



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 494

DATA : 27/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Randazzo

MATERIA : Progettazione Progetto/Prodotto + riassunto

Prof. Salmi_Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

PROGETTAZIONE DI PRODOTTO

INTRODUZIONE ALLA PROGETTAZIONE ASSISTITA

IL progetto consiste nel formulare un piano per soddisfare esigenze specifiche o per risolvere un problema.

Un progetto deve essere

- * FUNZIONALE deve soddisfare gli scopi
- * SICURO non deve avere rischi per l'operatore o per oggetti
- * AFFIDABILE come concetto statistico, probabilità che non presenti avarie durante la sua vita operativa e il suo utilizzo
- * COMPETITIVO, UTILIZZABILE, REALIZZABILE

↳ monetario
↳ energetico

IL progettista non deve dimenticare che deve avere una realtà fisica che non può essere simulata perfettamente, deve quindi interpretare ed approssimare il modello della realtà fisica. Per fare ciò usiamo modelli matematici, che sono lo strumento e non il fine della simulazione. Si trovano così dei risultati, che da soli valgono zero devono essere validati da esperienze o prove sperimentali, un PROCESSO DI IDENTIFICAZIONE che passa attraverso delle minuziose sperimentazioni.

slide

Occorre avere quindi un database della letteratura. Con il termine PROGETTAZIONE ASSISTITA si intende l'impiego di strumenti di calcolo come supporto alla progettazione meccanica. Possiamo eripuire mediante le potenzialità di calcolo degli elaboratori equazioni complesse. Il codice di calcolo consente di sviluppare un modello meccanico e da interpretare. Il codice di calcolo consente di

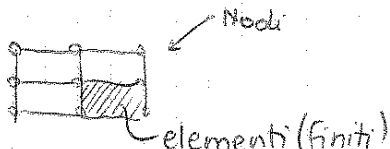
- * sviluppare un modello matematico del sistema da esaminare
- * simulare il comportamento in molteplici condizioni

Esistono molteplici codici commerciali, a seconda del fenomeno da esaminare.

I codici ci dovrebbero rendere la vita più semplice, un modello matematico facilitato in quanto dobbiamo scrivere le equazioni del modello. Esistono codici general purpose e codici tailored, mirati a specifiche applicazioni. Le equazioni generate sono trasparenti all'utente.

Non è detto che un metodo sia sempre meglio degli altri.

FEM



discretizza in punti il sistema

Se vogliamo studiare le interazioni tra elementi (ad esempio sospensione ed abitacolo) e quindi

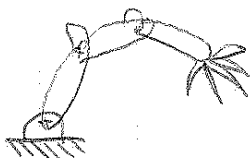
BEM

descrivo il contorno e gli scambi che sussistono.

Mi serve a conoscere cosa succede al bordo.



Se invece immagino ad esempio un braccio robotico e conosco i motori elettrici e la pronte



MULTIBODY

risolve la dinamica se i corpi possono essere considerati semirigidi. Anche multiphysics. La discretizzazione è fatta corpo per corpo.

Tutti i modelli matematici sono governati da equazioni differenziali. Nel mondo industriale FEM è utile in diversi settori

- * aerospace
- * automotive
- * railway
- * MicroSensors

PROBLEMA ELASTICO 3D

Per la meccanica del continuo scriveremo 3 equazioni ^{di equilibrio} alle derivate parziali e 6 equazioni differenziali alle derivate parziali di compatibilità.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \phi_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \phi_z = 0 \end{cases}$$

Equazioni differenziali di equilibrio

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\gamma_{xy} = G \tau_{xy}$$

Queste formule quindi rappresentano

- * equilibrio (3 eq differenziali)
- * congruenza (6 eq differenziali)
- * leggi costitutive del materiale (6 eq di legame)

Un elemento è caratterizzato da un numero n di equazioni pari al numero di g.d.l. cinemati. Numero degli spostamenti e/o rotazioni definiti ai nodi degli elementi. Le n equazioni complessive, delle quali L di equilibrio, legano tra di loro $2n$ variabili: n forze generalizzate ed n spostamenti generalizzati, nelle L equazioni di equilibrio non compaiono spostamenti generalizzati.

In un problema 3D ci sono 15 equazioni in 15 incognite (6 tensioni, 6 deformazioni, 3 spostamenti) e deve avere carichi e vincoli (condizioni al contorno).

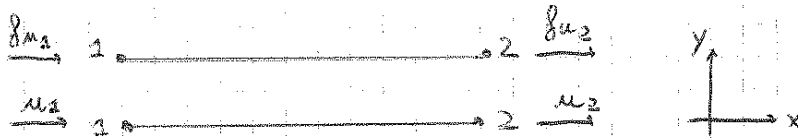
Cauchy 200 anni fa ha trovato l'unica soluzione, ma non sempre è algebricamente calcolabile.

Per le travi è stata scelta la teoria di Saint Venant ed Eulero Bernoulli, per le piastre Kirchhoff in base alla geometria, ma le equazioni non cambiano mai.

Queste soluzioni analitiche vengono definite SEMI INVERSE

Gli elementi finiti non sono nati subito con i primi pc, ma è nato il CALCOLO MATRICIALE DI STRUTTURE. Costruiamo una serie di elementi che cerchiamo di mettere insieme.

