



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 497

DATA: 20/01/2014

APPUNTI

STUDENTE: Ottina

MATERIA: Scienza delle Costruzioni 2012/13

Prof. Lacidonia

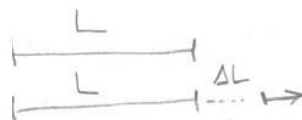
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Oggetto della Scienza delle Costruzioni è lo studio della RISPOSTA STRUTTURALE dei corpi solidi soggetti a sollecitazioni esterne. La risposta strutturale è come si comporta la struttura SOLLECITATA o DEFORMATA.



In questo caso la risposta strutturale è la deformazione ΔL in funzione dei parametri strutturali ed elastici.

Oltre alle deformazioni visive (macroscopiche) si studiano quelle (microscopiche) interne, scambiate tra le parti della struttura.

La risposta strutturale è determinata oltre che dalle FORTE GEOMETRICA (Momento d'inerzia I e Area) anche dalle proprietà meccaniche (Modulo di Young E , Modulo di elasticità tangenziale G , Modulo di Poisson ν) e dalle SOLLECITAZIONI ESTERNE applicate (interne e pontuali) e dai VINCOLI IMPOSTI.

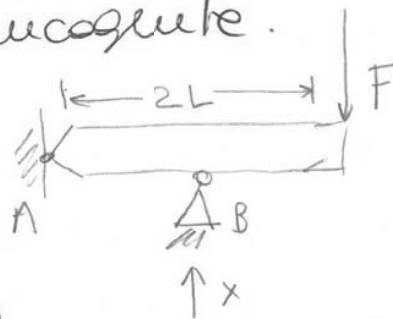
I VINCOLI bloccano le sollecitazioni esterne impedendo al corpo ulteriori sollecitazioni (REAZIONI VINCOLATE) che a priori sono incognite.

STRUTTURA ISOSTATICA

Se ho vincoli non sono abbastanza:

→ EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Quanto vale $R_A - R_B$?

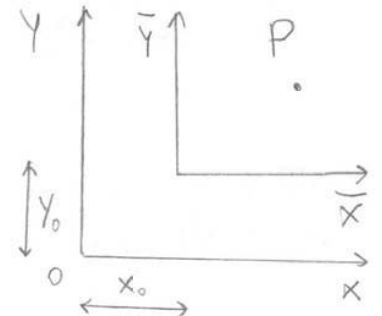


$$F \cdot 2L = X \cdot L \quad \Rightarrow \quad X = 2F$$

GEOMETRIA DELLE AREE

LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL VETTORE POSIZIONE

La posizione di un punto è identificata sia dalle coordinate rispetto al sistema di riferimento origine che quello traslato.



$$P_{xy} (x; y)$$

$$\bar{x} = x - x_0$$

$$P_{\bar{x}\bar{y}} (\bar{x}; \bar{y})$$

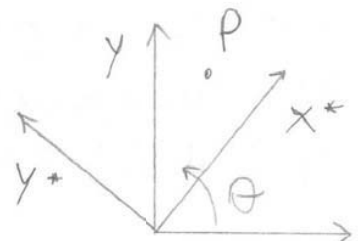
$$\bar{y} = y - y_0$$

(x_0, y_0) coordinate del SR origine traslato rispetto al SR fisso.

1) TRASLAZIONE

$$\boxed{\{\bar{\pi}\} = \{\pi\} - \{\pi_0\}}$$

π indica il vettore di posizione.



2) ROTAZIONE

$$\vec{x}^* = x \cos\theta + y \sin\theta \quad \vec{y}^* = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

θ = angolo di rotazione fra i 2 sistemi di riferimento

$$\boxed{\{\pi^*\} = [N] \{\pi\}}$$

$$N = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

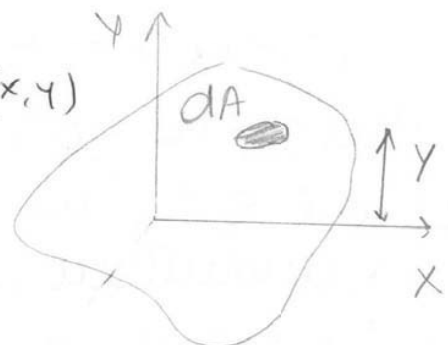
$[N]$ = matrice ortogonale di rotazione

LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL VETTORE DEI MOMENTI STATICI

Si consideri l'infinitesima area dA nel sistema di riferimento (x, y)

$$S_x = \int_A y \, dA \quad S_y = \int_A x \, dA$$

$$[S] = [L^3] = \text{AREA} \times \text{DISTANZA}$$



LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DEI MOMENTI D'INERZIA

Momento d'inerzia = Area \times DISTANZA²

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y dA, \text{ INERZIA MISTA}$$



In forma vettoriale, tramite il prodotto DIALICO:

$$\{r\} \{r\}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \int_A \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} = \int_A \{r\} \{r\}^T dA$$

• S.R. TRASLATO

$$[\bar{I}]_{\bar{x}\bar{y}} = \int_A (\{r\} - \{r_0\}) (\{r\} - \{r_0\})^T dA$$

$$[\bar{I}]_{\bar{x}\bar{y}} = \int_A \{r\} \{r\}^T dA - \int_A \{r\} \{r_0\}^T dA - \int_A \{r_0\} \{r\}^T dA + \int_A \{r_0\} \{r_0\}^T dA$$

$$[\bar{I}] = [I] - \{S\} \{r_0\}^T - \{r_0\} \{S\}^T + \{r_0\} \{r_0\}^T A$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_y & \bar{I}_{xy} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 & y_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_y & S_x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 & y_0 \end{Bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_y & \bar{I}_{xy} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_y x_0 & S_y y_0 \\ S_x x_0 & S_x y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_y x_0 & S_x x_0 \\ S_y y_0 & S_x y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_y &= I_y - 2S_y x_0 + x_0^2 A \\ \bar{I}_x &= I_x - 2S_x y_0 + y_0^2 A \\ \bar{I}_{xy} &= I_{xy} - S_y y_0 - S_x x_0 + x_0 y_0 A \end{aligned}$$

2) Uguagliando a zero il momento centrifugo I_{xy} ,
 posso ottenere l'angolo di rotazione θ_0 .

(Quando ho delle sezioni ho bisogno dei momenti
 d'inerzia, meno momenti d'inerzia ho e meglio è).

I_{xy} = spiega ciò che accade nelle direzioni miste.

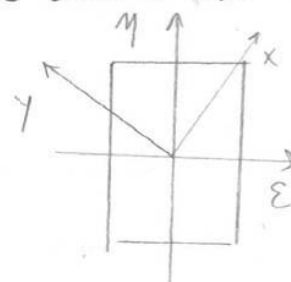
$$I_{xy} = 0 \quad \left[\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \right) \right] \quad -\frac{\pi}{4} < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$$

- CONVENI

1) Siccome posso scegliere un S.R. arbitrario, da questa
 espressione posso ricavare i MOMENTI D'INERZIA PRINCIPALI
 e le due direzioni ortogonali determinate da θ sono
 dette DIREZIONI PRINCIPALI D'INERZIA.

$$I_E = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

$$I_M = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$



(I_E, I_M) momenti d'inerzia principali con $I_{EM} = 0$

2) Se scelgo il S.R. (E, M) nel baricentro, gli assi sono
CENTRALI D'INERZIA, diversi dagli assi principali d'inerzia.

3) CONDIZIONI SEZIONI GIROSCOPICHE

$$\left[I_x = I_y, \quad I_{xy} = 0 \right]$$

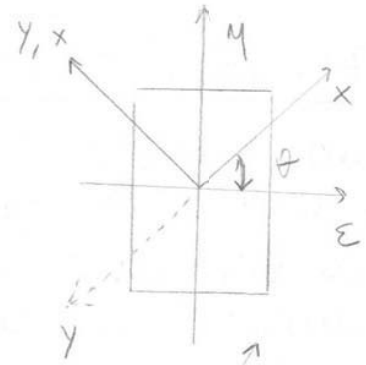
Per qualsiasi angolo di rotazione, tutti gli assi delle
 sezioni risultano sempre centrali principali.

4) Se un'ango $\left[I_x = I_y, \quad I_{xy} \neq 0 \right]$

Posso ruotare il S.R. di $\theta = \pm 45^\circ$ ma comunque
 le due inerzie (I_x, I_y) risultano sempre uguali.

PASSAGGI CICLO DI MOHR

Definendo una sezione ed un S.R. qualunque, i punti della circonferenza rappresentano tutte le inerzie (I_x, I_{xy}) che si hanno al variare dell'angolo θ del S.R. (x, y) .



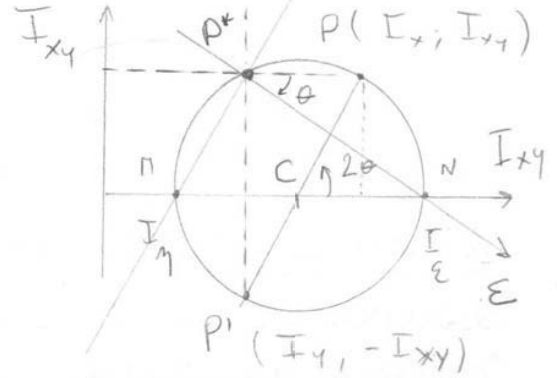
1) Individuo i punti

$P(I_x, I_{xy})$ e $P'(I_y, -I_{xy})$

questi punti nel piano di Mohr sono distanti 180° mentre nella sezione sono ortogonali

M, N sono punti con $I_{xy} = 0$

$M = (I_\eta, 0)$ INERZIA MINIMA $N = (I_\epsilon, 0)$ INERZIA MASSIMA



2) Usando P, P' ottengo il valore del centro della circonferenza, raggio e 2θ .

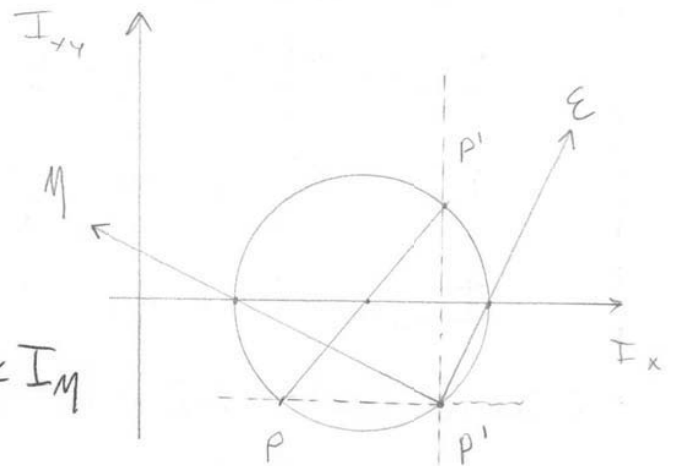
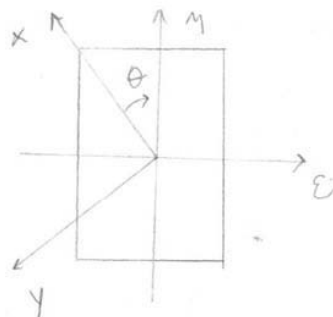
3) Per trovare le direzioni principali faccio la parallela all'asse I_x passante per P e la parallela all'asse I_{xy} passante per P' e trovo il punto P* detto polo.

4) Traccio le rette P*M, P*N che rappresentano gli assi η e ϵ , assi principali d'inerzia

Se $I_x > I_y$ } M ha l'INERZIA MINIMA
 N ha l'INERZIA MASSIMA

Tra l'asse P*P e l'asse ϵ trovo l'angolo θ .

ESEMPIO



Imparato $I_x < I_y \rightarrow I_\epsilon < I_\eta$

2) TRIANGOLO RETTANGOLO

I momenti stativi rispetto (x, y)

$$S_x = \int_A y \, dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x)/b} y \, dy \, dx$$

$$S_x = \frac{bh^2}{6} \quad S_y = \frac{b^2h}{6} \quad A = \frac{bh}{2}$$

le coordinate del barcentro

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{h}{3} \quad x_G = \frac{b}{3}$$

Considero il rettangolo formato dall'asse x che passa per i punti medi di h e la diagonale

$$I_x = \frac{bh^3}{24}, \text{ non è baricentrico perché coincide con 1 lato.}$$

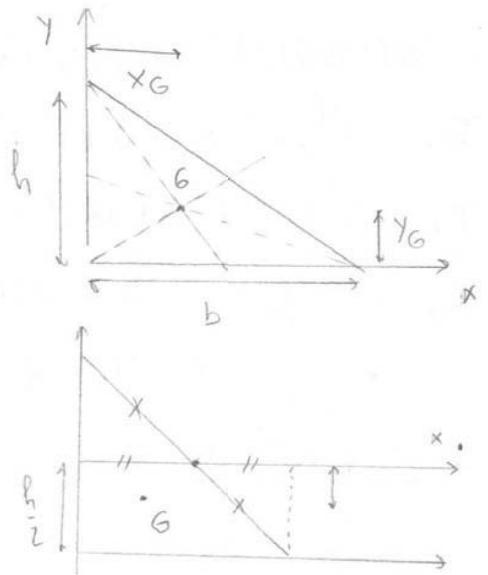
I momenti d'inerzia del barcentro

$$I_{xG} = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh}{2} \frac{h^2}{36} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yG} = I_y - Ad^2 = \frac{b^3h}{12} - \frac{bh}{2} \frac{b^2}{9} = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{xy} = \int_0^b \int_0^{h(b-x)/b} xy \, dx \, dy = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_{xGyG} = I_{xy} - Adx \, dy = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2} \frac{b}{3} \frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}$$



3) SETTORE CIRCOLARE

$$A = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \varphi (R_2^2 - R_1^2)$$

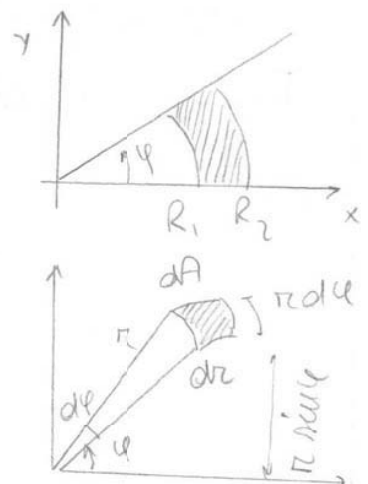
I momenti stativi

$$S_x = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (\pi r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} (1 - \cos \varphi) (R_2^3 - R_1^3)$$

$$S_y = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (\pi r \cos \varphi) r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \sin \varphi (R_2^3 - R_1^3)$$



DEFINIZIONE CINEMATICA DI VINCOLI PIANI

I vincoli piani sono gli elementi che fanno in modo che i carichi vengano trasmessi a terra o in altre parti della struttura.

• 1 GRADI DI LIBERTA'

I gradi di libertà di un sistema meccanico rappresentano il numero di coordinate generalizzate necessarie e sufficienti a descrivere la configurazione.

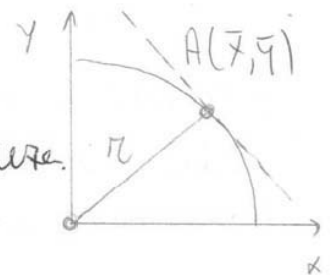
I gradi di libertà residui saranno dati dalla differenza tra i gradi di libertà dei punti materiali svincolati e i gradi di vincolo.

• LINEARIZZAZIONE DEI VINCOLI

Il vincolo di rigidità verrà linearizzato quando consideriamo solo spostamenti infinitesimi intorno alla configurazione iniziale e sarà possibile confondere le traiettorie circolari con quelle tangenti rettilinee. Il sistema con 1 grado di libertà è detto UNA VOLTA LABILE.

Considero un asta vincolata in O (centro) di raggio r che descrive archi di circonferenza. L'equazione della retta tangente:

$$(x\bar{x}) + (y\bar{y}) = r^2$$

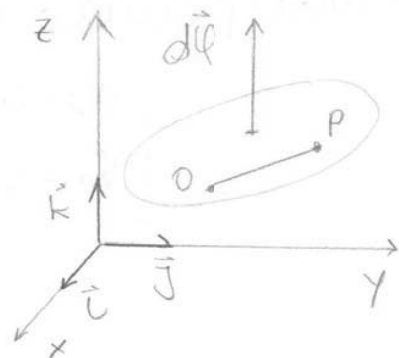


Consideriamo che il punto A si sposti solo lungo le traiettorie, per piccoli spostamenti:

$x=0$ tangente orizzontale $y=0$ tangente verticale

Considero gli spostamenti elementari di un corpo rigido soggetto alla rototraslazione

$$\boxed{\{d\mathbf{s}_P\} = \{d\mathbf{s}_O\} + \underbrace{\{d\varphi\} \wedge \{P-O\}}$$

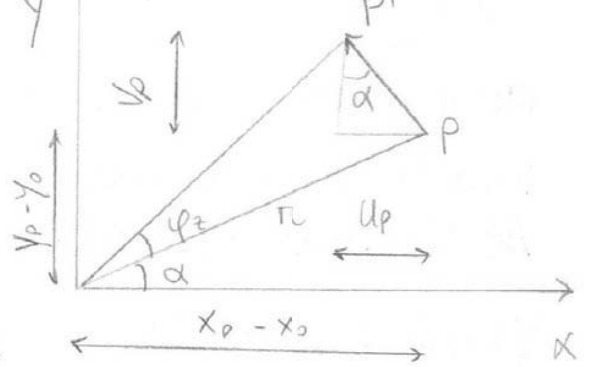


$d\varphi$ = rotazione

PRODOTTO VETTORIALE
(\approx momento)

MAPPE SENZA FIONE GEOMETRICA

Rappresenta gli spostamenti linearizzati, considero le tangenti e non l'arco di circonferenza.



Considero l'angolo di rotazione piccolo: $PP' = \pi \phi_z$

$$\begin{cases} \pi \sin \alpha = y_p - y_0 & (u_p - u_0) = -\pi \phi_z \sin \alpha = -(y_p - y_0) \phi_z \\ \pi \cos \alpha = x_p - x_0 & (y_p - v_0) = \pi \phi_z \cos \alpha = (x_p - x_0) \phi_z \end{cases}$$

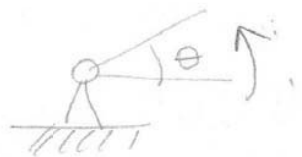
CATENA CINEMATICA

la catena cinematica è un sistema di tre o più VNO-LABILI. Il corpo nel piano ha 3 gradi di libertà (3 possibilità di movimento) quindi per essere stabile bisogna bloccare 2 dei 3 movimenti.

VINCOLI ESTERNI: sono definiti in base ai movimenti che bloccano.

1- STRUTTURA LABILE

la cerniera è una struttura labile perché ha bisogno di una conduttura generalizzata.



gradi di libertà (qdl) = 3
 gradi di vincolo (qdv) = 2

$3 - 2 = 1$ - VOLTA LABILE

2- STRUTTURA ISOSTATICA

Se ho la cerniera e un rullo

$qdl = 3$ $qdv = 2 + 1$ $qdv = qdl$



I vincoli sono considerati perfetti e bilateri; il rullo consente la rotazione verticale oraria e antioraria.

3- STRUTTURA IPERSTATICA

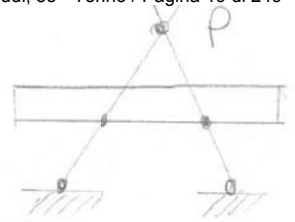
Se ho la cerniera e 2 rulli

$qdv = 2 + 1 + 1 = 4 > qdl = 3$



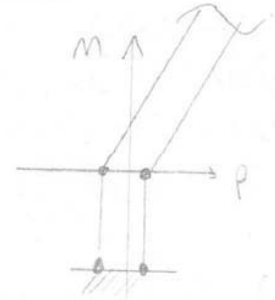
4) CERNIERA IDEALE

La cerniera ideale è formata da 2 bielle oblique dove le normali si incontrano nel punto P che è il centro d'istantanea rotazione.



5) BIPENDOLO

Il bipendolo è un vincolo doppio formato da 2 bielle verticali parallele.



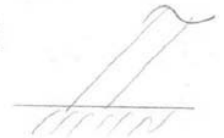
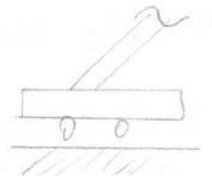
$$\begin{cases} \{d_{sp}\}^T \{M\} = 0 \\ \varphi_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_p & v_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \hat{v}_M \\ \cos \hat{u}_M \end{bmatrix} = 0$$

Il bipendolo permette solo la traslazione orizzontale ed impedisce la rotazione e la traslazione verticale. Il CIR è un punto improprio all'infinito ed il bipendolo è come un INCASTRO SCORRENDO.

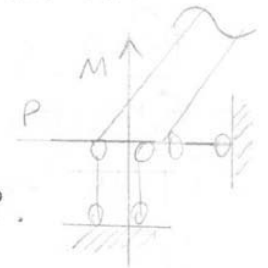
6) INCASTRO

L'incastro è un vincolo triplo che blocca tutti i movimenti e può essere pensato come ad una biella orizzontale e un bipendolo.



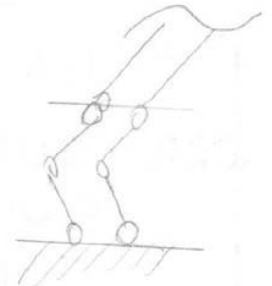
Relazione vettoriale: $\{d_{sp}\} = 0 \quad \varphi_z = 0$

Non esiste il centro d'istantanea rotazione perché non può ruotare né traslare.



7) DOPPIO BIPENDOLO

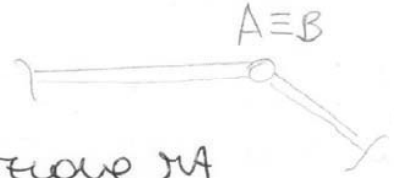
Vincolo che blocca la rotazione MA consente le traslazioni, difficile da trovare nella pratica costruttiva.



$$\left. \begin{cases} \varphi_z = 0 \\ \{d_{sp}\}^T \{M\} \neq 0 \\ \{d_{sp}\}^T \{P\} \neq 0 \end{cases} \right\}$$

la biella interna impedisce gli spostamenti relativi lungo \vec{m} ma li consente lungo \vec{p} e la rotazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \{d_{SA} - d_{SB}\}^T \{M\} = 0 \\ \{d_{SA} - d_{SB}\}^T \{P\} \neq 0 \\ \varphi_A - \varphi_B \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{CRR} \in M$$



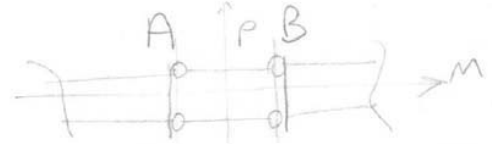
2) CERNIERA INTERNA

la cerniera interna consente la rotazione φ_A blocca ogni spostamento relativo interno.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{d_{SA} - d_{SB}\} = 0 \\ \varphi_A - \varphi_B \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{CRR} = A = B$$

3) BIPENDOLO INTERNO

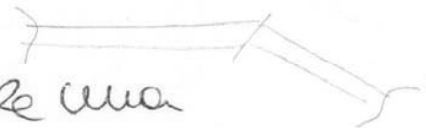
il bipendolo interno impedisce lo spostamento relativo in direzione M e la rotazione mentre consente lo spostamento relativo verticale



$$\left\{ \begin{array}{l} \{d_{SA} - d_{SB}\}^T \{M\} = 0 \\ \{d_{SA} - d_{SB}\}^T \{P\} \neq 0 \\ \varphi_A - \varphi_B = 0 \end{array} \right. \quad \text{CRR} = \infty_M$$

4) INCASTRO INTERNO

Questo vincolo triplo rende solida una porzione del corpo rispetto l'altra. Non esiste il centro di rotazione relativo.



ESEMPI

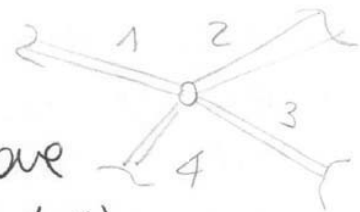
1) CERNIERA CON 4 ASTE

In questo caso ho 3 coppie di connessioni dette 3 connessioni mutue (1-2, 1-3, 1-4)

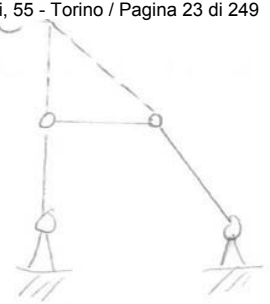
Se ho n aste, il numero delle connessioni mutue è $(n-1)$ ed in questo caso ogni connessione mutua dà 2 g.d.v.

$$n-1 = \text{CONNESSIONI MUTUE}$$

$$2(n-1) = \text{NUMERO DI VINCOLI} \quad : \quad 2(4-1) = 6 \text{ VINCOLI}$$

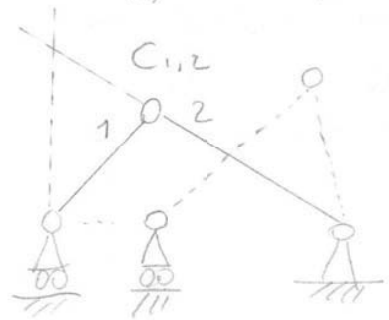


Questo pendolo sembra stabile
 HA può ruotare attorno C:
 la struttura è labile.



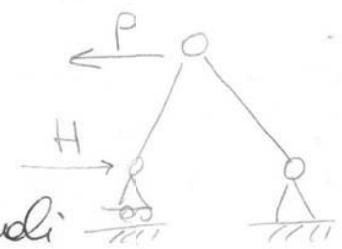
5) MANOVABILITÀ

Il centro d'istantanea rotazione $C \equiv C_1$
 della struttura è sopra il carrello:
 posso studiare i movimenti dei
 vincoli che devono essere piccoli e
 lineari a tv.



$C_1, C_{1,2}, C_2$ sono allineati

Se applico una forza P in $C_{1,2}$ trovo
 H che m'è esercitata nel carrello.

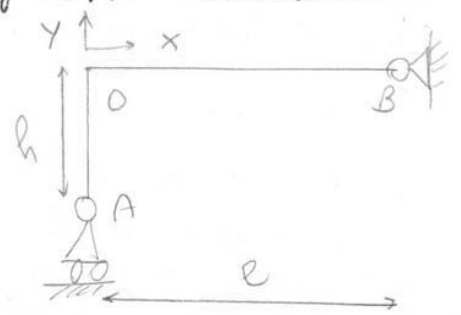


Calcolo H col principio dei lavori virtuali:
 $P \cdot dS = H \cdot dS$.

STUDIO ALGEBRICO DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI DI TRAVI

serve a capire se un sistema è instabile o labile
 quando abbiamo sistemi molto complessi studiando
 la buona disposizione dei vincoli.

Considero una struttura a L con un
 carrello in A ed una cerniera in B,
 e prendiamo l'origine (x, y) in O.



le incognite del problema sono i
 movimenti del punto O detto polo o centro di riduzione
 degli spostamenti di tutta la struttura.

incognite (u_0, v_0, φ_0)

le reazioni vincolari: $\left\{ \begin{array}{l} V_A = 0 \\ u_B = 0 \\ V_B = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{CARRELLO} \\ \text{CERNIERA} \end{array} \right.$

Esplichiamo le reazioni vincolari in funzione
 degli spostamenti del punto O.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = V_0 + (x_A - x_0) \varphi_0 = V_0 \\ u_B = u_0 - (y_B - y_0) \varphi_0 = u_0 \\ V_B = V_0 + (x_B - x_0) \varphi_0 = V_0 + l \varphi_0 \end{array} \right.$$

Scrivo gli spostamenti di A rispetto O

$$\begin{cases} u_A = u_0 - (Y_A - Y_0) \varphi_0 = u_0 + h \varphi_0 \\ v_A = v_0 + (X_A - X_0) \varphi_0 = v_0 \end{cases}$$

$$\boxed{(u_0 + h \varphi_0) \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0}$$

Prima equazione di equilibrio dell'elica che non può avvenire lo spostamento nel piano ortogonale a quello dove scende il carrello.

$$\begin{cases} u_0 + h \varphi_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0 \\ u_0 = 0 \\ v_0 + e \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 \cos \alpha + h \varphi_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0 \\ u_0 = 0 \\ v_0 + e \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = -\sin \alpha e + h \cos \alpha \cdot 1 = -e \sin \alpha + h \cos \alpha$$

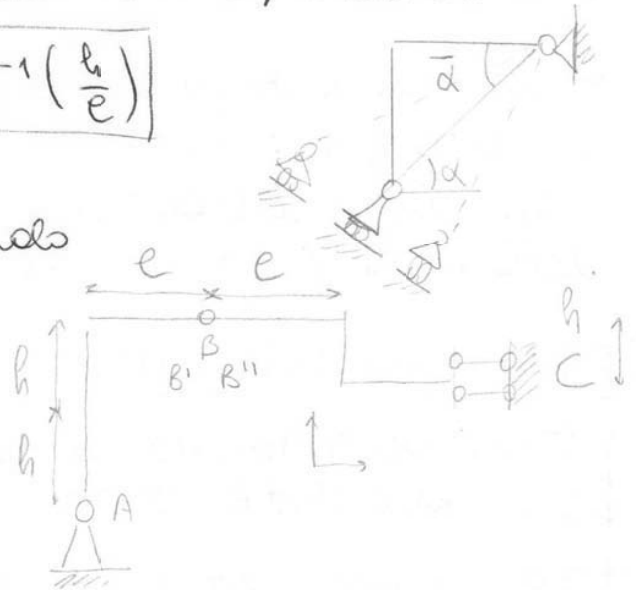
In generale $D \neq 0$ MA annullando α come parametro

$$D = 0 \quad \frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{e} \quad \boxed{\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{h}{e} \right)}$$

2) Considero 2 travi ad L
interconnesse in B e al suolo
con una cerniera o con un
bipendolo (C).

Scelgo come centri di
riduzione il polo A e C.

Incongnite: $u_A, v_A, \varphi_A, u_C, v_C, \varphi_C$



Equazioni vincolari

COMPARIAMO
DIRETTAMENTE
LE INCOGNITE

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ u_{B'} - u_{B''} = 0 \\ v_{B'} - v_{B''} = 0 \\ u_C = 0 \\ \varphi_C = 0 \end{cases}$$

DOBBIAMO
RITROVARE LE
INCOGNITE IN
FUNZIONE DEGLI
SPOSTAMENTI
DI A, C.

2° TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

Teorema applicabile quando la catena è composta da almeno 3 corpi rigidi e vice che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di travi sia una catena cinematica e cioè, per ciascuna tercia di corpi (i, j, k) i 3 centri relativi (C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}) siano allineati

C_{ij}, C_{ik}, C_{jk} ALLINEATI

3° TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

Teorema applicabile ad almeno 2 corpi rigidi:
 $C_i = C_{ij} \neq C_j \rightarrow$ il corpo j è fuso.

