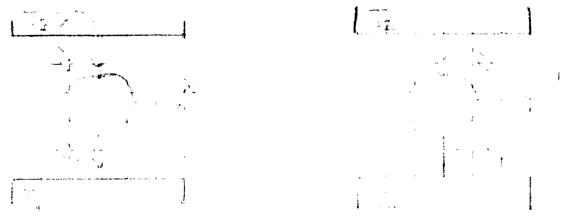
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 148

★ Teorema di Carnot: una macchina termica che lavora tra due sorgenti ha rendimento minore o uguale a una macchina termica reversibile che lavora tra le stesse sorgenti. $\eta_x \leq \eta_{REV}$.

Corollario: tutte le macchine reversibili hanno lo stesso rendimento, ossia il rendimento del ciclo di Carnot $\eta_{REV} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Dimostrazione per assurdo



[X] [REV]

$W_x = W_{REV}$

stesse sorgenti

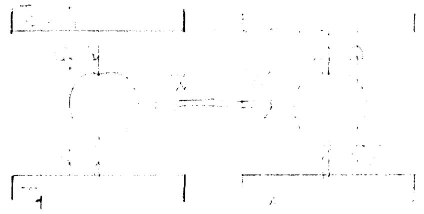
cambiano solo i calori scambiati

Supponiamo $\eta_x > \eta_{REV}$ $\quad \eta_x = \frac{W}{Q_2} \quad \eta_{REV} = \frac{W}{Q_2'} \rightarrow \frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \rightarrow Q_2 < Q_2'$

per entrambe le macchine vale il primo principio $W = Q_2 + Q_1 = Q_2' + Q_1'$

$\rightarrow Q_2 - Q_2' = Q_1' - Q_1$; sapendo che $Q_2 < Q_2'$, $Q_2 - Q_2' < 0$ segue $Q_1' < Q_1$.

Possiamo invertire le trasformazione nella macchina reversibile.

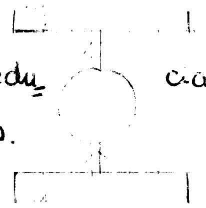


la macchina complessiva ha $W_{TOT} = 0$

T_2: $Q_2 - Q_2' < 0$ calore ceduto

T_1: $-|Q_1| + |Q_1'| > 0$

Quindi la macchina complessiva risulta



ma è una macchina impossibile, quindi deduciamo che l'ipotesi $\eta_x > \eta_R$ sia assurda, e dunque $\eta_x \leq \eta_{REV}$ □.

Dimostrazione del corollario

Se x è una macchina reversibile, $\eta_x = \eta_{REV}$

Stessa dimostrazione di prima, con l'aggiunta dell'inversione della macchina x da cui si ottiene $\eta_x < \eta_{REV}$ assurdo $\rightarrow \eta_x \geq \eta_{REV}$.

Insieme al risultato appena trovato abbiamo dunque che valgono contemporaneamente $\eta_x \leq \eta_{REV}$ e $\eta_x \geq \eta_{REV}$, da cui $\eta_x = \eta_{REV}$.

Osservazioni

i) Qualsiasi macchina reversibile ha un rendimento $\eta_{REV} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$; qualsiasi macchina irreversibile ha un rendimento $\eta_{IRREV} < 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

ii) $\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$ $\quad (Q_1 = Q_{CED} < 0,\ Q_2 = Q_{ASS} > 0)$

a) se è reversibile $\eta = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

PROPRIETÀ MACCHINE T. REVERSIBILI

b) se è irreversibile $\eta = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} \leq -\frac{Q_2}{T_2} \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$

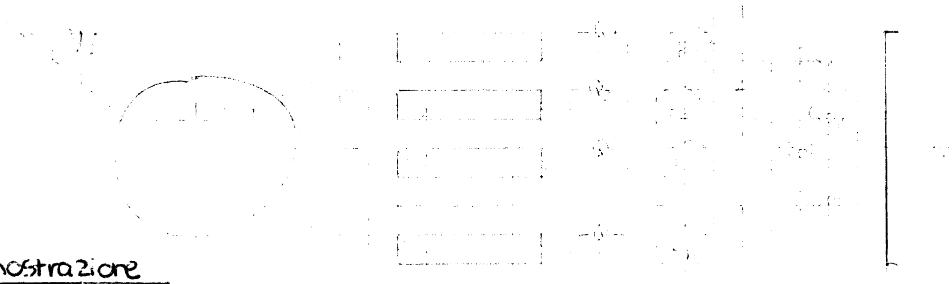
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 148

★ Teorema di Clausius estende il teorema di Carnot a macchine con molte sorgenti.

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

$W > 0$



Dimostrazione

Costruiamo macchine reversibili R_i a due sorgenti, e dunque possiamo applicare il teorema di Carnot.

$i = 1 \quad -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \qquad i = 2 \quad -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_{02}}{T_0} = 0 \quad \dots \quad i \quad -\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \rightarrow \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i}$

sommando tutte le macchine reversibili otteniamo $\sum \frac{Q_{0i}}{T_0} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$

e quindi $\frac{1}{T_0} \sum Q_{0i} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$.