Una struttura traviiforme, possiamo cominciare a disegnare un asta nel piano (ammette carichi solo lungo il suo asse).



Immaginiamo di avere punti più importanti, quelli di estremità, gli diamo un indice ed applichiamo forze (o spostamenti). Gli spostamenti elastici sono rappresentati da un vettore $\{u, v, w\}^T$ in un sistema di riferimento cartesiano x, y, z .

$$F_{u1} + F_{u2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} && \text{congruenza} \\ \sigma_{xx} &= E \epsilon_{xx} = \frac{E}{A} \frac{\partial u}{\partial x} && \text{leggi costitutive} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_u}{EA}$$

Grazie alla geometria semplice, non è lungo L a risolvere l'equazione differenziale.

$$\int_1^2 \partial u = \int_0^L \frac{F_u}{EA} dx \rightarrow u_2 - u_1 = \frac{F_{u2}}{EA} L \quad \text{è un'integrazione esatta.}$$

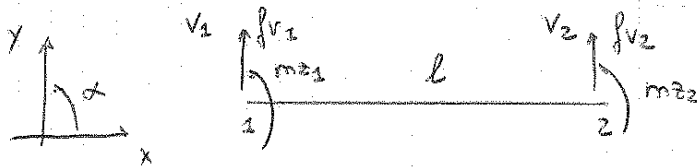
equilibrio

$$\left. \begin{aligned} F_{u1} + F_{u2} &= 0 \\ u_2 - u_1 &= L \frac{F_{u2}}{EA} \end{aligned} \right\} \text{ma preferiamo scriverlo in forma matriciale}$$

congruenza + leggi costitutive

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{u1} \\ F_{u2} \end{Bmatrix}$$

Affrontiamo ora il comportamento flessionale



C'è sforzo di taglio, che è la derivata prima del momento flettente. Vado a scrivere i due vettori che caratterizzano il comportamento cinematico

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_{21} \\ v_2 \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} f_{v1} \\ m_{21} \\ f_{v2} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$

$f_{v1} + f_{v2} = 0$ equilibrio alla traslazione

$-f_{v1}l + m_{21} + m_{22} = 0$ equilibrio al momento intorno a 2

Segni concordi al sistema di riferimento.

Dobbiamo distinguere da un sistema di riferimento locale da uno globale.

Sui nostri elementi c'è un sistema di riferimento elementare o locale e compaiono variabili in minuscolo. Quando ci sono più elementi, ci dobbiamo riferire a un sistema strutturale o globale, indicate con lettere maiuscole, ma richiede solo trasformazioni geometriche e nessun cambio di segno.

Saranno le deformate delle linee elastiche $\frac{dx}{dx} = + \frac{m}{EI}$

è la curvatura. Siamo nell'ambito di piccoli spostamenti e piccole deformazioni.

Andiamo ad integrare esattamente

$$\alpha_{22} - \alpha_{21} = -\frac{1}{EI_2} m_{21} + \frac{l^2}{2EI_2} f_{v1}$$

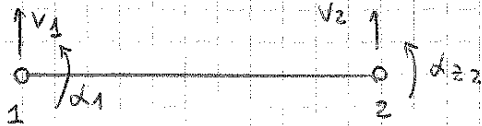
$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha$ ipotesi di Eulero Bernoulli della linea elastica.

Con l'ipotesi di Eulero integriamo la seconda volta per variabili separabili

$$v_2 - v_1 - \alpha_{21}l = -\frac{l^2}{2EI_2} m_{21} + \frac{l^3}{6EI_2} f_{v1}$$

Andiamo ad ordinarla sotto forma di matrici.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_{21} \\ v_2 \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{l^2}{2EI_2} & -\frac{l}{EI_2} & 0 & 0 \\ \frac{l^3}{2EI_2} & -\frac{l^2}{2EI_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{v1} \\ m_{21} \\ f_{v2} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$



Scelgo l'elemento che meglio interpreta la struttura

Applico le condizioni al contorno

Più è iperstatico, più è facile

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ v_2 \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{v1} \\ m_{z1} \\ -P \\ m_{z2} \end{Bmatrix} \rightarrow v_2 = \frac{-Pl^3}{2EJ}$$

Calcolo le reazioni vincolari

$$-\frac{12}{l^3} EJ_2 v_2 = \phi_{v1}$$

$$\phi_{v1} = P$$

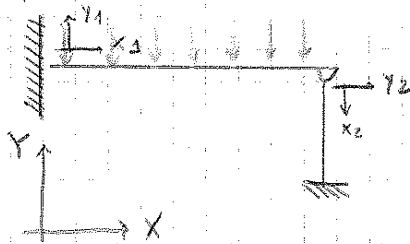
$$-\frac{12}{l^3} EJ_2 \left(-\frac{Pl^3}{2EJ} \right) = \phi_{v1}$$

$$m_{z1} = \frac{Pl}{2}$$

$$-\frac{6}{l^2} EJ_2 v_2 = m_{z1}$$

$$-\frac{6}{l^2} EJ_2 \left(-\frac{Pl^3}{2EJ} \right) = m_{z1}$$

Facciamo ora un passo avanti. Se monto più travi assieme, possono non essere nella stessa direzione. La geometria deve essere totalmente arbitraria.



