Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 499

DATA: 10/04/2013

A P P U N T I

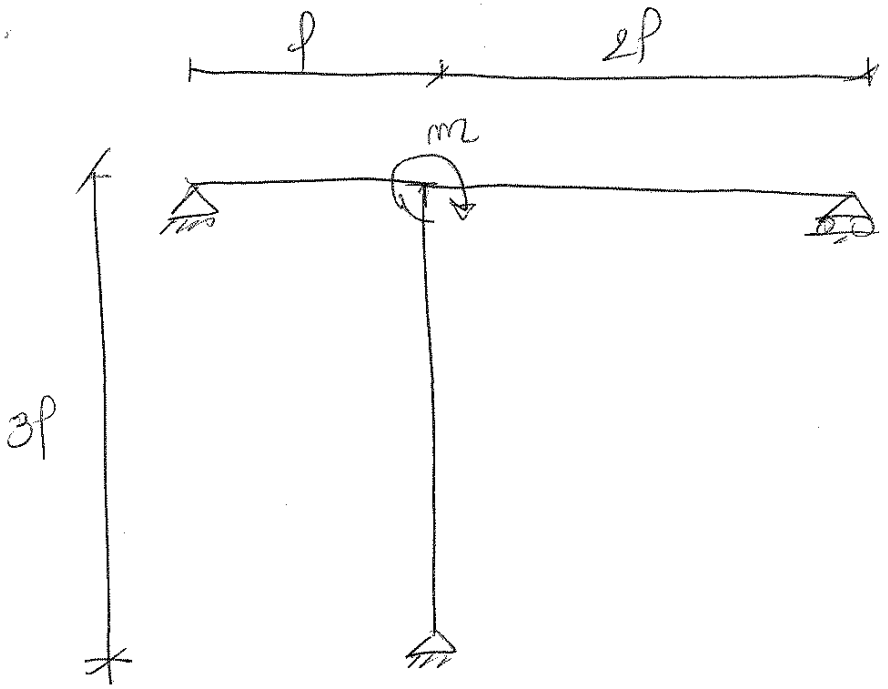
STUDENTE: Busso

MATERIA: Scienza delle costruzioni + temi
Prof.

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

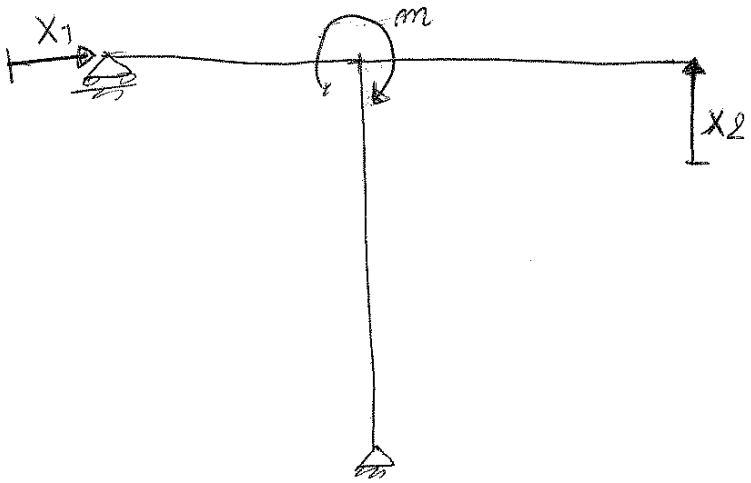
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 251



1

volta iperstatica

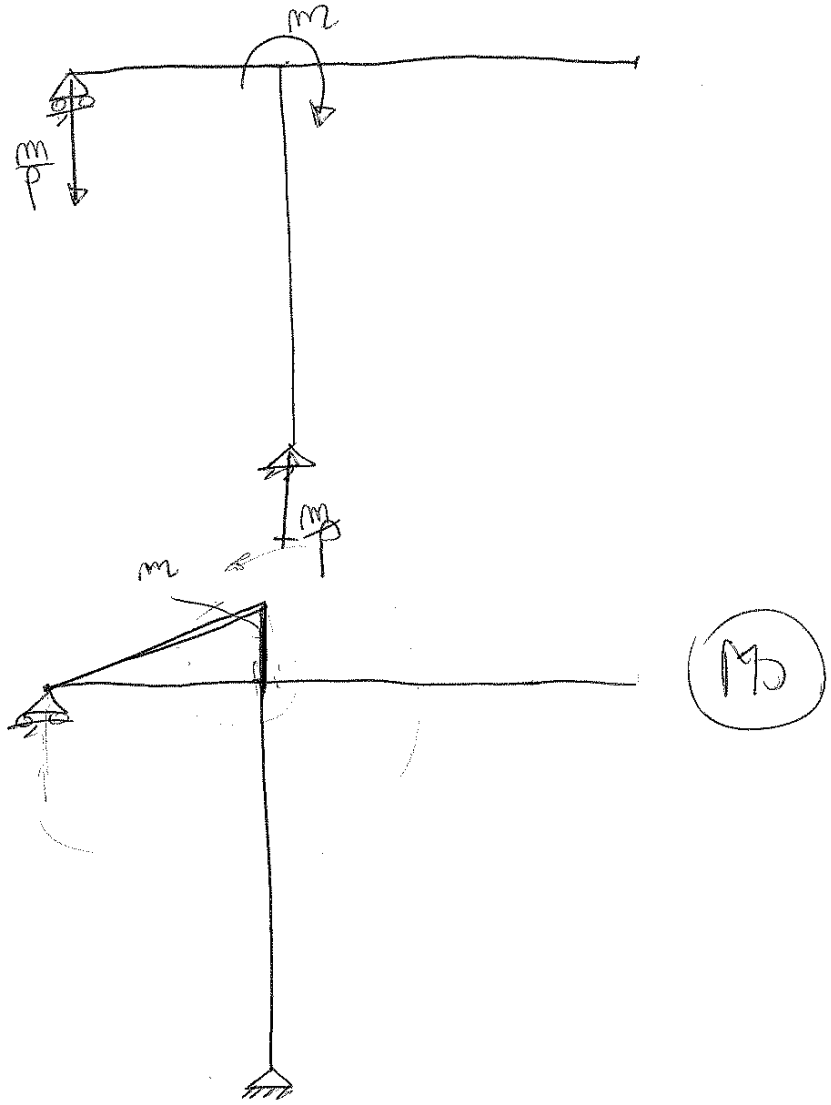
isostatico:



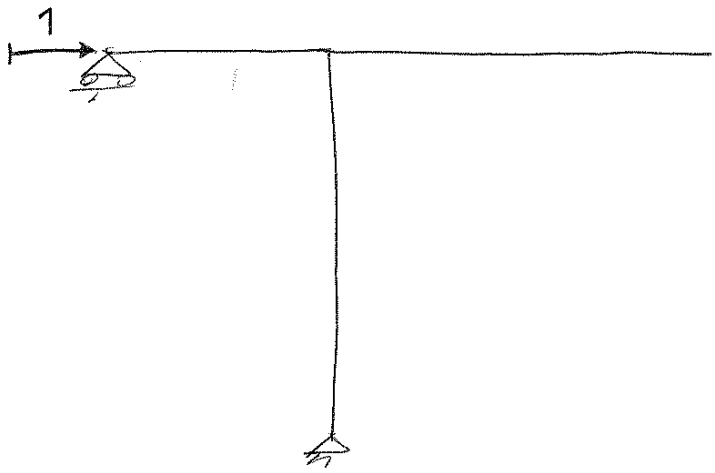
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 251

(2)



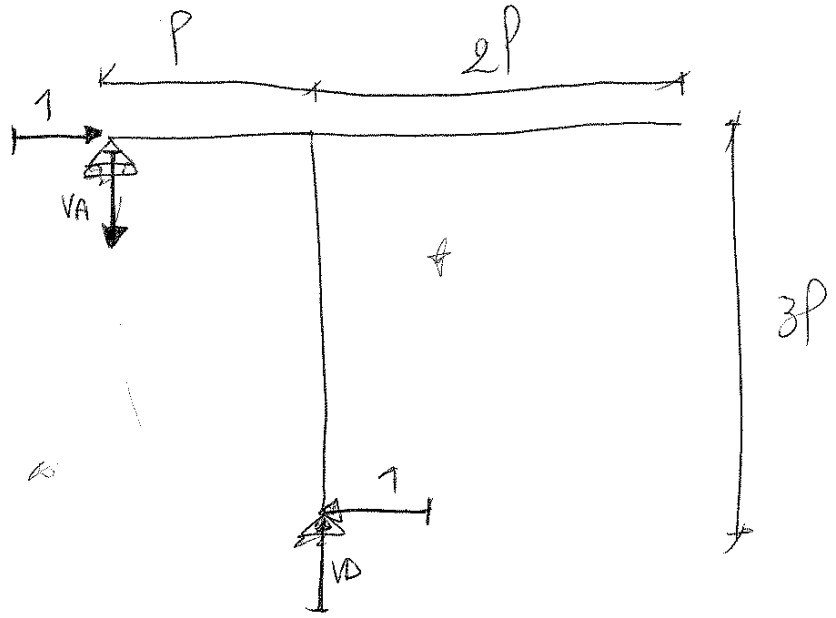
Sistema (a)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 251

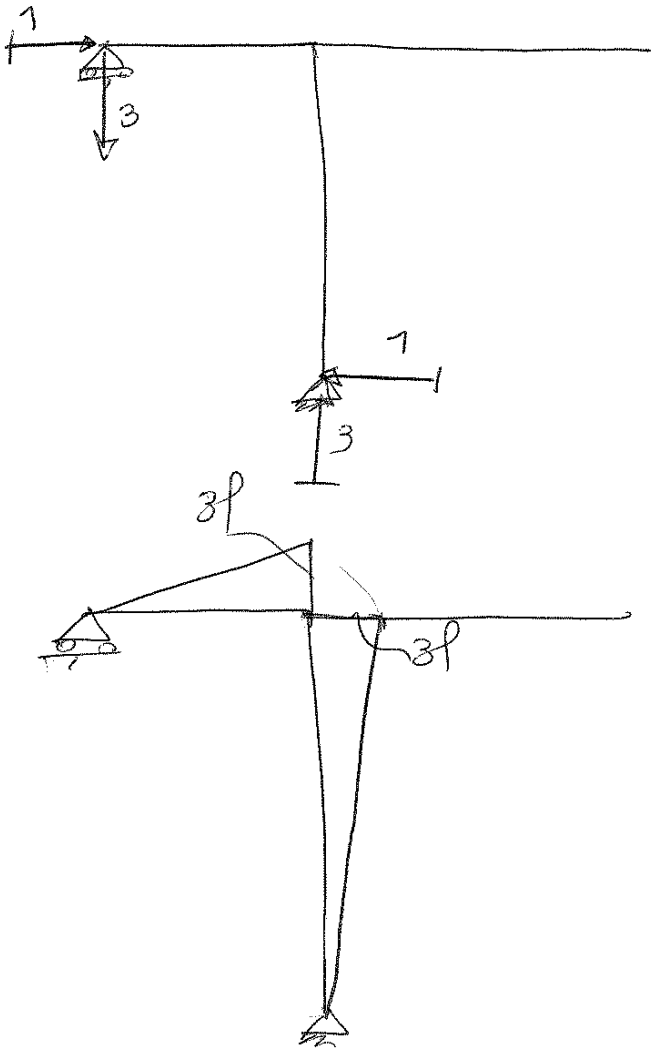
h



$V_D - V_A = 0$

$\circlearrowleft M_D = 1 \cdot 3P - V_A \cdot P = 0$

$\underline{\underline{V_A = 3}}$



M_1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 251

6

$$\int M_2^2 ds = \frac{l}{6}\left[0 + 4l^2 + 4\cdot l^2\right] = \frac{l}{6\cdot 3}\cdot 8l^2 = \frac{4}{3}l^3$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{l}{3}\left[4l^2 + 0 + 4\cdot l^2\right] = \frac{l}{3}\cdot 8l^2 = \frac{8}{3}l^3$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{8}{3}l^3 + \frac{4}{3}l^3 = \frac{12}{3}l^3 = 4l^3$$

$$\int M_1 M_2 ds = -\frac{l}{6}\left[0 + 3l\cdot 2l + 4\cdot l\cdot\frac{3}{2}l\right] = -\frac{l}{6}\left[6l^2 + 6l^2\right] = -\frac{l}{6}\cdot 12l^2 = -2l^3$$

$$\begin{cases} \frac{ml^2}{EI} + \frac{X_1}{EI}\cdot 12l^3 - \frac{X_2}{EI}2l^3 = 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{ml^2}{EI} + \frac{X_1}{EI}2l^3 + \frac{X_2}{EI}4l^3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{X_2}{EI}4l^3 = \frac{2l^3 X_1}{EI} + \frac{2}{3}\frac{ml^2}{EI}$$

$$\frac{X_2}{EI} = \frac{X_1}{2EI} + \frac{2ml^2}{3\cdot 4l^3 EI}$$

$$\frac{X_2}{EI} = \frac{X_1}{2EI} + \frac{m}{6lEI}$$

$$\frac{ml^2}{EI} + \frac{12l^3 X_1}{EI} - \left(\frac{X_1}{2EI} + \frac{m}{6lEI}\right)\cdot 2l^3 = 0$$

$$\frac{ml^2}{EI} + \frac{12l^3 X_1}{EI} - \frac{X_1 l^3}{EI} - \frac{ml^2}{3EI} = 0$$

$$\frac{11l^3 X_1}{EI} = \frac{ml^2}{3EI} - \frac{ml^2}{EI}$$

$$\frac{11l^3}{EI}X_1 = \frac{ml^2 - 3ml^2}{3EI} = -\frac{2}{3}\frac{ml^2}{EI}$$

$$\frac{11l^3}{EI}X_1 = -\frac{2}{3}\frac{ml^2}{EI}$$

$$\boxed{X_1 = -\frac{2m}{33l}}$$

$$X_2 = -\frac{1}{33}\frac{m}{l} + \frac{m}{6l} = \frac{-2ml + 11m}{66l}$$

$$X_2 = \frac{9}{66}\frac{m}{l} = \frac{3m}{22l} \qquad \boxed{X_2 = \frac{3m}{22l}}$$

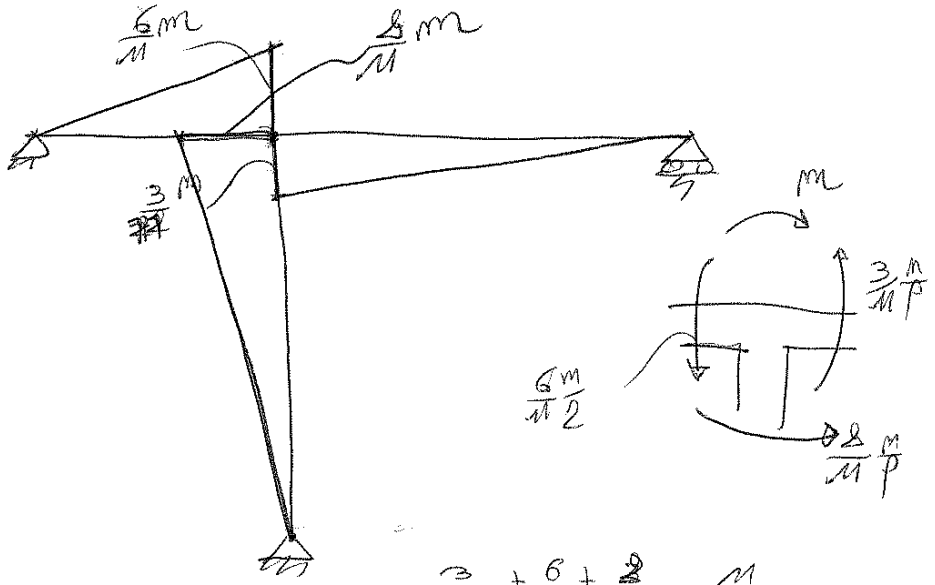
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 251

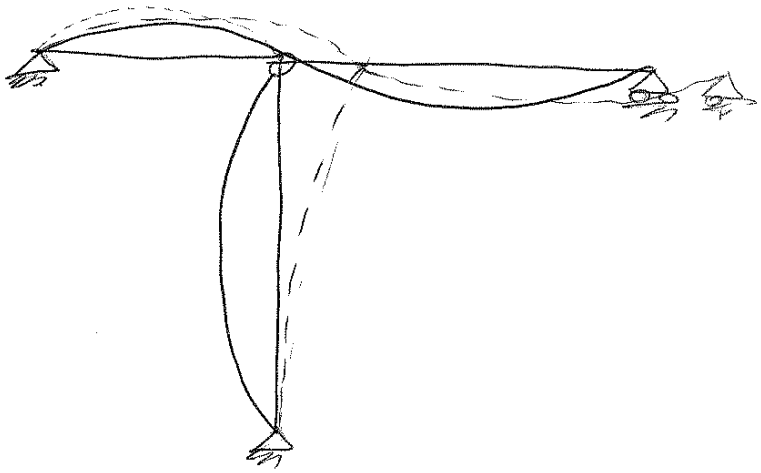
8

$$\circlearrowleft + \quad M_B = V_A \cdot l + \frac{2}{33}\frac{m}{l}3l + \frac{3}{22}\frac{m}{l}2l - m = 0$$

$$V_A = m - \frac{2}{11}\frac{m}{l} - \frac{3}{11}\frac{m}{l} = \frac{11m - 2m - 3m}{11l} \quad \frac{6}{11}\frac{m}{l}$$



$$\frac{3}{11} + \frac{6}{11} + \frac{2}{11} = \frac{11}{11}$$



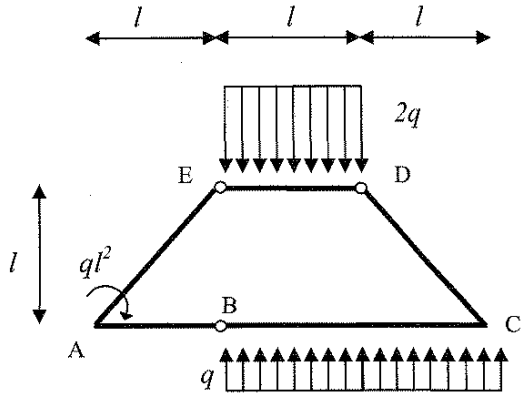
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 251