OPERAZIONI DA FARE

- 1) Individuare i CIR e CRR (C_i, C_j, C_{ij})
- 2) Verificare i 3 teoremi
- 3) Imporre la coordinata generalizzata che mi descrive lo spostamento del sistema
- 4) Disegnare la configurazione deformata

ESEMPIO 1

Considero il manovellismo di queste 2 travi

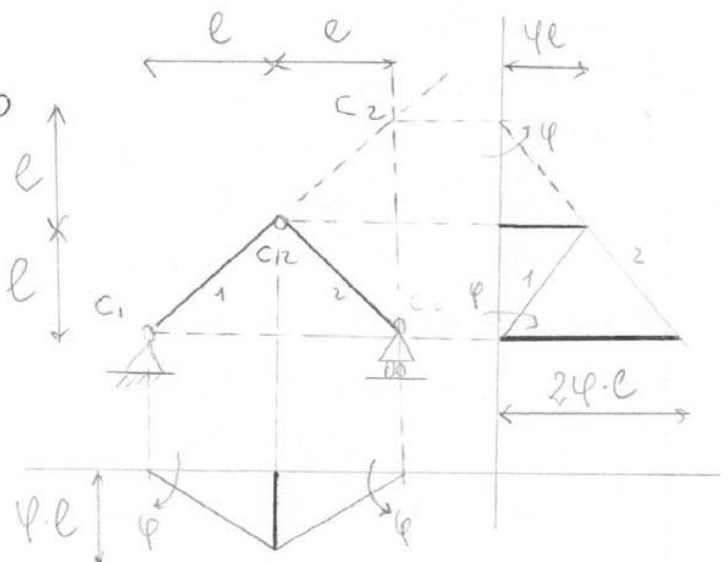
$$\left. \begin{array}{l} gdl = 3 \times 2 = 6 \\ gdl = 2 + 2 + 1 = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\text{-VOLTA} \\ \text{LABILE} \end{array}$$

- A) Per identificare i centri di rotazione applico il primo teorema: per avere C_1, C_{12}, C_2 allineati,

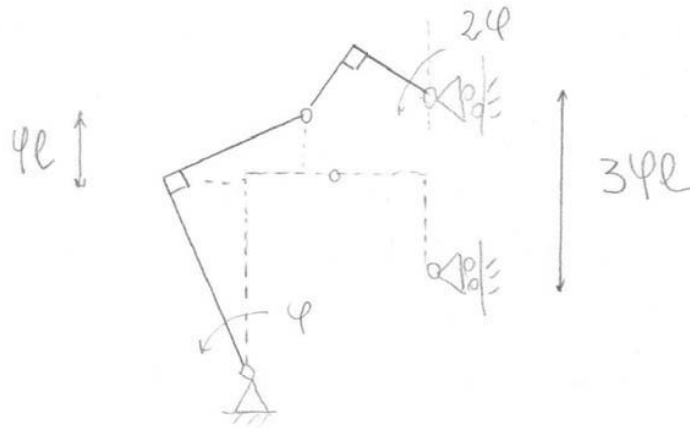
C_2 mi deve trovare nelle verticale del carrello.

- B) Primo Teorema verificato.

- C) Imporre la coordinata generalizzata, imponendo una rotazione di φ .



la deformazione.

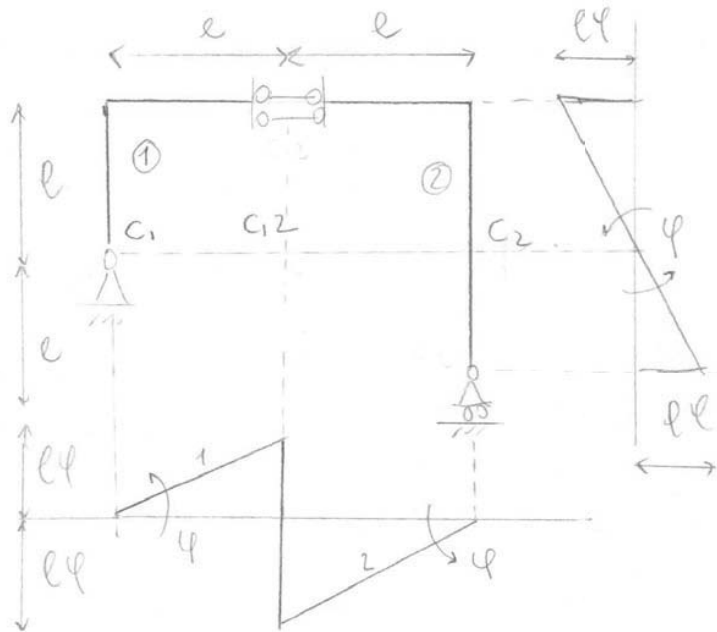


ESEMPIO 3

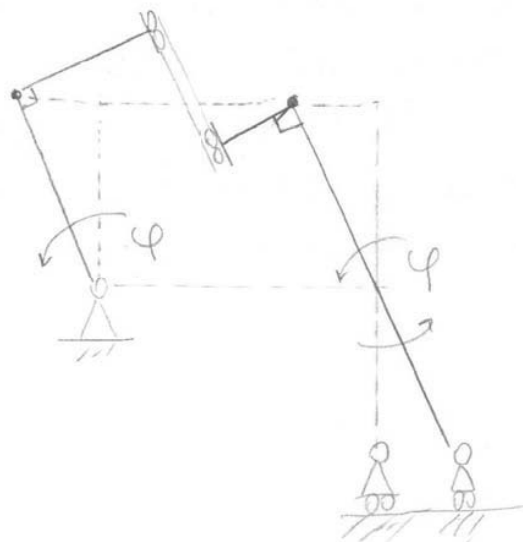
Considero l'arco labile formato da 2 aste bloccate da un doppio bipendolo e ancorate con una cerniera e camello.

$$g.d.l. = 6 > g.d.v. = 5$$

Il CRE del bipendolo è un punto improprio che per comodità lo faccio passare per C_1 .
 Considero una rotazione antioraria.



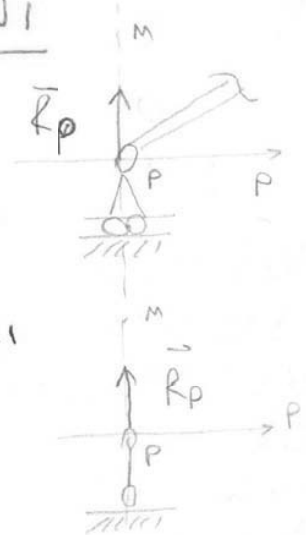
Il bipendolo impone lo stesso spostamento orizzontale MA NON lo spostamento verticale.
 Il corpo 2 ruota intorno a C_2 .



DEFINIZIONE STATICA DEI VINCOLI PIANI

1) CARRELLI & BIELLA

P: punto in cui è situato il carrello o la biella
 R_p : reazione nota in P.



CONDIZIONI CINEMATICHE

REAZIONI ELEMENTARI

$$\begin{cases} \{dsp\}^T \{P\} \neq 0 \\ \{dsp\}^T \{M\} = 0 \\ \varphi_z \neq 0 \end{cases}$$

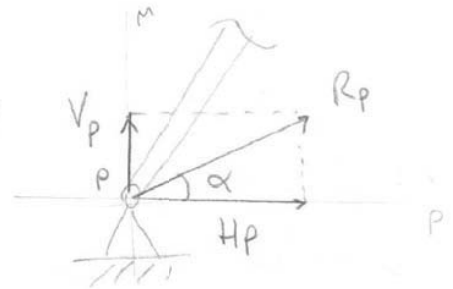
$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{P\} = 0 \\ \{R_p\}^T \{M\} \neq 0 \\ M_p = 0 \end{cases}$$

Noi supponiamo i vincoli LISCI (perfetti), senza attrito. Il lavoro totale delle reazioni vincolari è nullo.

$$\boxed{\{R_p\}^T \{dsp\} + M_p \varphi_z = 0}$$

2) CERNIERA

$$\begin{cases} \{dsp\} = 0 \\ \varphi_z \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \{R_p\} \neq 0 \\ M_p = 0 \end{cases}$$

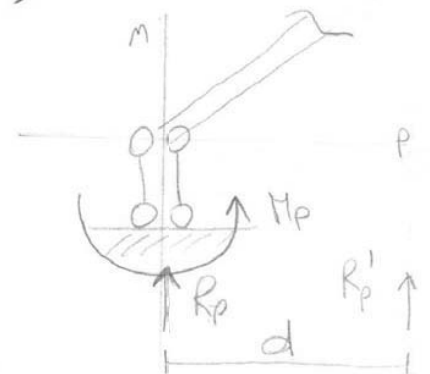


$\{R_p\}$ reazione formata da V_p e H_p

Per identificare la cerniera servono 2 reazioni ortogonali (V_p, H_p) oppure ($\{R_p\}, \alpha$).

3) BIPENDELO

$$\begin{cases} \{dsp\}^T \{P\} \neq 0 \\ \{dsp\}^T \{M\} = 0 \\ \varphi_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \{R_p\}^T \{P\} = 0 \\ \{R_p\}^T \{M\} \neq 0 \\ M_p \neq 0 \end{cases}$$

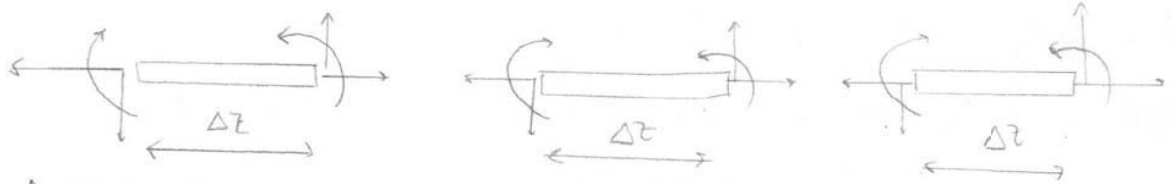


Inoltre posso considerare la coppia

(M_p, R_p) equivalenti ad un sistema dove la reazione R_p non è applicata sull'asse M MA ad una distanza "d" da tale asse.

Spostando R_p' dalla distanza d all'asse del bipendolo genera un momento.

Una trave rigida la posso pensare come composta da tanti conci di lunghezza Δz .



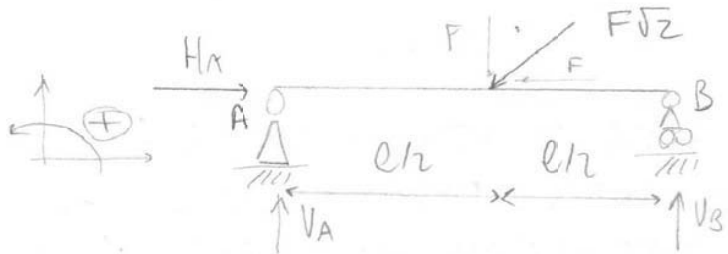
Gli sforzi si trasmettono tra gli elementi, tutti gli elementi sono equilibrati solo se gli sforzi sono equilibrati.

CHARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

- N = Sforzo Normale
- T = Sforzo di taglio
- M = momento flettente

ESEMPIO

Calcolo le reazioni vincolari in A, B



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum H_i = 0 \\ \sum V_i = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} H_A - F \cos 45^\circ = 0 \\ V_A + V_B - F \sin 45^\circ = 0 \\ V_B \cdot l - F \sin 45^\circ \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{array} \rightarrow H_A = F \cos 45^\circ, V_A = F \sin 45^\circ, V_B = \frac{F \sin 45^\circ}{2}$$

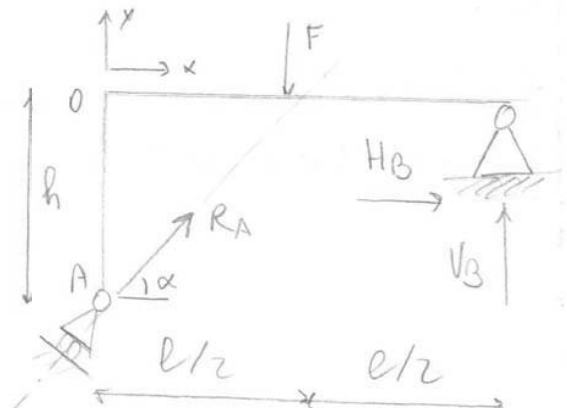
Se il segno delle reazioni vincolari è positivo, allora sono state disegnate correttamente

$$\sum M(B) = \sum M(A) + (-F \sin 45^\circ \cdot \frac{l}{2} + F \cos 45^\circ \cdot \frac{l}{2}) = 0$$

STUDIO ALGEBRICO DELLA STATICA DEI SISTEMI DI TRAVI

Mentre nel campo cinematico le CONDIZIONI CINEMATICHE (sostanziate e ipostanziate) dipendono solo dai vincoli, nel campo statico le CONDIZIONI STATICHE dipendono anche dai carichi esterni.

Considero la trave ad L con una forza applicata ad $\frac{l}{2}$ e O centro di riduzione (Polo).



TEOREMA ROUCHE - CAPELLI

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di m equazioni lineari con m incognite ammetta soluzioni è che la matrice dei coefficienti $[A]$ e la matrice formata dai coefficienti e termini noti (matrice ORLATA) abbiano la stessa caratteristica.

LA CARATTERISTICA

La caratteristica di una matrice è l'ordine massimo dei minori con determinante diverso da zero estraibili dalla matrice stessa.

Il minore è il determinante quadrato $p \times p$ estraibile da una matrice quadrata.

Nel nostro esempio

$$\begin{bmatrix} m \sin \alpha & 1 \\ h \cos \alpha & e \end{bmatrix} = (1)(-1)^{1+2} (e m \sin \alpha - h \cos \alpha) = h \cos \alpha - e m \sin \alpha = 0$$

$$D = 0 \quad \text{se} \quad \frac{m \sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{e} \quad \boxed{\bar{\alpha} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{h}{e} \right)}$$

Quando ho $\bar{\alpha}$, la congiungente AB risulta ortogonale al piano di movimento del carrello, $D = 0$ e la matrice dei coefficienti presenta caratteristica 2 mentre l'orbita ammette caratteristica 3: ho MAL DISPOSIZIONE DEI VINCOLI.

Se in $[A]$ sostituisco $\bar{\alpha}$

$$\begin{bmatrix} \cos \bar{\alpha} & 1 & 0 \\ m \sin \bar{\alpha} & 0 & 1 \\ h \cos \bar{\alpha} & 0 & e \end{bmatrix} \quad \text{la caratteristica di questa matrice è pari a 2.}$$

Sostituisco $\bar{\alpha}$ nella matrice orbita

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cos \bar{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ m \sin \bar{\alpha} & 0 & 1 & F \\ \cos \bar{\alpha} h & 0 & e & F \frac{e}{2} \end{array} \right] \quad \text{Questa matrice ha caratteristica 3 perché anche se tolgo la 2ª colonna la matrice 3x3 rimane.}$$

→ SISTEMA INCOMPATIBILE.

Il determinante

$$D = (-2h) \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & 0 \\ -1 & \sin\alpha & 0 \\ e & 0 & 1 \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 \\ h & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2h \cos\alpha - e(-\sin\alpha) = -2h \cos\alpha + e \sin\alpha = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2h}{e}$$

$$\boxed{\bar{\alpha} = \arctg \frac{2h}{e}}$$



Facendo ruotare F con $\beta = \pi - \bar{\alpha}$, il bipendolo ha la stessa direzione della retta AC.

la matrice rotata:

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -2h & e & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cos\bar{\alpha} & 0 & F \cos\bar{\alpha} & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sin\bar{\alpha} & 0 & F \sin\bar{\alpha} & & \\ 0 & 0 & h & e & 0 & 1 & -h F \cos\bar{\alpha} - F \sin\bar{\alpha} \frac{e}{2} & & \end{array} \right]$$

Il vettore dei termini noti è combinazione lineare della 5° e 6° colonna della matrice $[A]$: la caratteristica è 5. Nonostante la struttura sia labile, per questa particolare situazione di carico, la struttura è in equilibrio.

Ricordando che $\cos(\pi - \bar{\alpha}) = -\cos\bar{\alpha}$
 $\sin(\pi - \bar{\alpha}) = \sin\bar{\alpha}$

emittano strutture labili in equilibrio per particolari condizioni di carico.

DUALITA' STATICA - CINEMATICA

1) LE EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\begin{matrix} [C] & \{S_0\} & = & \{S_x\} & = & \{0\} \\ v \times g & g \times 1 & & v \times 1 & & v \times 1 \end{matrix}$$

v = numero di vincoli
 g = gradi di libertà

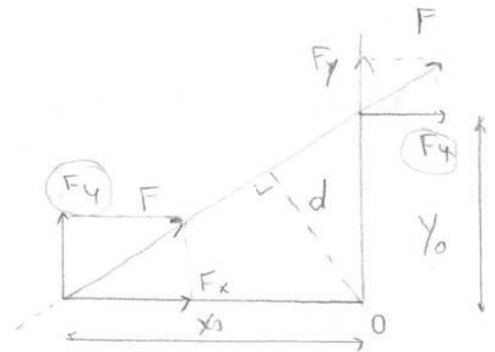
DETERMINAZIONE REAZIONI VINCOLARI

COMPOSIZIONE DI FORZE

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{tg } \alpha = \frac{F_y}{F_x} \quad d = \frac{M_0}{F}$$

d = distanza perpendicolare alla retta d'azione

$$M_0 = F \cdot d \quad x_0 = \frac{M_0}{F_y} \quad y_0 = \frac{M_0}{F_x}$$



M_0 cambia rispetto a dove considero la forza applicata.

Come calcolare la risultante di n -forze ed il suo punto d'applicazione:

A) Si compongono le forze mettendo una dietro l'altro.

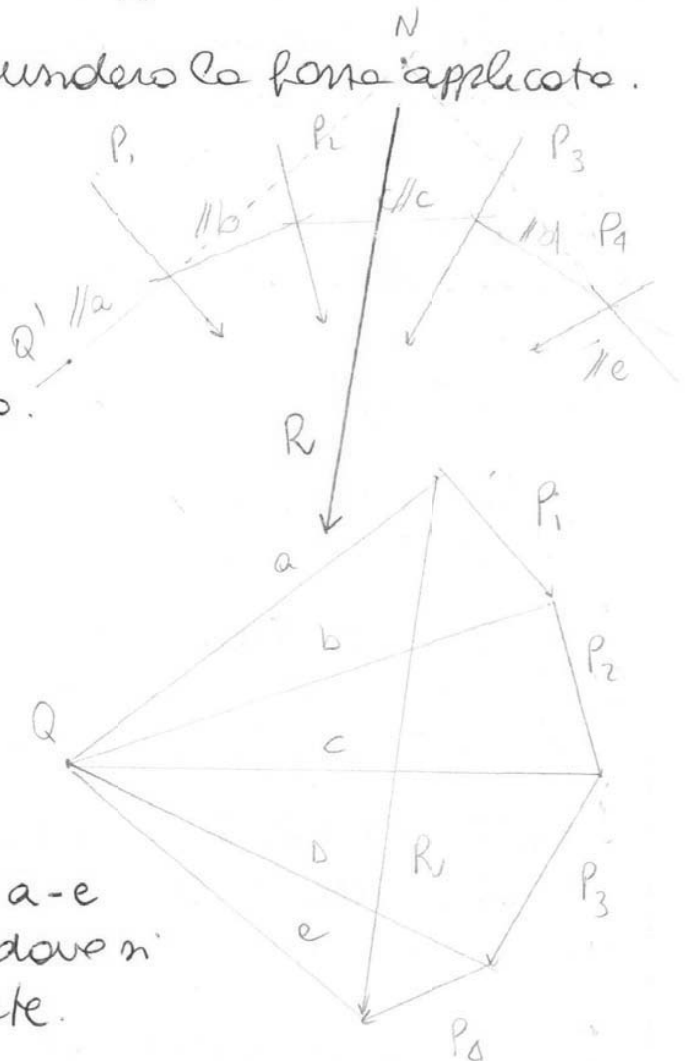
$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4$$

R = somma vettoriale

B) costruisco le proiettanti rispetto a Q

C) Scelgo un punto Q' e faccio la parallela ad a fino a P_1 , poi $\parallel b, c, d, e$

D) Prolungo le parallele ad $a-e$ fino al punto N , punto dove n deve applicare la risultante.



la risultante è quella forza che genera gli stessi effetti prodotti da tutte le forze da cui è composta, valida solo per corpi RIGIDI, NON ELASTICI.

METODI DI CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

NEVE STRUTTURE ISOSTATICHE

1) METODO ESPPLICITO - DIRETTO

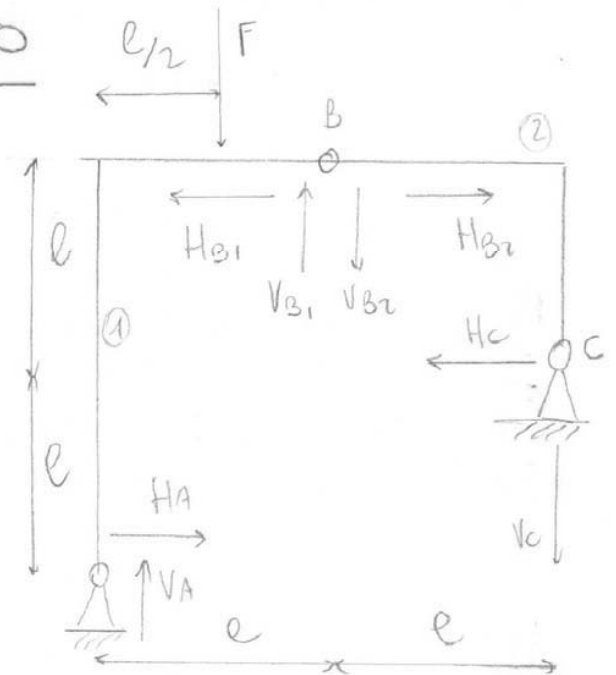
Con m -corpi ho $3m$ gradi di libertà quindi ho $3m$ equazioni d'equilibrio.

Per la cerniera interna

$$\left. \begin{array}{l} \{ds_A\} - \{ds_B\} = 0 \\ \varphi \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{R_A\} - \{R_B\} \neq 0 \\ M = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_A - H_{B1} = 0 \\ V_A - F + V_{B1} = 0 \\ H_B \cdot 2l + V_B \cdot l - F \frac{l}{2} = 0 \end{array} \right\} \text{CORPO 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_B - H_C = 0 \\ -V_B - V_C = 0 \\ -H_B \cdot l + V_B \cdot l = 0 \end{array} \right\} \text{CORPO 2}$$



Ho 6 equazioni in 6 incognite
→ metodo molto laborioso.

2) METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE

In questo metodo considero:

- 3 equazioni di equilibrio globale

$\sum F_x = 0$ equazione dell'equilibrio orizzontale

$\sum F_y = 0$ equazione dell'equilibrio verticale

$\sum M = 0$ equazione di equilibrio del momento rispetto ad un punto arbitrario.

- 5 equazioni di equilibrio parziale, scelte in modo tale da non far intervenire le reazioni interne ($\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum M$, $\sum N$, $\sum T$)

S dipende dal grado di sovraccarico interno.

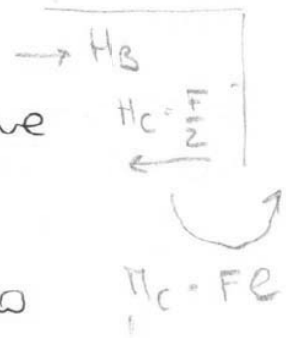
$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \leftarrow) \\ \downarrow) \\ A) \\ S \times B) \\ D \times B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} H_A + H_C - F = 0 \\ -V_A - V_C = 0 \\ -F \cdot e + V_C \cdot 2e + M_C = 0 \\ V_A = 0 \\ -V_A \cdot e - H_A \cdot 2e + F \cdot e = 0 \end{array} \end{aligned}$$

Sistema semplice da risolvere perché $V_A, V_C = 0$

Calcolo la reazione in B dallo scarto in A

$$M_B) \quad H_C - \frac{F}{2} \cdot 2e = F \cdot e - Fe = 0.$$

Le reazioni che ho trovato in confermano che in B ho momento nullo.



3) PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Metodo semi grafico basato sul principio dei lavori virtuali e sulle catene cinematiche.

Il principio dei lavori virtuali dice che il lavoro di tutte le forze esterne, attive o reattive, è uguale al lavoro delle forze interne (teniamo per deformazioni).

Nei corpi rigidi non abbiamo deformazioni $L_{ext} = 0$

$$\boxed{L_{ext} = L_{int}}$$

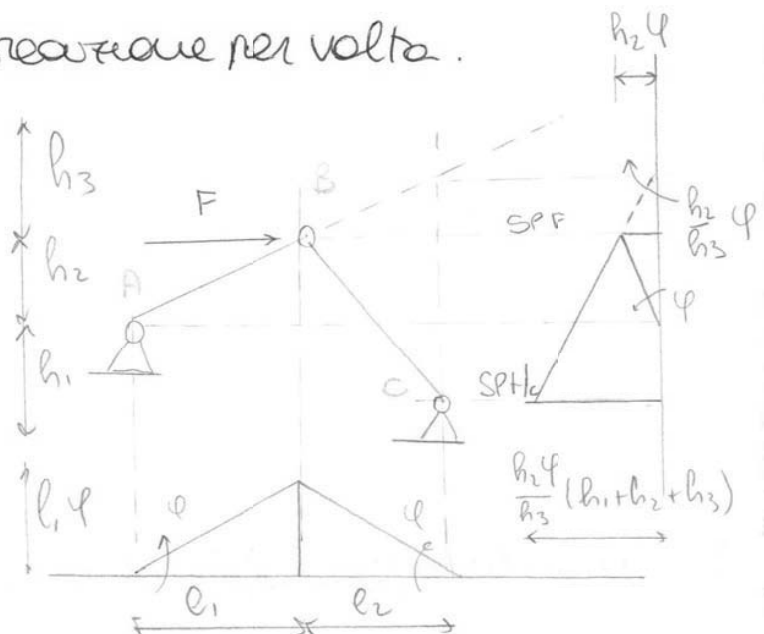
SVANTAGGIO

Posso calcolare 1 SOLA reazione per volta.

ESEMPIO 1

Considero il cavalletto soggetto alla forza orizzontale F.

Per calcolare H_C svincolo la cerniera in C in un carrello



Il carico distribuito q lo considero come 3
fonti risultanti: ($q\ell$) applicate a $\ell/2$, perché
è meglio considerare il carico su ogni struttura rigida.

C₁∞ perché il corpo C₁ (doppio bipendolo) trasla e
la retta C₁∞ è parallela alla retta $\overline{C_2C_3}$.

Il principio dei lavori virtuali del bipendolo:

$$L = H_D(-\varphi\ell) + q\ell \frac{\ell}{2} \varphi - q\ell \frac{\ell}{2} \varphi - q\ell \frac{\ell}{2} \varphi = 0$$

$$H_D(-\varphi\ell) = q\ell \frac{\ell}{2} \varphi \rightarrow \boxed{H_D = -\frac{q\ell^2}{2}}$$



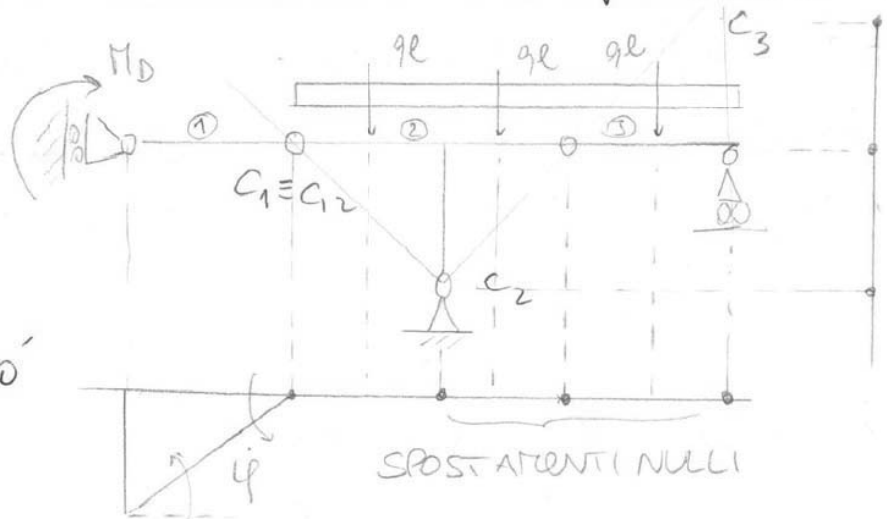
Considero un altro spostamento: da bipendolo a
cannello.

In questo caso
pono ricovero
il momento M_D .

Si come $C_1 \equiv C_2$,
la trave non può
muoversi.

Applico il PLV.

$$L = M_D(-\varphi) = 0 \rightarrow \boxed{M_D = 0}$$



4) METODO GRAFICO

Il metodo grafico si basa sulle 2 equazioni
cardinali della statica:

1) EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

Tutte le forze, quando vengono composte, devono
formare un poligono chiuso

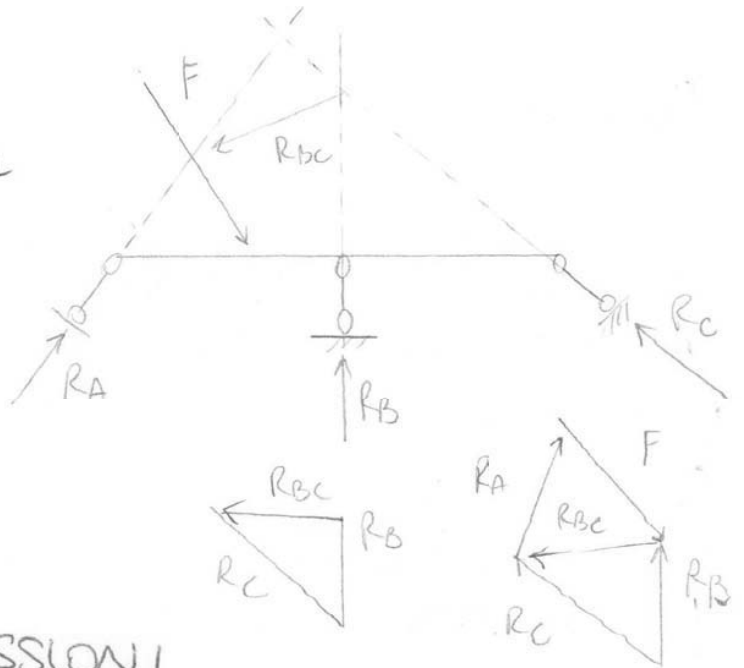
2) EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

Tutte le forze devono passare dallo stesso punto K.

ESEMPIO 2

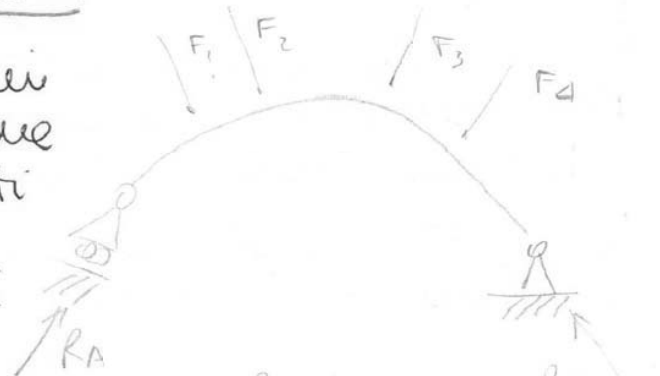
Considero il sistema formato da 3 Bielle.

Verifico l'equilibrio alle rotazioni MA NON alla traslazione perché non verifico un poligono chiuso.

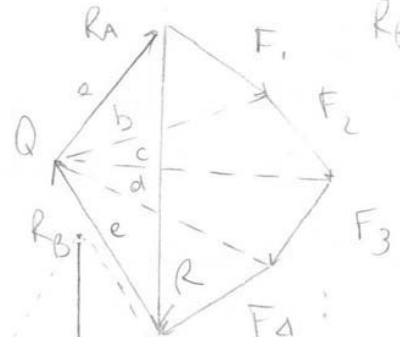


CURVA DELLE PRESSIONI

Si dice curva delle pressioni l'unione delle rette d'azione delle successive risultanti di azione su una struttura con reazioni vincolari interne.

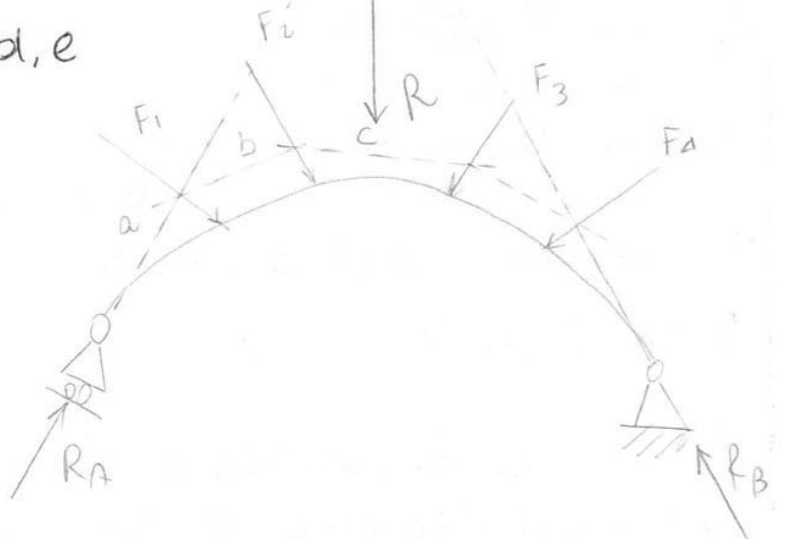


Compongo le forze per trovare la risultante R. Considero il punto di partenza di RA (NOTO) come punto di origine delle proiettanti.