SISTEMI DI RIFERIMENTO

Componiamo la struttura

$$u_x = l_1 u_x + m_1 v_x + n_1 w_x$$

$$v_x = l_2 u_x + m_2 v_x + n_2 w_x$$

$$w_x = l_3 u_x + m_3 v_x + n_3 w_x$$

Vettore degli spostamenti elastici

$$\begin{Bmatrix} s \end{Bmatrix}_x = [R] \begin{Bmatrix} s \end{Bmatrix}_X$$

\uparrow sistema locale \uparrow sistema globale

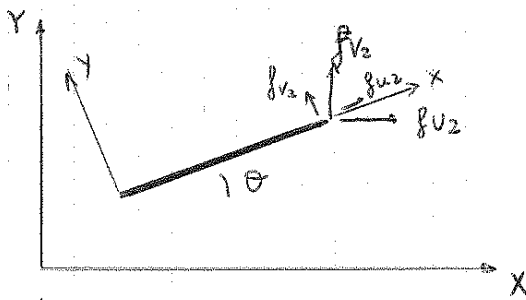
Sfruttiamo una matrice di rotazione che contiene i coseni direttori

$$[R] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

La trasformazione di rotazione è biunivoca $\begin{Bmatrix} s \end{Bmatrix}_X = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} s \end{Bmatrix}_x$

Questo ha quindi validità generale.

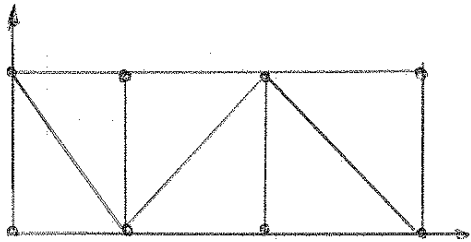
ESEMPIO (ASTA)



$$[R]^T [k]_x [R]$$

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{M1} \\ f_{M2} \\ f_{V1} \\ f_{V2} \end{Bmatrix}$$

equazione fittina

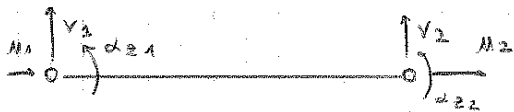


$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

$$\leadsto [k]_x = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

ROTAZIONE ELEMENTO ASTA

Abbiamo asta, barre di torsione, trave inflessa e sappiamo come ruotarle, ma non sappiamo ancora come metterle insieme.



$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{M1} \\ f_{M2} \end{Bmatrix}$$

$$EJ_x \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \alpha_{21} \\ V_2 \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{V1} \\ m_{21} \\ f_{V2} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$

$\frac{EA}{l}$	0	0	$\frac{EA}{l}$	0	0
0	$\frac{12EJ}{l^3}$	$\frac{6EJ}{l^2}$	0	$-\frac{12EJ}{l^3}$	$\frac{6EJ}{l^2}$
0	$\frac{6EJ}{l^2}$				

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ \alpha_{21} \\ M_2 \\ V_2 \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{M1} \\ f_{M2} \\ f_{V1} \\ m_{21} \\ f_{V2} \\ m_{22} \end{Bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato una formulazione di rigidità che in generale può essere scritta come

$$[k] \{s\} = \{f\} + \{f\}_e$$

Nel caso termico $\{f\}_e = \alpha \cdot E A T m \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ed ha quindi le dimensioni di una forza

Nel caso di interferenza $\begin{Bmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \end{Bmatrix} = E A \frac{\Delta L}{l} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ anche qui dimensioni di una forza

Ultimo caso è un carico che non sia in un modo in una posizione x^*

$$\{f_e\}^T = \int_0^l q(x) \begin{Bmatrix} 1-x^* \\ x^* \end{Bmatrix} dx$$

Per quanto riguarda la flessione, partiamo dal carico distribuito



Possiamo avere un carico concentrato a x^* , sia una forza sia un momento, un salto termico che produce una "saltella" di temperatura ΔT

Andremo quindi ad aggiungere i carichi nodali equivalenti con le stesse procedure già viste.

Nel caso di carico distribuito $\{f_e\}^T = q_v \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} & \frac{l^2}{12} & \frac{l}{2} & -\frac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$
Carico di momento autoequilibrato

Nel caso termico, non si hanno spostamenti di frecce ma rotazioni

$$\{f_e\}^T = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{2\alpha EJ_z \Delta T}{l} & 0 & -\frac{2\alpha EJ_z \Delta T}{l} \end{Bmatrix}$$

[Nm]
[Nm]

l è lo spessore dell'elemento.