15 Gennaio 2008 **COMPITO I**

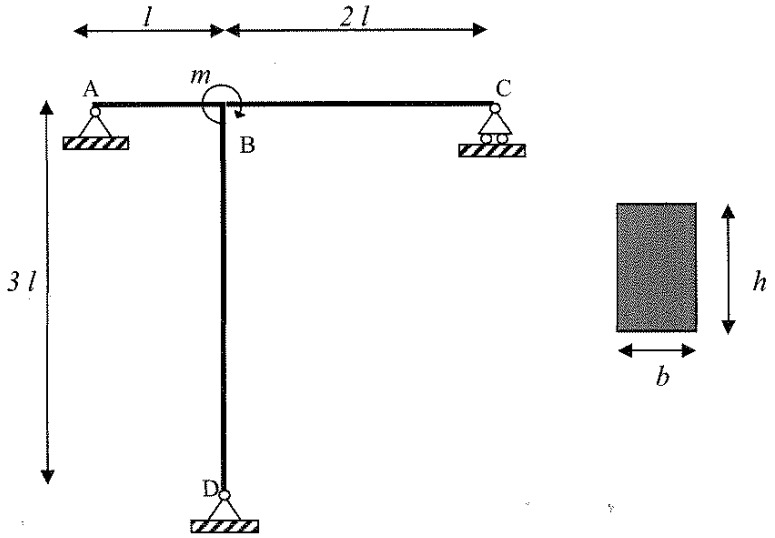
COGNOME :	CORSO DI LAUREA :
NOME:	MATRICOLA:

Esercizio 1



1. Tracciare in scala i diagrammi M, N, T e la curva delle pressioni.
2. Calcolare la rotazione relativa in E.

Esercizio 2

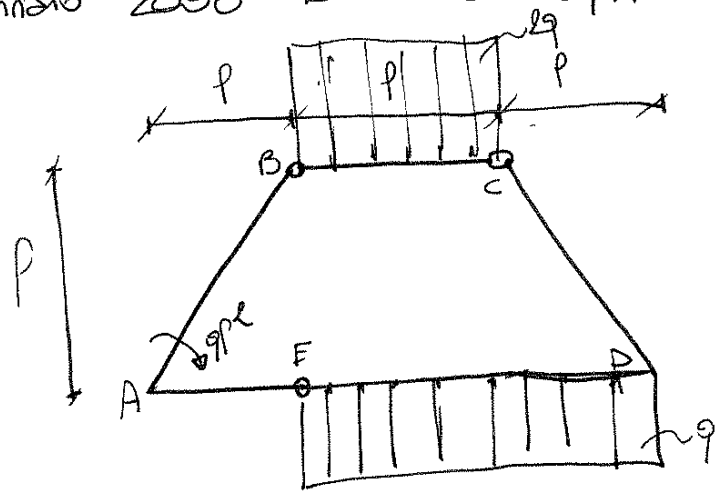


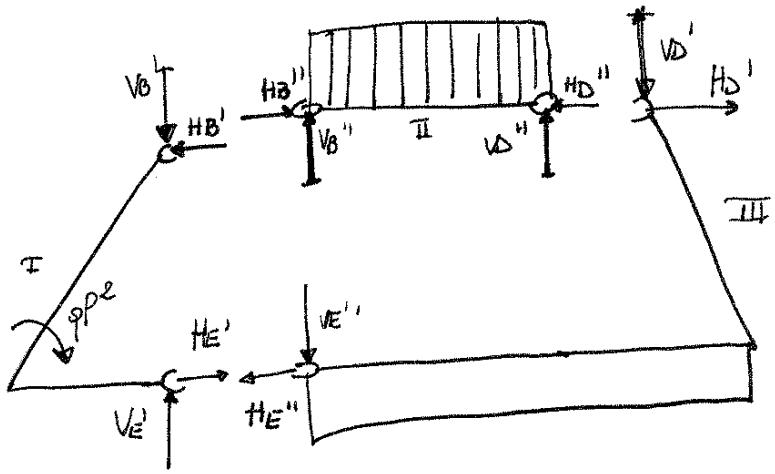
1. Sapendo che la travatura ha la sezione di acciaio mostrata in figura e che il materiale ha modulo elastico *E,* tracciare in scala i diagrammi M, N, T e la curva delle pressioni.
2. Tracciare la deformata qualitativa.
3. Calcolare nella sezione B (lato AB) la massima tensione equivalente usando il criterio di Von Mises.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 251

15 gennaio 2008 isostatica compito 1





$V_D' + V_D'' = 2qp$

$V_E'' + V_D' = 2qp$

$\oplus \quad M_E^{I} = qp^2 - H_B' \cdot p = 0$

$\underline{\underline{H_B' = qp}}$

$\oplus \quad M_D^{II} = V_B'' \cdot p - \frac{qp^2}{2} = 0$

$\underline{\underline{V_B'' = \frac{qp}{2}}} = V_B'$

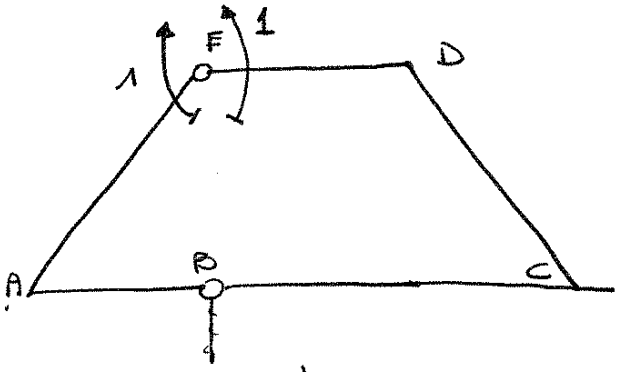
$V_D'' = \frac{qp}{2} = V_D'$

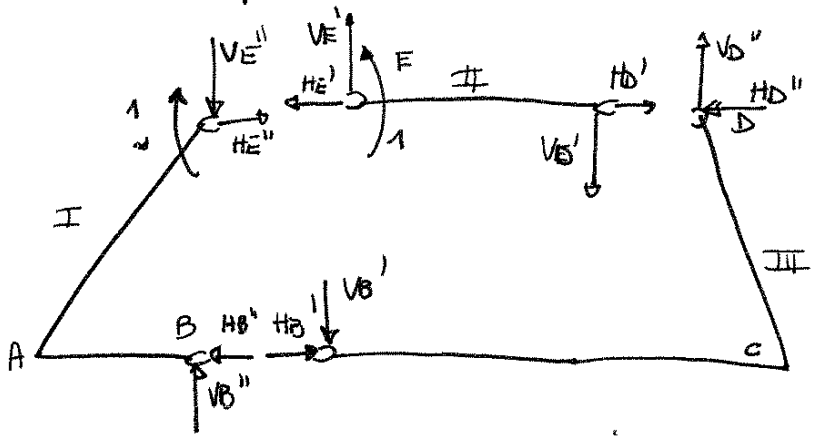
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 251

rotazione relativa in E

sistema fittizio:



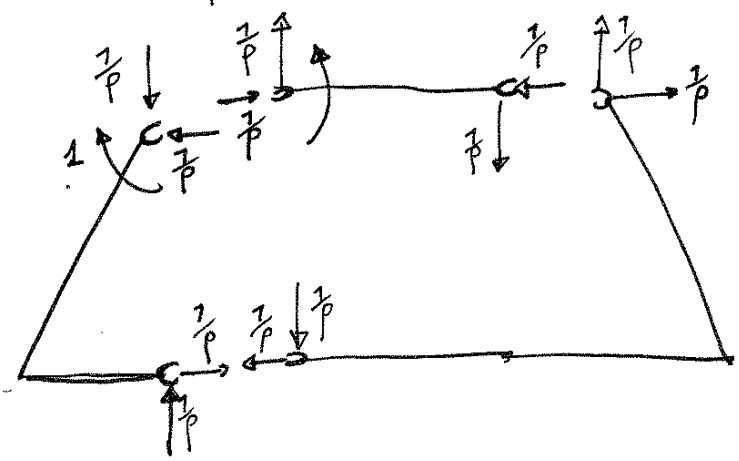


$$\circlearrowleft + \quad M_D^{II} = 1 - V_E' \cdot P = 0$$

$$V_E' = \frac{1}{P} = V_D' = V_D'' = V_B' = V_B'' = V_E''$$

$$\circlearrowleft + \quad M_B^{I} = 1 + H_E'' \cdot P = 0$$

$$H_E'' = -\frac{1}{P}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 251

$\overline{AB}$

$\overline{BC}$

$$\int M_0 M_r d\ell = -\frac{\ell}{6}\left[0+0+4\left(\frac{q\ell^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{\ell}{6}\left[0+0+\frac{q\ell^2}{2}\right] = -\frac{q\ell^3}{12}$$

$\overline{DE}$

$$\int M_1 M_r d\ell = +\frac{2\ell}{6}\left[0+0+4\left(\frac{q\ell^2}{4}\cdot 1\right)\right] = +\frac{2\ell}{6}\left[q\ell^2\right] = \frac{2q\ell^3}{3}$$

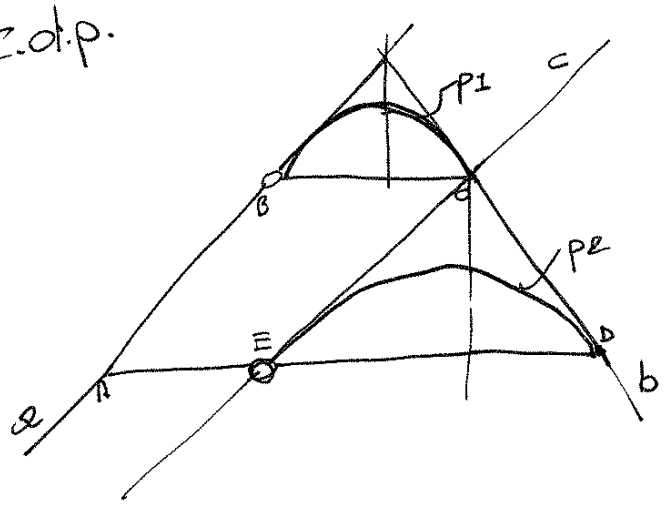
$\overline{EA}$

$$\int M_1 M_r d\ell = \frac{\ell}{6}\left[1\cdot q\ell^2+0\cdot 0+4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{4}\right)\right] = \frac{\ell}{6}\left[q\ell^2+q\ell^2\right] = \frac{\ell}{6}\cdot\left[2q\ell^2\right] = \frac{q\ell^3}{3}$$

$$1\cdot\Delta\varphi = \frac{1}{EI}\cdot\frac{11}{12}q\ell^3$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{11}{12}\frac{q\ell^3}{EI}}$$

c.d.p.



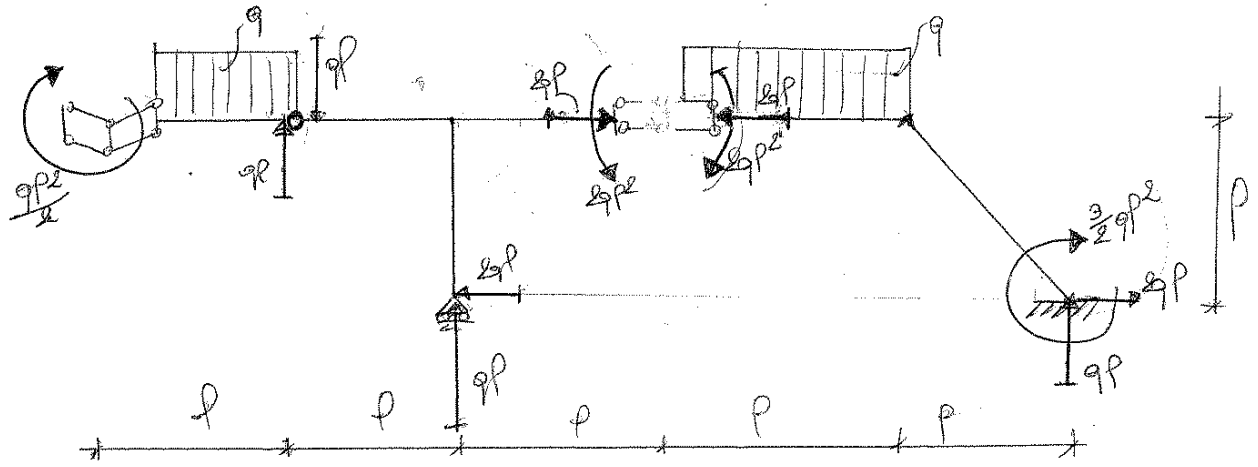
tratto	cdp
AB	a
BC	parabola p1
CD	b
AE	c
ED	parabola p2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 251

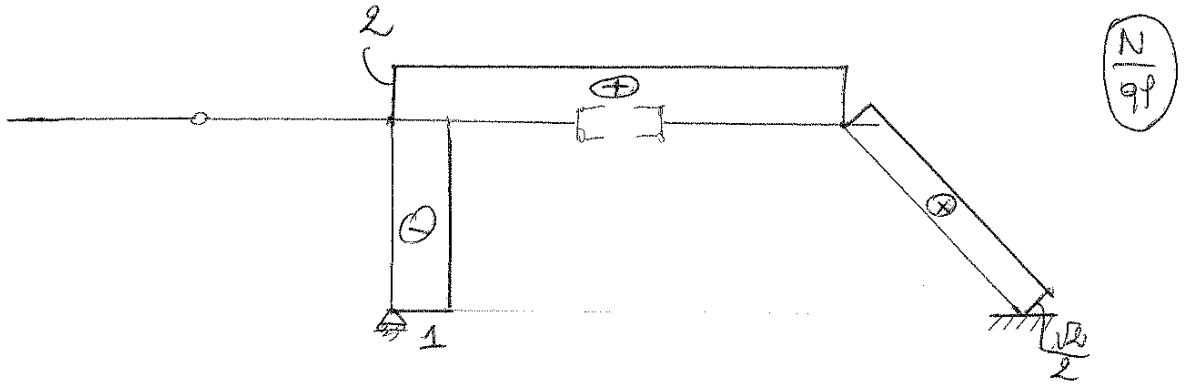
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 251

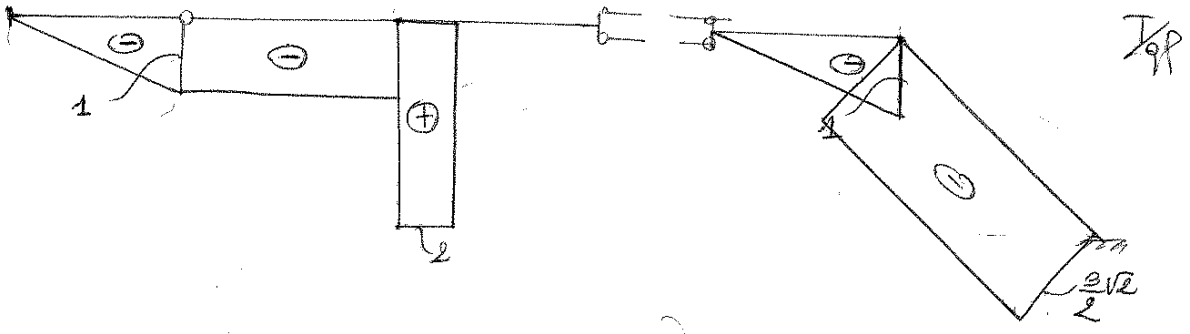
$$\oplus\ M_E = V_D \cdot P + qP^2 + \cancel{2qP^2} - \cancel{qP \cdot 2P} + M_E = 0$$

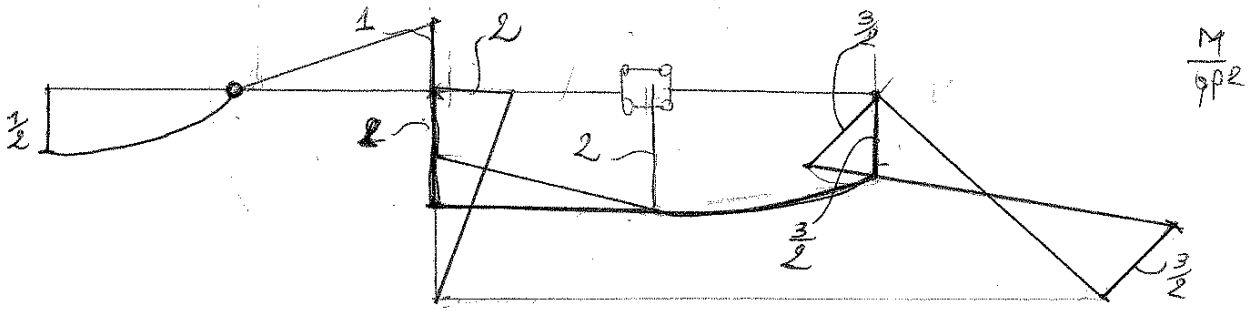
$$M_E = -2qP^2$$



Diagrammi



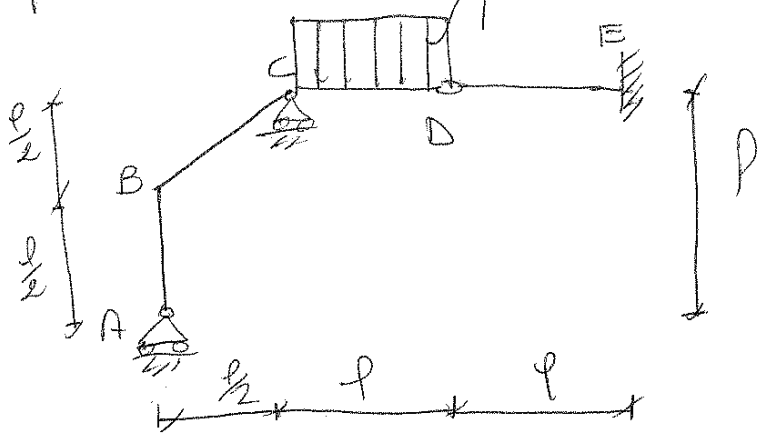




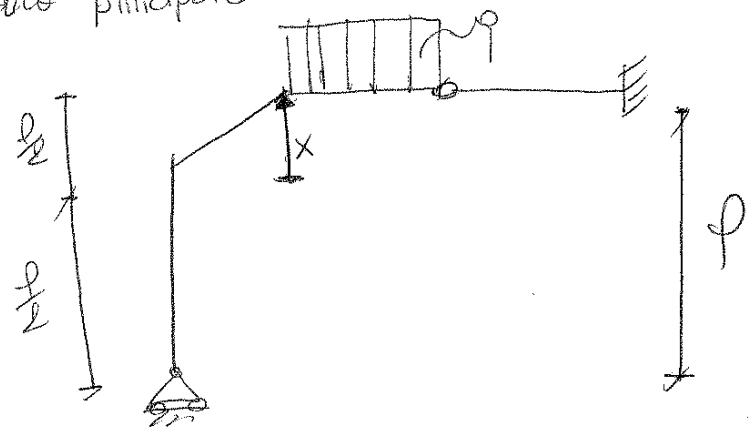
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 251