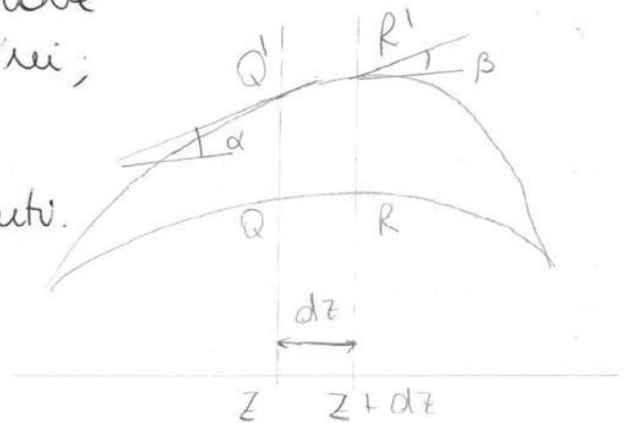
Le proiettanti a, b, c, d, e formano la curva delle pressioni

- b = forza risultante tra RA e F1
- c = forza risultante tra RA, F1 e F2
-



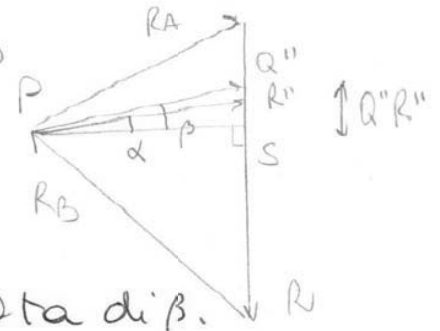
$$R \cdot d = \int_0^l q(z) z dz \quad d = \frac{\int_0^l q(z) z dz}{\int_0^l q(z) dz}$$

Considero 2 punti nella trave (Q, R) infinitamente vicini; le relative risultanti in questi punti saranno orientate come le loro tangenti.



In Q' saranno tutte le forze precedenti a Q e questa risultante passa per la tangente in Q', inclinata di α rispetto l'orizzontale

POLIGONO DELLE FORZE



In R' saranno tutte le forze precedenti a R e questa risultante passa per la tangente in R', inclinata di β .

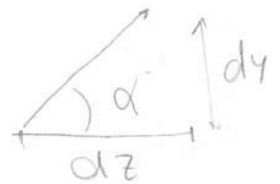
α e β sono 2 angoli molto piccoli.

Calcolo $Q''R''$, che rappresenta l'incremento di carico distribuito, mediante il diagramma delle forze.

$$\alpha - \beta = d\theta \quad Q''R'' = q(z) dz$$

$$Q''R'' = Q''S - R''S = H(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = -H(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$$

$\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha$ con α = angolo che descrive la variazione di y nel diagramma delle momenti.



$$Q''R'' = -H \left[\left(\frac{dy}{dz} \right)_R - \left(\frac{dy}{dz} \right)_Q \right] = -H (y'_R - y'_Q)$$

H = è il modulo della componente orizzontale delle reazioni R_A e R_B

y' = derivata prima rispetto z , è una quantità invariante.

PER LE TRAVI RETTILINEE

$$\boxed{\frac{d^2M}{dz^2} = -q(z)}$$

$$\begin{aligned} \swarrow \frac{dT}{dz} &= -q(z) \\ \searrow \frac{dM}{dz} &= T \end{aligned}$$

...CORTI

1) Se $y=y_0$, $Y(z)=y_0(z) \rightarrow M(z)=0$

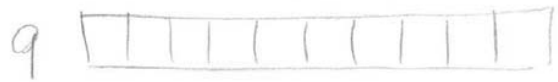
Il momento flettente si annulla dove il diagramma delle membrai interseca la trave.

2) Se $Y(z)=y_0(z)$ in ogni punto della trave, tutta la trave ha momento flettente nullo $M(z)=0$.
In ogni punto la risultante delle forze è tangente alla trave (sforzo di compressione) \rightarrow arco.

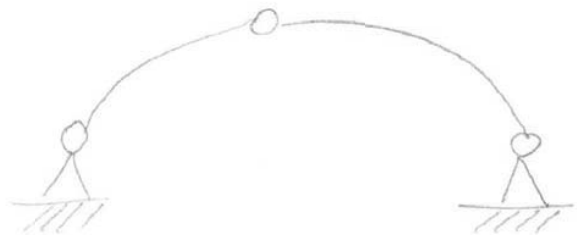
3) Se avessi tutta trazione, avrei una FUNE che non ha momento flettente e taglio

ESEMPIO : ARCO A 3 CERNIERE

Considero un arco parabolico soggetto a carico costante.



- la curva delle membrai è piana per le 3 cerniere
- Abbiamo 3 punti con momento nullo.



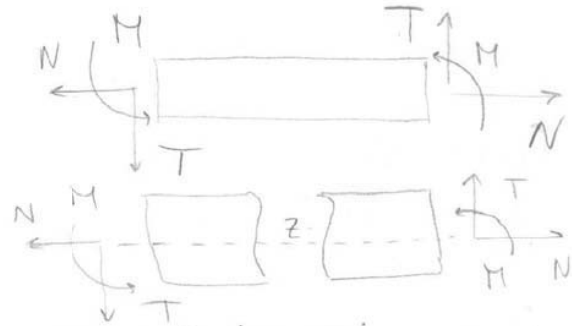
La curva delle membrai piana per 3 punti e coincide con la trave parabolica.

Dipende da :

- CONDIZIONI DI VINCOLO
- TIPO DI CARICO.

LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

Le caratteristiche delle sollecitazioni sono le reazioni elementari che si scambiano tutti i concetti della trave.

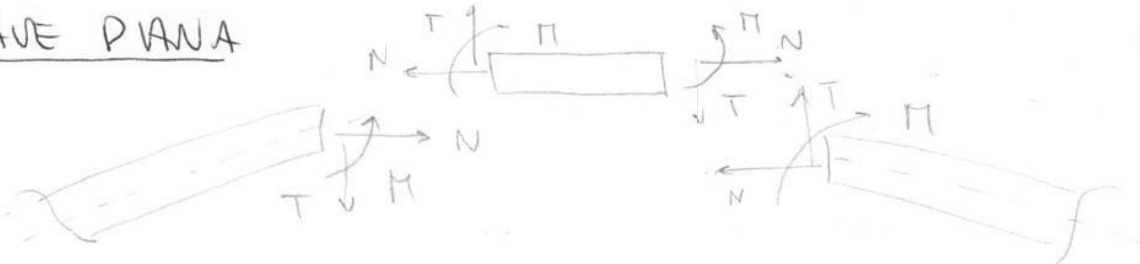


N = SFORZO NORMALE, positivo se è di trazione;

T = SFORZO DI TAGLIO, positivo quando tende a far ruotare in senso orario il concavo di trave M cui agisce (positivo verso l'alto);

M = MOMENTO FLETTENTE: positivo quando le fibre inferiori della trave sono in TRAZIONE e mette in COMPRESSIONE le fibre superiori.

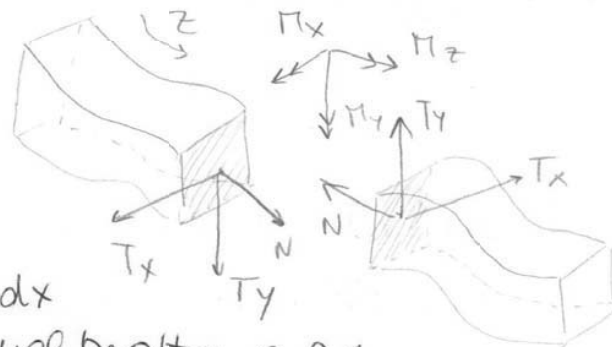
TRAVE PIANA



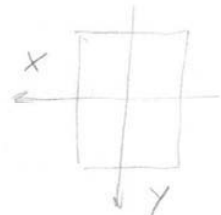
TRAVE NELLO SPAZIO

Dopo aver fissato il verso di percorrenza dell'asse z del punto:

- una terza destrorsa a dx
- una terza sinistrorsa nel tratto a sx



Quando disegnamo le reazioni, per convenzione, gli assi (x, y) vanno nel verso contrario: l'asse y va verso il basso perché le deformazioni positive sono verso il basso.



Il momento ha 3 componenti ed è rappresentato dal doppio vettore.



66

Ricordando che $\frac{d\theta}{2} = nu \frac{d\theta}{2} = tg \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$

$$\begin{cases} Pds + dN + T \frac{d\theta}{2} + T \frac{d\theta}{2} + dT \frac{d\theta}{2} = 0 \\ qds - N \frac{d\theta}{2} - N \frac{d\theta}{2} - dN \frac{d\theta}{2} - T + T + dT = 0 \\ Mds + dM - T\pi \frac{d\theta}{2} - T\pi \frac{d\theta}{2} - dT\pi \frac{d\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

Si vede che $dT \frac{d\theta}{2}$ e $dN \frac{d\theta}{2}$ sono infinitesimi di ordine superiore, vengono trascurati

$$\begin{cases} Pds + dN + Td\theta = 0 \\ qds - Nd\theta + dT = 0 \\ Mds + dM - T\pi d\theta = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} P + \frac{dN}{ds} + T \frac{d\theta}{ds} = 0 \\ q - N \frac{d\theta}{ds} + \frac{dT}{ds} = 0 \\ M + \frac{dM}{ds} - T\pi \frac{d\theta}{ds} = 0 \end{array} \right\}$$

con $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$

$$\begin{cases} P + \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} = 0 \\ q - \frac{N}{r} + \frac{dT}{ds} = 0 \\ M + \frac{dM}{ds} - T = 0 \end{cases}$$

le 3 equazioni indefinite dell'equilibrio della trave

EQUAZIONI INDEFINITE EQUILIBRIO DELLA TRAVE

$$\begin{array}{|l} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + P = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + M = 0 \end{array}$$

P = peso proprio ripartito per unità di lunghezza

q = carico uniformemente ripartito sulla trave

Se $M \rightarrow 0$ $\frac{dM}{ds} = T$ la derivata del momento è il taglio.

h1

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} + \frac{1}{R} \frac{d^3 M}{d\theta^3} + R \frac{d^2 q}{d\theta^2} + M + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta} + PR = 0$$

L'equazione differenziale del III ordine non omogenea

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} + \frac{dM}{d\theta} = -R^2 \left(P + \frac{d^2 q}{d\theta^2} \right) - R \left(M + \frac{d^2 M}{d\theta^2} \right)$$

L'integrale generale:

$$M(\theta) = \pi_0(\theta) + C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta + C_3$$

$\pi_0(\theta)$ = integrale particolare

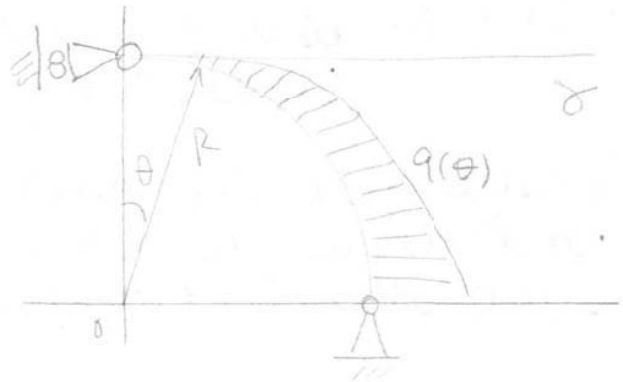
Per risolvere questo integrale servono 3 condizioni al contorno

• ARCO CIRCOLARE

L'arco circolare (DIGA) è soggetta al carico idrostatico:

$$P(\theta) = m(\theta) = 0$$

$$q(\theta) = -\gamma R (1 - \cos \theta)$$



$q(\theta)$ è l'unica caratteristica presente

$$\text{Se } \theta = 90^\circ \rightarrow q = -\gamma R, \text{ se } \theta = 0 \rightarrow q = 0$$

Le condizioni al contorno: $M(A) = 0, M(B) = 0, M(C) = 0$.

Risultazione (Appendice A Computer)

$$M(\theta) = \frac{\gamma R^3}{4} (\pi - \pi \cos \theta - 2\theta \sin \theta)$$

$$T(\theta) = -\frac{\gamma R^2}{4} [(2 - \pi) \sin \theta + 2\theta \cos \theta]$$

$$N(\theta) = \frac{\gamma R^2}{4} [-4 + \pi \cos \theta + 2\theta \sin \theta]$$

Quando i carichi distribuiti sono costanti, sia lo sforzo normale che il taglio risultano essere funzioni lineari di z mentre il momento flettente risulta essere una funzione parabolica.

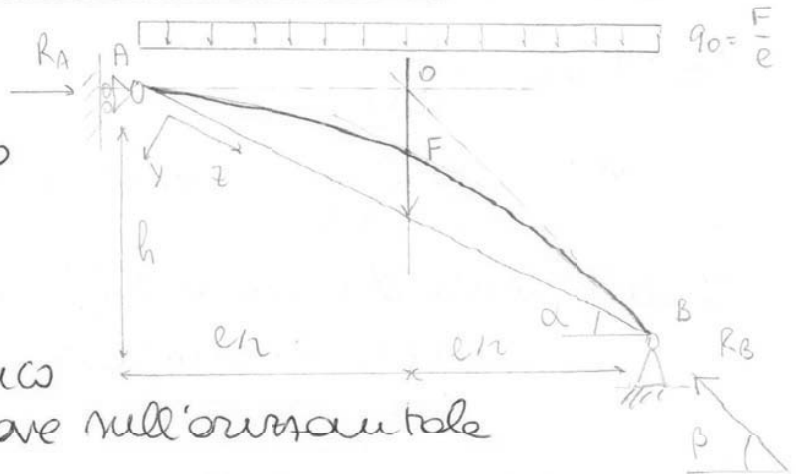
DETERMINAZIONE ANALITICA DI M, T, N

Considero una trave inclinata di α soggetta ad un carico verticale uniforme

$$q_0 = \frac{F}{e}$$

F = risultante del carico

e = proiezione della trave sull'orizzontale



Le equazioni indefinite di equilibrio delle trave.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dz} &= -P(z) \\ \frac{dT}{dz} &= -q(z) \\ \frac{dM}{dz} &= T \end{aligned} \right\}$$

Determino R_A, R_B :

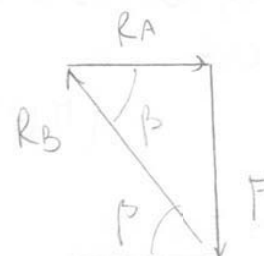
- R_A si trova nell'ore del carrello e si calcola in O con F
- R_B si ottiene convergendo O con B .

Per via grafica ottengo la parabola che mi rappresenta la curva delle membrane ed indica gli sforzi di compressione.

La curva delle membrane, a meno di una costante, rappresenta il diagramma del momento

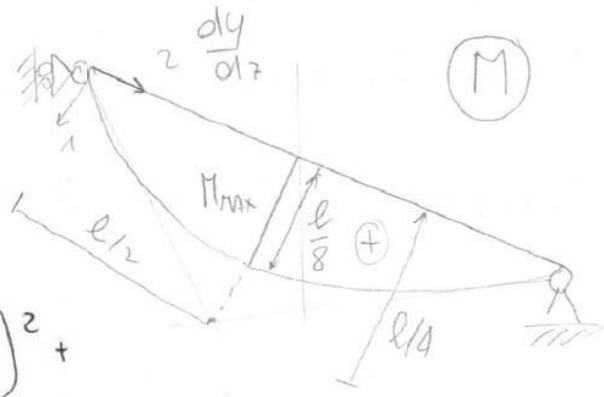
Quando lo sforzo è di compressione la curva sta dalla parte opposta del diagramma, se è di trazione la curva sta dalla stessa parte

Il triangolo d'equilibrio



• IL MOMENTO MASSIMO

Il momento massimo è in maniera e non dipende dall'inclinazione α .

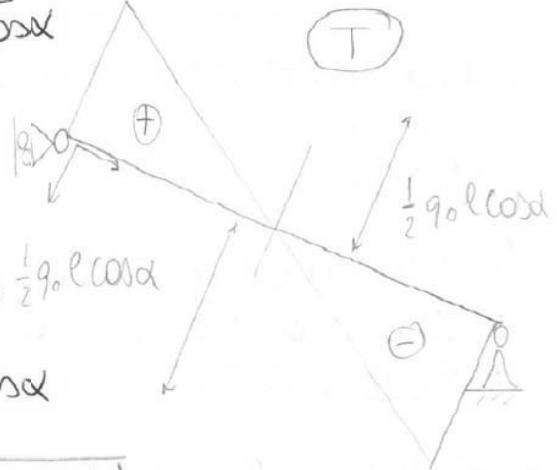


$$M_{MAX} \left(\frac{l}{2 \cos \alpha} \right) = -q_0 \cos^2 \alpha \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2 \cos \alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha \cdot \frac{l}{2 \cos \alpha}$$

$$\boxed{M_{MAX} = \frac{1}{8} q_0 l^2}$$

2) EQUAZIONE DEL TAGLIO

Il taglio è la derivata del momento $\frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha$



$$\frac{dM}{dz} = T(z) = -q_0 \cos^2 \alpha z + \frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha$$

$$\boxed{T(z) = \frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha \left(1 - \frac{2z}{l} \cos \alpha \right)}$$

- Se $T = 0$, $z = \frac{1}{2} \frac{l}{\cos \alpha}$, in maniera della trave
- $T(0) = \frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha$, nel cernello A
- $T\left(\frac{l}{\cos \alpha}\right) = -\frac{1}{2} q_0 l \cos \alpha$, nella cerniera B.

Il diagramma della funzione taglio è lineare e antisimmetrico rispetto alla maniera della trave, dove si annulla.

3) EQUAZIONE DELLO SFORZO NORMALE

$$\frac{dN}{dz} = -q_0 \sin \alpha \cos \alpha$$

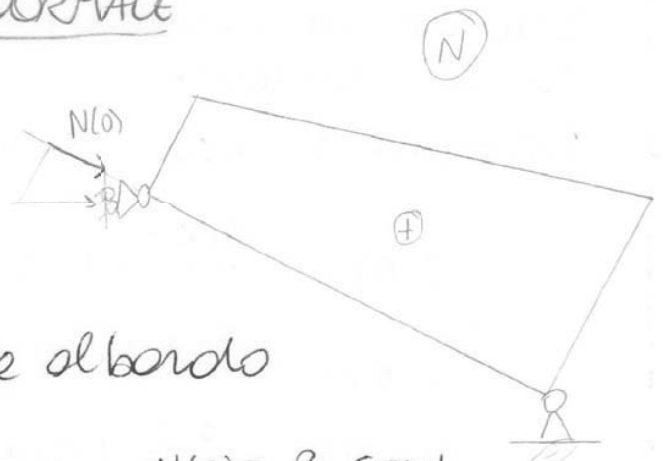
$$N(z) = -q_0 \sin \alpha \cos \alpha z + C_1$$

Ho bisogno di una condizione al bordo

$$N(0) = C_1$$

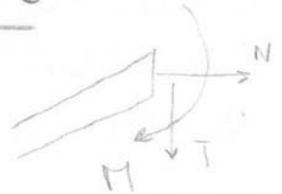
$$\frac{N(0)}{R_A} = \cos \alpha$$

$$N(0) = R_A \cos \alpha$$



DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI INTERNE

Determino l'andamento delle caratteristiche sulla struttura.



1) METODO DIRETTO

Studio l'equilibrio di ogni elemento della trave ricavando le loro equazioni:

$$N(z) = f(z) \quad T(z) = f(z) \quad M(z) = f(z)$$

2) METODO GRAFICO

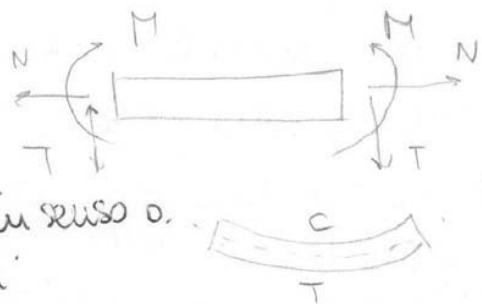
Scandisco la trave in singoli elementi o tratti e per via grafica ricavo i diagrammi

CONVENZIONE

$N > 0$ se è di trazione

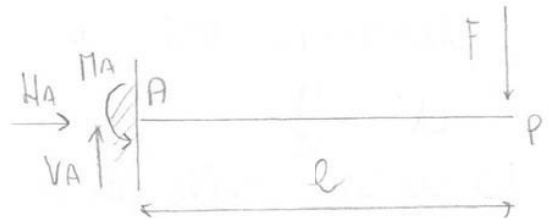
$T > 0$ se fa ruotare il carico ↓ in senso o.

$\pi > 0$ se tende le fibre inferiori



SCHEMI ELEMENTARI

1) Considero una mensola incastrata in A e soggetta alla forza F.



$$\begin{aligned} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \\ -M_A + V_A \cdot l = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} M_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = F \cdot l \end{array} \right. \end{aligned}$$

A) METODO ANALITICO

$$\left\{ \begin{array}{l} N(z) = 0 \\ T(z) - F = 0 \\ -F \cdot l + F \cdot z - \pi(z) = 0 \end{array} \right. \quad z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(z) = 0 \quad \text{NULLO} \\ T(z) = F \quad \text{COSTANTE} \\ \pi(z) = F(z - l) \quad \text{RETTA} \end{array} \right.$$

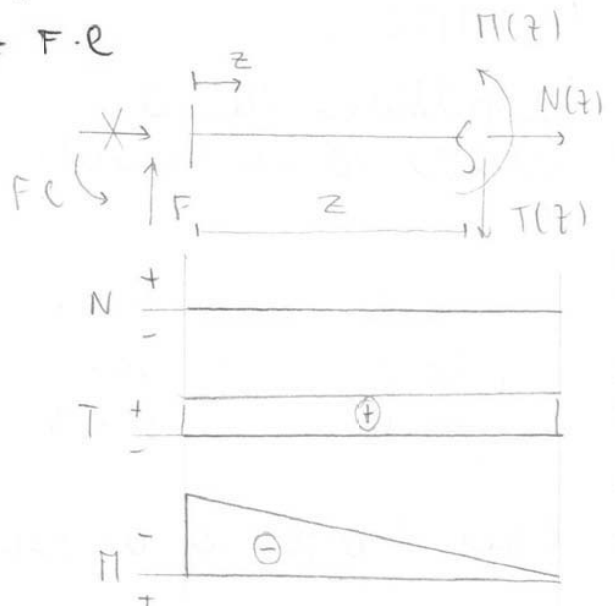
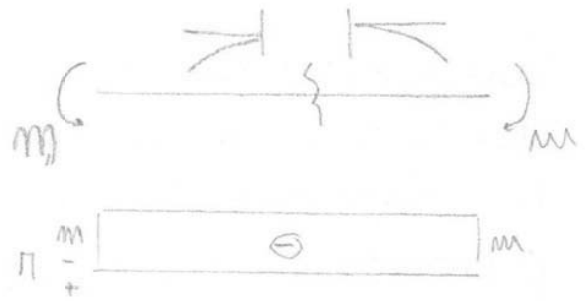


DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI

$N = T = 0$ con $M \neq 0$

la curva delle membrai non è definita perché non ho la risultante

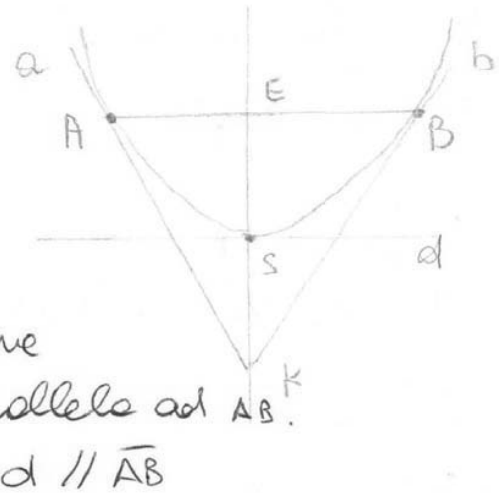
$R = \sqrt{T^2 + N^2}$ $d = \frac{M}{R} = \frac{M}{0} = \infty$



la curva delle membrai è una retta orizzontale e tende ad avere all'infinito.

COSTRUZIONE GRAFICA PARABOLA

- Traccio le tangenti ad A e B e mi incontrano in K.
- Per K traccio la verticale che interseca la retta AB in E.
- Trovo la distanza $\overline{EK} / 2 = S$ dove faccio passare la tangente parallela ad AB.



$\overline{AE} = \overline{EB}$ $\overline{ES} = \overline{SK}$ $d \parallel \overline{AB}$

Per 3 punti passa 1 SOLA PARABOLA.

ESEMPIO 3

Considero una membrata con carico distribuito q

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - ql = 0 \\ M_A - q \frac{l^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - ql \\ M_A = q \frac{l^2}{2} \end{cases}$$

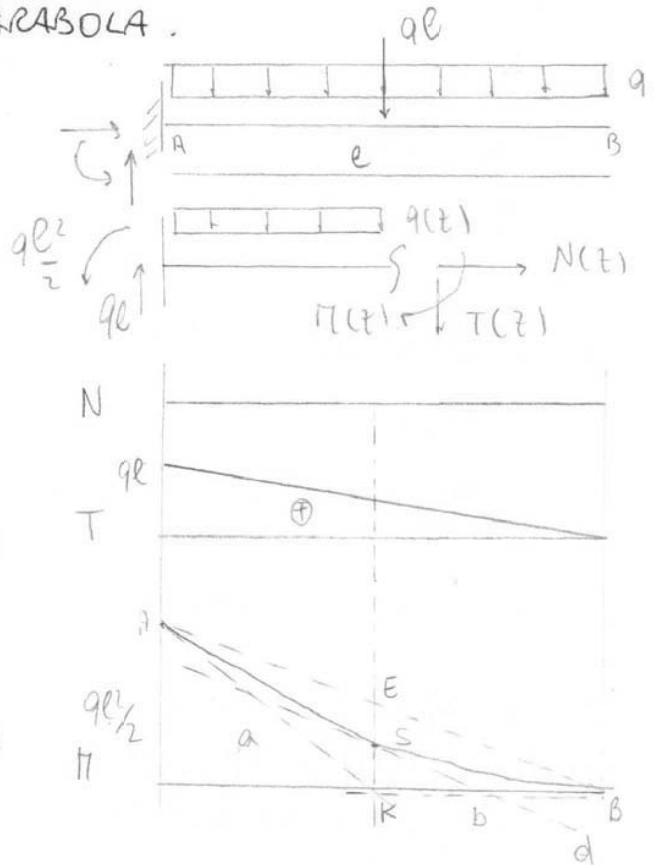
Considero un punto Z interno

$$\begin{cases} N(z) = 0 \\ q l - q z - T(z) = 0 \\ q l z - q z \frac{z}{2} - q \frac{l^2}{2} - \pi(z) = 0 \end{cases}$$

$N(z) = 0$

$T(z) = q(l - z)$

$\pi(z) = -q \frac{l^2}{2} + q(l - \frac{z}{2})z = -q \frac{l^2}{2} + qlz - \frac{qz^2}{2}$



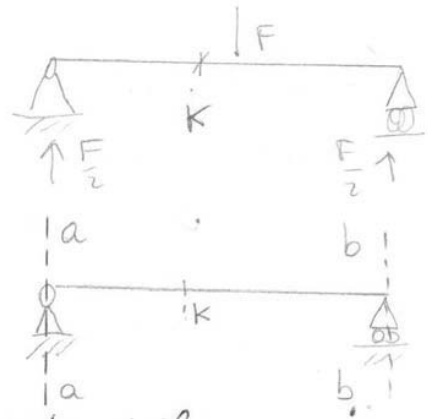
• DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI

$$d_A = \frac{M}{R} = \frac{0}{F/2} = 0 = d_B \quad \begin{matrix} \nearrow a-a \\ \searrow b-b \end{matrix}$$

Calcolo un punto K in mezzatura

$$d_K = \frac{M}{R} = \frac{F \cdot \frac{l}{4}}{\frac{F}{2}} = \frac{l}{2}$$

Per i punti prima di AK , la risultante nel diagramma delle forze pona per $a-a$, mentre per i punti del tratto BK , la risultante è in $b-b$.



ESEMPIO 2

Considero una trave appoggiata soggetta al carico distribuito q .

$$\begin{cases} T(z) = \frac{qz}{2} - qz & V_A = V_B = \frac{qz}{2} \\ M(z) = \frac{qz}{2} z - \frac{qz^2}{2} \end{cases}$$

Il Taglio varia linearmente

$$T(z) = 0 = \frac{qz}{2} - qz \rightarrow \boxed{z = \frac{l}{2}}$$

Il taglio s'annulla in mezzatura
Nella sezione S

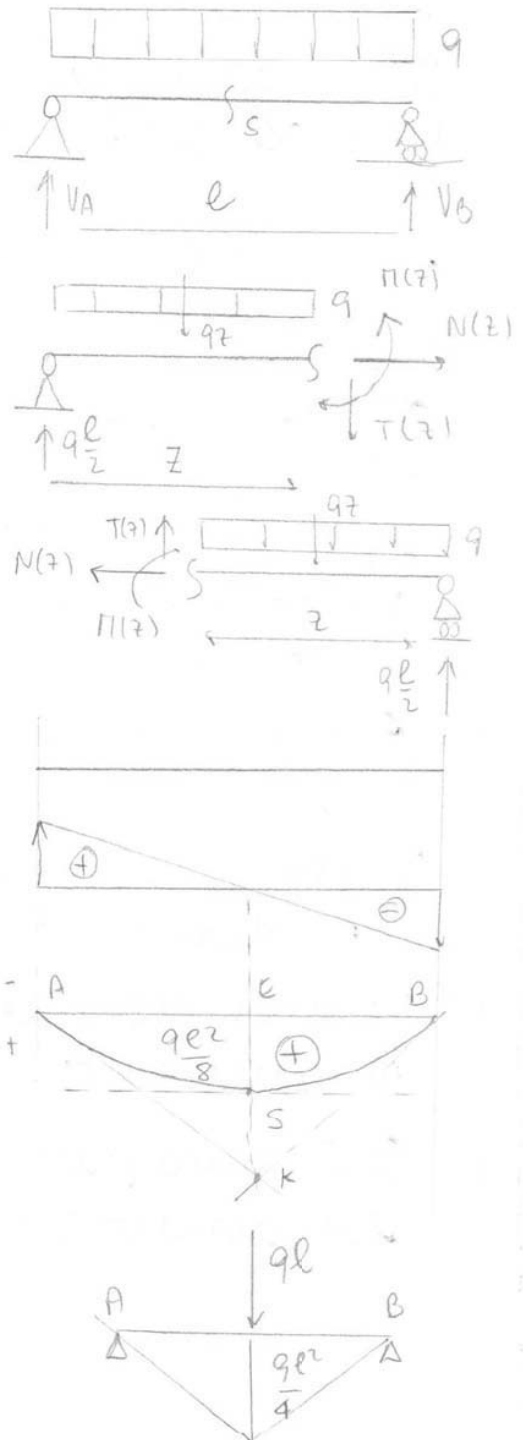
$$T(z) - qz + \frac{qz}{2} = 0$$

Per ottenere il diagramma del momento (parabola)

considero la situazione del carico (qz) concentrato in mezzatura: ottengo le due tangenti ad A, B .

il momento in mezzatura:

$$M_{e/2} = \frac{qz^2}{8}$$



STRUTTURE ISOSTATICHE

Le strutture isostatiche composte da travi sono largamente impiegate nelle costruzioni civili:

- le sollecitazioni interne indotte dai carichi meccanici sono superiori nella struttura isostatica rispetto a quella iperstatica.
- le sollecitazioni termiche sono nulle nell'isostatica

SCHEMI UTILIZZATI

1) TRAVATURE RETICOLARI

Strutture reticolari costituite da bielle incernierate, usate nei ponti ferroviari di grande luce.

2) TRAVI GERBER

Struttura formata da una trave rettilinea con più appoggi ed un adeguato numero di 'sionnemmoli', per ponti autostradali di grande luce.