Per quanto riguarda il carico concentrato, è una funzione peso del 3° grado

$$\{f\}_e = \begin{Bmatrix} \frac{l^3 + 2x^{*3} - 3lx^{*2}}{l^3} f_v - \frac{6x^*(l-x^*)}{l^3} m_z \\ \frac{x^{*3} + l^2x^* - 2lx^{*2}}{l^3} f_v - \frac{l^2 + 3x^{*2} - 4lx^*}{l^3} m_z \\ \frac{2x^{*3} - 3lx^{*2}}{l^3} f_v - \frac{6x^*(l-x^*)}{l^3} m_z \\ \frac{x^{*3} - lx^{*2}}{l^3} f_v - \frac{3x^{*2} - 2lx^*}{l^3} m_z \end{Bmatrix}$$

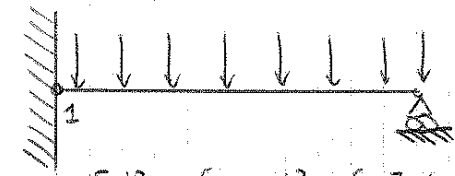
Nel caso della Trave 3D avremo carichi distribuiti angolari e verticali (y, z) e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \alpha_{x1} \\ \alpha_{y1} \\ \alpha_{z1} \\ M_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \alpha_{x2} \\ \alpha_{y2} \\ \alpha_{z2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_x l/2 \\ q_y l/2 \\ q_z l/2 \\ q_y l^2/12 \\ q_z l^2/12 \\ q_x l^2/12 \\ q_x l/2 \\ q_y l/2 \\ q_z l/2 \\ -q_y l^2/12 \\ -q_z l^2/12 \\ -q_x l^2/12 \end{array} \right\}$$

Mettiamo quindi assieme quanto visto in precedente.

ESERCIZIO

Calcolare la rotazione nel punto 2



↙ Δ Verso contrario

$$EJ_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{z1} \\ \alpha_{z1} \\ \alpha_{z2} \\ \alpha_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{V1} \\ m_{z1} \\ f_{V2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_v \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \\ -\frac{l}{2} \\ +\frac{l^2}{12} \end{bmatrix}$$

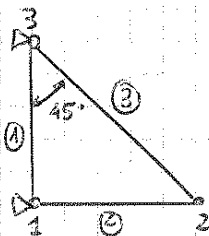
$$EJ \frac{4}{l} \alpha_{z2} = -q_v \frac{l^2}{12} \Rightarrow \alpha_{z2} = + \frac{q_v l^3}{48 EJ}$$

È quindi facile trovare anche le reazioni vincolari.

Nell'esercizio appena fatto sistema locale e globale coincidono, ma vogliamo analizzare una qualsiasi struttura di elementi qualsiasi

ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA STRUTTURA

Vogliamo ottenere $[K]\{S\} = \{F\} + \{f\}$ e che però cambia da struttura a struttura.



La numerazione è assolutamente arbitraria. Nel nostro database abbiamo l'elemento asta

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_e \end{Bmatrix}$$

$$\textcircled{1} (\mathcal{F}u_1)_1 + (\mathcal{F}u_1)_2 = F_{u_1}$$

$$\underbrace{a_{11} \cdot U_1 + a_{12} V_1 + a_{13} U_3 + a_{14} V_3}_{(\mathcal{F}u_1)_1} + \underbrace{b_{11} U_1 + b_{12} V_1 + b_{13} U_2 + b_{14} V_2}_{(\mathcal{F}u_1)_2} = F_{u_1}$$

Ripeto in questo caso cioè 6 volte e sciro 6 equazioni con 6 gradi di libertà. In generale possiamo quindi scrivere

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & b_{13} & b_{14} & a_{13} & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \end{Bmatrix}$$

ed ottengo

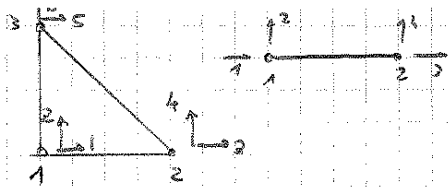
$$\begin{aligned} F_{u_1} &= a_{11} U_1 + a_{12} V_1 + a_{13} U_3 + a_{14} V_3 + b_{11} U_1 + b_{12} V_1 + b_{13} U_2 + b_{14} V_2 \\ F_{v_1} &= a_{21} U_1 + a_{22} V_1 + a_{23} U_3 + a_{24} V_3 + b_{21} U_1 + b_{22} V_1 + b_{23} U_2 + b_{24} V_2 \\ F_{u_2} &= b_{31} U_1 + b_{32} V_1 + b_{33} U_2 + b_{34} V_2 + c_{31} U_3 + c_{32} V_3 + c_{33} U_2 + c_{34} V_2 \\ F_{v_2} &= b_{41} U_1 + b_{42} V_1 + b_{43} U_2 + b_{44} V_2 + c_{41} U_3 + c_{42} V_3 + c_{43} U_2 + c_{44} V_2 \\ F_{u_3} &= a_{31} U_1 + a_{32} V_1 + a_{33} U_3 + a_{34} V_3 + c_{11} U_3 + c_{12} V_3 + c_{13} U_2 + c_{14} V_2 \\ F_{v_3} &= a_{41} U_1 + a_{42} V_1 + a_{43} U_3 + a_{44} V_3 + c_{21} U_3 + c_{22} V_3 + c_{23} U_2 + c_{24} V_2 \end{aligned}$$

2.11

$$\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & b_{13} & b_{14} & a_{13} & a_{14} \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & b_{23} & b_{24} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & (b_{33}+c_{33}) & (b_{34}+c_{34}) & c_{31} & c_{32} \\ b_{41} & b_{42} & (b_{43}+c_{43}) & (b_{44}+c_{44}) & c_{41} & c_{42} \\ a_{31} & a_{32} & c_{13} & c_{14} & (a_{33}+c_{11}) & (a_{34}+c_{12}) \\ a_{41} & a_{42} & c_{23} & c_{24} & (a_{43}+c_{21}) & (a_{44}+c_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \end{Bmatrix}$$

2.12

È ancora simmetrica e definita positiva!