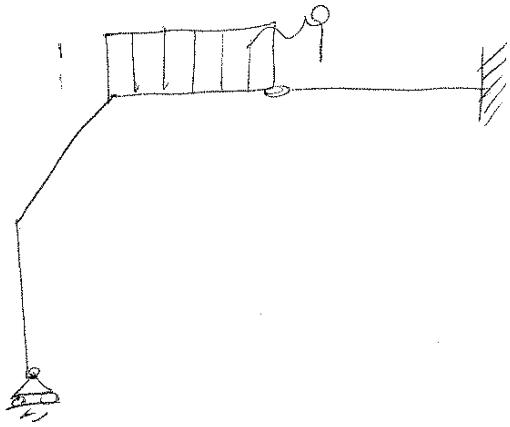
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 251

iperstatico 2 deformabile carico compito 1 es 2

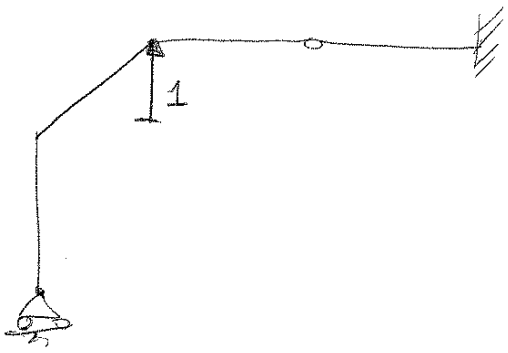


isostatico principale





(0)

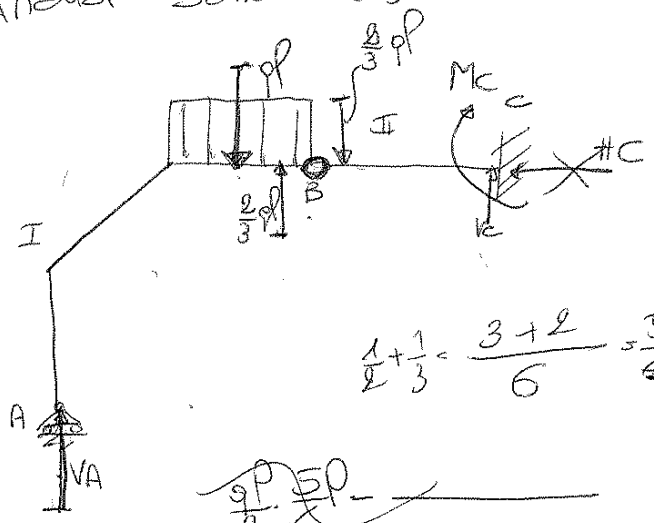


(1)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 251

Analisi schema (0)



$$\frac{qP}{3}\cdot\frac{5P}{6} - \frac{qP}{3}\cdot\frac{P}{6} =$$

$$\frac{5qP^2}{18} - \frac{qP^2}{18} = \frac{4qP^2}{18} = \frac{2}{9}qP^2$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \qquad \frac{qP\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{P}{2}\sqrt{2} = \frac{qP^2}{6}$$

$$\frac{qP}{3}\cdot\frac{5P}{6} - \qquad \frac{qP}{3}\cdot\frac{3}{2}P - \frac{qP^2}{2} = 0$$

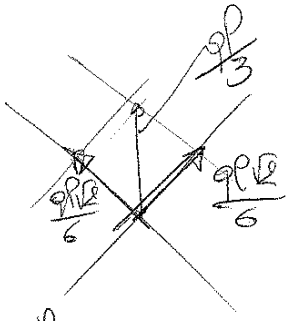
$$V_A + V_C = qP$$

$$H_C = 0$$

$$\oplus\ M_A = M_C + qP^2 - V_C\cdot\frac{5}{2}P = 0$$

$$\oplus\ M_B^{(I)} = +V_A\cdot\frac{3}{2}P + \frac{qP^2}{2} = 0$$

$$3V_A = qP \qquad \boxed{V_A = \frac{qP}{3}}$$



$$V_C = qP - \frac{qP}{3} = \frac{3qP - qP}{3} = \frac{2}{3}qP$$

$$M\left(z=\frac{P}{3}\right) = \frac{qP}{3}\cdot$$

$$\boxed{V_C = \frac{2}{3}qP}$$

$$-1+\frac{2}{3} = \frac{-3+2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\oplus\ M_B^{(II)} = M_C - V_C\cdot P = 0$$

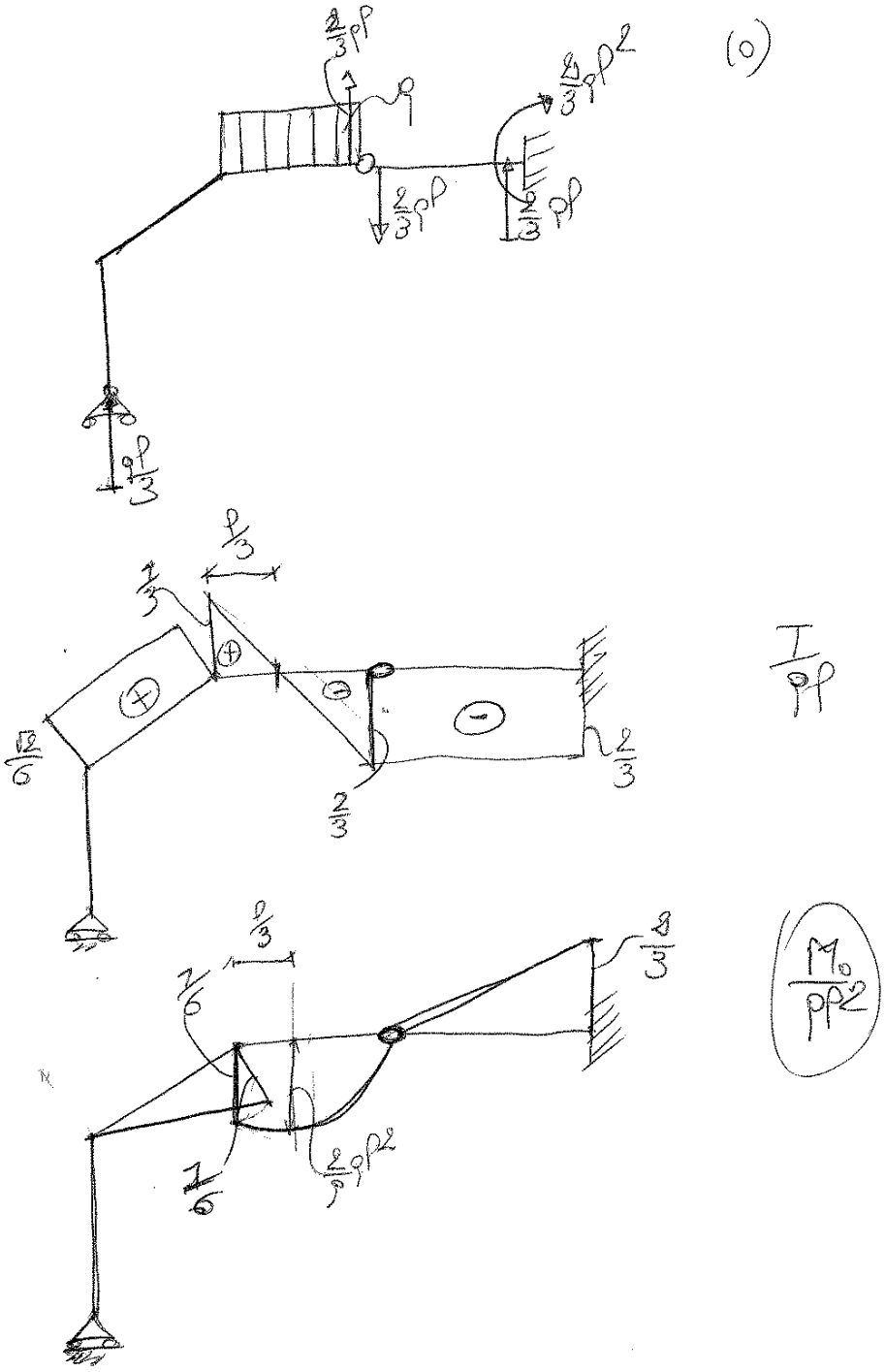
$$M_C = V_C\cdot P = \frac{2}{3}qP^2$$

$$M_C = V_C\cdot\frac{5}{2}P - qP^2 = \frac{5}{3}qP^2 - qP^2 = \frac{5qP^2 - 3qP^2}{3} = \frac{2}{3}qP^2 \text{ verificato}$$

$$\boxed{M_C = \frac{2}{3}qP^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 251

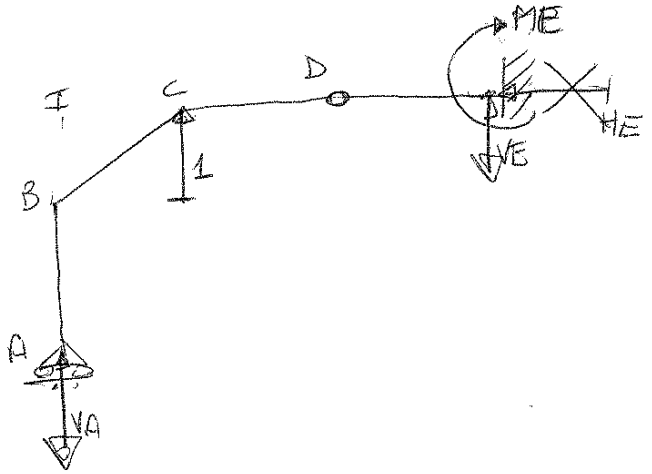
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 251



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 251

Analisi sistema 1



$$VA + VE + 1 = 0$$

$$VA + VE = -1$$

$$HE = 0$$

$$\circlearrowleft + \; M(A) = ME - 1\frac{\ell}{2} - VE \cdot \frac{5}{2}\ell = 0$$

$$ME - \frac{\ell}{2} - VE \cdot \frac{5}{2}\ell = 0$$

$$\circlearrowleft + \; M_D^{(I)} = VA \cdot \frac{3}{2}\ell + 1 \cdot \frac{\ell}{2} = 0$$

$$VA\frac{3}{2} = -1 \qquad \boxed{VA = -\frac{2}{3}}$$

$$VE = -1 - VA = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{VE = -\frac{1}{3}}$$

$$\circlearrowright \; M_D^{(II)} = ME + \frac{1}{3} \cdot \ell = 0$$

$$ME = -\frac{\ell}{3}$$

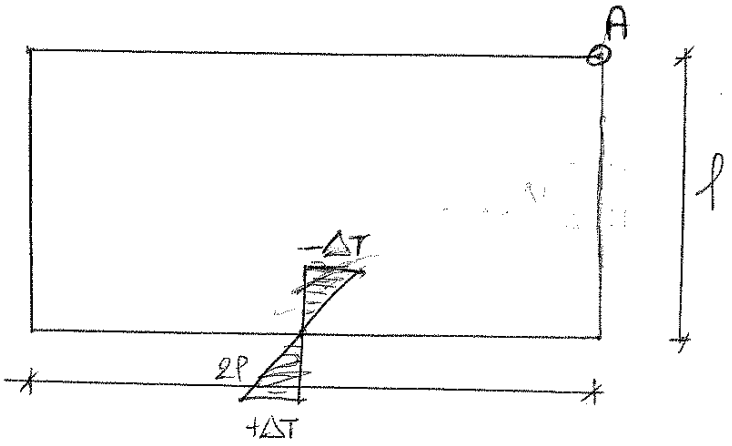
$$ME = \frac{\ell}{2} + \frac{5}{2}\ell VE = \frac{\ell}{2} + \frac{5}{2}\ell\left(+\frac{1}{3}\right) = \frac{\ell}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3\ell - 5\ell}{6}$$

$$= -\frac{2\ell}{6} = -\frac{\ell}{3}$$

$$\boxed{ME = -\frac{\ell}{3}}$$

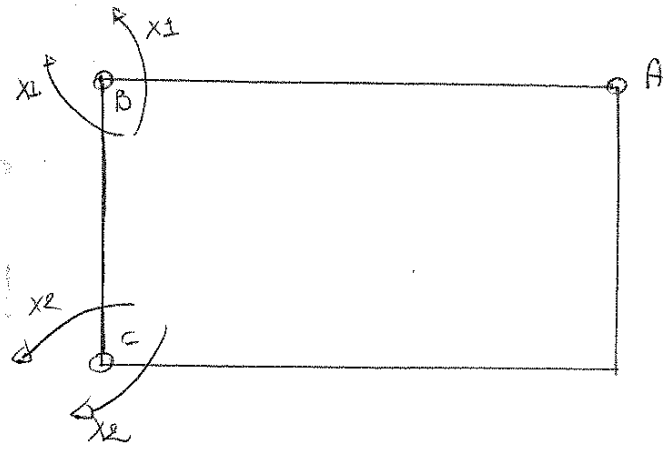
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 251

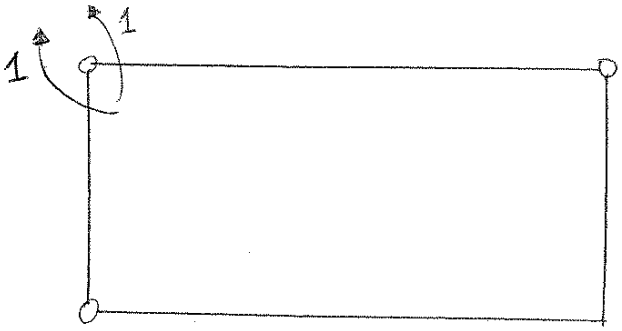


2 volte iperstatico

isostatico associato

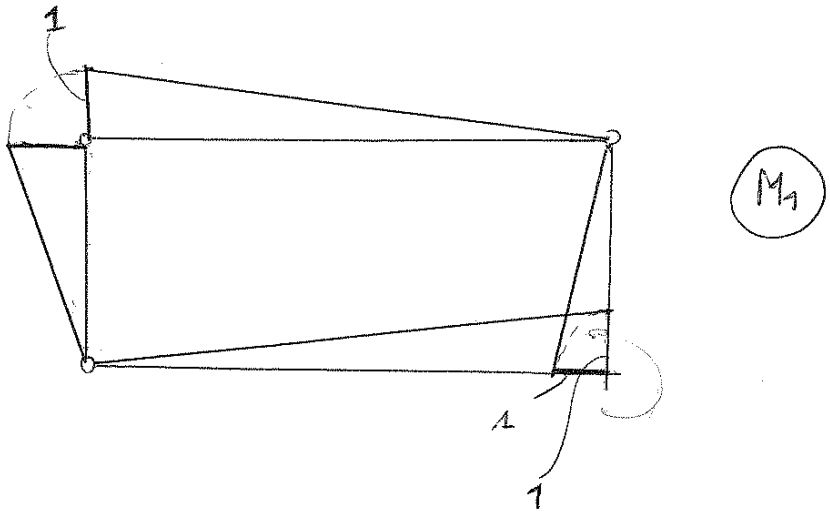


sistema 1i

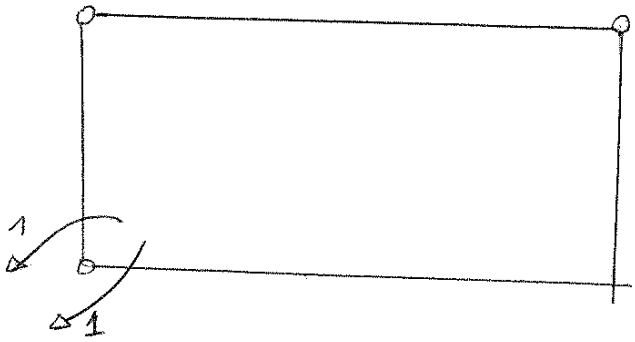


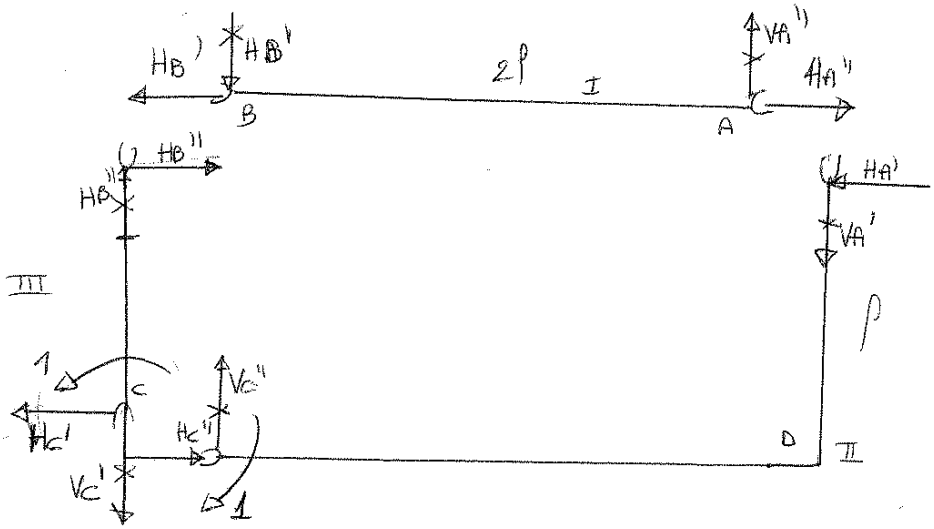
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 251