Per piccole luci e uguali verticali:

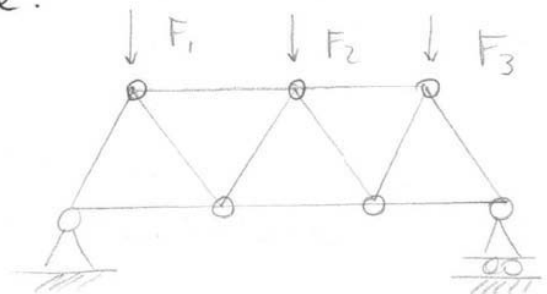
3) ARCHI A 3 CERNIERE

4) STRUTTURE CHIUSE

Sono strutture costituite da catene di elementi strutturali che si richiudono su se stesse e possono essere in alcuni casi internamente iperstatiche.

A) TRAVI RETICOLARI

Le travature reticolari sono sistemi di aste collegate da cerniere: queste cerniere si dicono nodi e vengono caricate dalle forze esterne e dalle reazioni delle aste.



- cerniere: considerate come punti materiali in equilibrio sotto l'azione di forze
- aste: se non caricate dall'esterno, vengono considerate come bielle, quindi vincoli.

1) METODO DELL'EQUILIBRIO DEI NODI

ANALITICO

Scrivo 2n equazioni nelle (n+3) incognite imponendo l'equilibrio alle traslazioni orizzontale e verticale.

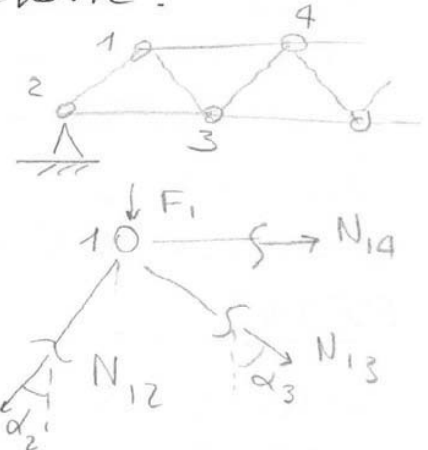
GRAFICO

Studio l'equilibrio delle forze applicate ai nodi nodi considerando il poligono delle forze.

$$\downarrow) F_1 + N_{13} \cos \alpha_3 + N_{12} \cos \alpha_2 = 0$$

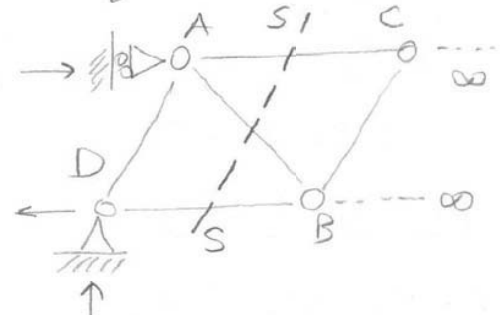
$$\rightarrow) N_{14} + N_{13} \sin \alpha_3 - N_{12} \sin \alpha_2 = 0$$

Ho più incognite di equazioni: devo fare l'equilibrio per ogni nodo.



2) METODO DELLE SEZIONI RITTER

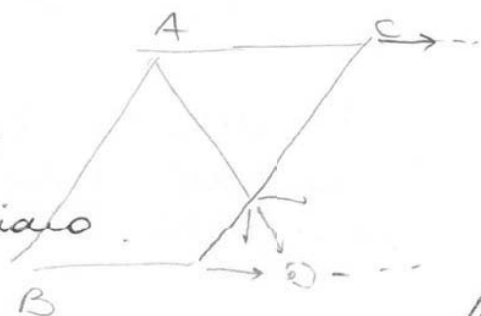
Una sezione (S) della travatura reticolare si definisce Ritter rispetto ad un asta se la sezione, oltre a tagliare l'asta in esame, taglia altre aste che devono confluire in un punto proprio o improprio.



Queste aste devono intersecarsi in un punto o essere parallele (punto improprio).

- Se le aste si incontrano in un po, scrivo l'equazione di equilibrio alla rotazione del po.
- Se le aste non sono parallele e non incontrano all'infinito, scrivo l'equazione dell'equilibrio alla traslazione in direzione ortogonale all'one di parallelismo.

In questo caso scrivo un'equazione alle traslazioni verticali con gli sforzi delle aste AC e DB non compaiono.



$$N_{DB} = F \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2}$$

$$N_{DE} = F \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2}$$

N_{DB} è una forza di compressione mentre N_{DE} è una forza di trazione

$$N_{DB} = -\frac{F}{2} \quad N_{DE} = \frac{F}{2}$$

$$\uparrow) N_{EB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2} \rightarrow N_{EB} = F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\leftrightarrow) N_{EF} = \frac{F}{2} - N_{EB} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

N_{EB} è una forza di compressione

$$N_{EB} = -F \frac{\sqrt{2}}{2} \quad N_{EF} = 0 \quad N_{BF} = 0$$

L'ultimo vincolo è usato come verifica

$$\rightarrow) \frac{F}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - H_B = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} - F = 0$$

$$\uparrow) F \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B = \frac{F}{2} - \frac{F}{2} = 0$$

$N_{CD} = N_{CA} = N_{EF} = N_{BF} = 0$, TRATTI SCARICHI

$N_{AD} = N_{AE} = N_{DB} = N_{EB}$ = PUNTONI (compressione)

N_{DE} = TIRANTE (trazione)

2 - METODO DI RICHTER

ASTA DE: equilibrio traslazione verticale

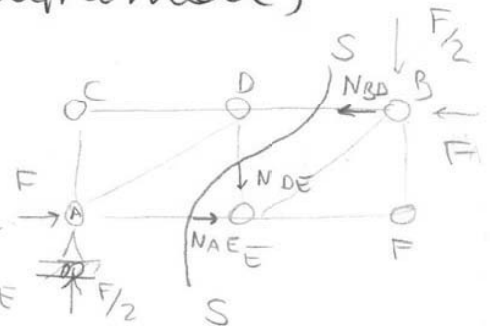
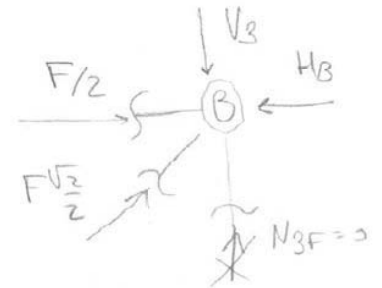
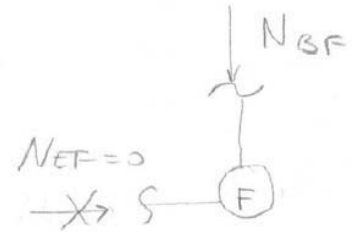
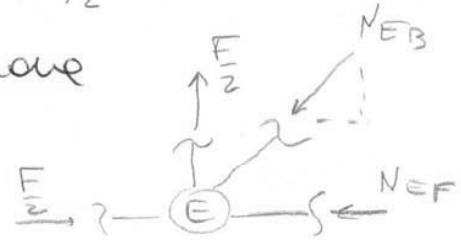
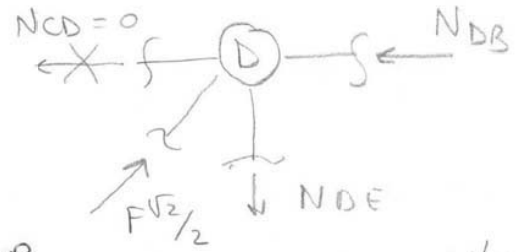
$$\uparrow) \frac{F}{2} - N_{DE} = 0 \rightarrow N_{DE} = \frac{F}{2} \text{ TRAZIONE}$$

ASTA DB: equazione alla rotazione in E

$$E) -N_{DB} \cdot l + \frac{F}{2} \cdot l = 0 \quad N_{DB} = \frac{F}{2} \text{ COMPRESSIONE}$$

ASTA AE: equazione alla rotazione in D

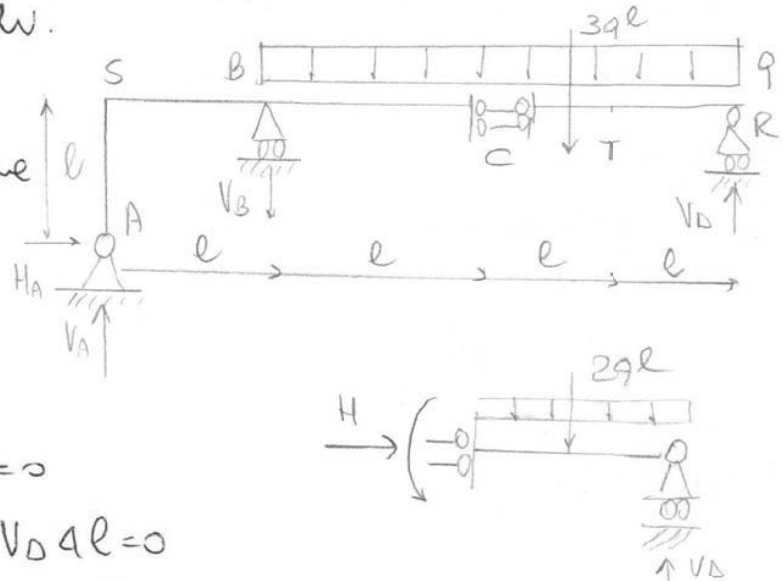
$$D) N_{AE} \cdot l + \frac{F}{2} \cdot l - F \cdot l = 0 \quad N_{AE} = \frac{F}{2} \text{ COMPRESSIONE}$$



Quando ho delle cerniere interne soggette a carichi concentrati o cerniere interne che sono anche esterne perché soggette alle reazioni vincolari, devo scrivere delle equazioni ausiliarie di equilibrio dei nodi.

ESEMPIO

Il grado di iperstaticità interna è 1, rappresentato dal bipendolo.



→) $H_A = 0$

↑) $V_A - V_B + V_D - 3qe = 0$

↓) $V_B \cdot e + 3qe \cdot \frac{5}{2}e - V_D \cdot 4e = 0$

L'equazione ausiliaria la usiamo nel vincolo C: equazione di momento verticale

↑) $V_D - 2qe = 0$

$V_D = 2qe; V_B = \frac{1}{2}qe; V_A = \frac{3}{2}qe; H_A = 0$

Studiamo l'equilibrio nodo per nodo.

TRATTO AS

Devo scrivere le 3 equazioni d'equilibrio

$T = 0 \quad N = \frac{3}{2}qe \quad M = 0$

TRATTO SB

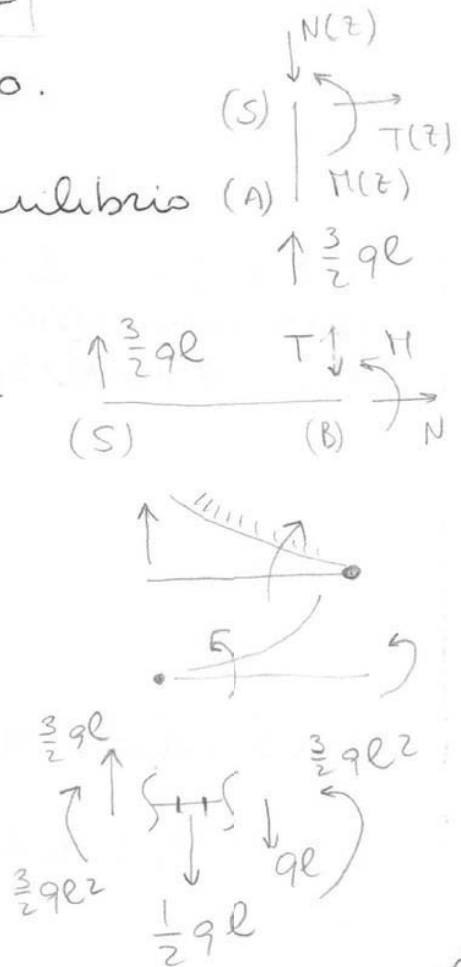
$N = 0 \quad T = \frac{3}{2}qe \quad M = \frac{3}{2}qe \cdot e = \frac{3}{2}qe^2$

Il momento è positivo perché tende le fibre dell'interno.

TRATTO BC

Prima di studiare BC devo fare lo studio del vincolo: per avere equilibrio, dopo il vincolo devo avere:

$qe = \frac{3}{2}qe - \frac{1}{2}qe$



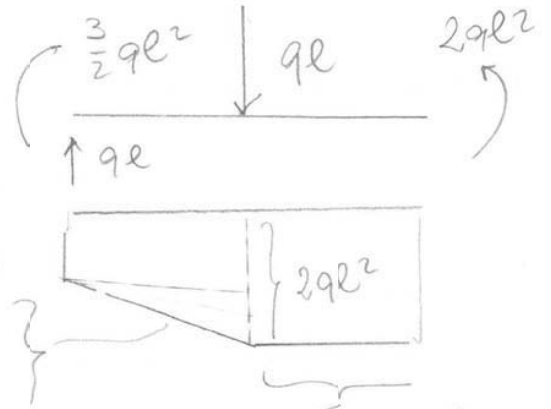
Studio la trave soggetta ad un carico concentrato

risultato dovuto all'incremento della forza $q\ell$

$$\frac{3}{2} q\ell^2 + q\ell^2 - \frac{q\ell^2}{2} = 2q\ell^2$$

Tratto costante perché il momento

il momento ha valore massimo in B



$\uparrow q\ell$ è opposto da $\downarrow q\ell$

TRATTO CD

Anche nel tratto CD, come nel tratto BC, il punto B ha la TANGENTE ORIZZONTALE, il che significa che abbiamo dimostrato che $M_B = M_{MAX}$

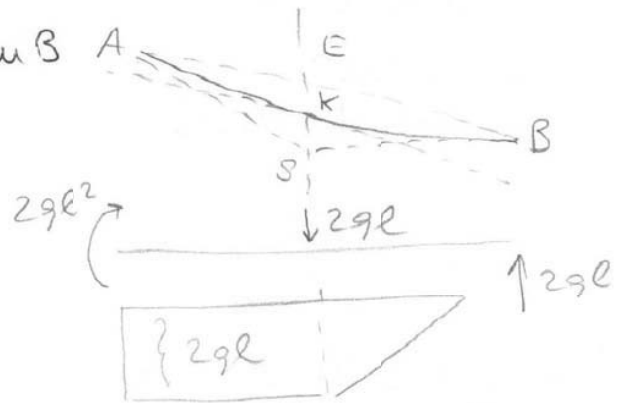
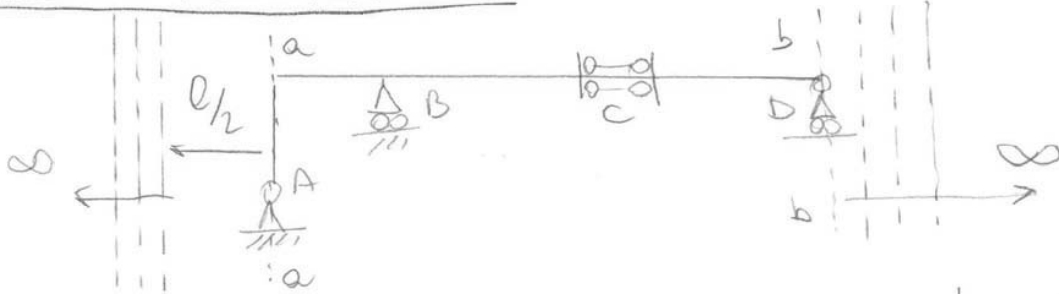


DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI



Lo sforzo normale non genera momento, la risultante è in a-a

$\frac{M}{T} = \ell$ - braccio, per ogni punto in SB, la risultante è in a-a

La risultante delle forze ha solo componente verticale

$$\frac{M}{T_c} = \frac{M}{0} = \infty$$

il carico è distribuito, il taglio è nullo
→ FASCIO DI RETTE

TRATTO	C.D.P.
AS-	a-a
SB	a-a
BC	FASCIO DI RETTE A $\ell/2$ DALLA RETTA a-a VERSO ∞

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE E TENSIONE

TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

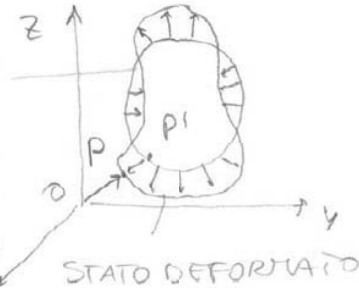
Il corpo rigido è quel corpo che non si deforma quando viene spostato, traslato e ruotato.

Studiamo il caso di corpo deformabile.

f : FUNZIONE DI SPOSTAMENTO, associa ad ogni vettore di posizione $\{ \pi \}$ del punto del corpo il vettore spostamento $\{ \eta \}$ del punto nella configurazione deformata.

$$\{ \pi \} \xrightarrow{f} \{ \eta \}$$

CONDIZIONE NATURALE DEL CORPO



CARATTERISTICHE DI f

Il corpo soggetto a deformazione subisce degli allungamenti o restringimenti delle dimensioni

$$f: D \rightarrow C$$

D = dominio del corpo originale

$$f: P \rightarrow P'$$

C = dominio del corpo deformato.

$$f: \{ \pi \} \rightarrow \{ \eta \}$$

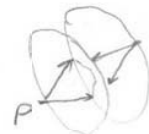
$\{ \eta \}$ campo vettoriale degli spostamenti che vengono proiettati su un sistema di riferimento (x, y, z) fino.

$$\{ \eta \} = u(x, y, z) \vec{i} + v(x, y, z) \vec{j} + w(x, y, z) \vec{k}$$

$\{ \eta \}$ è l'INCOGNITA PRIMARIA nei problemi strutturali.

IPOTESI DI REGOLARITÀ: $f: R^3 \rightarrow R^3$

f deve ESCLUDERE FRATTURE e COMPENETRAZIONI.



f = funzione continua, invertibile e biettiva, anche f^{-1}
 (f, f^{-1}) sono degli OMEOMORFISMI

la matrice quadrata è vista come la somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica

$$[J_p] = \frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^T) + \frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^T)$$

Il primo addendo è una matrice antisimmetrica che esprime il contributo rotatorio mentre la matrice simmetrica esprime il contributo deformativo

$[C_p]$ = contributo rotatorio

$[E_p]$ = contributo deformativo

$\{M_p\}$ = contributo traslativo

$$\{M_a\} = \{M_p\} + [C_p] \{dr\} + [E_p] \{dr\}$$

Sfruttando l'identità possiamo scrivere le due matrici partendo dalle Jacobiane.

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_p} - \frac{\partial v}{\partial y_p} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_p} - \frac{\partial w}{\partial x_p} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_p} - \frac{\partial w}{\partial y_p} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial z_p} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y_p} - \frac{\partial v}{\partial z_p} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$[E_p]$ = TENSORE DELLE DEFORMAZIONI, definisce tutte le deformazioni del corpo

$$[E_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_p} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_p} + \frac{\partial w}{\partial x_p} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_p} + \frac{\partial u}{\partial y_p} \right) & \frac{\partial v}{\partial y_p} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_p} + \frac{\partial w}{\partial y_p} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_p} + \frac{\partial u}{\partial z_p} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y_p} + \frac{\partial v}{\partial z_p} \right) & \frac{\partial w}{\partial z_p} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

la deformazione delle molle

$$\frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x}$$

2 - SCORRIMENTO ANGOLARE

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

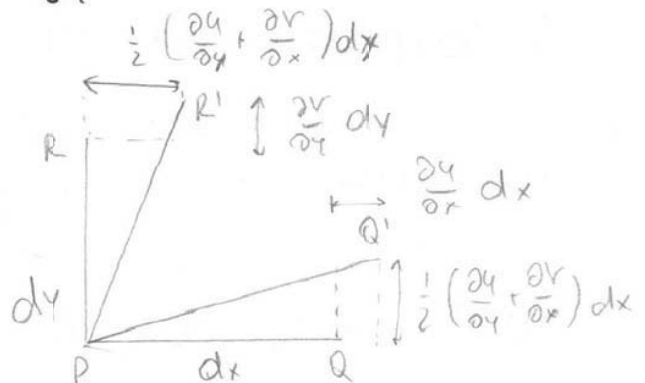
rappresentano le diminuzioni dei gli angoli retti subiscono a deformazione avvenuta

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}}$$

$\frac{\partial v}{\partial x}$ risulta positivo mentre $\frac{\partial u}{\partial y}$ risulta negativo.

2) ROTAZIONE

I segmenti iniziali PQ e RP. questa volta subiscono solo una variazione di lunghezza e una distorsione mentre i contributi di rotazione e traslazione si considerano già deprimati.



PUNTO Q

$$\left\{ \begin{aligned} u_Q &= \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v_Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \\ w_Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx \end{aligned} \right.$$

PUNTO R

$$\left\{ \begin{aligned} u_R &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy \\ v_R &= \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ w_R &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \end{aligned} \right.$$

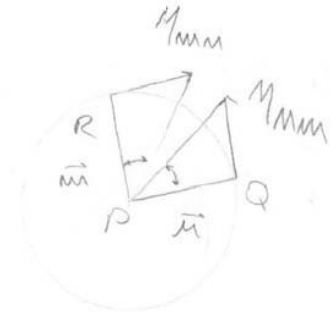
le dilatazioni specifiche appaiono uguali ai termini delle diagonali della matrice delle deformazioni e gli scorrimenti angolari coincidono con le diminuzioni degli angoli formati dalle rette parallele per P e parallele agli assi coordinati.

$$\frac{\pi}{2} - \theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}$$

Ricordando che il tragitto dello sfero è unitario, la deformazione lungo \vec{n} ha significato angolare.

la dilatazione specifica lungo \vec{n}

$$\eta_{mm} = \epsilon_m = \{m\}^T [\epsilon] \{m\}$$

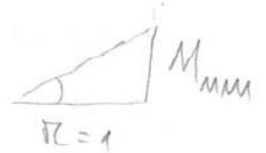


Lo scorrimento angolare è la somma di 2 angoli

$$\gamma_{mm} = \gamma_{mm} = \eta_{mm} + \eta_{mm} = 2 \eta_{mm} = 2 \epsilon_m$$

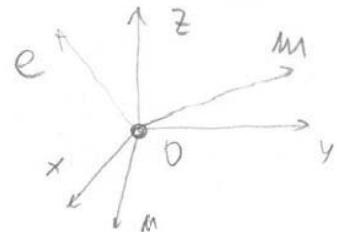
Questi due valori sono uguali perché

$$\tan \gamma_{mm} = \gamma_{mm} = \frac{\eta_{mm}}{R} = \eta_{mm}$$



$$\frac{1}{2} \gamma_{mm} = \frac{1}{2} \gamma_{mm} = \{m\}^T [\epsilon] \{m\} = \{m\}^T [\epsilon] \{m\}$$

considero le 3 direzioni ortogonali (m, m, e) rispetto a (x, y, z).



$$[\epsilon] \rightarrow [\epsilon^*] \quad * = \text{rotazione}$$

$$[\epsilon^*] = \begin{bmatrix} \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \frac{1}{2} \gamma_{em} \\ \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{em} \\ \frac{1}{2} \gamma_{me} & \frac{1}{2} \gamma_{me} & \epsilon_e \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon^*] = \begin{bmatrix} \{m\}^T [\epsilon] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon] \{e\} \\ \{m\}^T [\epsilon] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon] \{e\} \\ \{e\}^T [\epsilon] \{m\} & \{e\}^T [\epsilon] \{m\} & \{e\}^T [\epsilon] \{e\} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon^*]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \{m\}^T \\ \{m\}^T \\ \{e\}^T \end{bmatrix}_{3 \times 3} [\epsilon]_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \{m\} \\ \{m\} \\ \{e\} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$[\epsilon^*] = [N] [\epsilon] [N]^T$$

$[N]^T, [N]$ matrici di rotazione dei vettori direttori

CARATTERI

1) la soluzione banale non ha significato fisico nella geometria descrittiva perché:

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 1$$

2) Applicando i teoremi dell'algebra delle matrici, la soluzione non banale esiste e rappresenta una direzione principale se è determinante della matrice dei coefficienti n'annullo. ($D \neq 0$)

$$\boxed{\epsilon_m^3 - J_1 \epsilon_m^2 - J_2 \epsilon_m - J_3 = 0}$$

J_1, J_2, J_3 sono gli INVARIANTI SCALARI DELLA DEFORMAZIONE.

• $J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ TRACCIA DEL TENSORE

$$J_2 = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

J_2 è la somma dell'opposto dei minori principali.

• $J_3 = \det [\epsilon]$, il determinante del tensore delle deformazioni.

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA D'EQUAZIONI:

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ AUTOVALORI $\{M_1\}, \{M_2\}, \{M_3\}$ AUTOVETTORI

Per l'esattezza della legge di reciprocità:

$$\epsilon_i \cos \theta_{ij} = \epsilon_j \cos \theta_{ji}$$

• Se $\epsilon_i = \epsilon_j$, θ_{ij} può assumere un qualsiasi valore

• Se $\epsilon_i \neq \epsilon_j$, $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$

1- $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ le 3 direzioni principali sono mutuamente ortogonali

2- $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ ci sono ∞^1 direzioni principali

3- $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ ci sono ∞^2 direzioni principali

EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

Il vettore spostamento è una funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni vettore di posizione la terzina ordinata (u, v, w) delle componenti del relativo spostamento.

Il tensore delle deformazioni è una funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ che associa ad ogni vettore di posizione l'insieme $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ delle dilatazioni e scorrimenti angolari.

Le 6 componenti dovranno essere legate da 3 relazioni differenziali: le equazioni di compatibilità che si ottengono derivando gli scorrimenti angolari rispetto ad entrambe le relative variabili ed osservando che le derivate parziali del terzo ordine degli spostamenti corrispondono a quelle del secondo ordine nelle dilatazioni.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

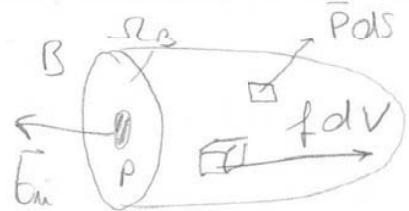
Questo dimostra che derivando il campo degli spostamenti ottengo il tensore delle deformazioni ed integrando il tensore delle deformazioni trovo delle funzioni di spostamento o viceversa se valgono queste equazioni di compatibilità. In generale questo non vale.

$\{t\}$ = vettore tensione di azione su un'area $d\Omega$ della superficie Σ tagliata dal piano A .

$\{t\}$ = funzione di AREA SEZIONE e POSIZIONE

Considerando una sezione verticale B del solido
 Devono valere le stesse equazioni

L'orientamento del vettore dipende solo dalla giacitura della sezione



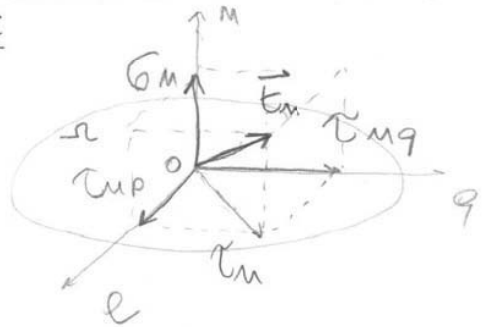
$$\{t\} = \{t(\{r\}, \{m\})\} = \{t_m\}$$

Il vettore tensione t_m nello spazio (x, y, z) può essere scritto nella seguente forma vettoriale:

$$\{t_m\} = t_{mx} \bar{i} + t_{my} \bar{j} + t_{mz} \bar{k}$$

Scriviamo il vettore t_m rispetto alle forme locali (p, m, q)

$$\{t_m\} = \sigma_m \bar{m} + \tau_{pm} \bar{p} + \tau_{qm} \bar{q}$$



la componente TANGENZIALE TOTALE

$$\tau_m = \sqrt{\tau_{mp}^2 + \tau_{mq}^2}$$

Considerando un'area $d\Omega$ su cui agisce il vettore tensione $\{t_m\}$ che ha componenti (σ, τ)

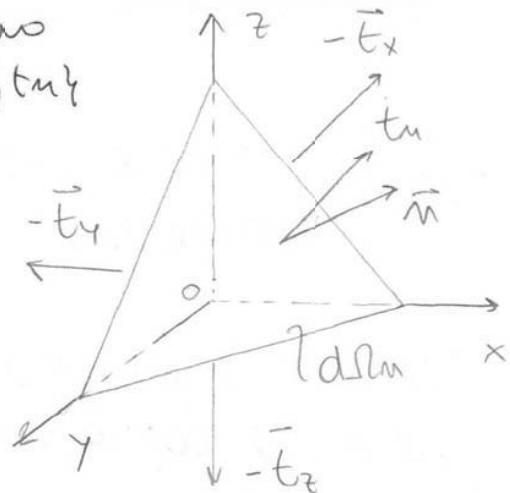
σ = componente normale τ = componente tangenziale

TETRAEDRO DI CAUCHY - PRIMO TEOREMA DI CAUCHY

Considero il tetraedro infinitesimo soggetto al vettore delle tensioni $\{t_m\}$ sulla superficie obliqua e ad altre 3 tensioni $(-t_x, -t_y, -t_z)$ sulle 3 sezioni opposte agli angoli.

Il tetraedro è soggetto a:

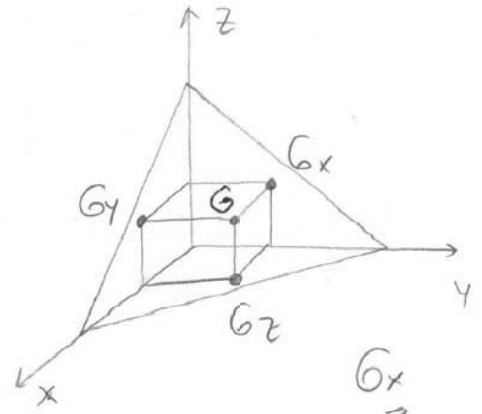
$$-\{t_x\}, -\{t_y\}, -\{t_z\}, \{t_m\}$$



Dimostrazione che la matrice è SIMMETRICA

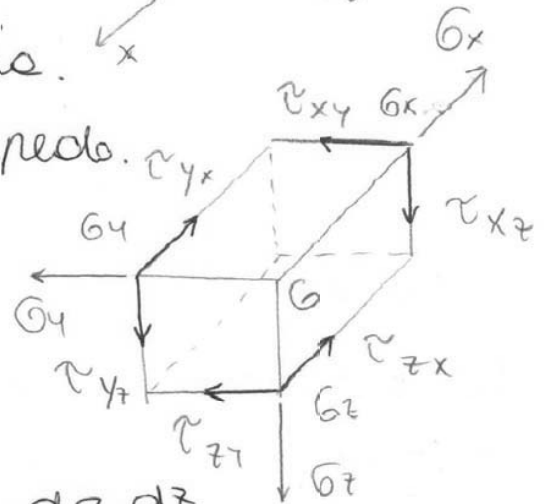
[σ] = MATRICE SIMMETRICA

Considero i baricentri G_x, G_y, G_z nelle 3 forze ortogonali e li compungo a formare un parallelepipedo con spigolo G , baricentro delle forze oblique.



Indico le (σ, τ) nei parallelepipedi.

Esprimo l'equilibrio alla rotazione per gli assi G_x ed analogo per G_y, G_z



ASSE G_x

$$\tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3} - \tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} = 0$$

con $\frac{d\Omega_y dy}{3} = dV$ e $\frac{d\Omega_z dz}{3} = dV$

$$\tau_{yz} dV = \tau_{zy} dV \rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

[σ] è simmetrica e le tensioni tangenziali sono sempre punta contro punta e coda contro coda.

LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DELLE TENSIONI PER ROTAZIONI DEL S.R.

2° TEOREMA DI CAUCHY

La componente normale dell'area di vettore normale $\{n\}$

$$\sigma_n = \{n\}^T [\sigma] \{n\} \cdot t_{nn}$$

La proiezione del vettore tensionale $\{t_n\}$ nella direzione del vettore $\{n\}$

$$\{t_n\} = [\sigma] \{n\}$$

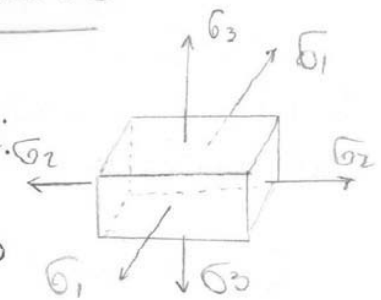
La legge di trasformazione per il tensore delle tensioni nel sistema di riferimento ruotato riguarda 4 motrici 3×3 che nel sistema possono essere scritte in forma compatta.

$$[\sigma^*] = [N][\sigma][N]^T$$

$[N]$ è la matrice ortogonale.