Elemento 1	edof	1 2 3 4
	sdof	1 2 5 6
Elemento 2	edof	1 2 3 4
	sdof	1 2 3 4
Elemento 3	edof	1 2 3 4
	sdof	5 6 3 4

Vediamo ora per fare l'assemblaggio. Preparamo una matrice 6x6

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{14} b_{14} & a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{14} b_{14} & a_{13} b_{13} + a_{14} b_{14} & a_{14} b_{14} \\ a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} + a_{24} b_{24} & a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} + a_{24} b_{24} & a_{23} b_{23} + a_{24} b_{24} & a_{24} b_{24} \\ a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} + a_{34} b_{34} & a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33} + a_{34} b_{34} & a_{33} b_{33} + a_{34} b_{34} & a_{34} b_{34} \\ a_{41} b_{41} + a_{42} b_{42} + a_{43} b_{43} + a_{44} b_{44} & a_{42} b_{42} + a_{43} b_{43} + a_{44} b_{44} & a_{43} b_{43} + a_{44} b_{44} & a_{44} b_{44} \end{bmatrix}$$

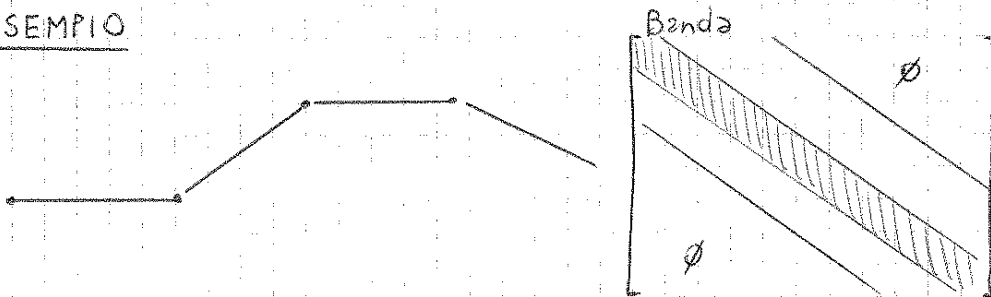
cielo for + udo for

Mi salvo della mappa

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

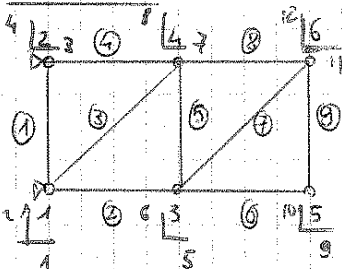
È un algoritmo di pick and place, da una matrice ad un'altra.

ESEMPIO



Gran parte delle strutture ha una forma a banda

ESEMPIO



9 elementi asta - 6 nodi. Il nostro obiettivo è scrivere

$$[K] \{S\} = \{F\}$$

Per semplicità la matrice $[K] = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$

Vediamo perché viene una matrice a banda

L'ampiezza della banda dipende dalla numerazione dei nodi.

Dobbiamo ora cercare la soluzione. Abbiamo trascurato anche il discorso vincoli e carichi.

Un determinato nodo è vincolato quando lo spostamento è noto.

$\{S_1\}$ spostamenti noti $\{S_2\}$ spostamenti incogniti

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_{e1}\} \\ \{F_{e2}\} \end{Bmatrix}$$

$\{F_1\}$ forze incognite o reazioni vincolari $\{F_2\}$ forze note

Possiamo quindi scrivere

$$[K_{11}] \{S_1\} + [K_{12}] \{S_2\} = \{F_1\} + \{F_{e1}\} \leftarrow \begin{matrix} \text{reazioni vincolari} \\ \uparrow \end{matrix}$$

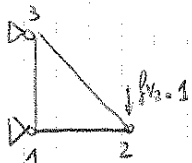
$$[K_{21}] \{S_1\} + [K_{22}] \{S_2\} = \{F_2\} + \{F_{e2}\} \leftarrow \text{spostamenti}$$

Se il problema è cinematicamente determinato, $[K]$ è tanto singolare quanti sono i suoi g.d.l. Se ho tanti spostamenti quante le angolazioni, la matrice diviene invertibile. Posso quindi determinare le soluzioni. I vincoli devono comunque garantire l'instabilità altrimenti le matrici non sono invertibili e quindi non possiamo risolvere il sistema. I vincoli devono comunque essere efficaci.

METODI DI SOLUZIONE DEL PROBLEMA STATICO

Determinare la matrice inversa è computazionalmente oneroso.