Sistema 2





$$M_B^{II} = 1 - H_C' \cdot \ell = 0$$

$$H_C' = \frac{1}{\ell}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 251

$$\int \frac{M M_1}{EI} ds + \frac{2\alpha \Delta T}{h} \int_C^D M_1 ds = 0$$

$$\int \frac{M M_2}{EI} ds + \frac{2\alpha \Delta T}{h} \int_C^D M_2 ds = 0$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cancel{M_0}^{\,0}$$

$$\frac{X_1}{EI} \int M_1^2 ds + \frac{X_2}{EI} \int M_1 M_2 ds + \frac{2\alpha \Delta T}{h} \int_C^D M_1 ds = 0$$

$$\frac{X_1}{EI} \int M_1 M_2 ds + \frac{X_2}{EI} \int M_2^2 ds + \frac{2\alpha \Delta T}{h} \int_C^D M_2 ds = 0$$

$$\int M_1^2 ds = \frac{l}{6}\left[0 + 1 + 4 \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{l}{\cancel{6}_3} \cdot \cancel{2} = \frac{l}{3}$$

$$\int M_1^2 ds = \frac{l}{3}\left[0 + 1 + 4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\right] = \frac{2}{3} l$$

$$\int M_1^2 ds = \frac{2}{3} l + \frac{4}{3} l = \frac{6}{3} l = 2l$$

$$\int M_1^2 ds = 2l$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{l}{6}\left[0 + 1 + 4 \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{l}{3}$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{l}{3}\left[1 + 1 + 4 \cdot 1\right] = \frac{l}{\cancel{3}} \cdot \cancel{6} = 2l$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{2}{3} l + l = \frac{2l + 3l}{3} = \frac{5}{3} l$$

$$\int M_2^2 ds = \frac{5}{3} l$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 251

xte iP diagramma è dalla parte di $-\Delta T$

$$\frac{X_1}{EI}\cdot 2\cancel{P} - \frac{X_2}{EI}\frac{7}{6}\cancel{P} - \frac{2\alpha\Delta T}{h}\cdot 3\cancel{P} = 0$$

$$-\frac{X_1}{EI}\frac{7}{6}\cancel{P} + \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{5}{3}\cancel{P} + \frac{2\alpha\Delta T}{h}\cdot 3\cancel{P} = 0$$

$$\frac{X_1}{EI}\cdot 2\cancel{P} - \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{7}{6}\cancel{P} = \frac{2\alpha\Delta T}{h}\cdot 3\cancel{P}$$

$$\frac{X_1}{EI}\cdot\frac{7}{6} - \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{5}{3} = \frac{2\alpha\Delta T}{h}\cdot 3$$

$$\frac{X_1}{EI} = \frac{3\alpha\Delta T}{h} + \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{7}{12}$$

$$X_1 = \frac{3\alpha\Delta T EI}{h} + \frac{7}{12}X_2$$

$$\frac{7}{EI6}\left[\frac{3\alpha\Delta T EI}{h} + \frac{7}{12}X_2\right] - \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{5}{3} = \frac{6\alpha\Delta T}{h}$$

$$\cancel{\frac{7}{2}\frac{\alpha\Delta T EI}{hEI} + \frac{49}{}}$$

$$\frac{7\cdot 3\alpha\Delta T\cancel{EI}}{h}\cdot\frac{1}{2\cancel{EI}} + \frac{7}{6EI}\frac{7}{12}X_2 - \frac{X_2}{EI}\cdot\frac{5}{3} = \frac{6\alpha\Delta T}{h}$$

$$\frac{7\alpha\Delta T}{h} + \frac{49}{72}\frac{X_2}{EI} - \frac{5}{3}\frac{X_2}{EI} = \frac{6\alpha\Delta T}{h}$$

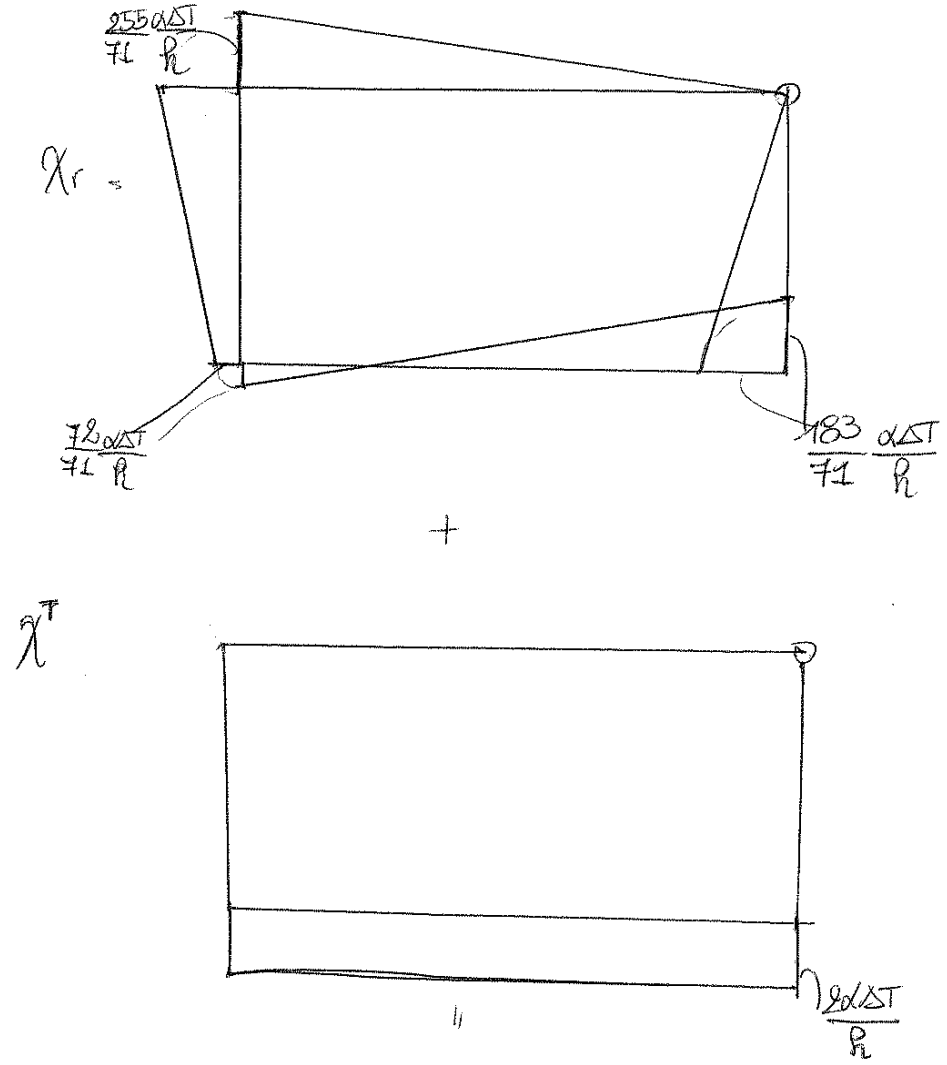
$$\frac{49X_2 - 120X_2}{72EI} = -\frac{\alpha\Delta T}{h}$$

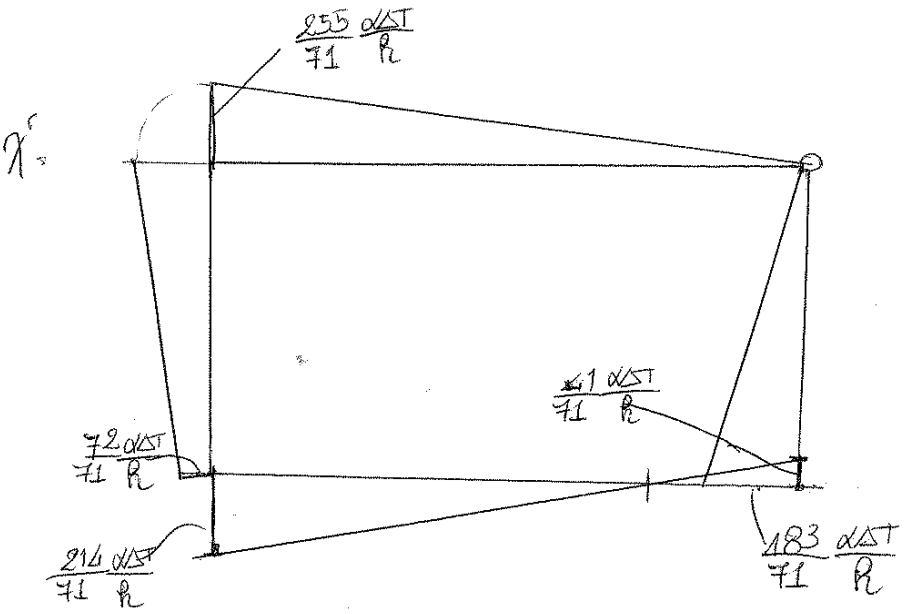
$$+\frac{71}{72}\frac{X_2}{EI} = +\frac{\alpha\Delta T}{h}$$

$$X_2 = \frac{72}{71}\frac{\alpha\Delta T}{h}EI$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 251

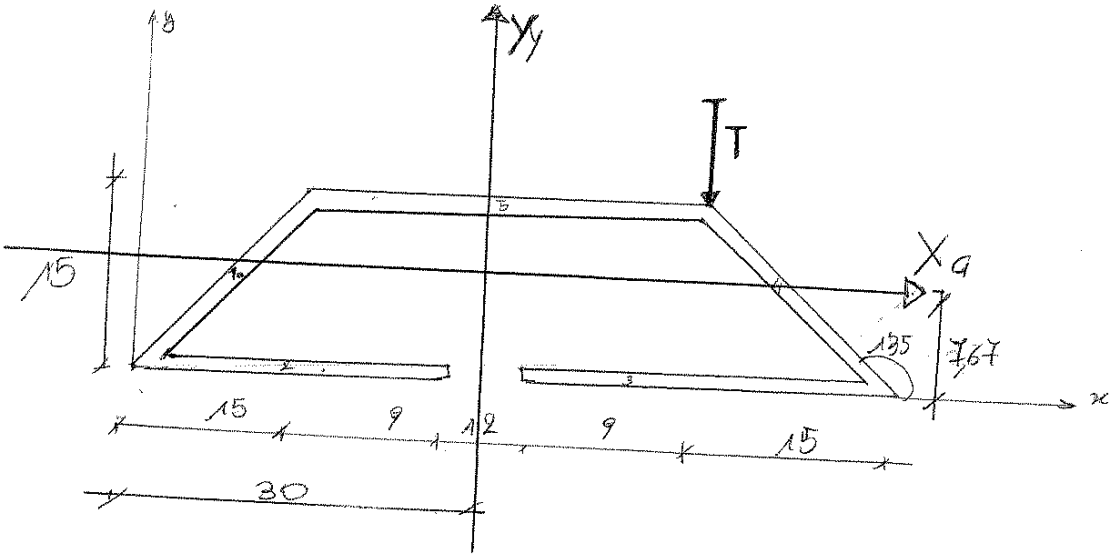
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 251





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 251



$A_1 = A_4 = 1 \cdot 15 \cdot \sqrt{2} = 21{,}21\ cm^2$

$A_2 = A_3 = 24 cm^2$ $\qquad A_{tot} = 120{,}42\ cm^2$

$A_5 = 30 cm^2$

~~$A_1 \cdot 7{,}5$~~

$2 \cdot A_1 \cdot 7{,}5\sqrt{2} + 2 \cdot 24 \cdot 0{,}5 + A_5 \cdot 15 = 120{,}42 \cdot y_G$

$y_G = 7{,}67\ cm$

$X_G = 30 cm$

$I_{xG2} = I_{xG3} = \frac{24 \cdot 1^3}{12} + 21{,}67 \cdot (7{,}67 - 0{,}5)^2 =$

Sezione sottile

la sezione è sottile

$2 \cdot A_1 \cdot 7{,}5\sqrt{2} + 2 \cdot 24 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 15 = 120{,}42 \cdot y_G$

$y_G = 7{,}67\ cm$

$I_{xG2} = \frac{24 \cdot 1^3}{12} + 24 \cdot (7{,}67)^2 = 1411{,}89\ cm^4$

0

$I_{xG1} = I_{xG4} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (15\sqrt{2})^3 \cdot \sin^2 45° + 21{,}21 \cdot (7{,}67 - 7{,}5)^2 = 398{,}36\ cm^4$

$I_{xG5} = \frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot (7{,}67 - 15)^2 = 1611{,}87\ cm^4$

infinitesimale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 251

Torsione

$M_t = T \cdot 15^{cm} = 10 \cdot 10^3 \cdot 15$

$M_t = T \cdot 15 = 150\ KN \cdot cm = 150000\ N \cdot cm$

$\tau_t = \frac{M_t}{I_t} \cdot b$

I_t: sezione sottile aperta

$I_t = \frac{1}{3} b^3 \oint ds = \frac{1}{3} b^3 P_s = \frac{1}{3} \cdot 1^3 \left[(15+9) \cdot 2 + 15\sqrt{2} \cdot 2 + 30 \right] = 40{,}14\ cm^4$

$\tau_t = \frac{150000\ N \cdot cm}{40{,}14\ cm^4} \cdot 1[cm] = 3736{,}92\ \frac{N}{cm^2} = 37369{,}2\ \frac{N}{mm^2}$

$= 3{,}74\ MPa$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 251

ISOSTATICHE:

cedimenti anelastici: (ρ_0)

$L_{vi} = L_{ve}$:

$$\int \frac{M_r M^f}{EI} dl = \rho_0 V$$ reazione nel sistema (1) dove c'è il cedimento

M_r: Momento reale

M_f: " fittizio

(φ)

$$\int \frac{M_r M^f}{EI} dl = \alpha \varphi$$ momento nel sistema (1) dove c'è il cedimento

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Guardando a sinistra: Momento orario positivo (tende le fibre di sotto)

Guardando a destra: Momento antiorario positivo (tende le fibre di sotto)

Guardando a sinistra: Taglio positivo se risultante delle forze ruota verso l'alto (fa ruotare la trave in senso orario)

c.d.p.

se non ho forze assiali → faccio di letto

se ho forze assiali → parabola

IPERSTATICHE

$$\int \frac{M M_1}{EI} dl = 0, \quad \int \frac{M M_2}{EI} dl = 0 \; \ldots$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 \ldots$$

$$\int \frac{M_0 M_1}{EI} dl + \frac{X_1}{EI}\int M_1^2\, dl + \frac{X_2}{EI}\int M_1 M_2\, dl = 0$$

$$\int \frac{M_0 M_2}{EI} dl + \frac{X_1}{EI}\int M_1 M_2\, dl + \frac{X_2}{EI}\int M_2^2\, dl$$

DISTORSIONI TERMICHE

- positivo se M_1 è dalla parte di $+\Delta T$

$$\int \frac{M M_1}{EI} dl + \frac{l \alpha \Delta T}{h}\int_{tr} M_1\, dl = 0$$

$$\int \frac{M M_2}{EI} dl + \frac{l \alpha \Delta T}{h}\int_{tr} M_2\, dl$$

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \ldots$$

- $+\Delta T$ con $+\Delta T$ positivo se N_1 è di trazione (+)

$$\int \frac{M M_1}{EI} dl + \alpha \Delta T \int N_1\, dl = 0$$

$$\int \frac{M M_2}{EI} dl + \alpha \Delta T \int N_2\, dl = 0$$

cedimenti anelastici: (ρ_0)

$$\int \frac{M M_1}{EI} dl = \rho_0 V_1$$ reazione nel sistema (1) nel punto in cui c'è il cedimento

$$\int \frac{M M_2}{EI} dl = \rho_0 V_2$$

cedimento (φ)

$$\int \frac{M M_1}{EI} dl = \alpha \varphi$$ momento nel sistema (1) dove ho il cedimento

$$\int \frac{M M_2}{EI} dl = \beta \varphi$$ relativo al sist (2)

$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2$ (se 2 volte iperstatica)

in genere per distorsioni termiche e cedimenti M_0 non c'è

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 251

1° catene cinematiche:

- 2 corpi: I centri C_i, C_j e C_{ij} devono essere allineati

2° teorema catene cinematiche

- 3 corpi: I 3 centri relativi C_{ij}, C_{ik} e C_{jk} devono essere allineati

1° corollario

Se il centro assoluto C_i coincide con C_{ij} ma non coincide con C_j il corpo j sta fermo

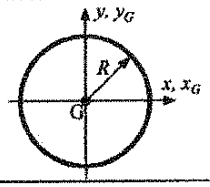
2° corollario

Se i 2 centri assoluti C_i e C_j coincidono, ma non coincidono con C_{ij} i 2 corpi hanno dei movimenti solidali.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 251

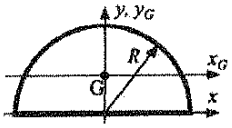
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 251

2.1 Casi particolari:

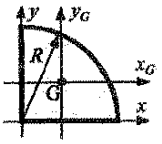


$\left(I_{x_G y_G} = I_{xy} + A(x_G - x_{G1})(y_G - y_{G1}) \right)$

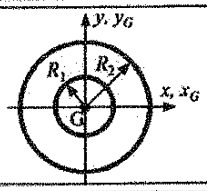
$$A = \pi R^2, \quad x_G = 0, \quad y_G = 0;$$
$$I_{x_G x_G} = I_{xx} = \frac{\pi}{4}R^4, \quad I_{y_G y_G} = I_{yy} = \frac{\pi}{4}R^4, \quad I_{x_G y_G} = I_{xy} = 0.$$



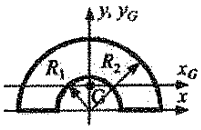
$$A = \frac{\pi}{2}R^2, \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{4}{3\pi}R;$$
$$I_{x_G x_G} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4, \quad I_{y_G y_G} = \frac{\pi}{8}R^4, \quad I_{x_G y_G} = 0;$$
$$I_{xx} = \frac{\pi}{8}R^4, \quad I_{yy} = \frac{\pi}{8}R^4, \quad I_{xy} = 0.$$



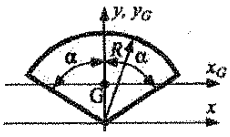
$$A = \frac{\pi}{4}R^2, \quad x_G = \frac{4}{3\pi}R, \quad y_G = \frac{4}{3\pi}R;$$
$$I_{x_G x_G} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)R^4, \quad I_{y_G y_G} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)R^4, \quad I_{x_G y_G} = -\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right)R^4;$$
$$I_{xx} = \frac{\pi}{16}R^4, \quad I_{yy} = \frac{\pi}{16}R^4, \quad I_{xy} = \frac{1}{8}R^4.$$



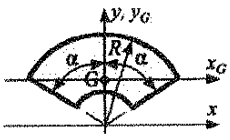
$$A = \pi(R_2^2 - R_1^2), \quad x_G = 0, \quad y_G = 0;$$
$$I_{x_G x_G} = I_{xx} = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4), \quad I_{y_G y_G} = I_{yy} = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4), \quad I_{x_G y_G} = I_{xy} = 0.$$



$$A = \frac{\pi}{2}(R_2^2 - R_1^2), \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{4}{3\pi}\frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2};$$
$$I_{x_G x_G} = \frac{\pi}{8}(R_2^4 - R_1^4) - \frac{8}{9\pi}\frac{(R_2^3 - R_1^3)^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad I_{y_G y_G} = \frac{\pi}{8}(R_2^4 - R_1^4), \quad I_{x_G y_G} = 0;$$
$$I_{xx} = \frac{\pi}{8}(R_2^4 - R_1^4), \quad I_{yy} = \frac{\pi}{8}(R_2^4 - R_1^4), \quad I_{xy} = 0.$$



$$A = \alpha R^2, \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}R;$$
$$I_{x_G x_G} = \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - \frac{16}{9}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right)R^4, \; I_{y_G y_G} = \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)R^4, \; I_{x_G y_G} = 0.$$
$$I_{xx} = \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)R^4, \quad I_{yy} = \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)R^4, \quad I_{xy} = 0.$$



$$A = (R_2^2 - R_1^2)\alpha, \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2};$$
$$I_{x_G x_G} = \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) - \frac{4}{9}\frac{(R_2^3 - R_1^3)^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha},$$
$$I_{y_G y_G} = \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right), \quad I_{x_G y_G} = 0;$$
$$I_{xx} = \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right), \quad I_{yy} = \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right), \quad I_{xy} = 0.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 251

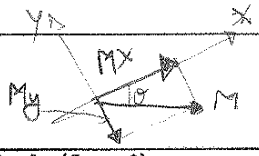
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 251

STATI SEMPLICI DI SOLLECITAZIONE
nel solido di *de Saint Venant*[a]

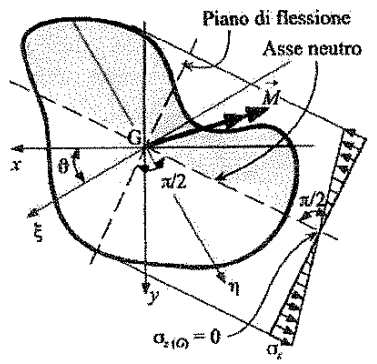
[a]Autore: Fabrizio Barpi, Gennaio 2001.