DIREZIONI PRINCIPALI DELLA TENSIONE

Determiniamo le giaciture rispetto alle quali siano presenti solo tensioni normali. Il vettore $\{m\}$ normale ad una tale giacitura, dev'essere parallelo al relativo vettore tensione $\{t_m\}$. ($\sigma \neq 0, \tau = 0$)



Le condizioni di parallelismo:

$$\{t_m\} = \sigma_m \{m\} \quad \{t_m\} = [\sigma] \{m\}$$

otteniamo l'equazione agli autovalori

$$([\sigma] - [1]\sigma_m) \{m\} = \{0\}$$

$[1]$ è la matrice identità

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalla geometria vale la condizione di normalità:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$$

La soluzione ovvia non esiste ($m_x = m_y = m_z = 0$) perché non ha significato fisico.

La soluzione diversa da quella ovvia rappresenta una direzione principale solo se il determinante della matrice dei coefficienti non è nullo.

$$D = \sigma_m^3 - J_1 \sigma_m^2 - J_2 \sigma_m - J_3 = 0$$

CIRCOLI DI MOHR

Potremo determinare graficamente il valore delle tensioni principali e delle direzioni principali di deformazione

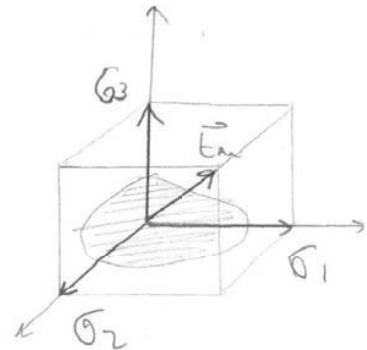
la condizione di parallelismo: il vettore delle tensioni deve essere normale al piano su cui agisce (piano che ha per normale \vec{n})

$$\{t_n\} = [\sigma] \{M\} \rightarrow \{t_n\} = \sigma_n \{M\}$$

L'equazione agli autovalori:

$$([\sigma] - [\lambda] \sigma_n) \{M\} = 0$$

$$\{t_n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$



1° EQUAZIONE

$$\sigma_n = \{M\}^T [\sigma] \{M\}$$

$$\sigma_n = [M_1, M_2, M_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Il primo teorema di Cauchy applicato al caso che abbiamo solo componenti normali

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_1 M_1^2 + \sigma_2 M_2^2 + \sigma_3 M_3^2}$$

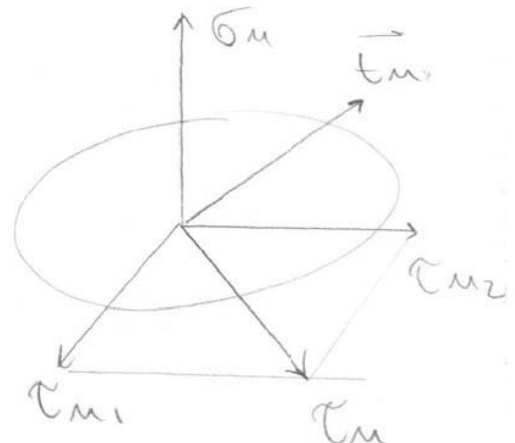
σ_n = funzione lineare delle tensioni normali σ e funzione quadratica dei coseni direttori.

2° EQUAZIONE

Definisco $\{t_n\}$ sul piano su cui agisce

$$\{t_n\}^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$$

$$\boxed{\{t_n\}^2 = \sigma_1^2 M_1^2 + \sigma_2^2 M_2^2 + \sigma_3^2 M_3^2}$$

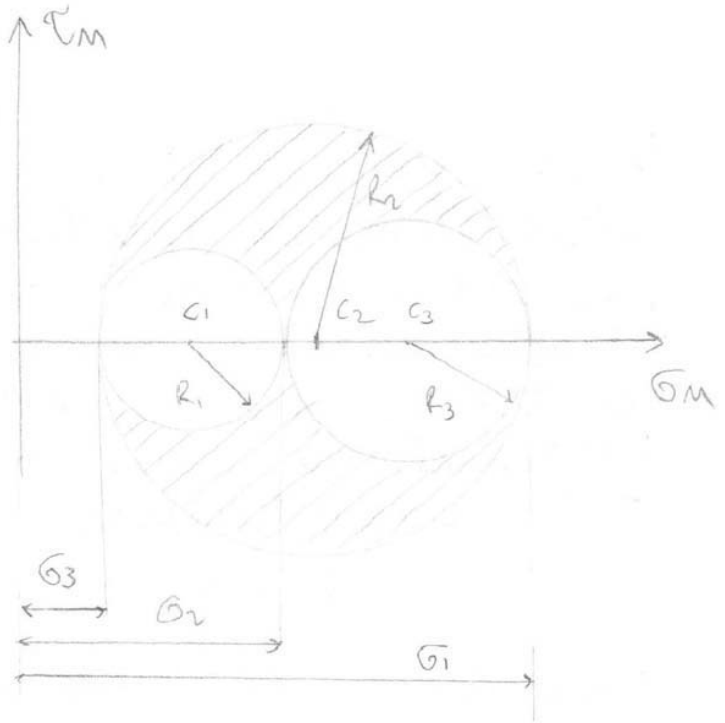


Il dominio di (σ_M, τ_M) è rappresentato da queste 3 circonferenze

$$c_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$c_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

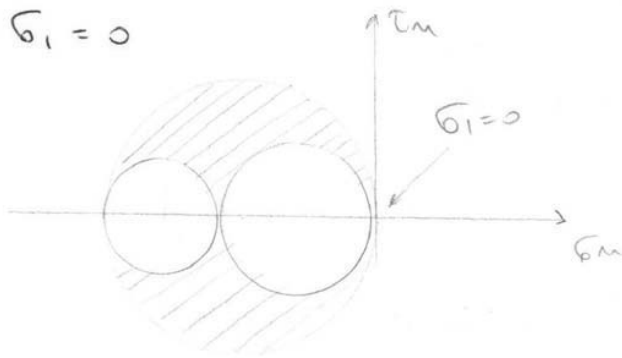
$$c_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



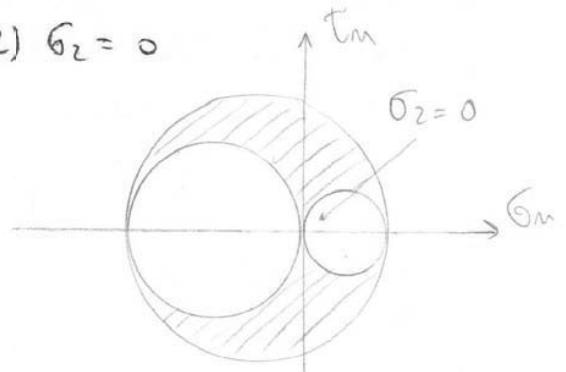
Per trovare le loro equazioni entro nelle forme e trovare (M_1, M_2, M_3)

Si possono verificare 5 CONDIZIONI

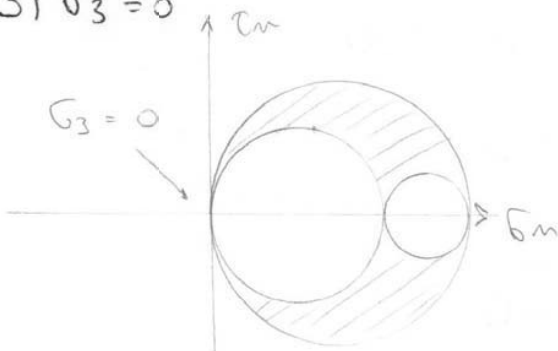
1) $\sigma_1 = 0$



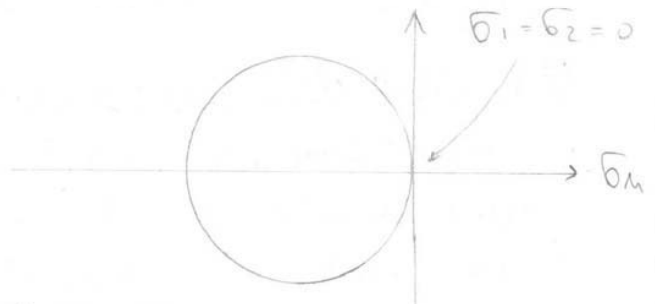
2) $\sigma_2 = 0$



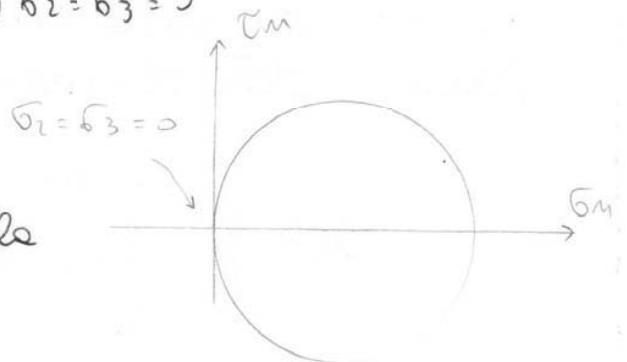
3) $\sigma_3 = 0$



4) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$



5) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$



Nel caso 4,5 abbiamo solo delle circonferenze e la soluzione tra un' punti della frontiera

le soluzioni:

- $\sigma_m = 0$
- $\sigma_m^2 - J_1 \sigma_m - J_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \sigma_x + \sigma_y \\ J_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \\ J_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_m + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0}$$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{array} \right.$$

C = CENTRO DEL CERCHIO R = raggio del cerchio

ALTRO APPROCCIO

Pseudo diagonale matrice per trovare la direzione dei assi dove σ_x, σ_y diventano tensioni principali.

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Annullando il termine non diagonale n'ho:

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

Upone de la matrice na diagonale n'qu'ho de $\tau_{xy}^* = 0$

$$\tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\boxed{\theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)}$$

Usando le equazioni di $(\sigma_1, \sigma_2, \theta_0)$ posso trovare il cerchio di Mohr.

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$$

IL SOLIDO ELASTICO

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Fuora il solido era caratterizzato solo da tensioni e deformazioni dove il tensore degli sforzi è dato dalla matrice di trasformazione del vettore unitario.

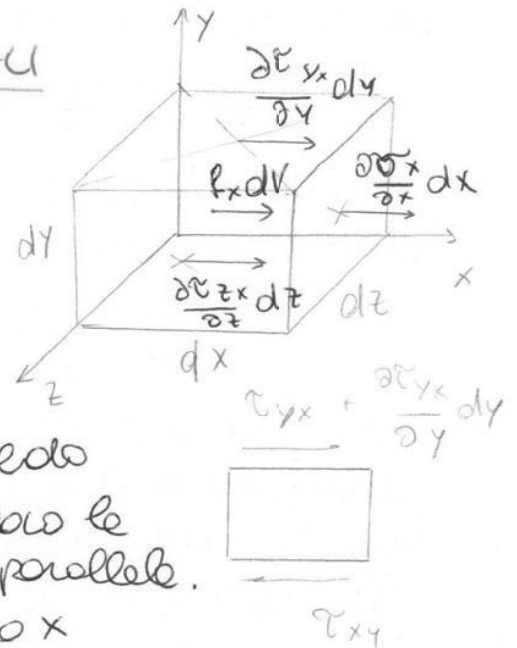
$$\{t_m\} = [C] \{m\}$$

Il tensore degli sforzi contiene le caratteristiche speciali di tensione (σ, τ).

Passiamo dallo studio di tensioni e deformazioni del PUNTO alla relazione degli sforzi fra due porzioni di solido in punti diversi del corpo.

DEMONSTRAZIONE IN TERMINI DIFFERENZIALI

Considero un parallelepipedo elementare dove sulle facce opposte agiscono delle componenti di tensione tra di loro uguali a meno di un incremento infinitesimo.



$f_x dv$ - forza di massa, applicata al centro del parallelepipedo

Per l'equilibrio posso considerare solo le variazioni di tensioni tra facce parallele.

L'equilibrio della trazione lungo x

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

Il vettore di momento nella frontiera del dominio deve coincidere con il vettore tensione

$$\begin{cases} t_{mx} = \sigma_x m_x + \tau_{yx} m_y + \tau_{zx} m_z = P_x \\ t_{my} = \tau_{xy} m_x + \sigma_y m_y + \tau_{zy} m_z = P_y \\ t_{mz} = \tau_{xz} m_x + \tau_{yz} m_y + \sigma_z m_z = P_z \end{cases}$$

LE EQUAZIONI DI EQUIVALENZA AL CONTORNO rappresentano una delle due condizioni al contorno relative al problema dei solidi elastici.

Le equazioni d'equilibrio sono le equazioni indefinite le equazioni delle deformazioni sono le equazioni di congruenza. Per risolvere le strutture iperstatiche uso equazioni d'equilibrio e di congruenza.

DOUALTA' STATICO - CINEMATICA

(u, v, w)

RELAZIONE DELLE COMPONENTI SPECIALI (ϵ, γ) CON GLI SPOSTAMENTI

Esprimiamo in forma matriciale i sistemi d'equazioni differenziali che governano da una parte la CONGRUENZA e dall'altra l'EQUILIBRIO.

1- EQUAZIONI CINEMATICHE (CONGRUENZA)

Richiamiamo le relazioni che definiscono gli elementi del tensore delle deformazioni:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

- $\{P\}$: componenti della tensione sulle frontiere
- $\{\sigma\}$: vettore delle componenti "specchi" della tensione
- $[W]^T$: matrice dei "coseni" direttori, rispettivamente $[\delta]^T$

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Il PLV è il metodo fondamentale / diretto per risolvere le strutture ed ^{IL LEGATE} alberia del lavoro delle forze esterne con le tensioni interne del solido.

- IL SISTEMA (a) di forze esterne (di volume $\{f_0\}$, di superficie $\{P_0\}$ ed di tensioni $\{\sigma_0\}$) si dice STATICAMENTE AMMISSIBILE se soddisfa queste due equazioni:

$$[\delta]^T \{\sigma_0\} = - \{f_0\} \quad \forall P \in V \text{ volume}$$

$$[N]^T \{\sigma_0\} = \{P_0\} \quad \forall P \in S \text{ superficie}$$

- IL SISTEMA (b) di spostamenti $\{u_0\}$ e deformazioni $\{\epsilon_0\}$ si dice CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE quando essi soddisfanno le relazioni cinematiche

$$[\delta] \{u_0\} = \{\epsilon_0\} \quad \forall P \in V$$

DIMOSTRAZIONE PLV (CHIEDE ALL'ESATTO)

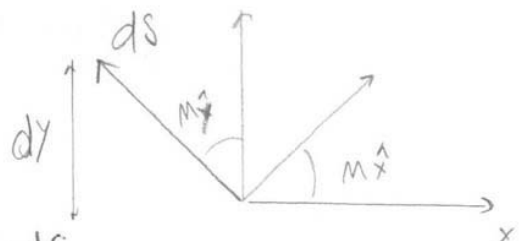
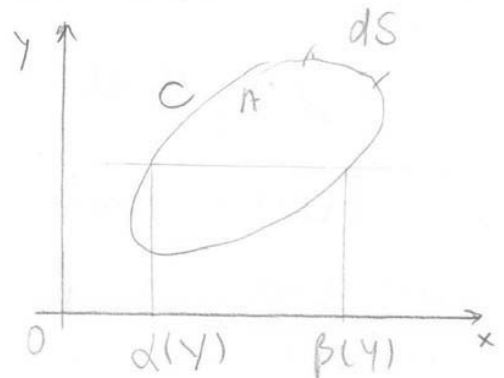
Ritorniamo il Teorema di Green nello spazio tramite la REGOLA D'INTEGRAZIONE PER PARTI SU UN DOMINIO TRIDIMENSIONALE

Considero una regione tridimensionale di un solido tagliata da un piano che identifichiamo $\alpha(y)$, $\beta(y)$.

C = frontiera

L'arcetto ds sulla frontiera

$$dy = m_x ds \quad dx = -m_y ds$$



Considero il mtenua (a) delle forze ed il mtenua (b) delle deformazioni

Il lavoro delle forze di volume:

$$L_F = \int_V \{f_a\}^T \{u_b\} dV \quad (1)$$

f_a = Forze di volume

P_a = forze di Sup.

$$\{P_a\} = [N]^T \{P_a\}$$

applicando le equazioni statiche (a)

$$L_F = - \int_V ([\delta]^T \{P_a\})^T \{u_b\} dV \quad (2)$$

Il Teorema di Green nello spazio tridimensionale

$$\int_S f_i u_i dS = \int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} u_i dV + \int_V f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$$

$[\delta]^T$ non è un prodotto matriciale ma un operatore differenziale studiando l'espressione (2) PAG 526

RISULTATO

$$\int_S \{P_a\}^T [N] \{u_b\} dS = \int_V ([\delta]^T \{P_a\})^T \{u_b\} dV + \int_V \{P_a\}^T [\delta] \{u_b\} dV$$

mettendo in questo ordine le componenti staticamente ammissibili ho proprio le componenti del Teorema di Green. Applico il Teorema di Green all'equazione (2).

$$L_F = \int_V \{P_a\}^T [\delta] \{u_b\} dV - \int_S \{P_a\}^T [N] \{u_b\} dS$$

Equagliando questa espressione con la (1)

$$\int_V \{P_a\}^T [\delta] \{u_b\} dV = \int_V \{f_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T [N] \{u_b\} dS$$

$$\text{ricordando che: } [\delta] \{u_b\} = \{E_b\}$$

$$\{P_a\}^T [N] = \{P_a\}^T$$

$$\int_V \{P_a\}^T \{E_b\} dV = \int_V \{f_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{u_b\} dS$$

Il lavoro interno delle kettoni teunici per deformazioni è uguale al lavoro esterno delle forze esterne per gli spostamenti.

$$L_{vi} = L_{ve}$$

Considero un corpo nello spazio soggetto a forze di volume $\{f\}$ e di superficie $\{p\}$.

Il corpo è vincolato in una certa zona della superficie (spostamenti nulli) ma per il resto è soggetto ad un campo di spostamenti $\{u\}$.

Il corpo è in equilibrio sotto l'azione delle forze che generano questi spostamenti

$$\{f\} ; \{p\} \longrightarrow \{u\}$$

Se incrementiamo di una quantità infinitesima le forze di volume e superficie che generano un campo incrementale di spostamenti

$$\{f\} + \{df\} ; \{p\} + \{dp\} \longrightarrow \{u\} + \{du\}$$

Questi spostamenti ed incrementi producono delle tensioni $\{\sigma\}$, delle deformazioni $\{\epsilon\}$ e i loro relativi incrementi.

$$\{\sigma\} + \{d\sigma\} ; \{\epsilon\} + \{d\epsilon\}$$

Applico il Principio dei lavori virtuali considerando:

$\{f\}, \{p\}, \{\sigma\}$ SISTEMA STATICAMENTE AMMISSIBILE

$\{du\}, \{d\epsilon\}$ SISTEMA CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE

L'incremento di lavoro esterno

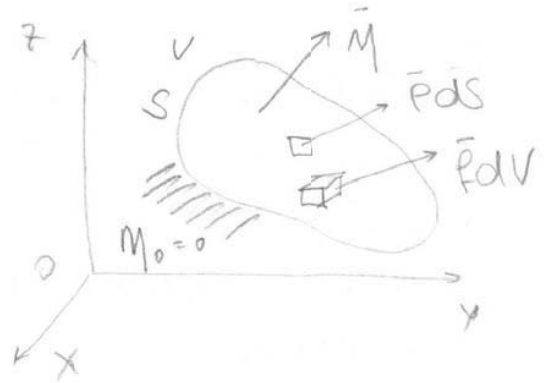
$$dL_e = \int_S \{p\}^T \{du\} dS + \int_V \{f\}^T \{du\} dV$$

ricordando che $(\{df\}^T \{du\})$ e $(\{dp\}^T \{du\})$ sono infinitesimi di ordine superiore, trascurabili

L'incremento di lavoro interno

$$dL_i = \int_V \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} dV$$

Per il PLV: $dL_e = dL_i$

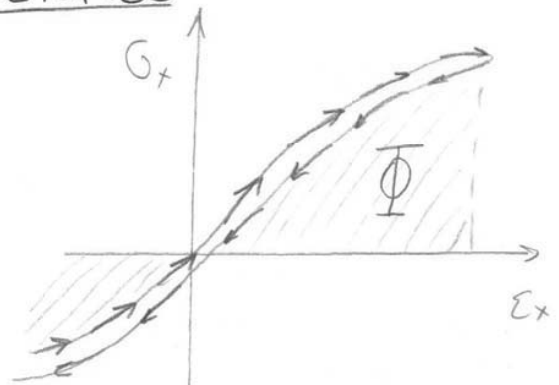


Si chiama potenziale elastico perché se eseguo la derivata della funzione di stato ottengo le tensioni

CASO UNIDIMENSIONALE: SOLIDO ELASTICO

Se considero la funzione del potenziale elastico come una funzione ad una sola variabile

$$\Phi = \Phi(\epsilon_x) ; \sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$$



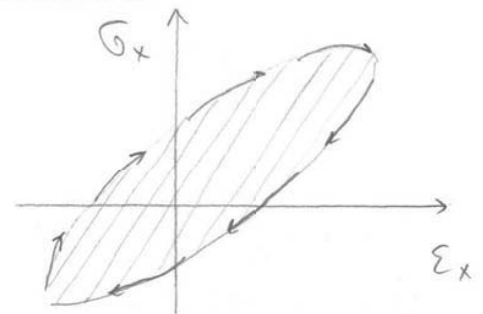
Per ogni valore di ϵ ho 1 solo valore di σ .

Caricando e scaricando il corpo, percorrono SEMPRE la curva del potenziale elastico nel piano $\epsilon - \sigma$.
 Il potenziale elastico è l'area sottesa alla curva.

Se scarico il corpo non c'è dissipazione d'energia

CASO UNIDIMENSIONALE: SOLIDO ANELASTICO

Nel solido anelastico, per ogni valore di ϵ_x esistono più valori di σ_x e Φ_x e questo si deduce quando, scaricando il corpo, non percorrono più la curva $\sigma_x - \epsilon_x$ che ho percorso durante il caricamento.



Ho delle deformazioni residue e le dissipazioni d'energia provocano una restituzione solo parziale del lavoro di deformazione.



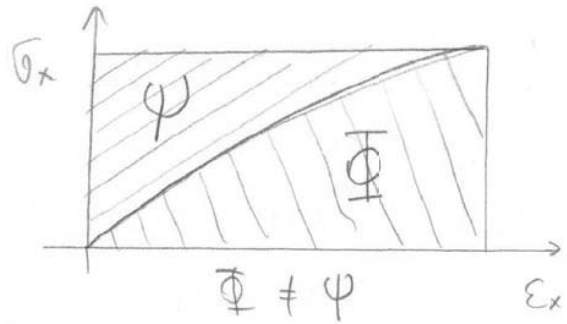
→ COMPORTAMENTO ISTERETICO

A volte la dissipazione d'energia è irreversibile (termostati).

15/6

CASO FUNZIONE NON LINEARE

Φ = potenziale elastico, area sottesa alla curva $\epsilon_x - \sigma_x$ rispetto l'asse ϵ_x



Ψ = potenziale elastico complementare, area sottesa alla curva $\epsilon_x - \sigma_x$ rispetto l'asse σ_x

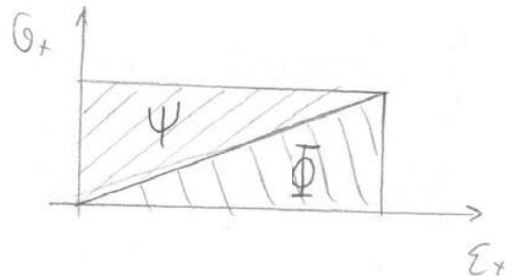
$\Phi + \Psi = \sigma \cdot \epsilon$ area del rettangolo

Processo che si ottiene solo con deformazioni (σ) costanti (esempio nello viscoelasticità).

CASO FUNZIONE LINEARE

L'elasticità lineare si ha quando il legame tra $\sigma - \epsilon$ è lineare

$$\Psi = \Phi$$



ELASTICITÀ LINEARE

Nel caso delle funzioni lineari, potenziale elastico e potenziale elastico complementare sono uguali.

Considero la funzione potenziale elastico:

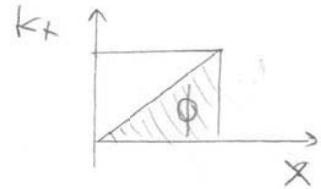
$$\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

La sviluppo in serie di Taylor nell'intorno dell'origine

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}) = & \Phi(0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 \epsilon_y^2 + \dots + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_z}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_z + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{xz} \gamma_{yz} \right\} + \dots \end{aligned}$$

I termini superiori al secondo ordine sono trascurabili!

la molla appare una forza elastica
che cresce linearmente con x .

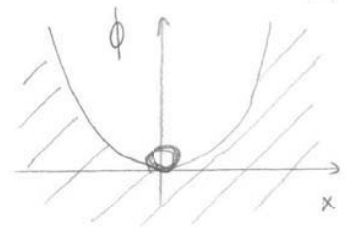


l'energia potenziale elastica

$$\phi = \frac{1}{2} kx^2$$

la forza elastica

$$F = \frac{d\phi}{dx} = kx$$



la funzione potenziale elastico nel caso di oscillatore
armonico ha una BUCCA DI POTENZIALE per $x=0$

la funzione dell'oscillatore armonico è uguale allo
sviluppo di McLaurin nelle 3 dimensioni.

la matrice Hessiana e la Jacobiana delle ϕ derivate
prime della funzione ϕ .

$$\phi = \frac{1}{2} kx^2 \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \{ \epsilon \}$$

Se considero $[H] = k$ e $\{ \epsilon \} = x$

$$\frac{d\phi}{d\epsilon} = [H] \{ \epsilon \} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{d\epsilon} = \{ \sigma \} \quad \begin{array}{l} \text{DIMOSTRATO} \\ \text{PRECEDENTEMENTE} \end{array}$$

$$\boxed{\{ \sigma \} = [H] \{ \epsilon \}} \quad \text{come } F = kx$$

la nuova espressione del potenziale elastico

$$\boxed{\phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \}}$$

ϕ è una forma quadratica degli spostamenti.

La matrice Hessiana dev'essere definita positiva perché
quando si ha il minimo di ϕ , la derivata seconda
in $x=0$ dev'essere positiva (punto di minimo).

Una matrice è positiva quando è positivo il suo
determinante e lo sono anche quelli di TUTTI i suoi
minori principali.

Oltretempo nel caso di problema elastico lineare unilaterale
di 9 equazioni in 9 incognite

INCOGNITE : $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, u, v, w$.

Rivoluzione:

- L'equazione della statica $[\delta]^T \{P\} = - \{R\}$
 $\{R\}$ forze di volume

- L'equazioni staticamente ammissibili:

$$\{ \delta \} = [H] \{ \epsilon \}$$

- le 3 equazioni cinematicamente ammissibili:

$$\{ \epsilon \} = [\delta] \{ u \}$$

Introducendo a ritorno queste equazioni ottengo

$$([\delta]^T [H] [\delta]) \{ u \} = - \{ R \}$$

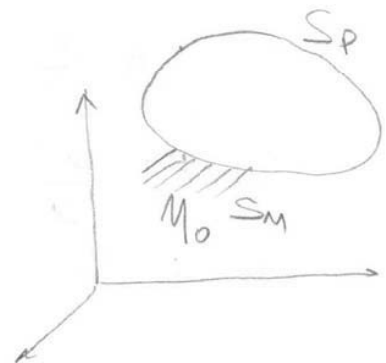
Se ho noto il legame tra tensioni e deformazioni
pono esprimere l'equazioni indefinite d'equilibrio:

OPERATORE DI LAME $[L] = [\delta]^T [H] [\delta]$ $3 \times 3 = 3 \times 6 \quad 6 \times 6 \quad 3 \times 3$

$$[L] \{ u \} = - \{ R \}$$

Ricordando le equazioni di
equivalenza alla superficie

$$[W]^T \{ \delta \} = \{ P \}$$



e rappresentando le ene volgaris in una porzione
Sp della superficie esterna del corpo e delle nella
porzione vincolata Sm ma rispetto al corpo
completamente di spostamenti $\{ u_0 \}$

$$[W]^T [H] \{ \epsilon \} = \{ P \}$$

• PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

[Applico una forza e ottengo una deformazione]

Considero un sistema di sollecitazioni $\{F_a\}$, $\{P_a\}$, $\{M_{0a}\}$ che genera un campo di spostamenti $\{U_a\}$ e genera i campi deformativi $\{\epsilon_a\}$ e tensionali $\{\sigma_a\}$

$$\{F_a\}; \{P_a\}; \{M_{0a}\} \rightarrow \{U_a\}; \{\epsilon_a\}; \{\sigma_a\}$$

Se considero un altro sistema di sollecitazioni $\{F_b\}$; $\{P_b\}$; $\{M_{0b}\}$, che genera i campi $\{U_b\}$; $\{\epsilon_b\}$; $\{\sigma_b\}$.

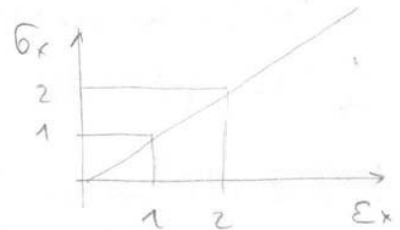
$$\{F_b\}; \{P_b\}; \{M_{0b}\} \rightarrow \{U_b\}; \{\epsilon_b\}; \{\sigma_b\}$$

Allora la loro somma:

$$\begin{aligned} \{F_a\} + \{F_b\}; \{P_a\} + \{P_b\} &\rightarrow \{U_a\} + \{U_b\}; \{\epsilon_a\} + \{\epsilon_b\} \\ \{M_{0a}\} + \{M_{0b}\} &\hspace{15em} \{\sigma_a\} + \{\sigma_b\} \end{aligned}$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti significa avere un legame lineare tra σ e ϵ .

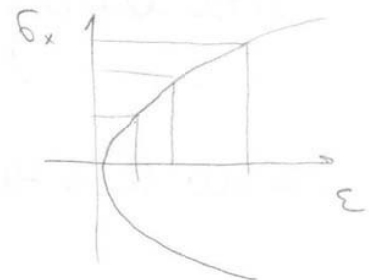
Raddoppiando σ , raddoppia ϵ
 Diminuendo σ , diminuisce anche ϵ .



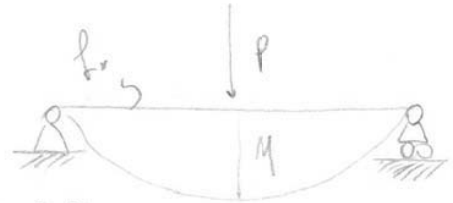
Se consideriamo l'elasticità lineare

$$\Phi = \Psi.$$

In questo caso se raddoppio / dimento σ non raddoppio / dimento ϵ : questo tipo di legame non è lineare.



TEOREMA DI CLAPEYRON (1825)



Considero un corpo elastico (trave) in cui applico delle forze concentrate (\$P\$) e delle forze di volume (\$f_x\$ = peso proprio della trave).
 Se immagino di applicare molto lentamente queste forze, il sistema elastico subirà degli spostamenti \$\{y\}\$ e si genereranno delle sollecitazioni \$\{\sigma\}\$ e tensioni \$\{\epsilon\}\$.

Applico il Principio dei Lavori Virtuali:

$$\int_V \{f\}^T \{y\} dV + \int_S \{P\}^T \{y\} dS = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

Considero che le forze concentrate siano staticamente ammissibili e le forze di volume cinematicamente ammissibili.
 Moltiplico per il fattore \$1/2\$

$$\frac{1}{2} \int_V \{f\}^T \{y\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P\}^T \{y\} dS = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

inoltre il solido è elastico lineare.