ESEMPIO



$$\begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & -1000 \\ -1000 & 0 & 1354 & -354 & -354 & 354 \\ 0 & 0 & -354 & 354 & 354 & -354 \\ 0 & 0 & -354 & 354 & 354 & -354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{M1} \\ F_{V1} \\ F_{U2} \\ F_{V2} \\ F_{M3} \\ F_{V3} \end{Bmatrix}$$

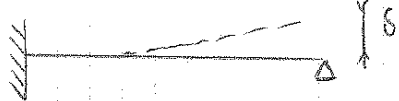
Andiamo a riordinare righe e colonne noti i vincoli

$$\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & | & -1000 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & -1000 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 354 & -354 & | & -354 & 354 \\ 0 & -1000 & -354 & 1354 & | & 354 & -354 \\ \hline -1000 & 0 & -354 & 354 & | & 1354 & -354 \\ 0 & 0 & 354 & -354 & | & -354 & 354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{U1} \\ F_{V1} \\ F_{U3} \\ F_{V3} \\ F_{U2} \\ F_{V2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_i \\ \dots \\ S_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i} S_i^* \\ F_2 - K_{2i} S_i^* \\ \dots \\ S_i^* \\ \dots \\ F_n - K_{ni} S_i^* \end{Bmatrix}$$

Crea un campo modale equivalente. La matrice diventa non singolare

ESEMPIO



$$EJ_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ A_1 \\ V_2 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Imponiamo $V_2 = \delta$. Cerchiamo ora le reazioni vincolari.

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ A_1 &= 0 \\ V_2 &= \delta \\ A_2 &= ? \end{aligned}$$

Ho tre condizioni note e un'incognita

$$\begin{aligned} F_{V_1} &= ? \\ M_1 &= ? \\ F_{V_2} &= ? \\ M_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{3 incognite}$$

Utilizzando la modificazione di Lagrange

$$EJ_z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & +\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} - EJ_z \delta \begin{Bmatrix} -\frac{12}{l^3} \\ -\frac{6}{l^2} \\ \frac{12}{l^3} \\ -\frac{6}{l^2} \end{Bmatrix}$$

$$\leadsto V_1 = 0, A_1 = 0, A_2 = \frac{3\delta}{2l}$$

Nel computer occorre che la matrice sia rettangolare.

La matrice però è comandata dal quinto, ci sono delle condizioni cinematiche. Le rigidette devono essere correttamente portionate, devo fare attenzione alla mappa.

elemento 1	1 2 3 4
	1 2 3 4
elemento 2	1 2 3 4
	3 5 6 7

c'è il buco cinematico

Nei codici si chiamano CONSTRAINT EQUATIONS

gugliotta I

INTRODUZIONE AL METODO FEM

Dato il problema, noi ne conosciamo la formulazione matematico-differenziale nel continuo. Stiamo cercando un metodo di risoluzione di un sistema continuo di equazioni alle derivate parziali. Il metodo delle differenze finite differisce da quello degli elementi finiti sta che nei primi si usa un rapporto incrementale per riportarci in un'equazione algebrica, nei secondi invece si usa l'integrale e si è discretizzato il continuo. Integriamo la funzione a cappello di rapporto da integrare sul dominio fisico. Suiamo un'equazione di bilancio che rappresenta la funzione da integrare.

Devo scrivere un funzionale in forma integrale su un dominio finito e discretizzo le variabili introducendo funzioni di approssimazione ed inserendole nel funzionale.

Il metodo ha due step cruciali

- * scelta del funzionale (preferisco la strada fisica, anche se altre strade porterebbero alle stesse soluzioni)
- * scelta della discretizzazione.

Il funzionale può essere di vario tipo, ma comunque garantisce equilibrio, congruenza e leggi costitutive. Quando vado a scegliere il funzionale, devo decidere tra singola o sistema di equazioni differenziali e capire se c'è un teorema che mi guidi nella scelta.

Dalle 15 equazioni differenziali tramite il principio dei lavori virtuali si ottiene un'unica equazione integrale.

Trovato il funzionale si inventano delle tecniche di approssimazione per far nascere la soluzione. Abbiamo quindi FUNZIONI DI FORMA nel campo degli spostamenti. Le funzioni sono di solito polinomiali di cui non si conoscono i coefficienti.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_{ik} = \delta \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i}$$

$$\leadsto \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \delta u_{ik} + \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} \delta \sigma_{ik} \right) dV_i$$

Cominciamo a prendere il secondo termine

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \delta \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} = \sigma_{11} \delta \epsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \epsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33} + \left(\sigma_{12} \delta \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{21} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{13} \delta \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \sigma_{31} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \sigma_{23} \delta \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \sigma_{32} \delta \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$$

Abbiamo quindi 9 termini, ma essendo il tensore simmetrico e ricordando che

$$\tau_{ik} \left(\delta \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \tau_{ik} \delta \gamma_{ik}$$

otteniamo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \delta \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} = \sigma_{11} \delta \epsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \epsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33} + \tau_{12} \delta \gamma_{12} + \tau_{13} \delta \gamma_{13} + \tau_{23} \delta \gamma_{23}$$

che possiamo scrivere in forma matriciale

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \delta \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_i} = \{ \sigma \}^T \{ \delta \epsilon \} = \{ \delta \epsilon \}^T \{ \sigma \}$$