1 FLESSIONE

$\sigma_z = M\left(\frac{\cos\theta}{I_x}y + \frac{\operatorname{sen}\theta}{I_y}x\right) \to M_x = M\cos\theta$, $M_y = -M\operatorname{sen}\theta$ $\xrightarrow{\text{in questo caso}}$



1.1 Flessione deviata



1.1.1 Sistema di riferimento (ξ,η) principale $(I_{\xi\eta}=0)$

$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x$ $\quad M_x = M\cos\theta \quad M_y = M\operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi,} \qquad \text{asse neutro } (\sigma_z = 0): \quad \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi = 0.$$

1.1.2 Sistema di riferimento (x,y) non principale $(I_{xy}\neq 0)$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x^*}{I_{xx}}y - \frac{M_y^*}{I_{yy}}x,} \qquad \text{asse neutro } (\sigma_z = 0): \quad \frac{M_x^*}{I_{xx}}y - \frac{M_y^*}{I_{yy}}x = 0.$$

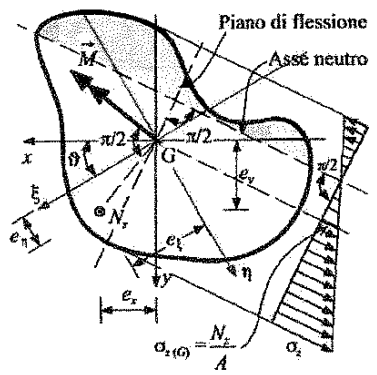
$$M_x^* = \frac{M_x + i_y M_y}{1 - i_x i_y}, \quad M_y^* = \frac{M_y + i_x M_x}{1 - i_x i_y}, \quad i_x = \frac{I_{xy}}{I_{xx}}, \quad i_y = \frac{I_{xy}}{I_{yy}}.^a$$

[a]Per passare dal riferimento (x,y) a (ξ,η) valgono le seguenti relazioni:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\operatorname{atn}\frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}}, \quad I_\xi, I_\eta = \tfrac{1}{2}(I_{xx}+I_{yy}) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(I_{yy}-I_{xx})^2 + 4\,I_{xy}^2},$$

con segno "$\pm$" se $I_{xx} > I_{yy}$ e segno "$\mp$" se $I_{xx} < I_{yy}$.

1.2 Pressoflessione deviata (o sforzo normale eccentrico)



1.2.1 Sistema di riferimento (ξ,η) principale $(I_{\xi\eta}=0)$

$\sigma_z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_x x}{\rho_y^2} + \frac{e_y y}{\rho_x^2}\right) \quad \rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_\xi}{I_\xi}\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\xi,} \qquad M_\xi = N_z\, e_\eta, \quad M_\eta = -N_z\, e_\xi.$$

$$\text{Asse neutro } (\sigma_z = 0): \quad 1 + \frac{e_\eta}{\varrho_\xi{}^2}\eta + \frac{e_\xi}{\varrho_\eta{}^2}\xi = 0, \quad \varrho_\xi{}^2 = \frac{I_\xi}{A}, \quad \varrho_\eta{}^2 = \frac{I_\eta}{A}.$$

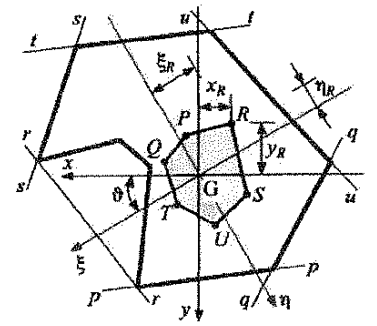
1.2.2 Sistema di riferimento (x,y) non principale $(I_{xy}\neq 0)$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x^*}{I_{xx}}y - \frac{M_y^*}{I_{yy}}x,} \qquad M_x = N_z\, e_y, \quad M_y = -N_z\, e_x.$$

$$\text{Asse neutro } (\sigma_z = 0): \quad 1 + \frac{e_x^*}{\varrho_y{}^2}x + \frac{e_y^*}{\varrho_x{}^2}y = 0,$$

$$\varrho_x{}^2 = \frac{I_{xx}}{A}, \quad \varrho_y{}^2 = \frac{I_{yy}}{A}, \quad e_x^* = \frac{e_x - i_x e_y}{1 - i_x i_y}, \quad e_y^* = \frac{e_y - i_y e_x}{1 - i_x i_y}.$$

1.3 Nocciolo d'inerzia



1.3.1 Sistema di riferimento (ξ,η) principale $(I_{\xi\eta}=0)$

$$\text{Retta } r\text{–}r\text{: } \alpha_\xi\,\xi + \alpha_\eta\,\eta + \alpha_n = 0 \;\to\; \text{punto } R\text{:} \quad \boxed{\begin{cases} \xi_R = \frac{I_\eta}{A}\frac{\alpha_\xi}{\alpha_n}, \\ \eta_R = \frac{I_\xi}{A}\frac{\alpha_\eta}{\alpha_n}. \end{cases}}$$

1.3.2 Sistema di riferimento (x,y) non principale $(I_{xy}\neq 0)$

$$\text{Retta } r\text{–}r\text{: } a_x\,x + a_y\,y + a_n = 0 \;\to\; \text{punto } R\text{:} \quad \boxed{\begin{cases} x_R = \frac{I_{yy}}{A}\frac{a_x}{a_n} + \frac{I_{xy}}{A}\frac{a_y}{a_n}, \\ y_R = \frac{I_{xx}}{A}\frac{a_y}{a_n} + \frac{I_{xy}}{A}\frac{a_x}{a_n}. \end{cases}}$$

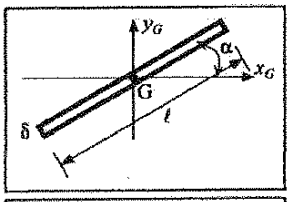
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 251

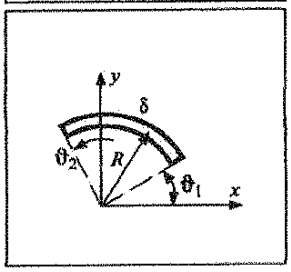
PROPRIETÁ GEOMETRICHE DI ALCUNE AREE PIANE[a]

[a]Autore: Fabrizio Barpi, Ottobre 2000.

1 SEZIONI SOTTILI ($\delta \ll \ell$)

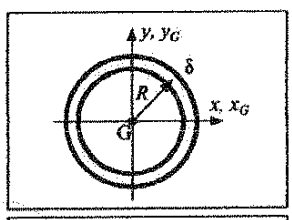


$$A = \delta\ell, \quad x_G = 0, \quad y_G = 0;$$
$$I_{x_Gx_G} = \frac{1}{12}\delta\ell^3 \sin^2\alpha, \quad I_{y_Gy_G} = \frac{1}{12}\delta\ell^3 \cos^2\alpha, \quad I_{x_Gy_G} = \frac{1}{12}\delta\ell^3 \sin\alpha\cos\alpha.$$

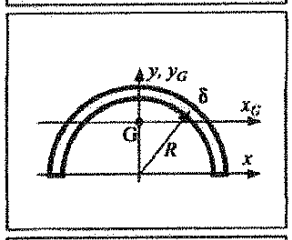


$$A = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\delta R, \quad S_x = (-\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1)\delta R^2, \quad S_y = (\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1)\delta R^2;$$
$$I_{xx} = \frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1)\delta R^3,$$
$$I_{yy} = \frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1)\delta R^3,$$
$$I_{xy} = \frac{1}{4}(-\cos(2\vartheta_2) + \cos(2\vartheta_1))\delta R^3.$$

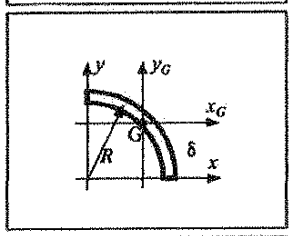
1.1 Casi particolari



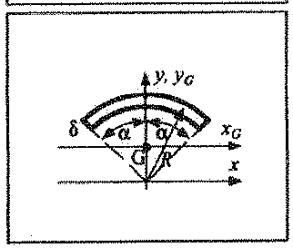
$$A = 2\pi\delta R, \quad x_G = 0, \quad y_G = 0;$$
$$I_{x_Gx_G} = I_{xx} = \pi\delta R^3, \quad I_{y_Gy_G} = I_{yy} = \pi\delta R^3, \quad I_{x_Gy_G} = I_{xy} = 0.$$



$$A = \pi\delta R, \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{2}{\pi}R;$$
$$I_{x_Gx_G} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\delta R^3, \quad I_{y_Gy_G} = \frac{\pi}{2}\delta R^3, \quad I_{x_Gy_G} = 0;$$
$$I_{xx} = \frac{\pi}{2}\delta R^3, \quad I_{yy} = \frac{\pi}{2}\delta R^3, \quad I_{xy} = 0.$$



$$A = \frac{\pi}{2}\delta R, \quad x_G = \frac{2}{\pi}R, \quad y_G = \frac{2}{\pi}R;$$
$$I_{x_Gx_G} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\delta R^3, \quad I_{y_Gy_G} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\delta R^3, \quad I_{x_Gy_G} = -\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\delta R^3;$$
$$I_{xx} = \frac{\pi}{4}\delta R^3, \quad I_{yy} = \frac{\pi}{4}\delta R^3, \quad I_{xy} = \frac{1}{2}\delta R^3.$$



$$A = 2\alpha\delta R, \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R;$$
$$I_{x_Gx_G} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - 2\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right)\delta R^3, \quad I_{y_Gy_G} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)\delta R^3, \quad I_{x_Gy_G} = 0;$$
$$I_{xx} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)\delta R^3, \quad I_{yy} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)\delta R^3, \quad I_{xy} = 0.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 251

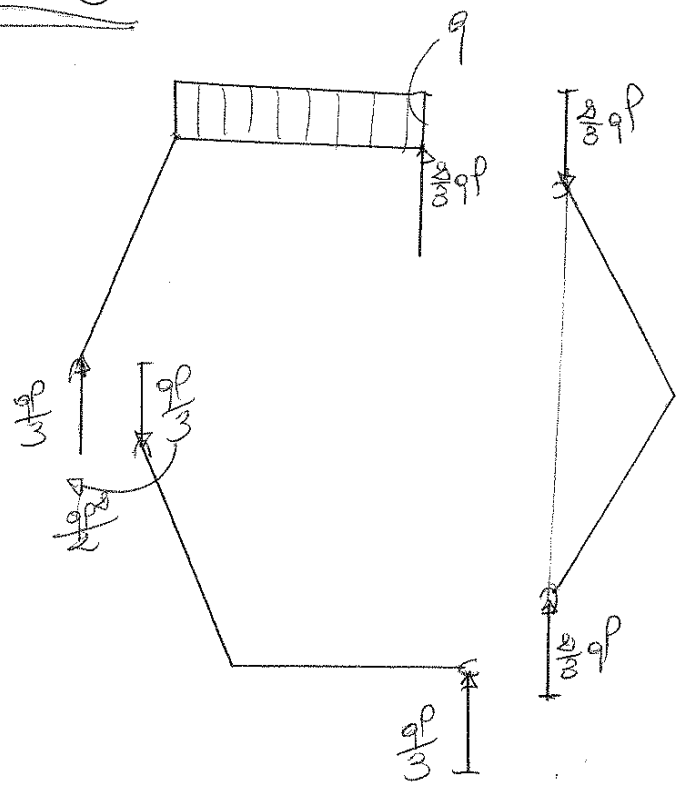
$$\cancel{\circlearrowleft\!\!\oplus\ M_C = q\ell^2 \cdot \ell^2 - V_A'' \cdot \frac{3}{2}\ell = 0}$$

$$\cancel{q\ell^2 - V_A'' \cdot \frac{3}{2}\ell = 0}$$

$$\cancel{V_A'' = \frac{2}{3} q\ell}$$

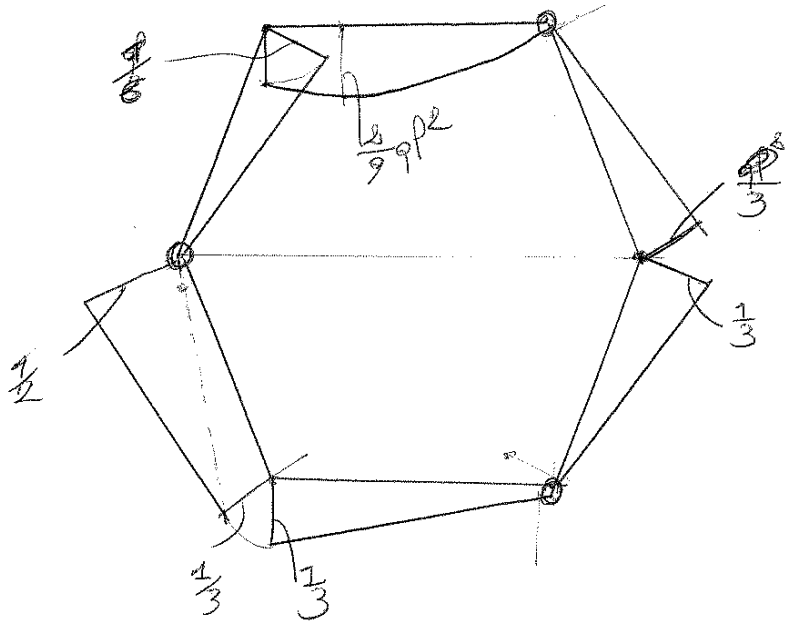
$$\circlearrowleft\!\!\oplus\ M_C^{II} = \frac{q\ell^2}{2} - V_E' \cdot \frac{3}{2}\ell = 0$$

$$\underline{\underline{V_E' = \frac{q\ell}{3}}}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 251

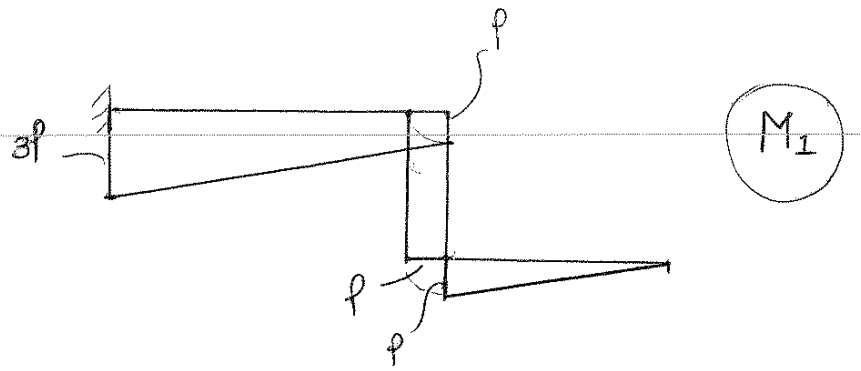


$\frac{M}{qP^2}$

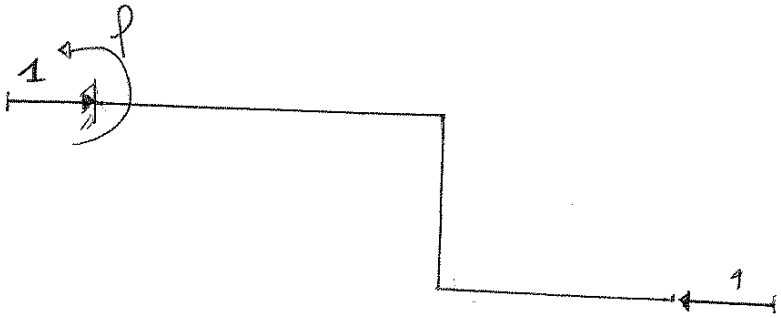
$$M\left(\alpha=\frac{l}{3}\right)=\frac{l}{3}qP\cdot\frac{2}{3}P-q\left(\frac{2}{3}P\cdot\frac{1}{3}P\right)=\frac{4}{9}qP^2-\frac{2}{9}qP^2=\frac{8}{9}qP^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 251