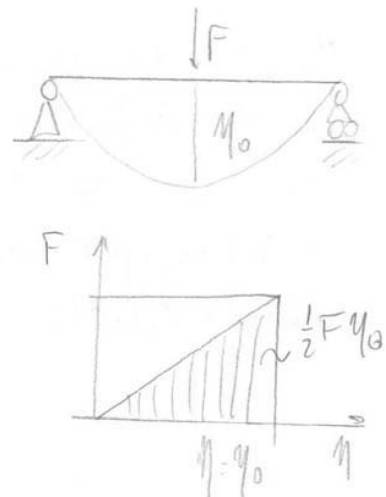
$$\frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \int_V \phi dV$$

Il Teorema di Clapeyron dice che il lavoro di deformazione nel solido elastico compiuto dai carichi applicati lentamente è pari alla metà del lavoro che tali forze compierebbero se mantenessero il loro valore finale durante tutto il loro percorso di carico.

$$\left| \frac{1}{2} \int_V \{f\}^T \{y\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P\}^T \{y\} dS = \int_V \phi dV \right|$$

Se considero una trave soggetta ad un carico concentrato in un punto, per il Teorema di Clapeyron, il lavoro di deformazione compiuto nella trave:

$$L_{def} = \int_0^{l_0} F(y) dy = \frac{1}{2} F y_0$$



Se applico le forze al continuo, prima B e poi A

$$L_{B+A} = L_B + L_A + L_{BA'}$$

$$L_{BA'} = \int_V \epsilon_{Bij} \epsilon_{Maj} dV + \int_S \epsilon_{Bij} \epsilon_{Maj} dS$$

$L_{BA'}$: lavoro mutuo delle forze A per gli spostamenti B.

Il lavoro totale di deformazione NON dipende dal modo di carico né dall'ordine delle forze, quindi per il Teorema di Betti dev'essere l'uguaglianza dei lavori mutui

$$\boxed{L_{AB} = L_{BA'}}$$

In generale i lavori mutui di 2 sistemi di forze sono uguali tra loro e differenti da zero.

Se i lavori mutui sono entrambi nulli, il principio di sovrapposizione degli Effetti vale anche per il lavoro di deformazione solo se i sistemi di forze sono **ENERGETICAMENTE ORTOGONALI**.

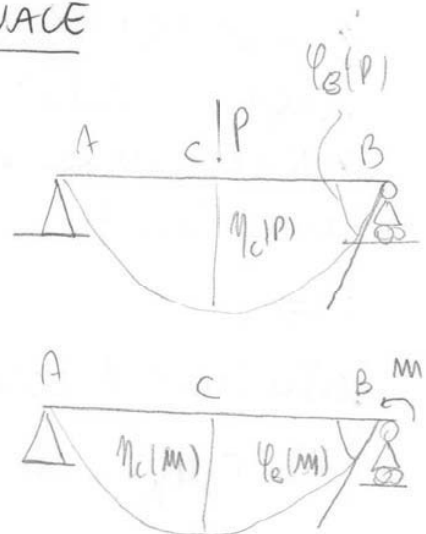
Se il sistema delle forze A e delle forze B NON sono energeticamente ortogonali non posso applicare il Principio di sovrapposizione degli effetti.

SISTEMA ENERGETICAMENTE NON ORTOGONALE

Considero una trave soggetta ad una forza concentrata in maniera e considero la stessa trave soggetta ad un momento m all'estremità.

Il lavoro mutuo:

$$P \eta_c(m) = m \varphi_B(P)$$



ISOTROPIA

Un corpo deformabile è considerato isotropo, oltre che linearmente elastico, quando le proprietà meccaniche sono considerate identiche in ogni direzione uscente dal generico punto P, non emittendo delle direzioni preferenziali.

Il potenziale elastico è funzione delle tensioni principali e non dell'orientazione del sistema di riferimento

$$\psi = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

ψ è una forma quadratica delle componenti di tensione.

$$\psi = \{\sigma\}^T [M]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2E} \{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\}}$$

$(1/2E)$, (-2ν) sono i coefficienti che moltiplicano i quadrati e i prodotti misti.

Dai 21 coefficienti originali ora abbiamo (E, ν) che sono caratteristiche meccaniche del materiale.

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} J_I = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ J_{II} = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ J_{III} = \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{array} \end{array}$$

Dal tensore $[\sigma]$ esistono i 3 invarianti

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2E} \{J_I^2 + 2J_{II}(1+\nu)\}}$$

Sostituendo gli invarianti.

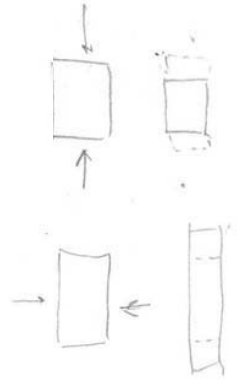
$$\psi = \frac{1}{2E} \{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)(1+\nu)\}$$

Sviluppando il quadrato e semplificando

$$\psi = \frac{1}{2E} \{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\}$$

In forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$



$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

la sua relazione inversa:

$$\frac{1}{2G} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = 2G \cdot [H] \{\epsilon\}$$

la matrice Hertziana e la sua inversa devono essere definite positive per avere un minimo assoluto del lavoro di deformazione in condizione indeterminata.

$$\Phi = \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} \quad \text{POTENZIALE ELASTICO}$$

$$\Psi = \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\} \quad \text{POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE}$$

le funzioni hanno un minimo assoluto quando la derivata risulta e' positiva

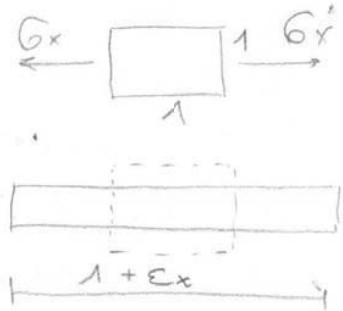
$$L [H], [H]^{-1} > 0$$

Il coefficiente ν rappresenta il rapporto tra le dilatazioni indotte nelle direzioni ortogonali a quella di sollecitazione e la dilatazione nella direzione di sollecitazione.

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right| \quad \sim \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

ν = COEFFICIENTE DI POISSON

la variazione di volume nel solido nelle 3 dimensioni; a meno di infinitesimi di ordine superiore:



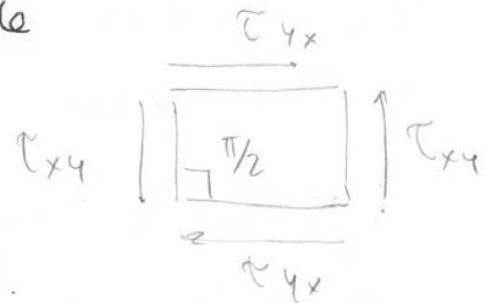
$$\frac{V - V'}{V} = \frac{1 - (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)}{1} = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu)}$$

- Se $\nu = 0$ c'è variazione di volume
- Se $\nu = \frac{1}{2}$ non c'è variazione di volume
- Se $\nu < 0$ n'avrebbe un'espansione e questo nel nostro caso non è fisicamente possibile

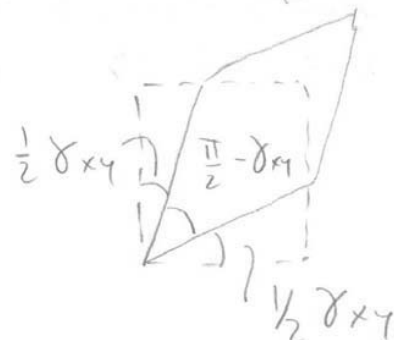
Questa equazione ci fa capire le limitazioni del coefficiente di Poisson ΔV e σ hanno segno concorde

B) Considero un parallelepipedo soggetto alla sola tensione tangenziale τ_{xy} ($\tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$).



$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



RESISTENZA E DUTTILITA' DEI MATERIALI

LEGGERE ENERGIA DI FRATTURA

MATERIALE DUTILE (a)

Il materiale ha degli ampi tratti non lineari nel diagramma (σ - ϵ) prima di rottura.

I metalli (acciai) arrivano a rottura quando lo ampio tratto di scorrimento ha i piani atomici e cristallini; superficie di rottura fibrosa

MATERIALI FRAGILI (b)

la rottura del materiale è istantanea

Rocce e CIS hanno una rottura immediata ed un ampia superficie di rottura

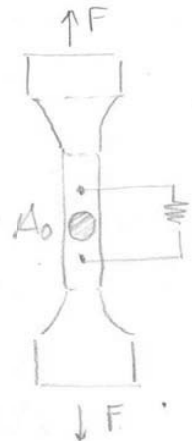
RAPPORTO $\frac{\text{TRAZIONE}}{\text{COMPRESSIONE}}$

(a) $\frac{T}{C} \approx 1$ b $\frac{T}{C} \approx \frac{1}{10} ; \frac{1}{100}$

• PROVA DI TRAZIONE UNIASSIALE

la resistenza è inversamente proporzionale alle dimensioni del provino infatti un provino grande è meno resistente di un provino piccolo perché ha più possibilità di rottura: EFFETTI DI SCALA.

A_0 = area iniziale del provino



I provini / barre vengono applicati con delle ganasce alla macchina di prova e sono muniti di:

- Turno le deformazioni delle ganasce, in via qualitativa perché non sono precise
- Turno la deformazione del provino con delle barrette estensimetriche

TENSIONE NOMINALE $\sigma = \frac{F}{A_0}$

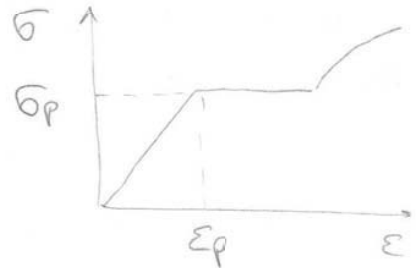
DILATAZIONE CONVENZIONALE $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Più un materiale è duttile e maggiore sarà il suo allungamento a rottura e maggiore sarà l'area nel diagramma (σ - ϵ).

Se la prova viene condotta solo guidando il cono, e non la deformazione, in U ha la rottura.

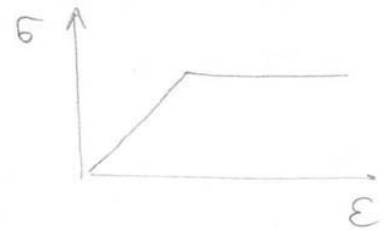
MATERIALE ELASTO PLASTICO INCRUDENTE

È quel materiale che ha una zona dove a parità di σ_p ha una deformazione plastica lineare



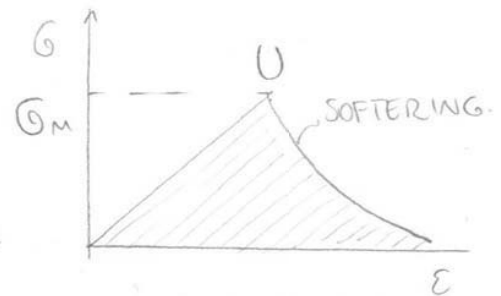
MATERIALE PERFETTAMENTE PLASTICO

Quando non si riesce a definire perfettamente σ_p , $\epsilon_p \approx 2\%$ della deformazione di rottura.



INCRUDIMENTO NEGATIVO

Con le medesime macchine sono guidare il noceno di cono con la deformazione.



L'energia può venire dissipata.

In materiale fragile può essere più o meno duttile a seconda del comportamento delle curve

L'energia di rottura non dipende dalle scale del materiale ma è una sua proprietà.

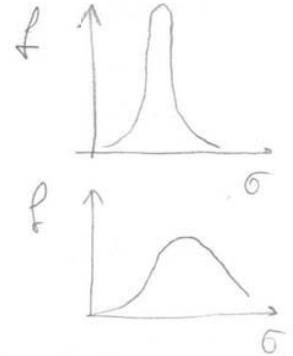
Guardando l'apertura di fratture e l'allungamento sono trovare l'area dell'energia di frattura.

la tensione ammissibile si ottiene dividendo le espressioni dei materiali duttili e fragili per il coefficiente di sicurezza

$$\left| -\frac{\sigma_p}{S} < \sigma < \frac{\sigma_p}{S} \quad -\frac{\sigma_c}{S} < \sigma < \frac{\sigma_y}{S} \right|$$

Per i materiali duttili (ACCIAI) ho una gaussiana alta e stretta: $S \approx 1,5$

Per i materiali fragili ho una gaussiana molto più ampia: $S = 6 \div 10$.



Oggi vengono usati dei criteri semi-probabilistici MA questo metodo viene usato nelle prime fasi del progetto.

la tensione ammissibile è un metodo NON ASSIALE

• TENSIONE EQUIVALENTE (METODO PLURIASSIALE)

Questo è un metodo PLURIASSIALE che permette di correlare gli stati tensionali biassiali e triassiali con gli stati tensionali uniaxiali (uniaxiali / monoassiali).

la tensione ideale o equivalente è funzione di tutte le sollecitazioni che agiscono sul punto dello spazio

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) < \sigma_p$$

e dev'essere inferiore alla tensione ammissibile per un certo tipo di materiale

1- CRITERIO DI TRESCA (MATERIALI DUTILI)

2- CRITERIO DI COULOMB (MATERIALI FRAGILI)

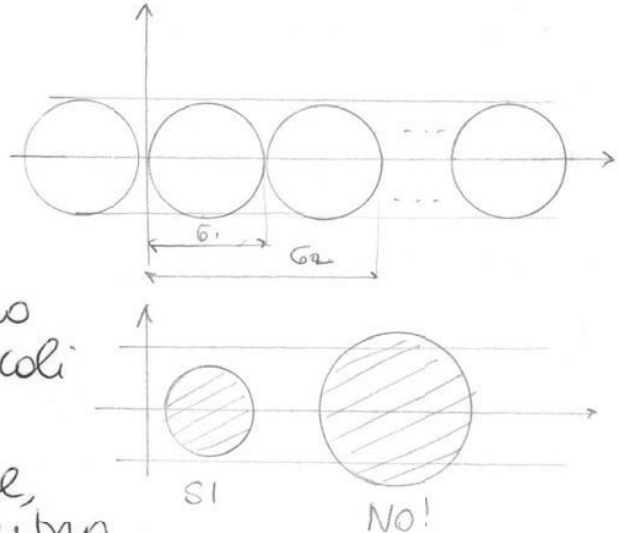
3- CRITERIO DI VON-MISES (TUTTI I MATERIALI)

critero più preciso perché tiene conto dell'effettivo comportamento del materiale (È PIÙ SICURO)

$\hat{\sigma}_p$: TENSIONE TANGENZIALE DI PLASTICIZZAZIONE, ottenuta dalla prova di sollecitazione monoassiale

$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_1 - \sigma_3| ; |\sigma_2 - \sigma_3| \}$ TENSIONE EQUIVALENTE DI TRESCA

Il dominio di resistenza nel piano di Mohr, con $\hat{\sigma}_{max} < \hat{\sigma}_p$



è rappresentato da una striscia whitata all'interno della quale ci sono tutti i cerchi ammissibili.

Per ogni stato di sollecitazione, se i cerchi sono contenuti dentro la banda, la struttura è sicura; se i cerchi sono più grandi della banda la struttura non è sicura.

• STATO PIANO DI TENSIONE (BIDIMENSIONALE)

Lo stato piano n ha quando una tensione è nulla ($\sigma_3 = 0$)

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_1| ; |\sigma_2| \} < \hat{\sigma}_p$$

Si ricavano 3 disuguaglianze:

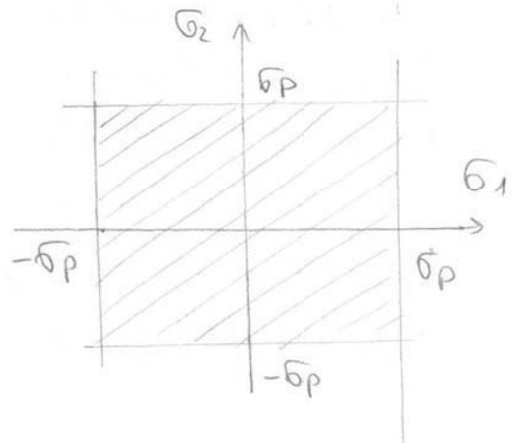
$$|\sigma_1| < \hat{\sigma}_p \quad |\sigma_2| < \hat{\sigma}_p \quad |\sigma_1 - \sigma_2| < \hat{\sigma}_p$$

CRITERIO DI RANKINE (TENSIONE MASSIMA NOMINALE)

Il dominio di resistenza determinato dalle 2 equazioni è un quadrato

$$-\hat{\sigma}_p < \sigma_1 < \hat{\sigma}_p$$

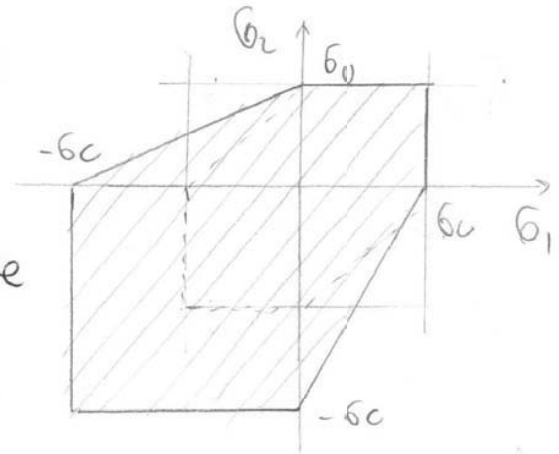
$$-\hat{\sigma}_p < \sigma_2 < \hat{\sigma}_p$$



STATO PIANO DI TENSIONE ($\sigma_1, -\sigma_2$)

Il criterio di Coulomb ha un inconveniente con parte di compressione ed area maggiore del criterio di Tresca.

σ_0 = TRAZIONE σ_c = COMPRESSIONE



C) CRITERIO DI VON-MISES CRITERIO ENERGETICO

Criterio della minima Energia di Distorsione.

Ricordando che il tensore $[\sigma]$ è formato dal tensore isotropico $[\sigma_i]$ e deviatorico $[\sigma_d]$.

$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad [\sigma_d] = \begin{bmatrix} (\sigma_1 - \bar{\sigma}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \bar{\sigma}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \bar{\sigma}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \text{ è la tensione media.}$$

$[\sigma_i]$ provoca le variazioni di volume

$[\sigma_d]$ provoca la rottura del materiale

Ricordando il potenziale elastico (Φ) e il potenziale elastico complementare (Ψ)

$$\Psi = \Phi = \frac{1}{2E} \{ J_I^2 + 2 J_{II} (1 + \nu) \}$$

J_I e J_{II} sono gli invarianti di $[\sigma]$

$$\Psi = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

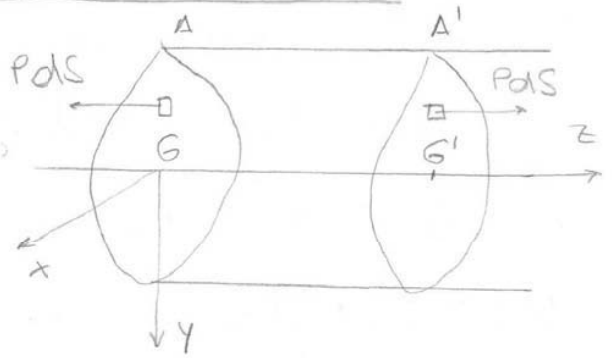
Se considero il caso del tensore deviatorico, il primo invariante è nullo

$$J_I = (\sigma_1 - \bar{\sigma}) + (\sigma_2 - \bar{\sigma}) + (\sigma_3 - \bar{\sigma}) = 0$$

$$J_{II} = - [(\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma}) + (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) + (\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma})]$$

IL SOLIDO DI SAINT VENANT

Considero una sezione generica di baricentro G e 2 assi centrali (x, y)



ASSI CENTRALI: gli assi sono baricentrici e centrali con il momento d'inerzia misto nullo.

Limite di far traslare la sezione ortogonalmente al piano considerato ed ottengo un solido cilindrico con sistema di riferimento distorto centrato.

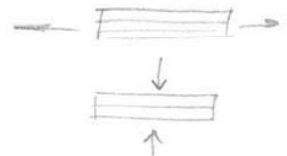
CARATTERISTICHE SOLIDO SAINT-VENANT

1) IL MATERIALE è elastico, lineare, isotropo ed omogeneo, c'è la proporzionalità tra sforzo (σ) e deformazione (ϵ) .

ISOTROPO: per ogni punto (E, ν, G) costanti in ogni direzione del punto

OMOGENEO: le 3 caratteristiche valgono per ogni punto P .

Un materiale non isotropo è il legno che ha diversi valori di (E, ν, G) se soggetto a sforzi di trazione o compressione.



2) FORZE il corpo è soggetto solo a forze di superficie applicate sulle basi estreme (A, A') mentre forze di volume e carichi applicati sono nulli.

$$\{F\} = \{0\}$$

$$\{P_{LATERALE}\} = \{0\}$$

L'equazione di Love:

$$[L] \{u\} + \{F\} = \{0\}$$

Ai fini del calcolo della Tensione e Deformazione, se mi metto ad una sufficiente distanza, detta DISTANZA DI OMOGENIZZAZIONE, dalla base caricata, lo studio dello stato deformativo e tensionale può essere fatto in funzione della risultante $\{R\}$ delle forze agenti nella base e del momento risultante $\{M\}$ delle forze rispetto al baricentro della base considerata. Non quando la reale distribuzione di forze e momenti.

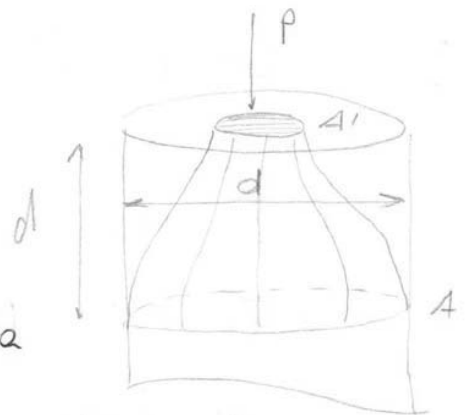
Per un solido compatto la distanza di omogeneizzazione è pari alla dimensione maggiore delle dimensioni della sezione (se $h > b$ scelgo h).

$$\int_A \{t_z\} dA = \int_A \{P\} dA = \{R\}$$

$$\int_A \{R\} \wedge \{t_z\} dA = \int_A \{R\} \wedge \{P\} dA = \{M\}$$

Se avremo avuto dei momenti applicati li avremo avuti.

In questo caso gli sforzi non rimangono collineari con la forza e ad una certa distanza (d), gli sforzi occupano tutta l'area $A \gg A'$



Alla distanza d lo sforzo occupa tutta l'area e non vado a vedere ciò che accade oltre; il problema è lungo di vedere se hanno sezioni molto piccole ($A \gg A'$) ma mi è venuto in mente di distribuire.

CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

la risultante ha componenti lungo gli assi centrali x, y .

$R_x = T_x$ SFORZO TAGLIANTE SECONDO l'ASSE x

$R_y = T_y$ SFORZO TAGLIANTE SECONDO l'ASSE y

$R_z = N$ SFORZO NORMALE



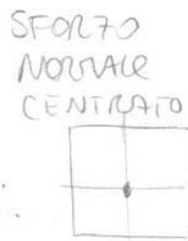
B) SOLLECITAZIONI COMPOSITE

Cerco di capire gli sforzi in modo logico

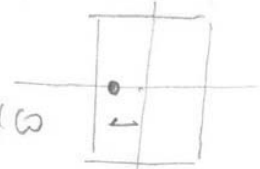
- N, M_x, M_y SFORZO NORMALE ECCENTRICO

Ho tutte 3 le combinazioni: $N + M_x, N + M_y, N + M_x + M_y$

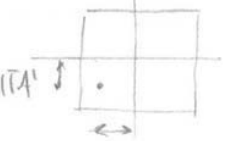
ECCENTRICO: lo sforzo normale non è applicato nel baricentro e moduma 1 o 2 momenti.



SFORZO NORMALE ECCENTRICO



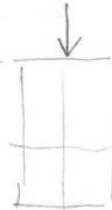
DOPPIA ECCENTRICITÀ



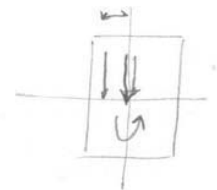
- T_x, T_y, M_z TAGLIO DEVIATO

Ho tutte e 3 le combinazioni:

SOLLECITAZIONE SEMPLICE



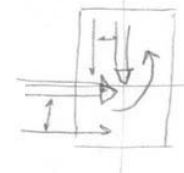
MOMENTO TORCENTE



$T_x + M_z, T_y + M_z, T_x + T_y + M_z$

Possò avere contemporaneamente i 2 tagli o taglio e momento.

DOPPIO MOMENTO TORCENTE

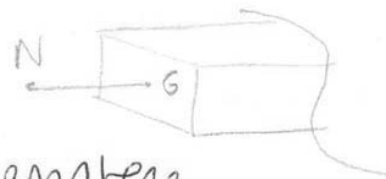


Se il taglio non passa per il baricentro ho un momento torcente

- $M_x + M_y, N = \phi$ FLESSIONE DEVIATA

SFORZO NORMALE CENTRATO

La forza risultante N è applicata nel baricentro: tutta la sezione deve rimanere allo stesso in maniera uniforme.



Si ipotizza a priori uno stato tensionale e si verifica che tale soluzione soddisfi tutte le equazioni del problema elastico.

le 3 deformazioni non sono nulle

$\epsilon_z = f(A, N, E)$ dipende dal materiale perché
 E rappresenta il modulo di Young

$\epsilon_x = \epsilon_y = f(A, N, E, \nu)$ per queste due deformazioni
 abbiamo le oltre alla deformazione assiale ϵ_z
 c'è una deformazione trasversale opposta
 a quella principale dove ν è il coefficiente
 di Poisson, $0 < \nu < 0,5$

la deformazione trasversale è minore della principale
 $\nu_{ACCIAIO} = 0,3$ $\nu_{ALU} = 0,18$

Dalle equazioni cinematiche, integrando il campo
 deformativo, ottengo il campo degli spostamenti

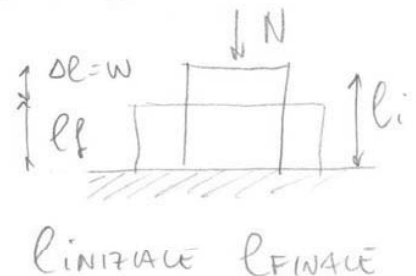
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left. \begin{array}{l} u = -\nu \frac{N}{EA} x + u_0 \\ v = -\nu \frac{N}{EA} y + v_0 \\ w = \frac{N}{EA} z + w_0 \end{array} \right.$$

(u_0, v_0, w_0) è il campo di spostamento, valore costante
 che non genera delle deformazioni perché sono
 associate ad un campo di spostamenti rigido.

$$w(z=l) = \frac{N}{EA} \cdot l = \epsilon_z \cdot l$$

$w(z=0) = 0$, non ho spostamenti

$$\boxed{l_{FW} = l_{IN} (1 + \epsilon_z)}$$



$$w = \Delta l = \epsilon_z \cdot l_i$$

$$w = l_f - l_i = \epsilon_z l_i \quad \sim \quad l_f = l_i (1 + \epsilon_z)$$

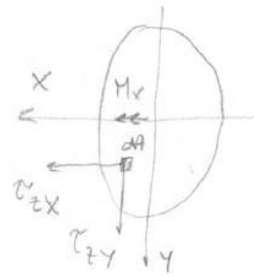
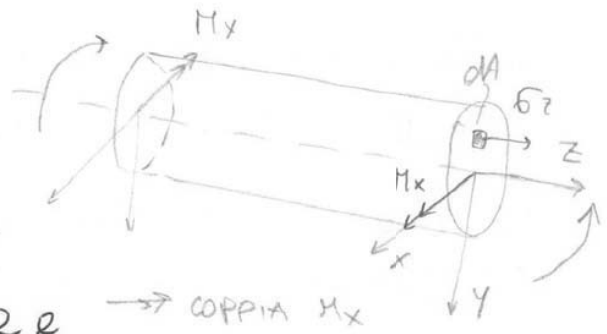
FLESSIONE RETTA

Considero una trave sollecitata da una coppia M_x che è soggetta ad un momento esterno.

La trave è sollecitata in flessione e considero un'area dA soggetta solo alla tensione σ_z .

Lo stato di deformazione della trave è rappresentato dal campo tensionale σ_z finito a priori come una funzione lineare nella sezione trasversale.

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= ax + by + c \neq 0 \end{aligned}$$



IPOTESI DI BERNOLLI-NAVIER:

Le sezioni a deformazione avvenuta restano piane e non vi hanno dei rimbombamenti.

Per determinare le costanti di σ_z usiamo le condizioni al contorno, equazioni della statica sulle superfici laterali, ricordando che gli assi xy della figura sono baricentrici.



$$\int_A \rho \, dA = \{R\}$$

$$\int_A \rho \cdot \rho \, dA = \{M\}$$

Esplanto le condizioni al contorno in 2 gruppi:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_A \sigma_z \, dA &= N = 0 \\ \int_A \tau_{zx} \, dA &= \bar{T}_x = 0 \\ \int_A \tau_{zy} \, dA &= \bar{T}_y = 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \int_A \sigma_z \cdot x \, dA &= M_y = 0 \\ \int_A \sigma_z \cdot y \, dA &= M_x \neq 0 \\ \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \, dA &= M_z = 0 \end{aligned} \right.$$

Escludo le espressioni con le tensioni tangenziali τ

$$\left\{ \begin{aligned} \int_A \sigma_z \, dA &= N = 0 \\ \int_A \sigma_z \cdot x \, dA &= M_y = 0 \\ \int_A \sigma_z \cdot y \, dA &= M_x \neq 0 \end{aligned} \right.$$

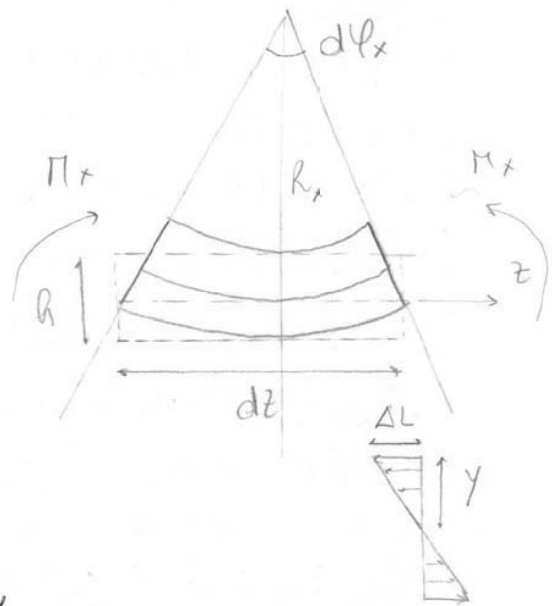
La soluzione puntuale soddisfa identicamente le equazioni indefinite di equilibrio e di equivalenza, e tramite le equazioni costitutive elastiche, fornisce il seguente campo deformativo

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{E I_x} y$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Consideriamo una trave di lunghezza dz e valutiamo come si deforma. A deformazione avvenuta la trave diventa un arco di circonferenza.



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Per l'ipotesi delle sezioni piane:

$$\frac{dz}{R_x} = \frac{\Delta l}{y} = d\phi_x \quad \frac{\Delta l}{dz} = \frac{y}{R_x} = \varepsilon_z$$

$\chi_x = \frac{1}{R_x}$ CURVATURA DELLA TRAVE dovuta alle flessioni rette

$$\chi_x = \frac{1}{R_x} = \frac{\varepsilon_z}{y} = \frac{\sigma_z}{E} \frac{1}{y} = \frac{M_x}{E I_x}$$

$$\boxed{\chi_x = \frac{M_x}{E I_x} \quad \chi_y = \frac{M_y}{E I_y}}$$

Il lavoro di deformazione, applicando il Teorema di Clapeyron al tratto infinitesimo di trave:

$$dL = \frac{1}{2} M_x d\phi_x = \frac{1}{2} M_x \frac{dz}{R_x} = \frac{1}{2} M_x \chi_x dz$$

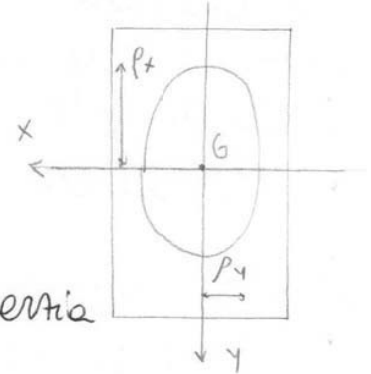
$$\boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{E I_x}}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} y + \frac{N e_x}{I_y} x$$

• ELLISSE CENTRALE D'INERZIA

Considero una sezione rettangolare larga dove il baricentro dell'ellisse coincide col baricentro della figura.