Andiamo a questo punto a vedere il primo termine

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \delta u_{ik} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_3} \right) \delta u_{ik}$$

che per le equazioni di equilibrio diventa

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \delta u_{ik} = - \sum_{k=1}^3 \Phi_k \delta u_{ik}$$

che possiamo scrivere in forma vettoriale

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \delta u_{ik} = - \{ \Phi \}^T \{ \delta u \} = - \{ \delta u \}^T \{ \Phi \}$$

che in conclusione porta a

$$- \{ \delta u \}^T \{ \Phi \} + \{ \delta \epsilon \}^T \{ \sigma \}$$

$$\{\delta u\} = [n] \{\delta s\} \quad \checkmark \text{ derivata parziale}$$

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{\mu\} = [\partial] [n] \{\delta s\} = [b] \{\delta s\}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial] \{\mu\}$$

Sia $\{\mu\}$ e $\{\varepsilon\}$ dipendenti da un campo $\{\delta s\}$ tramite funzioni a nostra arbitrio.

Andiamo a sostituire nel nostro funzionale

$$\int_A [[n] \{\delta s\}]^T \{t\} dA + \int_V [[n] \{\delta s\}]^T \{\Phi\} dV = \int_V [[b] \{\delta s\}]^T \{\sigma\} dV$$

Possiamo ora introdurre le leggi costitutive del materiale

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} = [E] [b] \{\delta s\}$$

La scelta dei modi può comandare tutto.

$$\int_A [[n] \{\delta s\}]^T \{t\} dA + \int_V [[n] \{\delta s\}]^T \{\Phi\} dV = \int_V [[b] \{\delta s\}]^T [E] [b] \{\delta s\} dV$$

Possiamo ora scrivere

✓ posso portare $\{\delta s\}$ fuori perché noto

$$\{\delta s\}^T \int_A [n]^T \{t\} dA + \{\delta s\}^T \int_V [n]^T \{\Phi\} dV = \{\delta s\}^T \int_V [b]^T [E] [b] \{\delta s\} dV$$

Possiamo considerare $\delta s = 1$ e spariscono gli spostamenti virtuali.

$$\int_A [n]^T \{t\} dA + \int_V [n]^T \{\Phi\} dV = \int_V [b]^T [E] [b] dV$$

Sono scomparsi tutti i simboli di lavoro virtuale e compaiono degli integrali che so risolvere perché impongo io le funzioni. Posso quindi scrivere in forma sintetica.

$$[K] \{\delta s\} = \{F\}_\phi + \{F\}_A$$

$[K]$ sarà quadrata e dimensioni pari ai g.d.l. del nostro elemento.

Negli elementi in campo lineare tutte e 5 sono soddisfatte.
 IL materiale è indipendente dalle funzioni di forma.

$$[K] = \int_V [b]^T [E] [b] dV$$

Andiamo ora a scegliere i polinomi. Vedremo le serie polinomiali, i polinomi isoparametrici.

Una funzione può essere benevolmente espressa da una serie

①D $u = a_1 x + a_2 x + \dots$

②D $\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + \dots \\ v = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + \dots \end{cases}$

③D $\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + \dots \\ v = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z + \dots \\ w = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z + \dots \end{cases}$

Queste serie sono sicuramente isotrope. Sono continue e derivabili. Il moto rigido c'è dappertutto, è il parametro indipendente dalla struttura. a_i ad esempio è il moto rigido, garantisce l'arbitrarietà del moto rigido. Il moto rigido è tolto dai vincoli, non dalla struttura. Tutte garantiscono almeno la deformazione costante. a_i è quindi anche uguale alla deformazione.

È una replicazione di $\{u\} = [n] \{s\}$.
 Compatto quindi la formulazione

$$\{u\} = [P] \{a\}$$

$$\{u\}^T = \{u \ v \ w\}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & y & z & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & x & y & z & \dots \end{bmatrix}$$

$$\{a\}^T = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ b_1 \ b_2 \ \dots \ c_1 \ c_2 \ \dots\}$$

Per controllare la rappresentazione di uno stato di deformazione costante, una verifica numerica è data dal PATCH TEST, che consiste nel verificare numericamente uno stato di deformazione costante quando, ad un insieme di elementi, assemblato in modo qualsiasi, sia applicato un campo degli spostamenti tale da produrre teoricamente uno stato di deformazione costante

La serie polinomiale è la scelta più semplice, non contemplata nei codici commerciali.