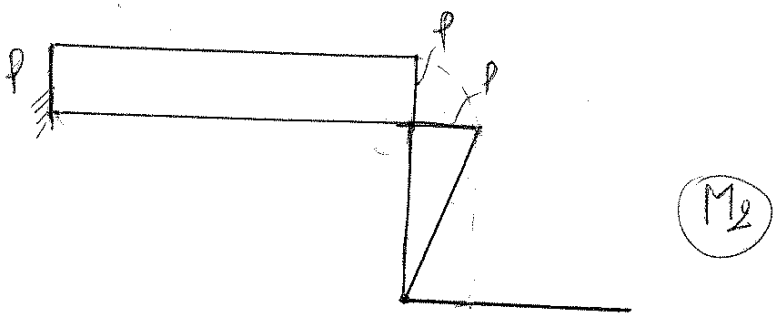


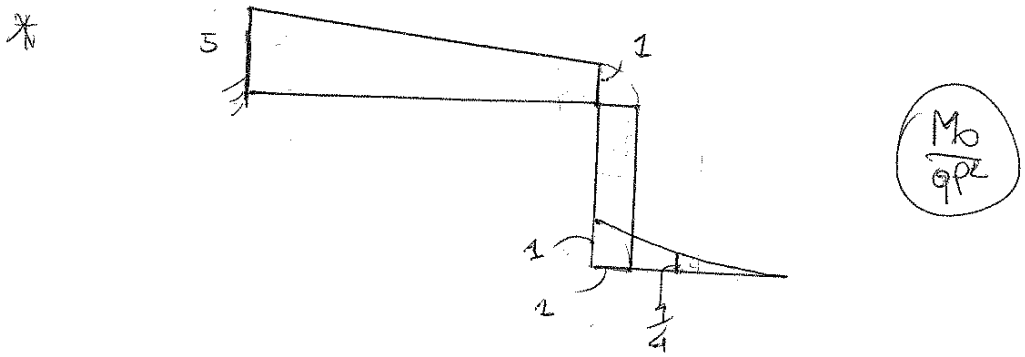
sistema 2



$\circlearrowleft + \quad M_A = M_A - 1 \cdot P = 0$

$\underline{\underline{M_A = 1P}}$





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 251

$$\int_{str} \frac{M_1 M}{EI} dl = 0$$

$$\int_{str} \frac{M_2 M}{EI} dl = 0$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$\int \frac{M_0 M_1}{\cancel{EI}} dl + \frac{X_1}{\cancel{EI}} \int M_1^2 dl + \frac{X_2}{\cancel{EI}} \int M_1 M_2 dl = 0$$

$$\int \frac{M_0 M_2}{\cancel{EI}} dl + \frac{X_1}{\cancel{EI}} \int M_1 M_2 dl + \frac{X_2}{\cancel{EI}} \int M_2^2 dl = 0$$

$$\int M_0 M_1 dl = -\frac{2P}{6}\left[3P \cdot 5qP^2 + P \cdot qP^2 + 4\left(3qP^2 \cdot 2P\right)\right] = -\frac{P}{3}\left[15qP^3 + qP^3 + 4 \cdot 6qP^3\right]$$

$$= -\frac{P}{3} \cdot \left[15qP^3 + qP^3 + 24qP^3\right] = -\frac{40}{3} qP^4$$

$$\int M_0 M_2 dl = -\frac{P}{6}\left[qP^2 \cdot P + qP^2 P + 4qP^2 \cdot P\right] = -\frac{P}{6}\left[qP^3 + qP^3 + 4qP^3\right] =$$

$$= -\frac{P}{6} \cdot 6qP^3 = -qP^4$$

$$\int M_0 M_1 dl = -\frac{P}{6}\left[qP^2 \cdot P + 0 + 4\left(\frac{P}{2} \cdot \frac{qP^2}{4}\right)\right] = -\frac{P}{6}\left[qP^3 + \frac{qP^3}{2}\right] = -\frac{P}{6}\left[\frac{3}{2} qP^3\right] = -\frac{qP^4}{4}$$

$$\int M_0 M_1 dl = -\frac{40}{3} qP^4 - qP^4 - \frac{qP^4}{4} = \frac{-160 - 12 - 3}{12} = -\frac{175}{12} qP^4$$

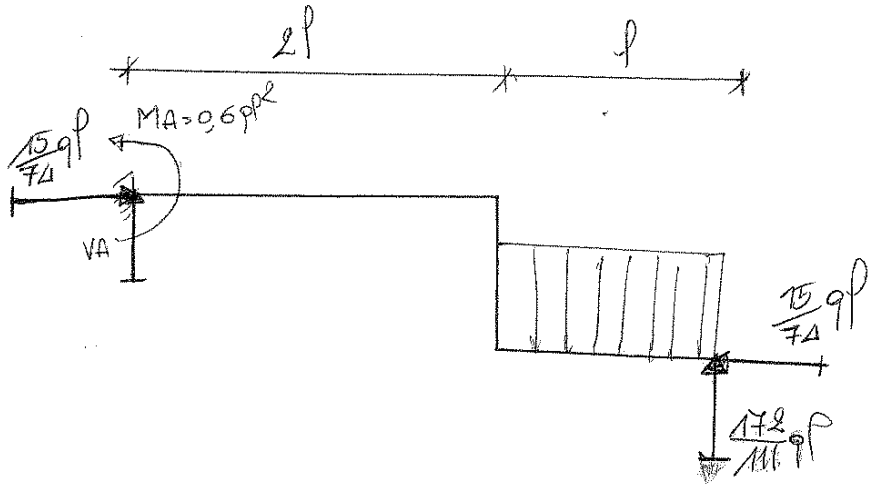
$$\int M_0 M_2 dl = \frac{P}{3}\left[5qP^2 \cdot P + qP^2 \cdot P + 4\left(3qP^2 \cdot P\right)\right] = \frac{P}{3}\left[5qP^3 + qP^3 + 12qP^3\right] = \frac{18}{3} qP^4 = 6qP^4$$

$$\int M_0 M_2 dl = \frac{P}{6}\left[qP^2 \cdot P + 0 + 4\left(qP^2 \cdot \frac{P}{2}\right)\right] = \frac{P}{6}\left[qP^3 + 2qP^3\right] = \frac{P}{6} \cdot 3qP^3 = \frac{qP^4}{2}$$

$$\int M_0 M_2 dl = 6qP^4 + \frac{qP^4}{2} = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} qP^4$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 251



$$V_A + \frac{172}{111}ql - 2ql = 0$$

$$V_A = 2ql - \frac{172}{111}ql = \frac{222ql - 172ql}{111} = \frac{50}{111}ql$$

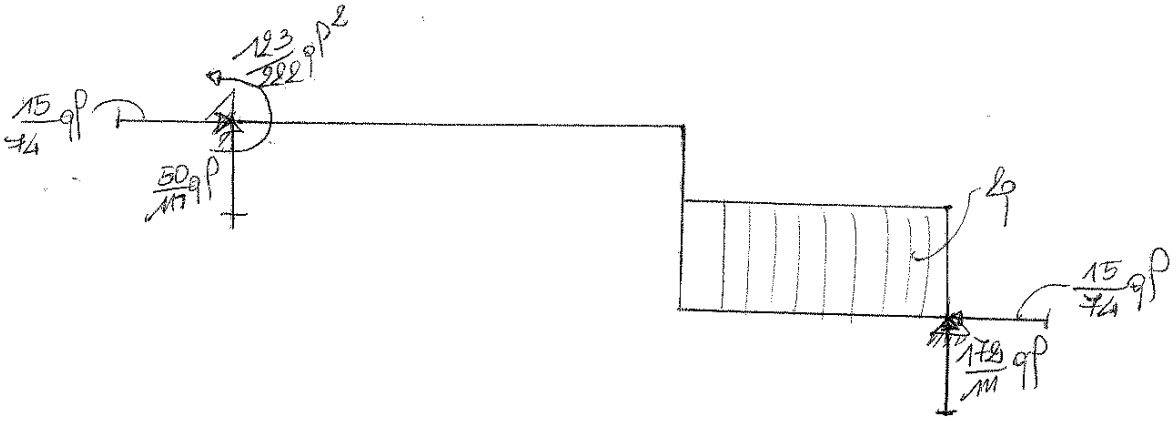
$$\underline{\underline{V_A = \frac{50}{111}ql}}$$

$$\circlearrowleft + \quad M_A = M_A - 2ql \cdot \frac{5}{2}l + \frac{172}{111}ql \cdot 3l - \frac{15}{74}ql \cdot l = 0$$

$$M_A = 5ql^2 + \frac{15}{74}ql^2 - \frac{516}{111}ql = \frac{11110ql^2 + 45ql^2 - 7032ql^2}{222} = \frac{123}{222}ql^2$$

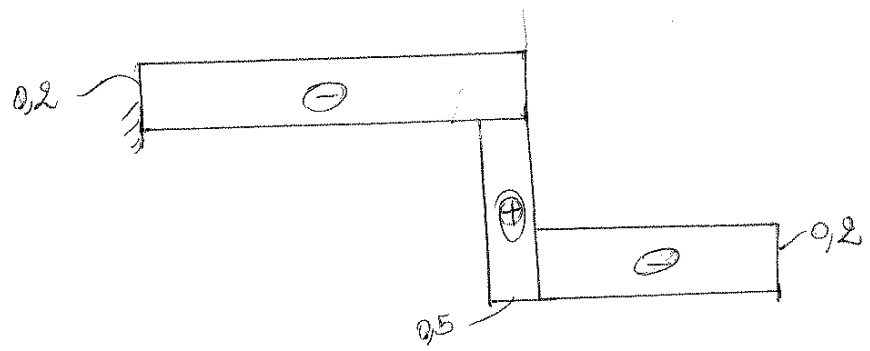
$$\cancel{M_A = \frac{811}{222}ql^2}$$

$$M_A = \frac{123}{222}ql^2$$

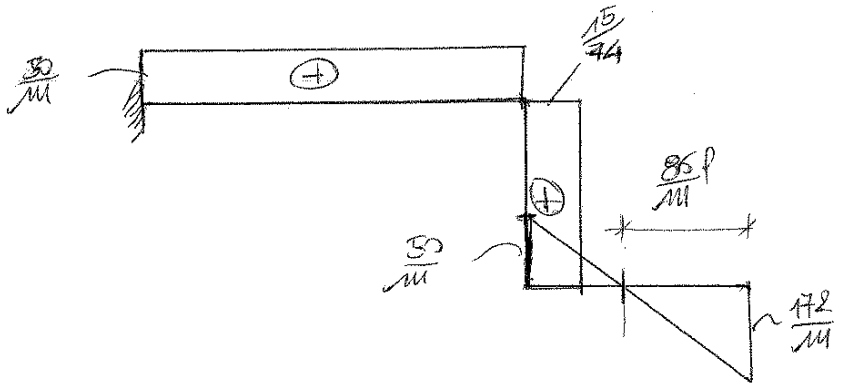


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 251

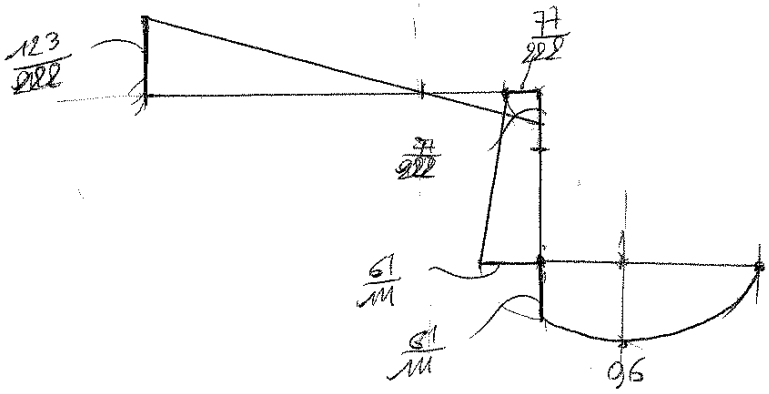
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 251



$\frac{N}{pP}$

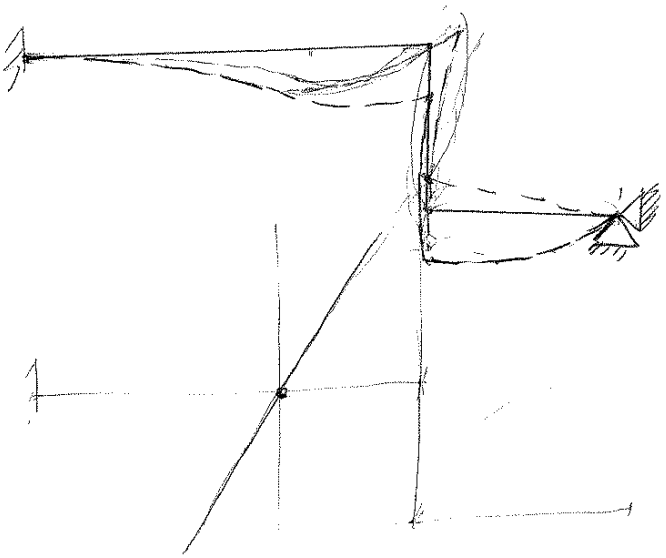


$\frac{T}{pP}$



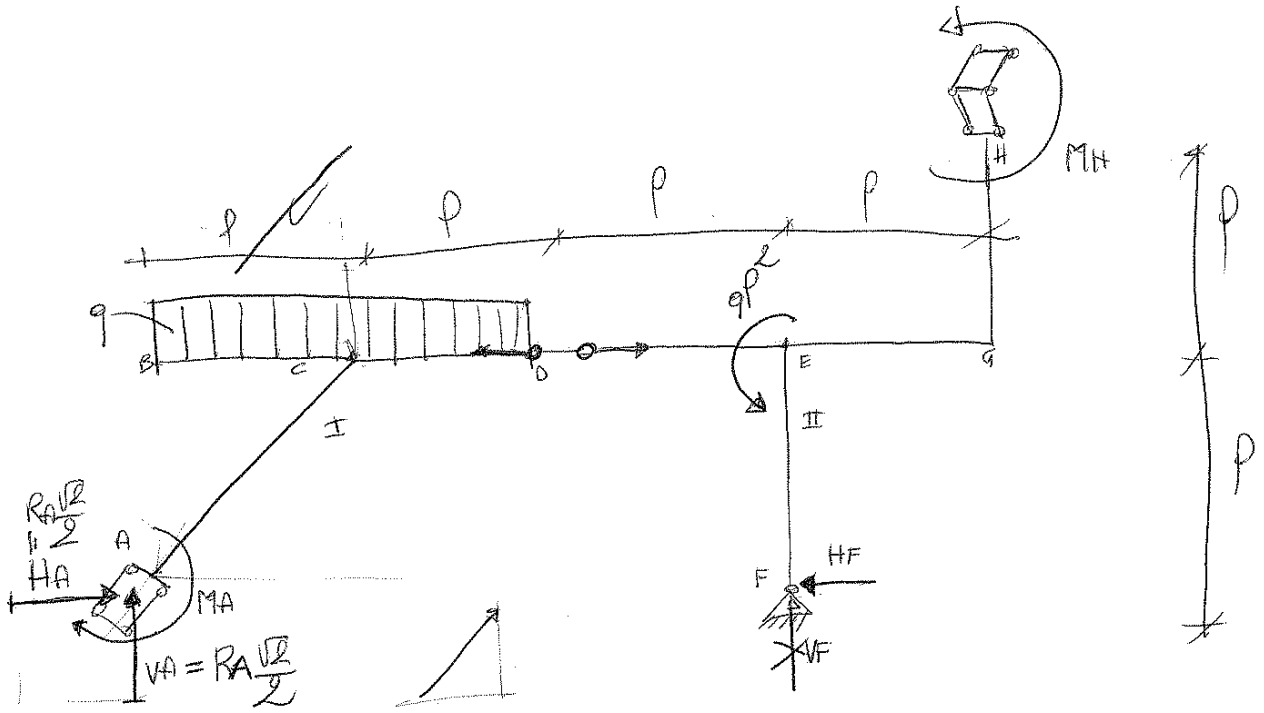
$\frac{M}{pP^2}$

Deformata



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 251



$V_A + \cancel{V_F} = 2qP$

$H_A - H_F = 0$

$\oplus\ M_A = M_A - M_H - qP^2 + 2qP^2 - \cancel{V_F \cdot 3}P = 0$

q traslazione verticale sistema I

$\underline{V_A = 2qP}$

$\underline{V_F = 0}$

$M_A - M_H + qP^2 = 0$

$\oplus\ M_D^I = M_A + V_A \cdot 2P - 2qP^2 - H_A P = 0$

$M_A + 4qP^2 - 2qP^2 - H_A \cdot P = 0$

$M_A = H_A \cdot P - 2qP^2$

$\oplus\ M_D^{II} = M_H + qP^2 - H_F \cdot P = 0$

$M_H = H_F P - qP^2$

$H_A \cdot P - 2qP^2 + H_F P + qP^2 + qP^2 = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 251

Sforzo normale eccentrico:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_x x}{\rho_y^2} + \frac{e_y y}{\rho_x^2}\right)$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Flessione deviata:

$$\sigma_z = \frac{M\cos\theta}{I_x} y + \frac{M\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_y} x = M\left(\frac{\cos\theta}{I_x} y + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{I_y} x\right)$$

Taglio

$$\tau_z = \frac{T_y \cdot S_x^{(A')}}{b\, I_x} \quad ; \quad \tau_z = \frac{T_x \cdot S_y^{(A'')}}{b\, I_y}$$

dipende se ho T_x o T_y. Se ho entrambi si usa la sovrapposizione degli effetti

Torsione

$$\tau_z = \frac{M_z}{I_t} \cdot b \rightarrow \text{spessore}$$

M_z: momento torcente

$I_t = \frac{1}{3}\sum_i \alpha_i b_i^3$: formula generale

sezioni sottili aperte:

$$I_t = \frac{1}{3} b^3 \int ds$$

sezioni sottili chiuse:

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{2\Omega b} \qquad I_t = \frac{4\Omega^2 b}{L}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 251

cedimenti dei vincoli (cedimento lineare)

1 volta - iperstatiche

$L_{vi} = L_{ve} \neq 0$!!

$$\int \frac{M M_1}{EI} ds = \varphi_0 \cdot a$$ reazione vincolare del sistema (1) dove c'è il cedimento