Consideriamo ora R_i insieme al sistema, le sorgenti T_i sono irrilevanti $\forall i$ perché vi entra ed esce lo stesso calore Q. Quindi l'unica sorgente è T_0, che fa sì che si tratti di un ciclo monotermo $\rightarrow$ deve essere $W \leq 0$ per il Teorema di Clausius e quindi $\sum Q \leq 0 \rightarrow Q_{01} + Q_{02} + \dots + Q_{0n} \leq 0 \rightarrow \sum Q_{0i} \leq 0$

da $\frac{1}{T_0} \sum Q_{0i} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$ segue $\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ □.

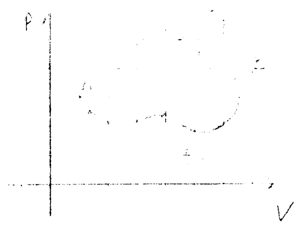
Osservazioni

i) Q_i è il calore scambiato dal sistema con la sorgente a temperatura T_i visto dal sistema e non dall'ambiente, quindi $Q_i > 0$ il sistema assorbe calore, $Q_i < 0$ il sistema cede calore.

T_i è la temperatura della sorgente e non del sistema

ii) dato che vi sono infinite sorgenti, con ognuna c'è uno scambio infinitesimo dQ alla temperatura T $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$

iii) ENTROPIA



$$\oint_\gamma \frac{dQ}{T} \leq 0$$

se la trasformazione è reversibile $\oint_\gamma \frac{dQ}{T} = 0$

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,\gamma_2}^{A} \frac{dQ}{T} = 0 \rightarrow \int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T} - \int_{A\,\gamma_2}^{B} \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\rightarrow \int_{A\,\gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T} = \int_{B\,\gamma_2}^{A} \frac{dQ}{T}$$

Siccome l'integrale non dipende dalla traiettoria ma solo dagli stati iniziale e finale abbiamo che l'entropia è una variabile di stato

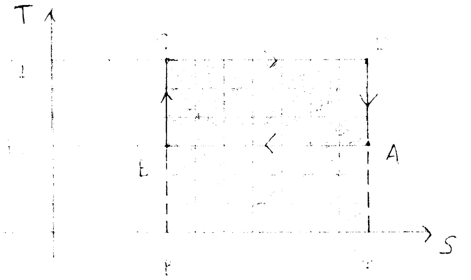
$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$S_B - S_A = \int_\gamma \frac{dQ}{T}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 148

es. applicazione al ciclo di Carnot



$$Q_{AB} = -(S_A - S_B)\, T_1$$
$$Q_{CD} = (S_A - S_B)\, T_2$$
da cui otteniamo $\eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CD}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

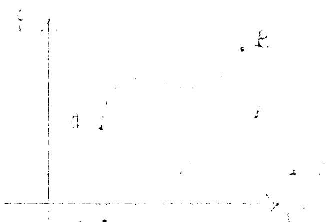
<u>Calcolo di ΔS</u>

a) trasformazione sistema è cambiamento di stato $\rightarrow$ T costante $\rightarrow \Delta Q = m\lambda$ | $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$

b) riscaldamento di un corpo $\rightarrow dQ = mc\,dT$
(reversibile) $\rightarrow$ T non costante: da T_{in} e T_{fin}

$$\Delta S = \int \frac{\Delta Q}{T} = \int_{T_{in}}^{T_{fin}} mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

c) sistema termodinamico costituito da un gas perfetto dallo stato A allo stato B



Calcoliamo la variazione di entropia non sulla trasformazione reale, ma su due trasformazioni rev, una isoterma e una adiabatica con gli stessi A e B.

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C \frac{dQ}{T} = \int_A^C \frac{dU + dW}{T} = \int_A^C \frac{m c_v dT}{T} + \int_A^C \frac{\frac{mR\cancel{T}}{V} dV}{\cancel{T}} = \int_A^C mc_v \frac{dT}{T} + \int_A^C mR \frac{dV}{V} =$$
$$= mc_v \ln \frac{T_C}{T_A} + mR \ln \frac{V_C}{V_A} = mR \ln \frac{V_C}{V_A}.$$

C è anche uno stato dell'adiabatica, quindi $p_C V_C^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$
$$mRT_C V_C^{\gamma-1} = mRT_B V_B^{\gamma-1}$$

così ricaviamo il volume dello stato fittizio $V_C = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B$

sostituendo $\Delta S_{AC} = mR \ln \left(\left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{V_B}{V_A} \right) = mR \ln \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + mR \ln \left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$

$$= m\frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T_B}{T_C} + mR \ln \frac{V_B}{V_A} = m \frac{\cancel{R} c_v}{\cancel{R}} \ln \frac{T_B}{T_C} + mR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\gamma - 1 = \frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v}$$

Quindi $\Delta S_{AC} = mc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + mR \ln \frac{V_B}{V_A} = \Delta S_{AB}$

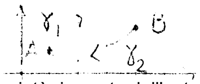
$\Delta S_{CB} = 0$

<u>Accrescimento entropia</u>

Per qualsiasi trasformazione termodinamica l'entropia dell'universo aumenta

$\Delta S_{UNIV} \geq 0 \qquad \Delta S_{SIST} + \Delta S_{AMB} \geq 0$

Trasformazione termodinamica ciclica



per il teorema di Clausius $\oint_{AA} \frac{dQ}{T} \leq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 148