IRAGGI GIRATORI (p_x, p_y), raggi centrali d'inertia

$$p_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad ; \quad p_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Riscriviamo l'espressione della tensione σ_z

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{A p_x^2} y + \frac{N e_x}{A p_y^2} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y \cdot y}{p_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{p_y^2} \right)$$

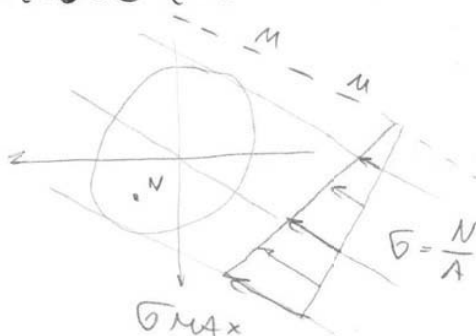
L'asse neutro è quella retta che annulla la tensione σ_z ed ha equazione:

$$1 + \frac{e_y \cdot y}{p_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{p_y^2} = 0$$

EQUAZIONE
ASSE NEUTRO

Per alte eccentricità l'asse neutro interseca la figura (le tensioni σ_z invertano il segno in di'etro).

Per basse eccentricità l'asse neutro non interseca la sezione (le tensioni σ_z sono tutte concordi).



è piccolo

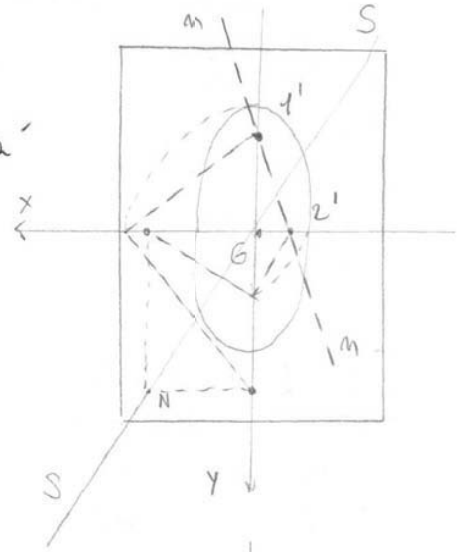
se N è dentro la figura, tutta la sezione è soggetta a trazione > compressione

la relazione dell'anti polarità ellittica è la relazione tra i punti della sezione ed i punti dell'ellisse, valida per ogni posizione di N.

CASO 4 $e_x = e_y \neq 0$

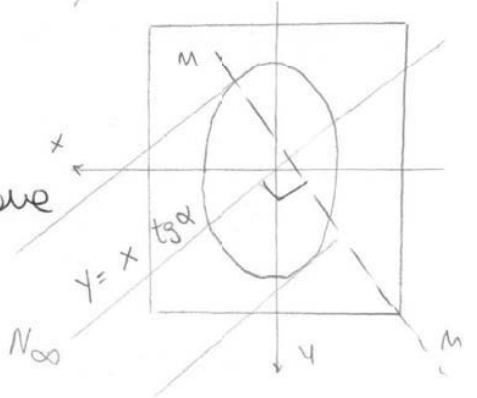
Quando ho tutte e due le eccentricità con N che cade nella sezione ho una FLESSIONE DEVIATA

S = axe di sollecitazione, NON è ortogonale all'axe neutro



CASO 5 $\frac{e_y}{e_x} = \text{tg } \alpha$ $e_x = e_y \rightarrow \infty$

FLESSIONE DEVIATA quando ho lo sfondo normale a distanza ∞ ho 2 rette parallele all'axe di sollecitazione. Queste due rette incontrano l'axe neutro che risulta ortogonale all'axe di sollecitazione (UNICO CASO). N_{∞}



L'equazione dell'axe di sollecitazione:

$$y = x \text{tg } \alpha$$

L'equazione dell'axe neutro

$$1 + \frac{e_y \cdot y}{\rho_x^2} + \frac{e_x \cdot x}{\rho_y^2} = 0$$

$$\frac{1}{e_x} + \frac{e_y \cdot y}{e_x \rho_x^2} + \frac{x}{\rho_y^2} = \frac{1}{e_x} + \frac{\text{tg } \alpha \cdot y}{\rho_x^2} + \frac{x}{\rho_y^2} = 0$$

con $e_x \rightarrow \infty$ $\frac{\text{tg } \alpha \cdot y}{\rho_x^2} + \frac{x}{\rho_y^2} = 0$ con $\frac{e_y}{e_x} = \text{tg } \alpha$

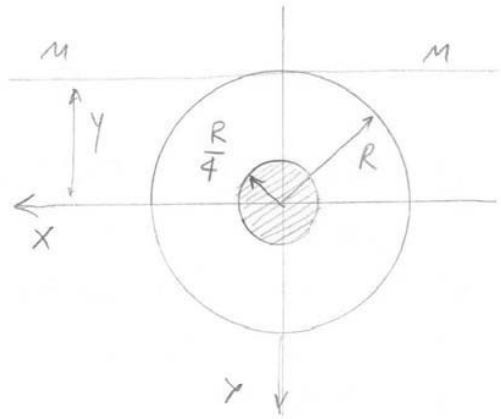
$$y = -\frac{x}{\rho_y^2} \cdot \frac{\rho_x^2}{\text{tg } \alpha} \therefore y = \text{tg } \alpha \cdot x$$

CIRCONFERENZA

$$P_x^2 = e_y \cdot Y = e_y \cdot R = \frac{I_x}{A}$$

$$\frac{I_x}{A} = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{1}{\pi R^2} = e_y \cdot R$$

$$e_x = e_y = \frac{R}{4}$$



Il nocciolo d'inerzia nella circonferenza è rappresentato da un cerchio con $e_x = e_y = R/4$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE

Si dimostra che le tre sollecitazioni N, M_x, M_y sono energeticamente ortogonali e il lavoro associato allo sforzo normale eccentrico sia pari alla somma dei lavori delle singole caratteristiche.

Il lavoro elementare di un tratto di trave infinitesimo: in funzione dello stato tensionale ($\sigma_z \neq 0$)

$$dL = \int_A \psi dA dz = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA dz$$

$$dL = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 dA dz =$$

$$dL = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M_x^2}{I_x^2} y^2 + \frac{M_y^2}{I_y^2} x^2 + 2 \frac{N}{A} \frac{M_x}{I_x} y - \right. \\ \left. - 2 \frac{N}{A} \frac{M_y}{I_y} x - 2 \frac{M_x}{I_x} y \frac{M_y}{I_y} x \right) dA dz =$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \left[\frac{N^2}{A} + \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} \right] + \frac{1}{E} \left[\frac{N M_x}{A I_x} S_x - \right. \\ \left. - \frac{N M_y}{A I_y} S_y - \frac{M_x M_y}{I_x I_y} I_{xy} \right]$$

Se gli assi x, y sono centrali

$$\boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \left[\frac{N^2}{A} + \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} \right]}$$

A) EQUAZIONI CINEMATICHE, dal campo di spostamento derivano il campo deformativo tramite queste equazioni:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} \neq 0 \quad \gamma_{zy} \neq 0$$

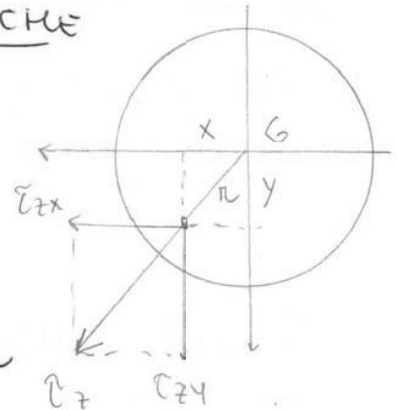
B) $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\theta z + \theta z = 0$

$\gamma_{xy} = 0$, la sezione ruota ma non si deforma
 Gli scorrimenti angolari presenti:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\theta y \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta x$$

C) Non gli scorrimenti angolari, sono ottenere le tensioni tramite le EQUAZIONI COSTITUTIVE ELASTICHE

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{zx} &= -G\theta y = \tau_{xz} G \\ \tau_{zy} &= G\theta x = \tau_{yz} G \end{aligned}$$



La tensione risultante:

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta \sqrt{x^2 + y^2} = G\theta r$$

G = caratteristica elastica

Le tensioni tangenziali nella sezione circolare sono direttamente proporzionali al raggio.

D) le EQUAZIONI INDEFINITE D'EQUILIBRIO sono soddisfatte dal campo tensionale

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -f_z = 0$$

E) le EQUAZIONI DI CONGRUENZA sulla superficie laterale sono soddisfatte dal campo tensionale

$$\tau_{zx} m_x + \tau_{zy} m_y = 0$$

$$-G\theta y m_x + G\theta x m_y = 0 \quad -y m_x + x m_y = 0$$

• ANGOLO DI TORSIONE UNITARIO

L'angolo di torsione unitario è la caratteristica deformativa relativa al momento torcente.

$$M_z = G \Theta I_p$$

$$\Theta = \frac{M_z}{G I_p}$$

Analogia con: • Nello sforzo normale: $\epsilon = \frac{N}{EA}$

χ = CURVATURA • Nello flettore: $\chi = \frac{M_x}{EI_x}$

• SFORZO TANGENZIALE

$$\tau_z = G \Theta r = \frac{M_z}{I_p} r$$

$$\tau_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Se il momento torcente è antiorario (positivo), il vettore $\{\tau_z\}$ genera sempre momento positivo rispetto al centro e seguira le linee di flusso circolari concentriche

Il valore massimo, con $I_p = \frac{\pi}{2} R^4$

$$\tau_z = \frac{2 M_z}{\pi R^3} r$$

$$\tau_{z \text{ MAX}} = \frac{2 M_z}{\pi R^3}$$

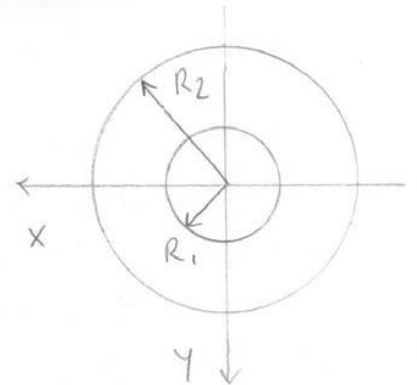


• CORONA CIRCOLARE

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$\tau_z = \frac{2 M_z}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} r$$

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{2 M_z}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} R_2$$

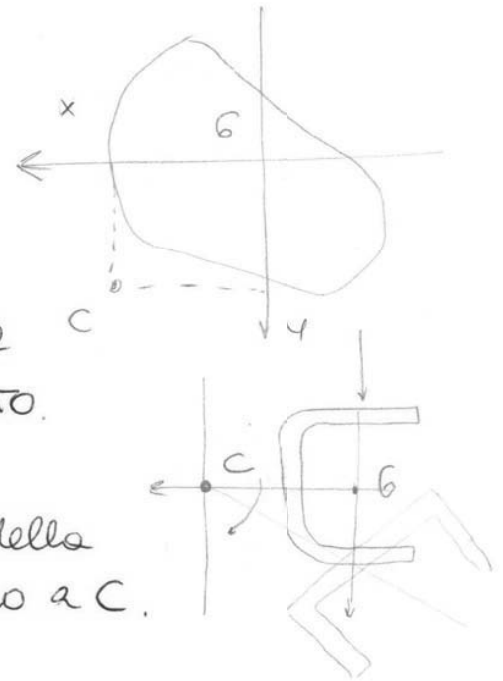


Pu' è grande R_2 e maggiore sarà il valore della tensione tangenziale massima. A parità di raggio massimo, la sezione cava è sottoposta ad una tensione inferiore della sezione circolare piena.

TORSIONE DELLE TRAVI DI SEZIONE GENERALE

Per le sezioni generiche, la torsione non fa ruotare la sezione attorno al baricentro MA attorno al CENTRO DI TORSIONE (C).

Quando le sezioni generiche ruotano non rimangono piane e nasce una FUNZIONE DI INGOMBAMENTO.



ESEMPIO

Se applico una forza nel baricentro della sezione a "C" essa ruoterà attorno a C.

A) Dalle EQUAZIONI CINEMATICHE

$$u = -\theta z (y - y_c)$$

$$v = \theta z (x - x_c)$$

$$w = \theta \omega(x, y)$$

ω = FUNZIONE INGOMBAMENTO, funzione di cui si informa sul fatto che le sezioni non restano piane

B) Dalle equazioni cinematiche, derivando, ottengo il campo deformativo.

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta(y - y_c) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \theta$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(x - x_c) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \theta$$

incognite: (x_c, y_c, ω)

C) Dalle deformazioni, mediante le EQUAZIONI COSTITUTIVE ELASTICHE, ottengo il campo delle tensioni

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$(S_x, S_y) = 0$ momenti statici nulli perché sono calcolati rispetto al baricentro.

Mettendo in evidenza le coordinate (x_c, y_c)

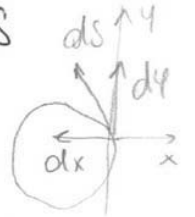
$$x_c = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial y} dA \quad y_c = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA$$

Per il Teorema di Green ho gli integrali circolari:

$$x_c = \frac{1}{A} \oint_C w m_y ds \quad y_c = -\frac{1}{A} \oint_C w m_x ds$$

con $-m_y ds = dx$ e $m_x ds = dy$

$$x_c = -\frac{1}{A} \oint_C w dx \quad y_c = -\frac{1}{A} \oint_C w dy$$



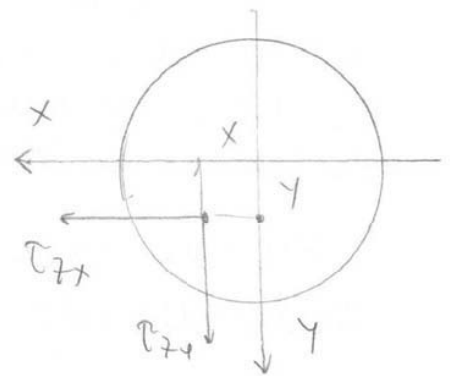
Sostituendo (x_c, y_c) nella condizione di equilibrio (2)

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} - y - \frac{1}{A} \oint_C w dy \right] m_x + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + x + \frac{1}{A} \oint_C w dx \right] m_y = 0$$

Dalla condizione di equilibrio sulle forze si ricava l'espressione del momento torcente

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \{ \tau_{zy} \wedge \tau_{zx} \} dA = \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA \\ &= 6\theta \int_A \left(x \frac{\partial w}{\partial y} + x^2 - x x_c - y \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 - y y_c \right) dA \end{aligned}$$

$S_x = 0$ $S_y = 0$



$$M_z = 6\theta \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} x + \frac{\partial w}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA = 6\theta I_{PT}$$

$$I_{PT} = \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} x - \frac{\partial w}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA \text{ è il momento}$$

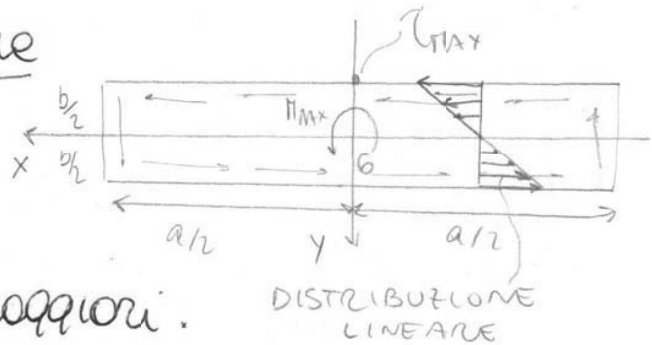
polare della sezione generica e può essere sia più grande che più piccolo del momento d'inerzia polare della sezione regolare

$$M_z = 6\theta I_{PT}$$

a/b	1	1,5	2	3	10	∞
α	4,80	4,33	4,06	3,74	3,20	3
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,312	$1/3$

SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE

Corso con $a/b \rightarrow \infty$, le linee di flusso del vettore $\{\tau_z\}$ sono curve chiuse con due nodi principali paralleli ai lati maggiori.



Il vettore $\{\tau_z\}$ presenta la sola componente τ_{zx} in gran parte della sezione e τ_{zy} solo nelle parti terminali.

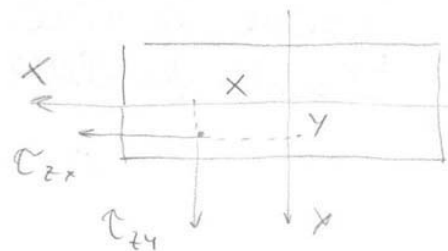
$$\tau_{zx} = - \frac{6M_z}{ab^3} y$$

con $y = \frac{b}{2}$ $\tau_{zMAX} = - \frac{3M_z}{ab^3} \cdot b = - \frac{3M_z}{ab^2}$

con $I_t = \frac{1}{3} ab^3$ $\tau_{zMAX} = \frac{M_z}{I_t} \cdot b$

Le sole tensioni τ_{xz} non sono sufficienti ad assicurare l'equivalenza con il momento torcente M_z .
Dimostriamolo:

$$M_z = \int_A (\tau_z \wedge \tau_z) dA = \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA$$



Trascuriamo il valore di τ_{zy} perché è piccolo rispetto a τ_{zx} , inoltre uniamo i coefficienti α, β .

$$M_z(\tau_{zx}) = - \int_A y \tau_{zx} dA = - \int_A y^2 \frac{6M_z}{ab^3} dA = \frac{6M_z}{ab^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cdot \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{6M_z}{ab^3} \cdot a \cdot \frac{b^3}{12}$$

$$M_z(\tau_{zx}) = \frac{M_z}{2}$$

Abbiamo dimostrato che non serve trovare il momento torcente dello i -esimo componente MA basta trovare il momento torcente totale, dividerlo per il momento d'inerzia torzionale totale e moltiplicarlo per il braccio i -esimo.

Il momento torcente i -esimo: $M_{z^i} = G I_{t^i} \theta$

Il momento torcente totale $M_z = G I_t \theta = \sum_{i=1}^n G I_{t^i} \theta$

con $I_t = \sum_{i=1}^n I_{t^i}$; $M_z = \theta G \sum_{i=1}^n I_{t^i} = \sum_{i=1}^n M_{z^i}$

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{z^i}$$

Il momento d'inerzia torzionale è pari alla somma dei singoli momenti d'inerzia torzionali.

Calcolo il momento torcente i -esimo

$$M_{z^i} = \frac{M_z}{I_t} \cdot I_{t^i} = M_z \cdot \frac{I_{t^i}}{\sum_{i=1}^n I_{t^i}}$$

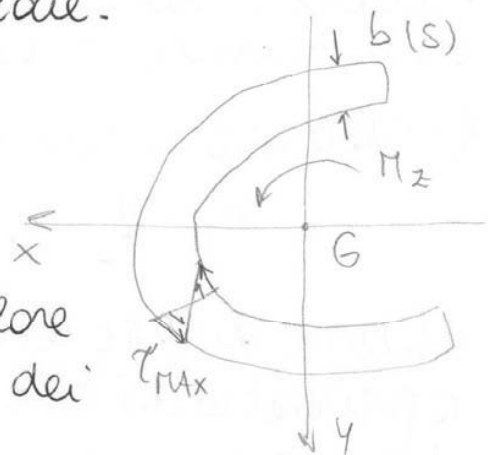
COEFFICIENTE DI RIPARTIZIONE

$$M_{z^i} = M_z \frac{I_{t^i}}{\sum_{i=1}^n I_{t^i}}$$

Il momento torcente i -esimo è pari al momento torcente totale per il coefficiente di ripartizione.

SEZIONI SOTTILI APERTE e CUEVE

Considero una sezione sottile che non ha lo spessore costante ($b(s)$): a maggiore spessore corrisponde una maggiore tensione, con valore andante massimo nel contorno dei punti con spessore minimo.



$$\tau_{z \times} (\text{MAX}) = \frac{M_z}{I_t} b(s) \quad I_t = \frac{1}{3} \oint_C b^3(s) ds$$

$$M_z = \tau_{zs}(s) b(s) \oint_C h(s) ds = \tau_{zs}(s) b(s) 2 \Omega$$

Ω = area racchiusa dalla linea media della sezione.



FORMULA DI BREDI

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_z}{2 \Omega b(s)}$$

la tensione tangenziale massima si ha dove è minimo lo spessore $b(s)$, diverso dalle sezioni sottili aperte.

Quanto vale il momento d'inerzia torsionale I_t ?
 il lavoro di deformazione, applicando il T di Clapeyron:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_t} dz$$

questo lavoro dev'essere uguale al lavoro di deformazione usando il potenziale elastico complementare.

$$dL = \int_V \psi dV = \int_A \frac{\tau_{zs}^2}{2G} dA dz = \frac{dz}{2G} \int_A \left(\frac{M_z}{2 \Omega b(s)} \right)^2 dA$$

$$dL = \frac{dz}{2G} \oint_C \left(\frac{M_z}{2 \Omega b(s)} \right)^2 b(s) ds = \frac{dz}{2G} \frac{M_z^2}{4 \Omega^2} \oint_C \frac{ds}{b(s)}$$

con dz costante e $dA = b(s) ds$

$$dL = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_t} dz = \frac{dz}{2G} \frac{M_z^2}{4 \Omega^2} \oint_C \frac{ds}{b(s)}$$

$$I_t = \frac{4 \Omega^2}{\oint_C \frac{ds}{b(s)}}$$

Quando $b(s)$ è costante, spessore costante

$$I_t = \frac{4 \Omega^2 b}{S}$$

S = perimetro dell'ane della sezione.

Il rapporto tra i fattori di rigidità:

$$\frac{I_{t1}}{I_{t2}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} \frac{a^3 b}{a b^3} = 4 \frac{a^2}{b^2}$$

Se $a \gg b$, $a = 10b$, $I_{t1}/I_{t2} = 400$, $M_1 \approx M_T$, $M_2 \approx 0$

Il momento torcente porta tutto al comune:

le tensioni tangenziali maxime di ali (2) e comune (1)

$$\tau_{MAX}^{(1)} = M_T \frac{I_{t1}}{I_{t1} + I_{t2}} \cdot \frac{1}{2(2a \cdot a)b} = M \frac{I_{t1}}{I_{t1} + I_{t2}} \cdot \frac{1}{4a^2 b}$$

$$\tau_{MAX}^{(2)} = M_T \frac{I_{t2}}{I_{t1} + I_{t2}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} a b^2}$$

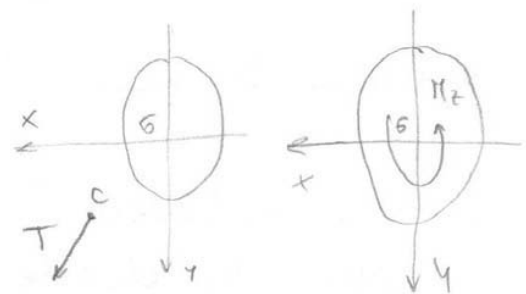
Le ali non resistono bene a torsione MA alterano la posizione del baricentro ed aumentano l'inerzia il rapporto tra le tensioni tangenziali:

$$\frac{\tau_{MAX}^{(1)}}{\tau_{MAX}^{(2)}} = 4 \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{4a^2 b} \cdot \frac{2}{3} a b^2 = \frac{2}{3} \frac{a}{b}$$

SOLLECITAZIONE COMPOSTA DI TAGLIO-TORSIONE

Bisogna dimostrare come il taglio sia energeticamente ortogonale al momento torcente solo se è applicato al centro di torsione.

Considero una sezione generica nel caso in cui è soggetta ad un momento torcente (M_T) nel baricentro e il caso con taglio T applicato nel centro di torsione C , che in genere non coincide col baricentro.



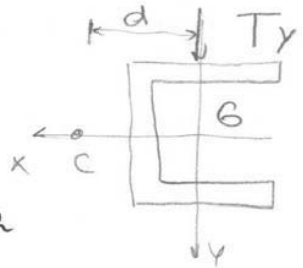
$\{ M_C(M_T) \}$ spostamento del centro di torsione C per effetto del momento applicato

Taglio e momento torcente ni hanno solo se il taglio non è applicato al centro di torsione.

- T_y applicato nel baricentro:

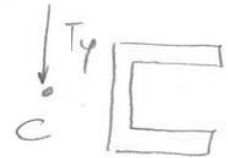
$$\pi_z = T_y \cdot d$$

la sezione trasla verticalmente e ruota



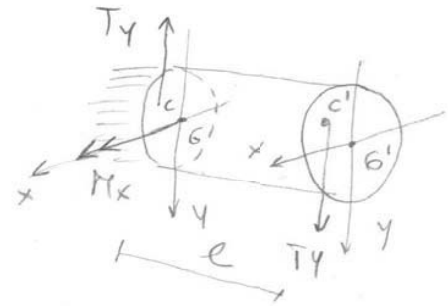
- T_y applicato nel centro di torsione:

$d=0$, ho la sola traslazione verticale, niente rotazione.



TAGLIO RETTO

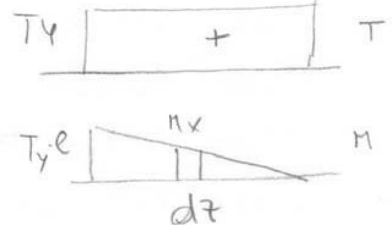
Considero il solido di Saint Venant soggetto a 2 piani taglianti sulle bar, paralleli all'asse y con verso contrario.



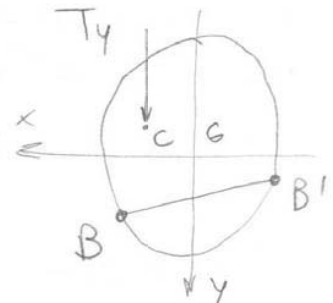
Mentre il taglio è costante, il momento lentamente varia linearmente fino $-T_y \cdot e$.



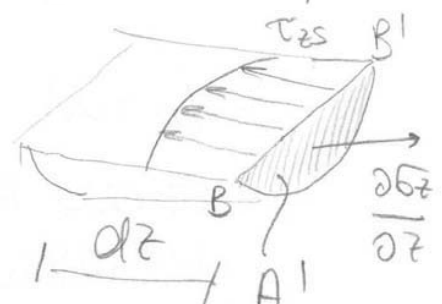
Come si distribuiscono le tensioni tangenziali al taglio per effetto della torsione?



Considero una corda BB' che taglia la sezione del solido di Saint Venant e prendiamo un elemento di lunghezza dz definito da questa corda.



Per avere equilibrio alla traslazione con $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ ni devo generare delle tensioni tangenziali τ_{zs} .



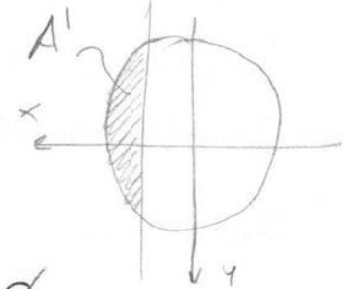
FORMULA DI JOURAWSKY

Esprimiamo la funzione di deformazione e la distribuzione delle tensioni tangenziali.

$$\tau_{zy} = \frac{T y}{b I_x} S_x^{A'}$$

Formula approssimata per calcolare le τ dovute al taglio

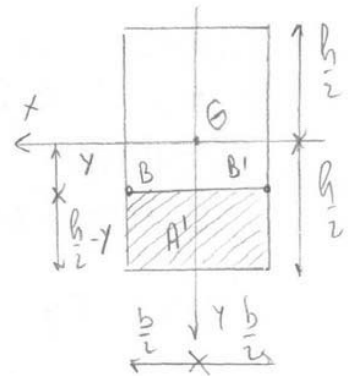
Se calcolo $S_x^{A'}$ rispetto al baricentro, sono due le due aree, sopra e sotto l'asse x , mi compenano: $\tau_{zy} \rightarrow 0$ perché la sezione è simmetrica



Se uso corde vicine ai bordi: $\tau_{zy} \rightarrow \phi$

SEZIONE RETTANGOLARE

Calcoliamo il momento statico della sezione A' rispetto a tutta la sezione



$$S_x^{A'} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] =$$

$$= b \left[\left(\frac{h}{2} y - y^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 \right] =$$

$$= b \left[\left(\frac{h}{2} y - y^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} + y^2 - 2 \frac{h}{2} y \right) \right]$$

$$S_x^{A'} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

RAPPRESENTA UNA PARABOLA

Ricordando $\tau_{zy} = \frac{T y}{b I_x} S_x^{A'}$ con $I_x = \frac{b h^3}{12}$

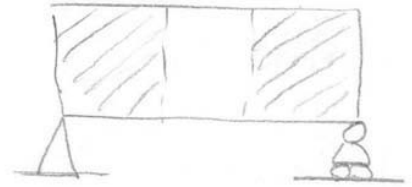
$$\tau_{zy} = \frac{T y}{b \frac{b h^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6 T y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{zy} = \frac{6 T y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

TRAVE TOZZA

le tensioni tangenziali dovute al taglio hanno un grande effetto sulla stabilità della struttura

$$\frac{l}{h} \leq 3 \quad \text{ho la trave tozza.}$$



Per queste travi non posso usare le stesse formule.

EFFETTO DELLE τ_{zy}

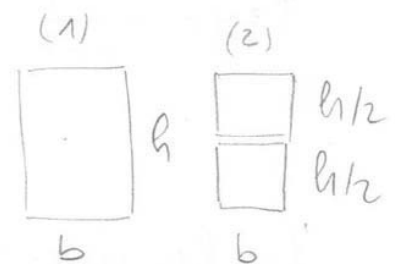
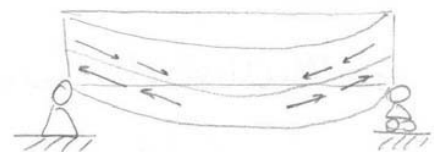
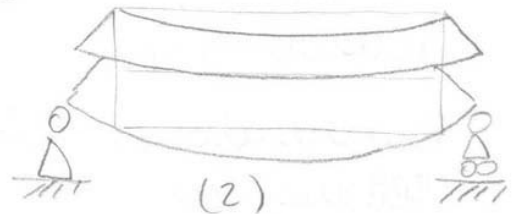
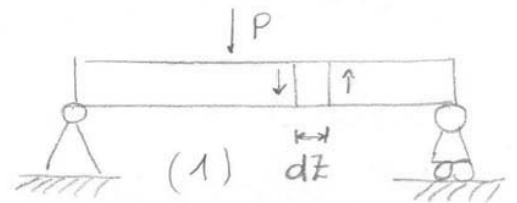
le tensioni tangenziali sono responsabili del comportamento globale delle travi snelle: la resistenza al taglio impedisce lo scorrimento orizzontale delle varie lamine di cui è costituita una trave.

Se taglio la trave lungo un'axe orizzontale, le due parti svilupperanno una contrazione superiore e dilatazione inferiore.

Il comportamento effettivo della trave fa nascere delle tensioni tangenziali che si oppongono agli sforzi di taglio.

Che differenza di comportamento c'è tra una trave piena e due travi sovrapposte quando applico un carico P in maniera?

$$\left\{ \begin{array}{l} M(1) = \frac{Pl}{4} \\ M(2) = \frac{Pl}{8} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{bh^3}{12} \\ I_2 = \frac{b(h/2)^3}{12} = \frac{bh^3}{96} \end{array} \right.$$

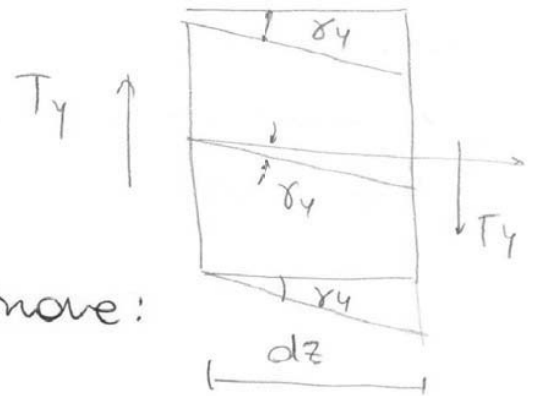


SLITTAMENTO RELATIVO

Studio degli sformamenti
 ausiliari e completo, introduco
 lo scorrimento relativo γ_y

lo sformamento in verticale della trave:

$$dV = dz \cdot \gamma_y$$



$\gamma = \frac{dV}{dz}$ lo scorrimento relativo è una funzione
 rettangolare.