$M_2 = M_0 + X M_1$

$$\frac{X}{EI}\int M_1^2 ds + \frac{1}{EI}\int M_0 M_1 ds = \varphi_0 a$$

2 volte - iper

$$\int \frac{M M_1}{EI} ds = \varphi_0 a$$

$$\int \frac{M M_2}{EI} ds = \varphi_0 b$$

$M = X_1 M_1 + X_2 M_2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_1}{EI}\int M_1^2 ds + \frac{X_2}{EI}\int M_1 M_2 ds &= \varphi_0 a \\ \frac{X_1}{EI}\int M_1 M_2 ds + \frac{X_2}{EI}\int M_2^2 ds &= \varphi_0 b \end{aligned}\right\}$$ 2 volte iperstatiche

cedimento angolare

1 volta iperstatiche

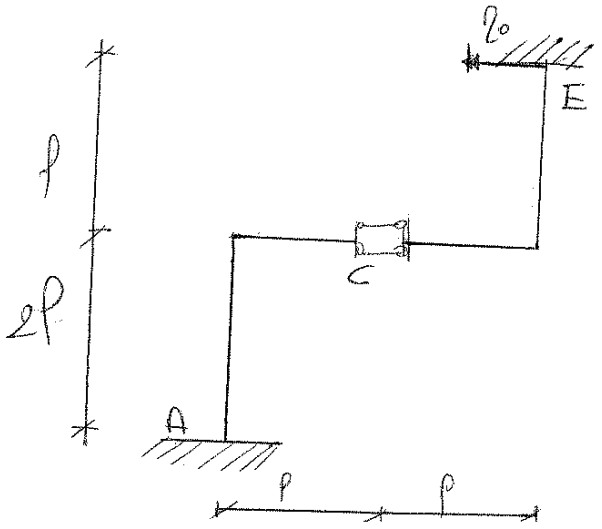
$$\int \frac{M M_1}{EI} ds = \alpha_1 \Delta\varphi$$ momento del sistema 1 dove ho il cedimento del vincolo

$M = M_0 + M_1 X$

$$\int \frac{M_0 M_1}{EI} ds + \frac{X}{EI}\int M_1^2 ds = \alpha_1 \Delta\varphi$$

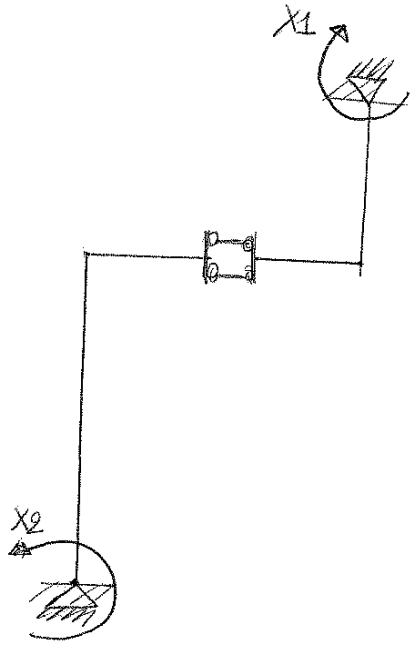
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 251



2 volte iperstatico

isostatico principale



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 251

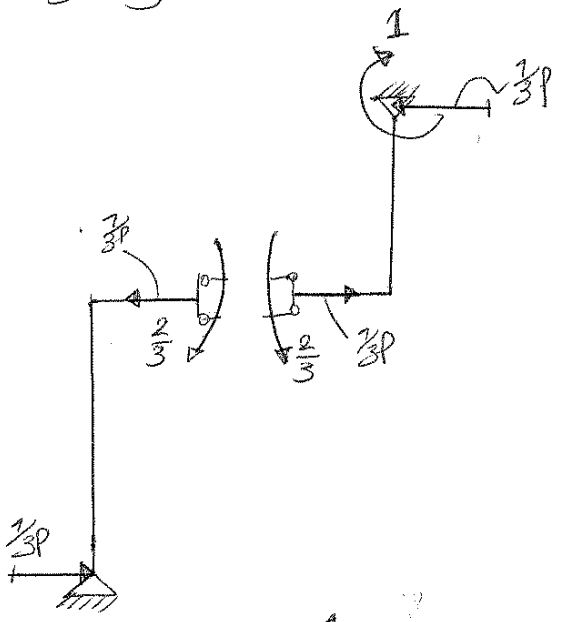
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 251

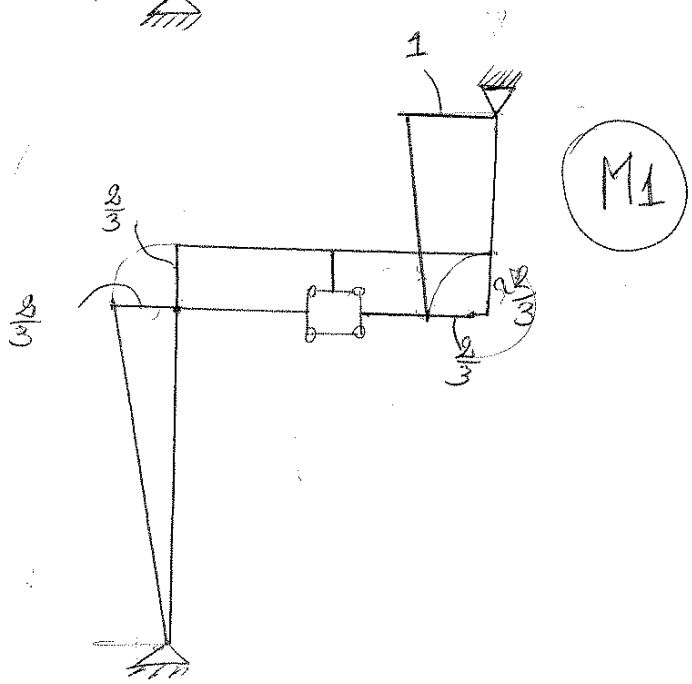
$$\oplus \; M_B = M_B - \frac{1}{3P} \cdot 2P = 0$$

$$M_B = \frac{2}{3}$$

$$\circlearrowleft \; M_B = M_B - 1 + \frac{1}{3P} \cdot P = 0$$

$$M_B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

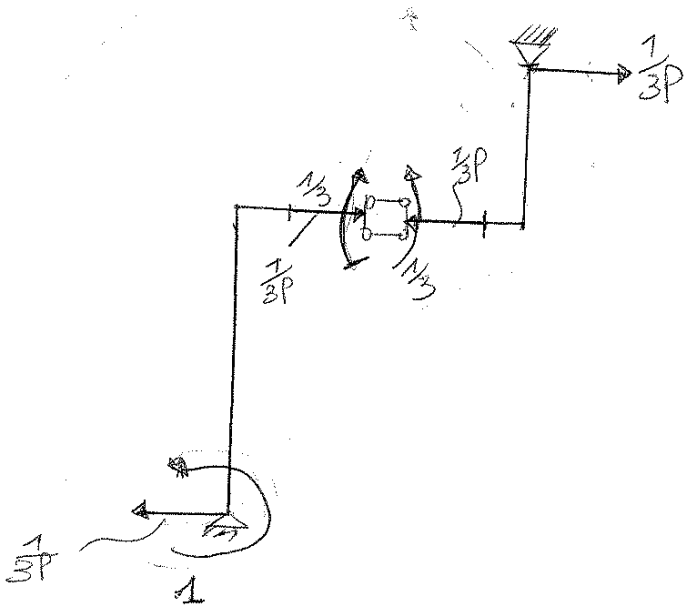


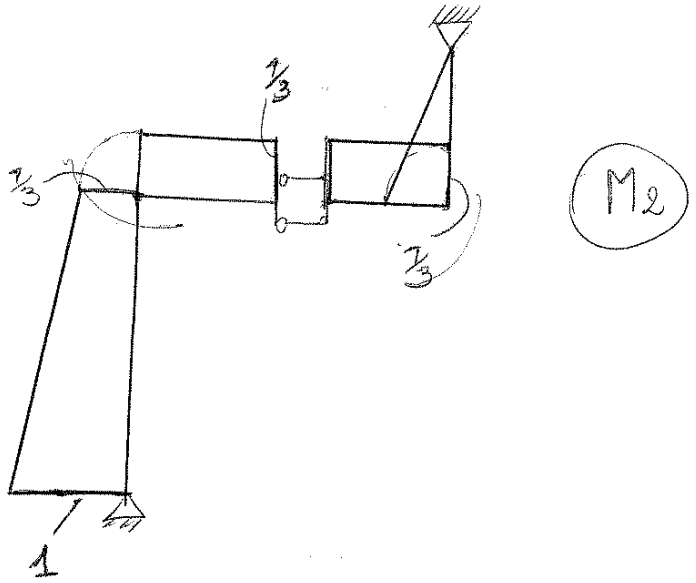


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 251

3





$$\int \frac{M M_1}{EI} dl = l_0 \cdot \frac{1}{3P}$$

$$\int \frac{M M_2}{EI} dl = -l_0 \cdot \frac{1}{3P}$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$\frac{X_1}{EI}\int M_1^2 dl + \frac{X_2}{EI}\int M_1 M_2 dl = \frac{l_0}{3P}$$

$$\frac{X_1}{EI}\int M_1 M_2 dl + \frac{X_2}{EI}\int M_2^2 dl = -\frac{l_0}{3P}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 251

$$\frac{X_1}{EI}\frac{17P}{9}+\frac{X_2}{EI}\cdot\frac{17P}{18}=\frac{q_0}{3P}$$

$$\frac{X_1}{EI}\cdot\frac{17P}{18}+\frac{X_2}{EI}\cdot\frac{17P}{9}=-\frac{q_0}{3P}$$

$$\frac{X_1}{EI}+\frac{X_2}{EI}\cdot\frac{\cancel{17P}}{\cancel{18}_{2}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{17P}}=\frac{q_0}{\cancel{3P}}\cdot\frac{\cancel{P^3}}{\cancel{17P}}$$

$$\frac{X_1}{EI}=\frac{3q_0}{17P^2}-\frac{X_2}{2EI}$$

$$\left(\frac{3q_0}{17P^2}-\frac{X_2}{2EI}\right)\cdot\frac{17P}{18}+\frac{X_2}{EI}\cdot\frac{17P}{9}=-\frac{q_0}{3P}$$

$$\frac{q_0}{6P}-\frac{17P}{36}\frac{X_2}{EI}+\frac{17P}{9}\frac{X_2}{EI}=-\frac{q_0}{3P}$$

$$\frac{-17PX_2+34PX_2}{36}=-\frac{q_0}{3P}-\frac{q_0}{6P}=\frac{-2q_0-q_0}{6P}=-\frac{3q_0}{6P}=-\frac{q_0}{2P}$$

$$\frac{3}{4}\frac{\cancel{17}}{\cancel{36}}PX_2=-\frac{q_0}{2P}$$

$$2\frac{3}{\cancel{4}}PX_2=-\frac{q_0}{\cancel{2}P}$$

$$X_2=-\frac{2}{3P}\cdot\frac{q_0}{P}\qquad\boxed{X_2=-\frac{2q_0EI}{3P^2}}$$

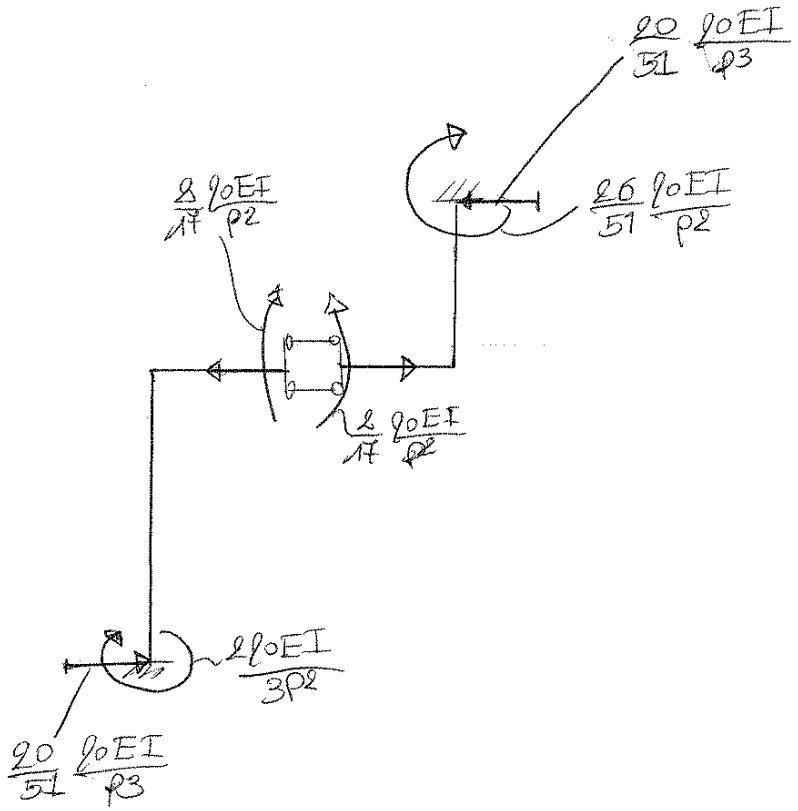
$$X_1=\frac{3q_0}{17P^2}EI-\frac{1}{2EI}\left(-\frac{2q_0EI}{3P^2}\right)$$

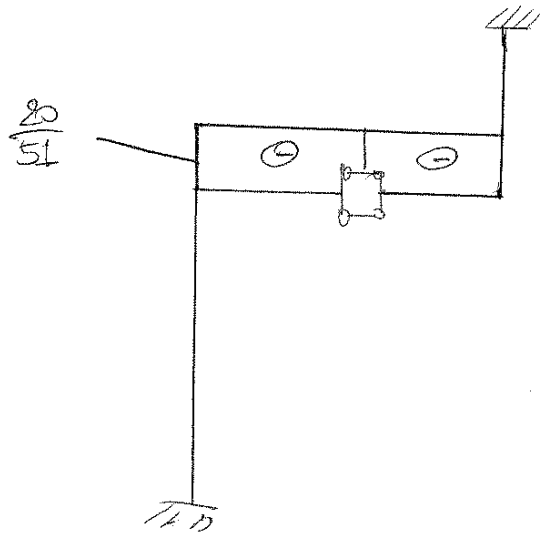
$$X_1=\frac{3q_0}{17P^2}EI+\frac{q_0EI}{3P^2}=\frac{9q_0EI+17q_0EI}{51P^2}=\frac{26}{51}\frac{q_0EI}{P^2}$$

$$\boxed{X_1=\frac{26}{51}\frac{q_0EI}{P^2}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 251

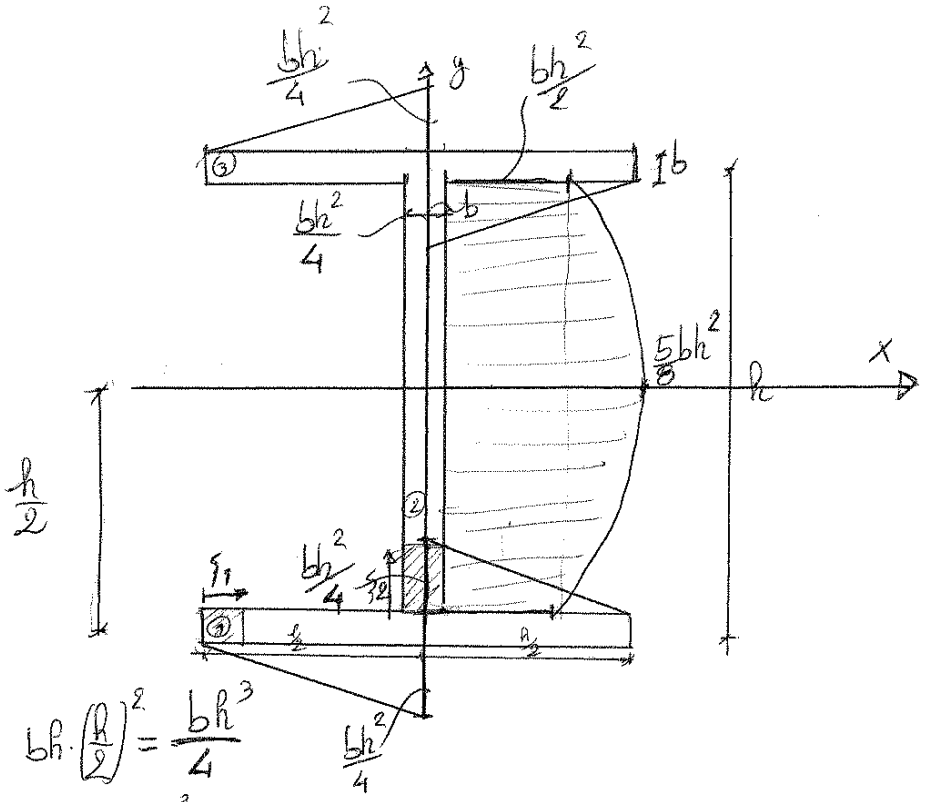
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 251





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 251



$$I_{x3} = I_{x1} = \frac{h \cdot b^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{4}$$

$$I_{x2} = \frac{bh^3}{12} + 0 = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{2} + \frac{bh^3}{12} = \frac{6bh^3 + 1bh^3}{12} = \frac{7}{12}bh^3$$

$$S_x(\xi_1) = b\xi_1 \cdot \frac{h}{2}$$

$$S_x\left(\xi_1 = \frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{4}$$

$$\cancel{S_x(\xi_2) = b\xi_2\left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_2}{2}\right) = \frac{bh}{2}\xi_2 - \frac{b\xi_2^2}{2} +}$$

$$S_x(\xi_2) = \frac{bh^2}{2} + b\xi_2\left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_2}{2}\right)$$

$$S_x(\xi_2 = 0) = \frac{bh^2}{2}$$

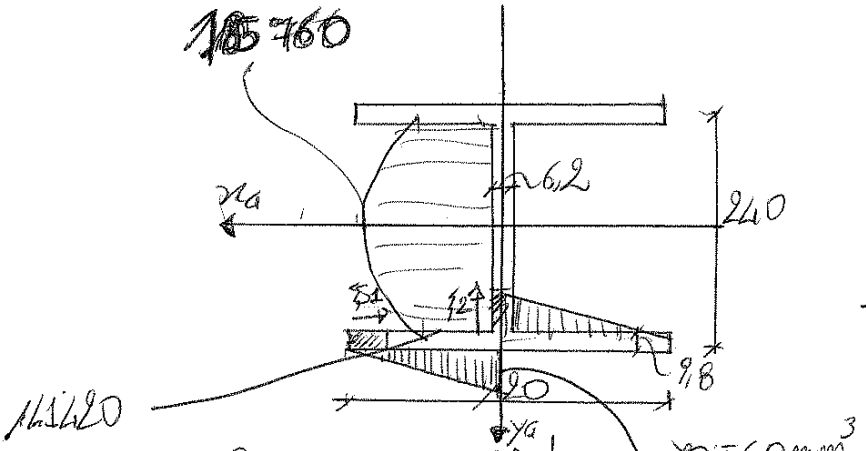
$$\frac{dS_x(\xi_2)}{d(\xi_2)} = \frac{bh}{2} - b\xi_2 = 0 \qquad \boxed{\xi_2 = \frac{h}{2}}$$

$$S_x\left(\xi_2 = \frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{2} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{b}{2}\frac{h^2}{4} = \frac{bh^2}{2} + \frac{bh^2}{8} = \frac{4bh^2 + bh^2}{8} = \frac{5}{8}bh^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 251

Ty



$T = 141120\,N$

$\bar{\tau}_{am} = 240\,MPa$

$T_x = T\cos 45° = T_y = 100000\,N$

SR $\quad \tau_x = \dfrac{T_y \cdot S_x}{b\, I_x}$

$S_x(\xi_1) = 9{,}8\,\xi_1\,120$

$S_x(\xi_1 = 60) = 9{,}8 \cdot 60 \cdot 120 = 70560\ mm^3$

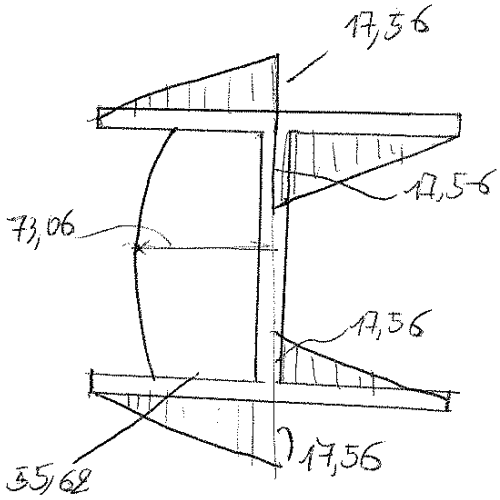
$S_x(\xi_2) = 120 \cdot 9{,}8 \cdot 120 + 6{,}2\,\xi_2\left(120 - \dfrac{\xi_2}{2}\right) = 141120 + 744\,\xi_2 - 3{,}1\,\xi_2^2$

$\dfrac{dS_x(\xi_2)}{d\xi_2} = 744 - 6{,}2\,\xi_2 = 0 \qquad \underline{\xi_2 = 120\ mm}$

$S_x(\xi_2 = 120\,mm) = 141120 + 744 \cdot 120 - 3{,}1 \cdot 120^2 = 185760\ mm^3$

$I_x = 2\left[\dfrac{120 \cdot 9{,}8^3}{12} + 120 \cdot 9{,}8 \cdot 120^2\right] + \dfrac{6{,}2 \cdot 240^3}{12} = 41011200\ mm^4$

$\tau_x = \dfrac{T_y \cdot S_x}{b\, I_x}$



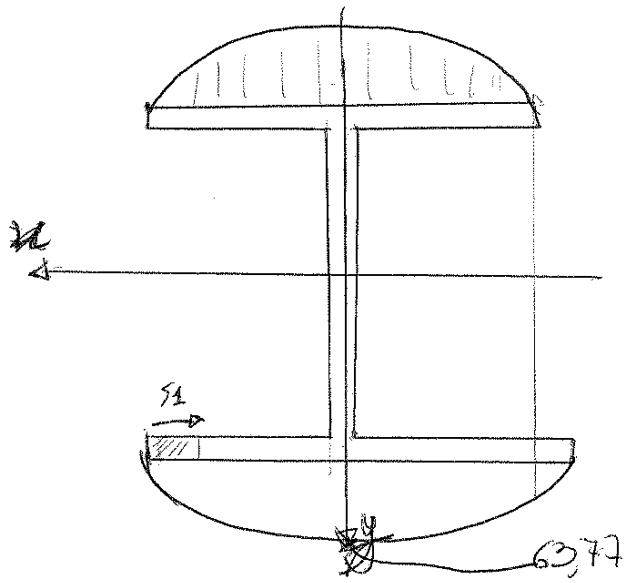
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 251

$$\tau_z = \frac{100'000 \cdot 70360}{9{,}8 \cdot 41'011200} = 17{,}56 \text{ MPa}$$

$$\tau_z = \frac{100'000 \cdot 105760}{6{,}2 \cdot 41'011200} = 73{,}06 \text{ MPa}$$

lungo x



$$S_y^{(\xi_1)} = 9{,}8\,\xi_1\left(60 - \frac{\xi_1}{2}\right) = 9{,}8 \quad 588\,\xi_1 - 4{,}9\,\xi_1^2$$

$$\frac{dS_y}{d\xi_1} = 588 - 9{,}8\,\xi_1 = 0$$

$$\underline{\xi_1 = 60}$$

$$S_y(\xi_1 = 60) = 17640 \text{ mm}^3$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{9{,}8 \cdot 120^3}{12} = 2'822400$$

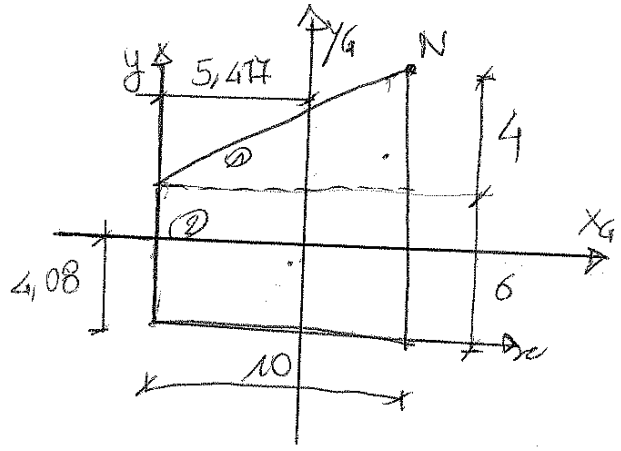
$$\tau_z = \frac{T_z S_y}{b I_y} = 63{,}77 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zmax} = 17{,}56 + 63{,}77 = 81{,}33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_z^2} = 2\tau_z = 162{,}64 < \sigma_i$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 251



$A_1 = \frac{10 \times 4}{2} = 20\,cm^2$

$A_2 = 10 \times 6 = 60\,cm^2$

$A_{tot} = 80\,cm^2$

$10 \times 6 \cdot 5 + 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 80 \cdot x$

$x = 5,417\,cm$

$y = 60 \cdot 3 + 20 \cdot 7,33 = 80 \cdot y$

~~$y = 5,215\,cm$~~

$y = 4,08\,cm$

$I_{xG1} = \frac{10 \cdot 6^3}{12} + 60(4,08-3)^2 = 250\,cm^4$

$I_{xG2} = \frac{10 \cdot 4^3}{36} + 20(4,08-7,33)^2 = 229\,cm^4$

$I_{xGtot} = 479\,cm^4$

$I_{yG1} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} + 60(5,417-5)^2 = 510\,cm^4$

$I_{yG2} = \frac{4 \cdot 10^3}{36} + 20(5,417-6,66)^2 = 142\,cm^4$

$I_{yGtot} = 652\,cm^4$

$I_{xGyG} = \frac{10^2 \cdot 4^2}{72} + 20(5,417-6,66)(4,08-7,33) = 103\,cm^4$

$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 I_{xGyG}}{I_{yG} - I_{xG}} \simeq 25°$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 251

$$\begin{matrix} I_x \\ I_y \end{matrix} = \frac{I_{xG}+I_{yG}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_y+I_x)^2+4I_{xy}}$$

$$I_y = \frac{I_{xG}+I_{yG}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_y-I_x)^2+4I_{xy}^2} =$$

$$I_y = 565 + 134 = 699\ cm^4 = 6990\ cm^4$$

$$I_x = 565 - 134 = 286\ cm^4 = 431\ cm^4$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N_{ex}x}{I_y} + \frac{N_{ey}y}{I_x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,583 \\ 5,92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,65 \\ 3,43 \end{pmatrix} = 66,5 \quad = 34,3$$

$$\frac{10}{80} + \frac{10 \cdot 6,65\,x}{699} + \frac{10 \cdot 3,43\,y}{431} = 0$$

$$0,125 + 0,095x + 0,0796y = 0$$

$$1,57 + 1,19x + y = 0$$

$$y = -1,57 - 1,19x$$

N) $$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N_{ex}x}{I_y} + \frac{N_{ey}y}{I_x} = \frac{N}{A} + \frac{N_{ex}^2}{I_y} + \frac{N_{ey}^2}{I_x}$$

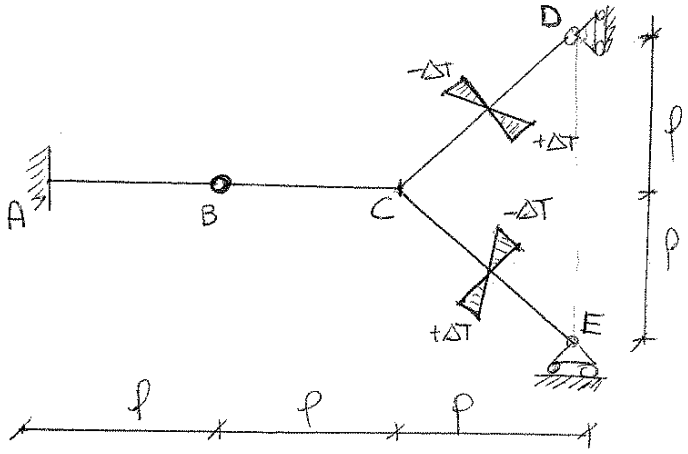
$$= 1,25 + 632,65 + 272,96,75 = 90562,25\ \frac{N}{mm^2}$$

$$1,25 + 6,33 + 2,73 = 10,30\ MPa$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 251

Iperstatico 21 Luglio 2009



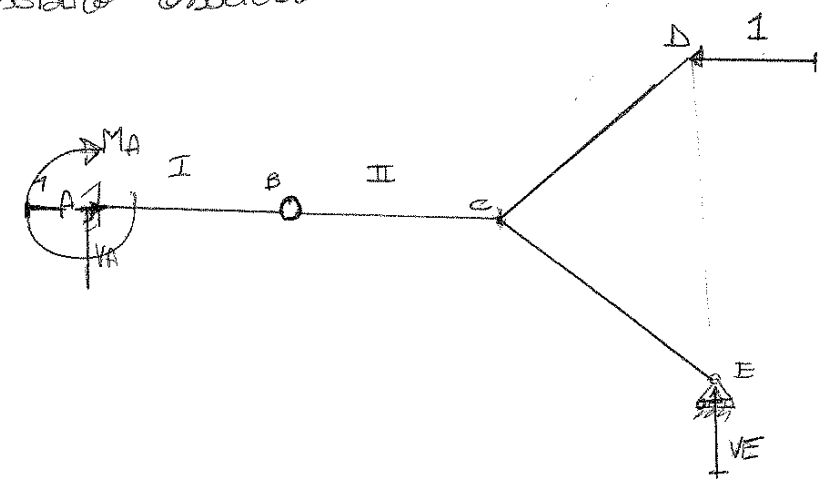
1 volta iperstatico

PLV

$L_{vi} = L_{ve}$

$$L_{vi} = \int M_1 \chi^{(r)} d\ell = \frac{X}{EI}\int M_1^2 d\ell + \frac{2\alpha\Delta T}{h}\int M_1 d\ell = 0$$

Isostatico associato



$V_A + V_E = 0$

$\circlearrowleft + \; M_A = M_A - 1 \cdot l + V_E \cdot 3l = 0$

$\circlearrowleft + \; M_B^{II} = -1 \cdot l - V_E \cdot 2l = 0$

$V_E = -\frac{1}{2}$

$V_A = \frac{1}{2}$

$M_A = l + V_E \cdot 3l = l - \frac{3}{2}l = -\frac{1}{2}l$

$\underline{\underline{M_A = -\frac{l}{2}}}$

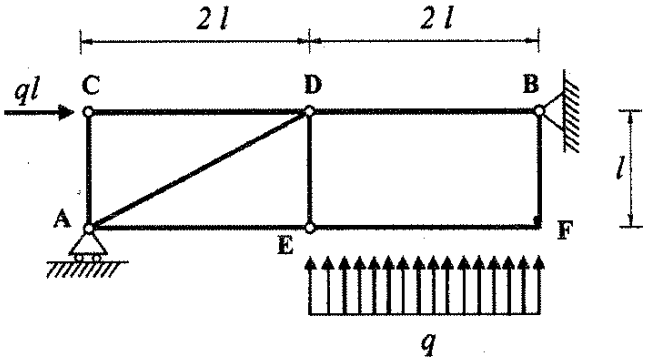
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 251

19 Settembre 2011 **COMPITO I**

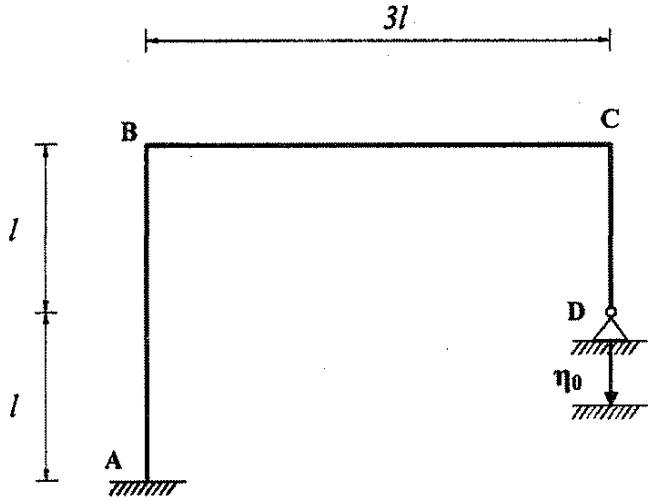
COGNOME :	CORSO DI LAUREA :
NOME:	MATRICOLA:

Esercizio 1



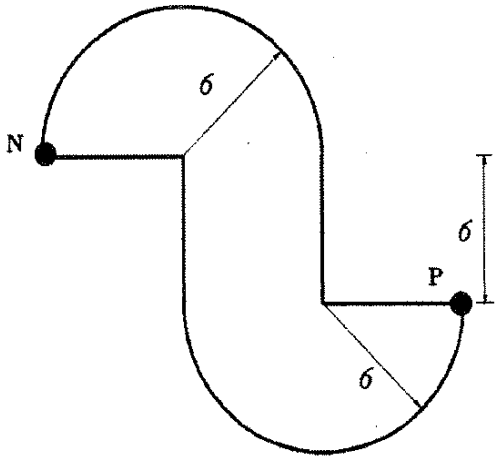
1. Tracciare in scala i diagrammi M, N, T.
2. Tracciare la curva delle pressioni.
3. Calcolare con il PLV le reazioni dell'asta CD.

Esercizio 2



1. Tracciare in scala i diagrammi M, N, T.
2. Tracciare la curva delle pressioni
3. Determinare la deformata elastica qualitativa.

Esercizio 3

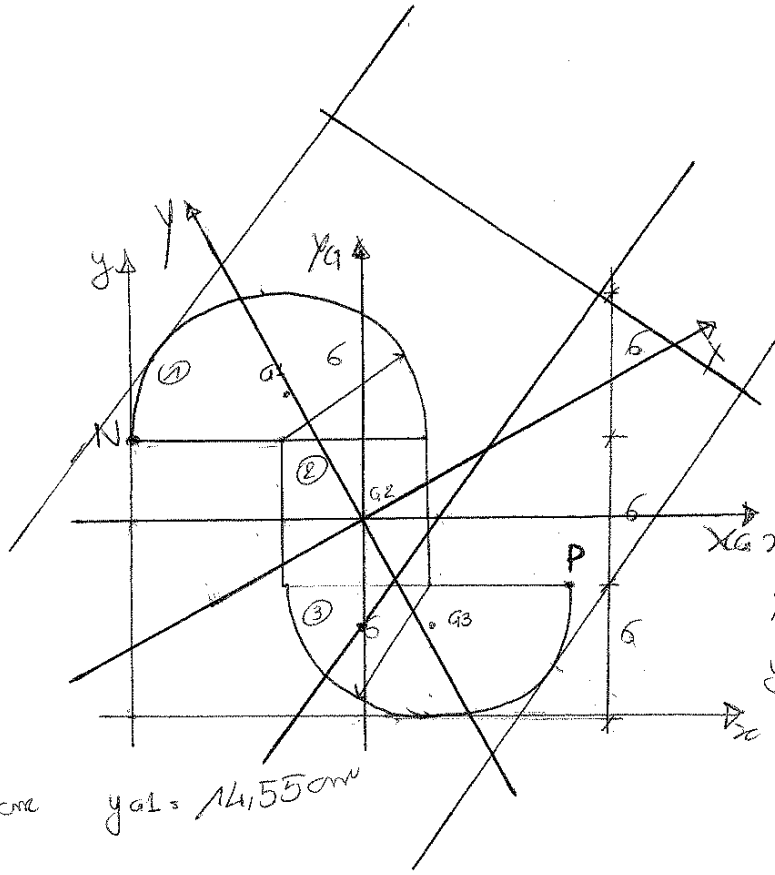


1. Determinare i momenti centrali e le direzioni centrali di inerzia e i momenti centrali di inerzia della sezione in figura.
2. Determinare la tensione nel punto P, dovuto ad uno sforzo normale eccentrico N = 10KN.

(le misure in figura sono espresse in cm)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 251

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 251



$A_{tot} = 149{,}04\ cm^2$

$A_1 = \frac{\pi r^2}{2} = 56{,}52\ cm^2$

$A_2 = 36\ cm^2$

$A_3 = 56{,}52\ cm^2$

x_G ~~$x_{G1} = 6cm$~~

$x_G = 9$

$y_G = 9$

$x_{G1} = 6cm$ $y_{G1} = 14{,}55\ cm$

$x_{G2} = 9\ cm$ $y_{G2} = 9\ cm$

$x_{G3} = 12\ cm$ $y_{G3} = 3{,}45\ cm$

$$I_{x1} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \cdot 6^4 + 56{,}52(9 - 14{,}55)^2 = 1882{,}76\ cm^4$$

$$I_{x2} = \frac{6^4}{12} = 108\ cm^4$$

$$I_{x3} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) 6^4 + 56{,}52(9 - 3{,}45) = 1882{,}76\ cm^4$$

$$I_{x\,tot} = 3873{,}52\ cm^4$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{8} R^4 + 56{,}52(9-6)^2 = 1017{,}36\ cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{6^4}{12} = 108\ cm^4$$

$$I_{y3} = \frac{\pi}{8} R^4 + 56{,}52(9-12)^2 = 1017{,}36\ cm^4$$

$$I_{y\,tot} = 2142{,}72\ cm^4$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 251