Ipotesi quindi che con γ_z la sezione resti PIANA
 il lavoro di deformazione per il Teorema di Clapeyron

$$dL = \frac{1}{2} T_y dV = \frac{1}{2} T_y \gamma_y dz$$

il lavoro elementare può essere espresso tramite il
 potenziale elastico complementare.

$$dL = \int_V \psi dV = \frac{dz}{2G} \int_A \tau^2 dA = \frac{dz}{2G} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{6T_y}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 dy = \frac{dz}{2G} \cdot b \cdot \frac{36T_y^2}{b^2 h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy$$

$$dL = \frac{dz}{2G} \cdot \frac{36T_y^2}{bh^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} + y^4 - \frac{h^2}{2} y^2 \right) dy$$

$$dL = \frac{dz}{2G} \frac{6}{5} \frac{T_y^2}{bh}$$

$$\frac{1}{2} T_y \gamma_y dz = \frac{dz}{2G} \frac{6}{5} \frac{T_y^2}{bh}$$

$$\gamma_y = \frac{6}{5} \frac{T_y}{Gb h}$$

$t_y = \frac{6}{5}$ FATTORE DI TABLIO e $A = bh$ area

$$\boxed{\gamma_y = t_y \frac{T_y}{GA}}$$

$t_y = \frac{32}{27}$ sezione circolare.

DOPPIO T $t_y = 1.14$

Nel taglio deviato posso applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, perché lavoro nel caso di elasticità lineare e posso sommare gli effetti.

$$\tau_{zs} = \frac{T_x S_y}{I_x b} + \frac{T_y S_x}{I_y b}$$

Il lavoro nel taglio deviato:

$$dL = dL(T_x) + dL(T_y) + dL(\text{mutuo})$$

il lavoro mutuo si ottiene dal Teorema di Betti. Posso esprimere il lavoro elementare in funzione del potenziale elastico complementare

$$dL = \frac{1}{V} \Psi dV = \frac{1}{V} \frac{\tau_{zs}^2}{2G} dV + \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dV$$

$$\left(\begin{array}{l} \{ \epsilon \} : \text{nel taglio ho solo } \gamma, \text{ con } \gamma = \frac{\tau_{zs}}{G} \\ \{ \sigma \} : \text{nel taglio ho solo } \tau \end{array} \right)$$

con $dV = dz \cdot dA$, $dz = \text{costante}$, $dA = b(z) dz$

$$\begin{aligned} dL &= \int_A \frac{\tau_{zs}^2}{2G} dz dA = \frac{dz}{2G} \int_A \tau_{zs}^2 b(z) dz = \\ &= \frac{dz}{2G} \left[\frac{T_x^2}{I_x^2} \int_C \frac{S_y^2}{b(z)} dz + \frac{T_y^2}{I_y^2} \int_C \frac{S_x^2}{b(z)} dz + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{T_x T_y}{I_x I_y} \int_C \frac{S_x S_y}{b(z)} dz \right] \end{aligned}$$

Mettiamo in evidenza i termini:

$$t_y = \frac{A}{I_x^2} \int_C \frac{S_y^2}{b(z)} dz$$

$$t_x = \frac{A}{I_y^2} \int_C \frac{S_x^2}{b(z)} dz$$

FAATTORI DI TAGLIO RETTO

$$t_{xy} = \frac{A}{I_x I_y} \int_C \frac{S_x S_y}{b(z)} dz$$

FAATTORE DI TAGLIO MUTUO

In generale $t_{xy} \neq 0$.

• PROBLEMA ELASTICO LINEARE

Gli spostamenti medi sono funzioni lineari anziché dei tagli retti

$$\gamma_x = a_{xx} T_x + a_{xy} T_y$$

$$\gamma_y = a_{yx} T_x + a_{yy} T_y$$

$$T_x \begin{cases} \gamma_x \\ \gamma_y \end{cases}$$

$$T_y \begin{cases} \gamma_x \\ \gamma_y \end{cases}$$

$$\gamma_x = f(a_{xx}, a_{xy}) = f(T_x, T_y) \quad \gamma_y = f(a_{yx}, a_{yy})$$

Nel caso di deformata lineare, gli spostamenti medi sono direttamente proporzionali ai tagli (T_x, T_y)

Dimostrazione $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$

Per il Teorema di Betti, 2 sistemi (A, B) sono energeticamente equivalenti se $L_{A+B} = L_{B+A}$

$$dL_{A+B} = dL_A + dL_B + dL_{AB}$$

$$dL_{B+A} = dL_B + dL_A + dL_{BA}$$

$$\left. \begin{array}{l} dL_{AB} = dL_{BA} \end{array} \right\}$$

Per avere l'uguaglianza dei lavori mutui:

• il primo lavoro mutuo: $T_x \alpha_{xy}(T_y) dz$

• il secondo lavoro mutuo: $T_y \alpha_{yx}(T_x) dz$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{xy} = \alpha_{yx} \end{array} \right\}$$

Applico il Teorema di Betti, considerando $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$

$$dL = \frac{1}{2} T_x \gamma_x dz + \frac{1}{2} T_y \gamma_y dz$$

$$dL = \frac{dz}{2} [\alpha_{xx} T_x^2 + \alpha_{yy} T_y^2 + 2 \alpha_{xy} T_x T_y] \quad (B)$$

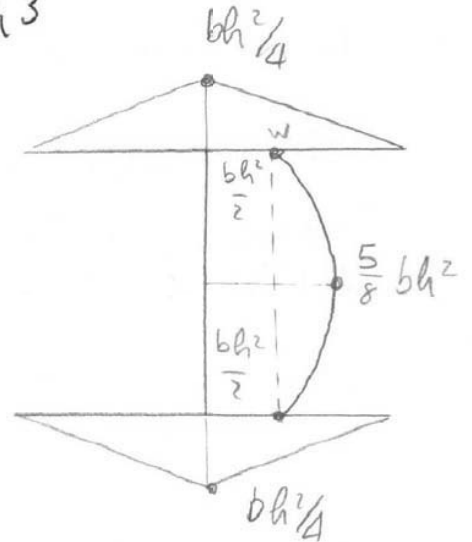
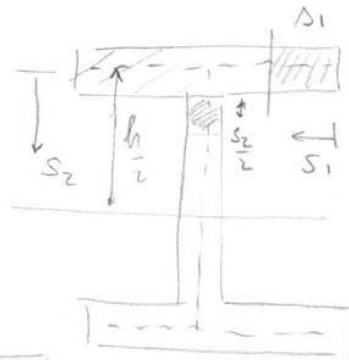
Confrontando (A) con (B), per il principio di identità dei polinomi posso ottenere la relazione fra il Taglio e lo spostamento dello stesso trasversale

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_x = \frac{1}{GA} (t_x T_x + t_{xy} T_y) \quad \gamma_y = \frac{1}{GA} (t_{xy} T_x + t_y T_y) \end{array} \right|$$

L'inerzia

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + 2(bh) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} bh^3$$

Il momento varia linearmente lungo le due ali.



$$S_x^{A'}(s_1) = b s_1 \frac{h}{2}$$

Se $s_1 = \frac{h}{2}$ $S_x^{A'} = \frac{bh^2}{4}$

Stesso risultato si ottiene considerando l'altra ala. Considero l'amina: il momento statico $S_x^{A'}(s_2)$ varia parabolicamente nell'amina.

$$S_x^{A'}(s_2) = 2 \cdot \frac{bh^2}{4} + b s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2}\right)$$

devo considerare come costante il valore delle ali.

$$2 S_x^{A'}(s_1 = \frac{h}{2}) = 2 \cdot \frac{bh^2}{4} = \frac{bh^2}{2} \quad \text{VALORE IN W}$$

Ricordo il valore massimo del momento statico

$$\frac{d S_x^{A'}(s_2)}{d s_2} = \frac{d}{d s_2} \left(\frac{bh^2}{2} + s_2 \frac{bh}{2} - s_2^2 \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$b \frac{h}{2} - b s_2 = 0 \quad s_2 = \frac{h}{2}$$

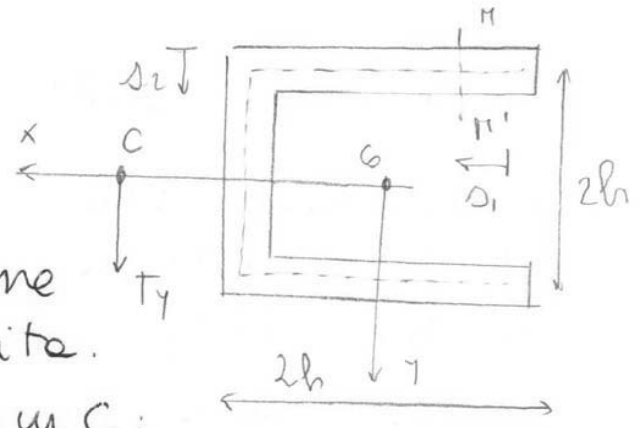
$$S_x^{A'}(s_2 = \frac{h}{2}) = \frac{bh^2}{2} + b \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{4} \right) = \frac{5}{8} bh^2$$

Stando l'inerzia, il taglio e lo sforzo sono costanti, τ_{zy} dipende solo dalla coordinata s .

$$\sigma_{MAX} = \frac{T_y \left(\frac{5}{8} bh^2\right)}{\left(\frac{7}{12} bh^3\right) b} = \frac{15}{14} \frac{T_y}{bh}$$

B - SEZIONE A C

Ho un solo asse di simmetria (asse x) quindi il centro di torsione giaceva in tale asse MA la sua posizione è incognita.



Considero un Taglio applicato in C:

la sezione è solo soggetta a Taglio, viene il momento torcente.

Perché il centro di torsione coincide col centro di taglio?

DIMOSTRAZIONE

Ipotesi: ho un momento torcente M_z che fa ruotare la sezione attorno al centro di torsione.

$M_c(M_z)$ spostamento del centro di torsione per effetto di M_z

Il taglio è applicato nel centro di torsione e provoca una rotazione ($T_y \rightarrow \varphi(T_y)$) perché non è applicato nel centro di taglio.

Per il Teorema di Betti: $M_z \varphi(T_y) = T_y M_c(M_z)$

Se il momento M_z agisce nel centro di torsione e fa ruotare la sezione rispetto al centro di torsione, il centro di torsione non ruota $M_c(M_z) = 0$ MA anche il taglio non genera rotazione della sezione $\varphi(T_y) = 0$ quindi il centro di taglio è anche il centro di torsione.

Ritorniamo alla sezione a C: siamo in condizioni di taglio retto dove T_y è parallelo all'asse y ed è applicato in C.

Calcolo le tensioni τ tramite la formula di Jourawsky

$$\tau = \frac{T_y S_x}{I_x b}$$

lungo le barre ho una variazione lineare delle S_x

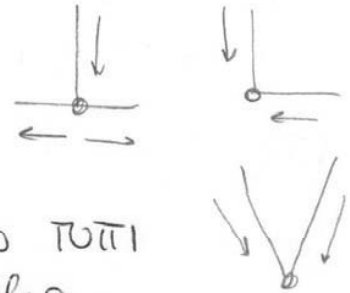
$$S_x(D_1) = D_1 \cdot b \cdot h$$

L'equazione della rotazione attorno a c deve fornire, considerando le forze F_1 e F_2 , un momento risultante $M_z(c) = 0$.

$$c) \quad F_1 \cdot 2h - F_2 \cdot d = 0 \quad \left| \frac{d}{h} = \frac{6}{7} \right|$$

d = posizione del centro di taglio e di torsione
 Inoltre, mentre l'asse x è un asse di simmetria, la posizione del centro di taglio e' lungo l'asse x .

Discorso utile per capire la posizione del centro di taglio delle sezioni sottili: quando la sezione sottile è formata da rettangoli che confluiscono tutti in un unico punto, è lo il centro di taglio.



A cosa servono queste formule?

- lo sforzo normale eccentrico con 2 eccentricità produce una sforzo normale centrato e 2 momenti torcenti; emi produciamo le tensioni σ_z

$$\frac{N + e_x + e_y}{\sigma_z}$$

- il taglio deviato, con 2 eccentricità produce 2 tagli retti ed un momento torcente; emi produciamo le tensioni τ_z

$$\frac{T + e_x + e_y}{\tau_z}$$

considerando le tensioni principali

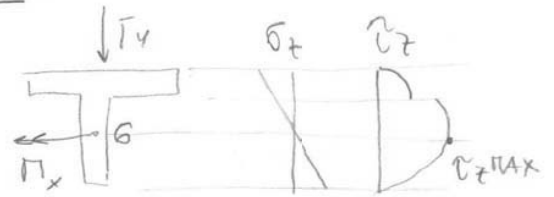
$$|\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2| < \sigma_{amm}^2$$

Per le travi:
$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} < \sigma_{amm}$$

l'ellisse di Von-Mises è più grande dell'angolo di Tresca, quindi è meno sicuro.

SEZIONE SOGGETTA A TAGLIO E TORSIONE

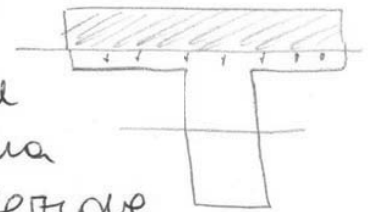
Per verificare questa sezione non devo vedere dove le tensioni sono massime perché non ho MAI



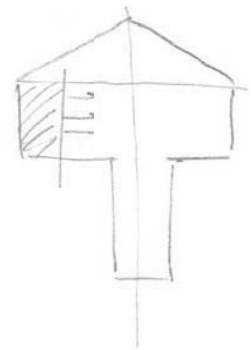
CONTEMPORANEAMENTE τ_{max} e σ_{max} nello stesso punto: dove sono delle vertici nei migliori punti

Perché c'è il salto nel diagramma delle τ_z ?

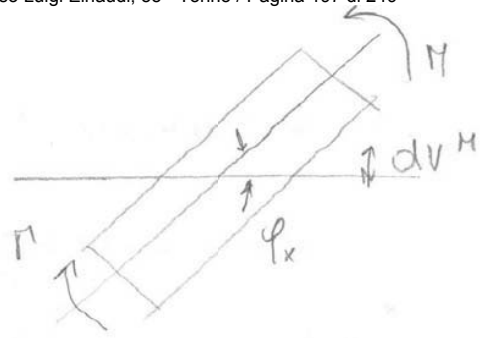
La τ_z cresce quadraticamente MA ho un salto perché nella successiva sezione ho una parte costante ed una riduzione di sezione, e τ_z si concentra in un'area minore



In funzione al tipo di cordolo e al suo posizionamento sono diversi tipi di diagrammi.



Considero il coucio soggetto ad un momento flettente che provoca una rotazione rigida. dV^M : spostamento dovuto al taglio



Oltre alla deformazione dovuta al taglio ho un abbassamento provocato dal momento flettente, con angolo di rotazione φ_x .

$dV^T = \gamma_y dz$: spostamento verso il basso, positivo
 $dV^M = -\varphi_x dz$: spostamento verso l'alto, negativo

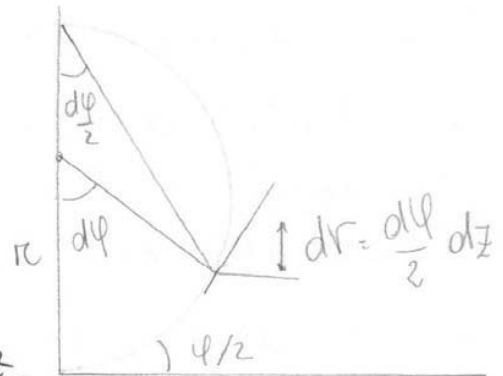
Il segno di $(-\varphi_x)$ dipende dalla rotazione del momento: φ_x ha una rotazione antioraria (+) e devo mettere il segno meno per far sollevare il coucio.

lo spostamento totale: $dV = dV^T + dV^M = \gamma_y dz - \varphi_x dz$

$$\gamma_y = \frac{dV}{dz} + \varphi_x$$

EQUAZIONI CINEMATICHE

In questo ragionamento sto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore: $dr = \frac{1}{2} d\varphi dz$.



Scriviamo le equazioni fondamentali del problema elastico per solidi unidimensionali ad asse rettilineo.

Le equazioni cinematiche sono la relazione tra le caratteristiche deformative e gli spostamenti (caratteristiche di solle a variazione).

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \epsilon_x \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dz & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & d/dz & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d/dz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d/dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d/dz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d/dz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/dz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d/dz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d/dz & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & d/dz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d/dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ p_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[S]^* \{Q\} + \{f\} = \{0\}$$

$\{Q\}$: vettore delle caratteristiche statiche

$\{f\}$: vettore delle forze esterne

$[S]^*$: matrice trasposta di $[S]$ con i segni cambiati

$$\frac{dM_y}{dz} + T_x + m_y = 0 \quad \frac{dM_x}{dz} - T_y + m_x = 0$$

Nel solido elastico $[S] = 6 \times 3$ mentre nelle travi iperelastiche $[S]^* = 6 \times 6$; nelle strutture iperelastiche $[S]^*$, non i carichi, permette di calcolare le reazioni vincolari

EQUAZIONI COSTITUTIVE

relazione fra le caratteristiche deformative $\{q\}$ con le caratteristiche di sollecitazione $\{Q\}$.

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \epsilon \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{GA} & \frac{t_{xy}}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{xy}}{GA} & \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G \cdot I_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [H]^{-1} \{Q\}$$

Se la reazione ha un arco di rinvio, il fattore di taglio mutuo è nullo, $t \times r = 0$ e vale il Principio di sovrapposizione degli Effetti.

L'EQUAZIONE DI LARÉ

$$[\delta]^* \{Q\} + \{f\} = \{0\}, \text{ con } \{Q\} = [H] \cdot \{q\}$$

$$[\delta]^* [H] \cdot \{q\} + \{f\} = \{0\} \quad \text{con } \{q\} = [\delta] \{u\}$$

$$([\delta]^* [H] [\delta]) \{u\} + \{f\} = \{0\}$$

$$([\delta]^* [H] [\delta]) \{u\} = - \{f\}$$

la derivata seconda della rigidezza dello snodo, moltiplicata per gli spostamenti, fornisce le forze

$$(A) \quad [Y] \{u\} = - \{f\} \quad \text{per } 0 < z < l$$

con $[Y] = [\delta]^* [H] [\delta]$, e condizione al contorno,

$$(B) \quad ([H] [\delta]) \{u\} = \{Q_0\}$$

$$(B) \quad [W]^T \{Q\} = \{Q_0\}$$

$[W]^T = [1]$ matrice che fa corrispondere un termine unitario ad ogni termine differenziale della matrice $[\delta]^*$

l'ultima condizione al contorno:

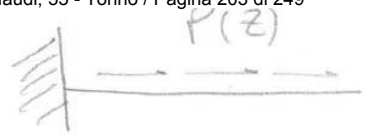
$$(C) \quad \{u\} = \{u_0\}$$

(A): Reazione tra spostamenti e forze applicate

(B): calcolo le reazioni vincolari

(C): imporre degli spostamenti noti (anche NULLI).

ESEMPIO 1: ISOSTATICA



Supponiamo che la trave sia soggetta solo a dei carichi $P(z)$.

$$1. (V, \varphi_x) = 0 \quad 2. (Q, M) = 0 \quad 3. (T_y, M_x) = 0$$

$$[L] \{M\} = -\{f\} \quad EA \frac{d^2 w}{dz^2} = -P(z)$$

$$([H][\delta]) \{M\} = \{Q_0\} \quad EA \frac{dw}{dz} = N_0$$

Le equazioni al contorno:

$$\{M\} = \{M_0\} \rightarrow N(l) = 0 \quad \text{e} \quad w_0 = 0$$

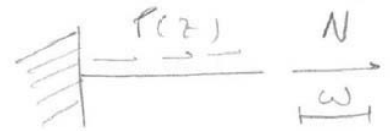
$$EA \frac{dw}{dz} = -Pz + C_1 \quad EA w = -P \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$w(0) = C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$N(l) = EA \frac{dw}{dz} = -P \cdot l + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = P \cdot l$$

$$EA \cdot w = -\frac{Pz^2}{2} + Plz$$

$$w = \frac{P}{EA} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right)$$



$$w = \frac{Plz}{2EA}$$

$$w(z=l) = \frac{P}{EA} \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{Plz}{2EA}$$

ESEMPIO 2: IPERSTATICA

$$EA \frac{d^2 w}{dz^2} = -P(z)$$

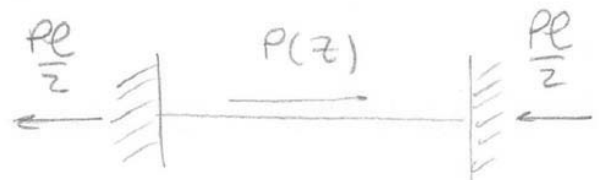
$$EA \frac{dw}{dz} = N(0) = N(l)$$

$$w(0) = 0 \quad \text{e} \quad w(l) = 0$$

$$w(0) \rightarrow C_2 = 0$$

$$w(l) \rightarrow C_1 = \frac{Pl}{2}$$

$$w = -P \frac{z^2}{2} + P \frac{z^2}{2} = 0$$



$$\sim EA w = -P \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_x \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/ds & -1/\rho & 1 \\ 1/\rho & d/ds & 0 \\ 0 & 0 & d/ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{ds} + \varphi + \frac{w}{\rho} \quad \text{NUOVA COMPONENTE}$$

EQUAZIONI STATICHE - INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\begin{bmatrix} d/ds & -1/\rho & 0 \\ 1/\rho & d/ds & 0 \\ -1 & 0 & d/ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE

Quando il raggio di curvatura ρ è di molto superiore alle dimensioni caratteristiche della sezione retta, posso usare le stesse formule della trave piana.

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_x \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione che trasforma il sistema globale XY nel sistema locale X^*Y^*

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

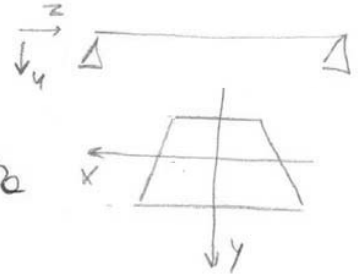
I vettori delle forze esterne e degli spostamenti

$$\{f^*\} = [N] \{f\} \quad \{u^*\} = [N] \{u\}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

Equazione applicata alle travi rettilinee unidimensionali per le quali valga la teoria del Solido di Saint Venant con le seguenti caratteristiche:

- 1) Sollecitazioni merenti: T_y, M_x, N
- 2) Sezioni simmetriche rispetto l'asse y per avere baricentro e centro di spunto lungo l'asse y .



Rotolo e rotazione, NIENTE torsione M_z T_y, M_x, N

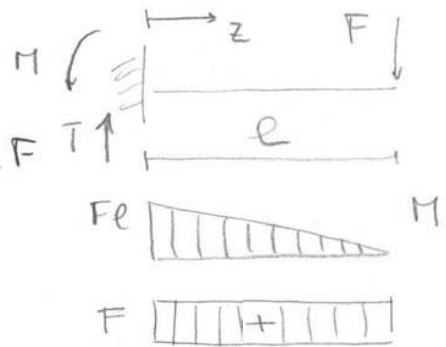
- 3) Trascurare la deformabilità a taglio ($\gamma_y \approx 0$)
- 4) la deformazione della trave dipende solo dal comportamento flessionale.

ESEMPIO

Trave libera incastrata soggetta a F

$$T(z) = F$$

$$M(z) = -F(l-z)$$



Equazioni cinematiche

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \gamma_y - \chi_x \\ \frac{dy}{dz} &= \chi_x \end{aligned} \right\}$$

Equazioni costitutive

$$\chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$$

$$\frac{d\psi_x}{dz} = \frac{-F(l-z)}{EI_x} \rightarrow \psi_x = -\frac{Fl}{EI_x} z + \frac{Fz^2}{2EI_x} + C_1$$

Condizione al contorno: $\psi_x(z=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$
 Nell'incastrato NON ho rotazione

$$\psi_x = -\frac{Fl}{EI_x} z + \frac{Fz^2}{2EI_x}$$

TRAVE EULERO BERNOLLI (snella) $\gamma_y \approx 0$

TRAVE DI TIMOSHENKO (Torta) $\gamma_y \neq 0$

L'equazione differenziale della linea elastica è solo per le travi snelle, dove posso trascurare il contributo del taglio e considerare solo la flessione del momento.

1^a EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

$$\frac{dv}{dz} = \gamma_y - \varphi_x = -\varphi_x$$

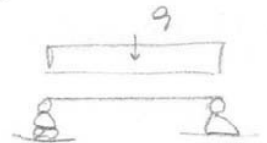
$$\frac{d\varphi}{dz} = \chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{M_x}{EI_x}}$$

Questa equazione è funzione del momento e servono 2 condizioni al contorno per avere $v(z)$.

Ricordando l'equazione statica $\frac{dM}{dz} = T_y - m_x$ con m_x momento distribuito, trascurabile.

L'equazione statica $\frac{dT_y}{dz} = -q_y$



2^a EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

$$\boxed{\frac{d^4v}{dz^4} = \frac{q_y}{EI_x}}$$

Relazione tra gli spostamenti ed il carico distribuito, ho bisogno di 4 condizioni al contorno.

1^a EQUAZIONE : NO NO CARICO DISTRIBUITO, $M_x + 2$ C.C.

2^a EQUAZIONE : NO CARICO DISTRIBUITO, $q + 4$ C.C.

• $\frac{d^3 v}{dz^3}(z=l) = 0$ implica che il Taglio in $z=l$ è nullo

$$\frac{d^3 v}{dz^3}(z=l) = \frac{q}{EI_x} l + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{ql}{EI_x}$$

• $\frac{d^2 v}{dz^2}(z=l) = 0$ il momento è nullo in $z=l$

$$\frac{l^2}{2} \frac{q}{EI_x} + l C_1 + C_2 = \frac{l^2}{2} \frac{q}{EI_x} - \frac{ql^2}{EI_x} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{ql^2}{2EI_x}$$

$$v(z) = \frac{z^4}{24} \frac{q}{EI_x} - \frac{z^3}{6} \frac{ql}{EI_x} + \frac{z^2}{2} \frac{ql^2}{2EI_x}$$

$$-y_x(z) = \frac{qlz^3}{6EI_x} - \frac{z^2}{2} \frac{ql}{EI_x} + \frac{ql^2 z}{2EI_x}$$

Gli spostamenti all'estremità:

$$v(z=l) = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI_x} \quad \frac{F/L \cdot L^4}{F/L^2 L^4} = L$$

$$y_x(z=l) = -\frac{ql^3}{6EI_x} \quad \frac{F/L L^3}{F/L^2 L^4} = [-]$$

Il momento a neurolo con carico distribuito è funzione di L^4 : se raddoppio la lunghezza dimezzo gli spostamenti ma se raddoppio la lunghezza lo spostamento aumenta di 16 volte.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (CAPITOLO 16)

Il lavoro delle forze esterne (forze di volume e forze di superficie) è pari al lavoro delle forze interne (tensione delle trazioni per tensione delle deformazioni).

$$\int_V \{F_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{F_a\}^T \{u_b\} dS = \int_V [\sigma_a]^T [\epsilon_b] dV$$

Moltiplico forze e tensioni (A) per gli spostamenti (B)

Q_b = vettore degli spostamenti

Q_{0A} = forze concentrate + effetto negli estremi della trave
(se avremo una mensola, nell'incastro avremo uno spostamento con lavoro).

LAVORO INTERNO

Potiamo dividere $\int_0^L \{Q_a\}^T \{q_b\} dz$

$$\int_0^L N^f \left(\frac{N^r}{EA} + \alpha T^r \right) dz + \int_0^L T_y^f \left(t_y \frac{T_y^r}{GA} \right) dz + \int_0^L M^f \left(\frac{M^r}{EI} + 2 \frac{\alpha \Delta T^r}{h} \right) dz$$

con apice f = momento fittizio, r = momento reale

αT^r effetto della dilatazione termica con T temperatura e α coefficiente termico

$$T_y^f \cdot \gamma_y^r = T_y^f \left(t_y \frac{T_y^r}{GA} \right)$$

$$M_x^f \cdot \chi_x^r = M_x^f \left(\frac{M_x^r}{EI} + 2 \frac{\alpha \Delta T^r}{h} \right)$$

DILATAZIONE TERMICA
A FALFACCA

LAVORO ESTERNO

$$L_e = 1 \cdot \eta^r + \sum R_i^f \left[\eta_{0i}^r - \frac{R_i^r}{K} \right]$$

R^f = 1 forza fittizia

η^r = spostamento duale alla forza

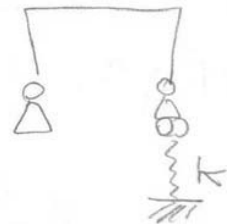
R_i = forze del sistema fittizio

η_{0i}^r = cedimenti nel sistema reale

K = rigidità

la parte veramente importante:

$$L_e = 1 \cdot \eta^r$$



$$F = Kx \quad x = \frac{F}{K}$$

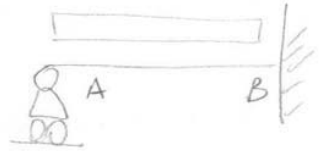
IPERSTATICHE

1) PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Considero una trave soggetta ad un carico distribuito
incastriata in B e appoggiata al cuneo in A

$$3qdx < 4qdx = 1 \text{ VOLTA IPERSTATICA}$$

Per risolvere le iperstatiche non bastano
le sole equazioni di equilibrio, devo
usare le equazioni cinematiche e costitutive

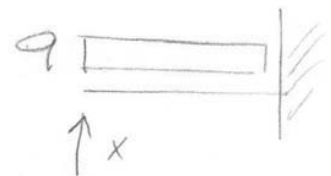


Devo tagliare un vincolo e crearci una struttura
ISOSTATICA costruendoci la struttura principale.

STRUTTURA PRINCIPALE:

$$\{F_0\} = q = \text{carichi esterni}$$

$$\{F_1\} = x = \text{incognita iperstatica}$$



SISTEMA REALE

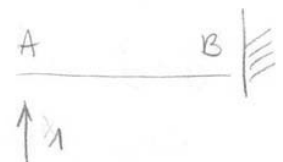
Ho sostituito x al vincolo in A MA
sto comunque facendo riferimento alla struttura reale.

Applico il Principio dei lavori virtuali

- Sono vincolato a lavorare nel punto dove ho tolto
il vincolo e vedo la reazione iperstatica.

Quanto vale lo spostamento del vincolo
nella struttura iperstatica?

SISTEMA FITIZIO



Sevo il sistema fittizio soggetto alla
forza unitaria in A.

- spostamento nullo
- taglio trascurabile, travi snelle con $\delta_4 = 0$
- momento

$$L_1 = \int_0^L m^t \left(\frac{\pi^0 + x_1 \pi^1}{EI} \right) dz = \int_0^L m^t x_{TOT}$$

CURVATURA TOTALE

Calcolo lo spostamento ammissibile dovuto a X

$w_B(x)$: allungamento dove x agisce su tutta la struttura ed è soggetta a trazione

$$w_B(x) = \frac{x}{EA} (a+b) = \frac{x}{EA} l$$

L'equazione di compatibilità: $w_B = 0$

Rappresenta l'equazione del vincolo.

$$w_B(F) + w_B(x) = 0 \quad - \frac{F}{EA} a + \frac{x}{EA} (a+b) = 0$$

$$\boxed{X = \frac{F \cdot a}{l} = \frac{F \cdot a}{a+b}}$$

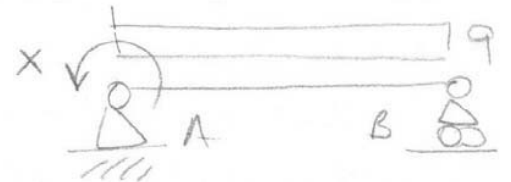
ALTRE EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

Considero una trave con un castro e un cernello



A - Svincolo il castro A

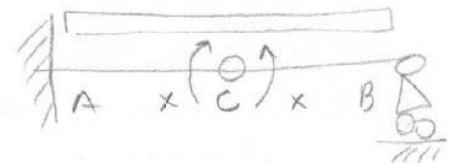
$$\varphi_A(x) + \varphi_A(l) = 0$$



B - Svincolo la trave e netto

una cerniera interna:

manterremo 2 momenti x



L'equazione di compatibilità dei momenti delle due parti devono avere lo stesso valore:

$$[\varphi_c(x) + \varphi_c(l)]^{Sx} = [\varphi_c(x) + \varphi_c(l)]^{Dx}$$

Nel punto devo avere lo stesso momento a destra e a sinistra, stesso rotazionale.