Ci sono però diversi tipi di polinomi

LAGRANGE

$$n_i = \frac{\prod_{j=1}^{m+1} (x - x_j)}{\prod_{j=1}^{m+1} (x_i - x_j)}$$

Porta comunque allo stesso risultato

HERMITE

$$f(x) = f(1)n_1 + \frac{\partial}{\partial x} f(1)n_2 + \dots + \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f(1)n_m + f(2)n_{m+1} + \frac{\partial}{\partial x} f(2)n_{m+2} + \dots + \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f(2)n_{2m}$$

A me però interessa scrivere la matrice di rigidità.

$$[K] = \int_V [b]^T [E] [b] dV$$

Andiamo a vedere con l'asta $n_1 = 1 - \frac{x}{L}$, $n_2 = \frac{x}{L}$

$$\{E\} = \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \{u\} = \frac{d}{dx} [n_1 \ n_2] \{s\} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{[b]} \{s\}$$

Lo posso quindi mettere dentro l'integrale

$$[K] = \int_V \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dV$$

che integrando porta $[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ che coincide con quanto noto

La compatibilità dell'elemento si può verificare dimostrando che gli spostamenti dei punti su un lato dipendono solamente dagli spostamenti dei nodi che giacciono su quel lato. In particolare, esplicitando le funzioni di forma n_i , si ha la seguente espressione per la componente u dello spostamento:

$$u = \frac{1}{2A} \{ [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] u_1 + [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] u_2 + [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] u_3 \} \quad 4.111$$

Si consideri ad esempio il lato 1-2 del triangolo di figura 4.7, caratterizzato dalla seguente equazione:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad 4.112$$

Sostituendo la 4.112 nella 4.111, si nota che il coefficiente n_3 che moltiplica il termine u_3 si annulla:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1) \left[y_1 + (x_2 - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 - x_1) y_1 - x_1 (y_2 - y_1) = 0 \quad 4.113$$

per cui lo spostamento di un punto qualsiasi sul lato 1-2 dipende solo dagli spostamenti dei nodi 1 e 2 che definiscono il lato 1-2; condizione questa necessaria e sufficiente per garantire la compatibilità dell'elemento.

Vediamo ora la matrice di rigidità e le deformazioni. Immaginiamo di simulare una piastra in comportamento membranale

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}$$

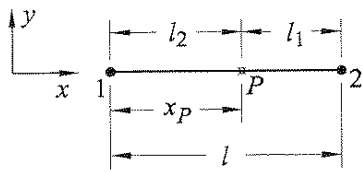
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \{u\} = [b] [n] \{s\}$$

e quindi $[b] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$

La $[b]$ per l'elemento triangolare è costante e quindi questo elemento rappresenta il più grande rendimento possibile.

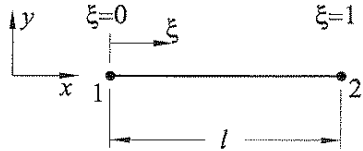
ELEMENTI MONODIMENSIONALI



La posizione di P può essere individuata da

$$L_1 = \frac{l_1}{l} \quad L_2 = \frac{l_2}{l} \quad \text{con } L_1 + L_2 = 1$$

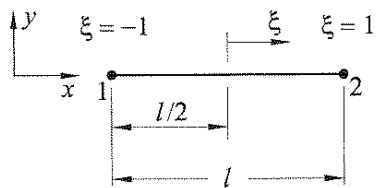
$$\leadsto x = L_1 x_1 + L_2 x_2$$



Volendo esprimere la coordinata fisica x in funzione di una sola coordinata naturale ξ , variabile tra 0 e 1 in effettiva il cambio di variabile

$$L_1 = 1 - \xi \quad L_2 = \xi$$

$$\leadsto x = (1 - \xi)x_1 + \xi x_2$$

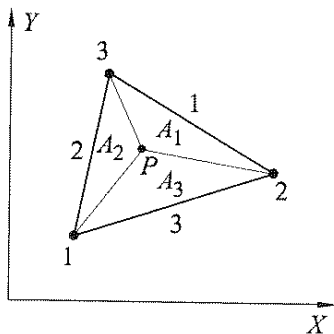


È usuale riferire l'origine del sistema naturale nel baricentro geometrico dello elemento con $-1 < \xi < 1$

$$\leadsto L_1 = \frac{1 - \xi}{2} = n_1 \quad L_2 = \frac{1 + \xi}{2} = n_2$$

$$\leadsto x = n_1 x_1 + n_2 x_2 \quad \text{con } n \text{ fattore di forma}$$

ELEMENTI TRIANGOLARI

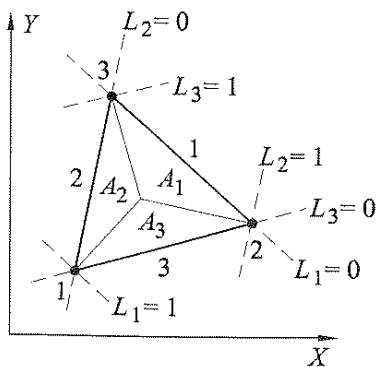


Le funzioni interpolatrici sono definite in un sistema di riferimento naturale basato sulle coordinate d'area.

La posizione di P può essere individuata come

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

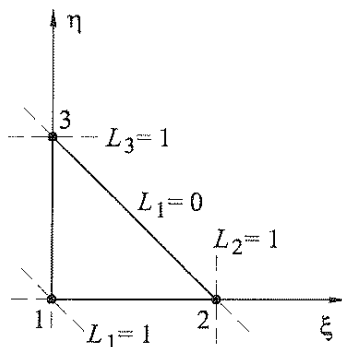
$$\text{con } L_1 + L_2 + L_3 = 1$$



Le coordinate (x, y) di un punto P potranno essere descritte da

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

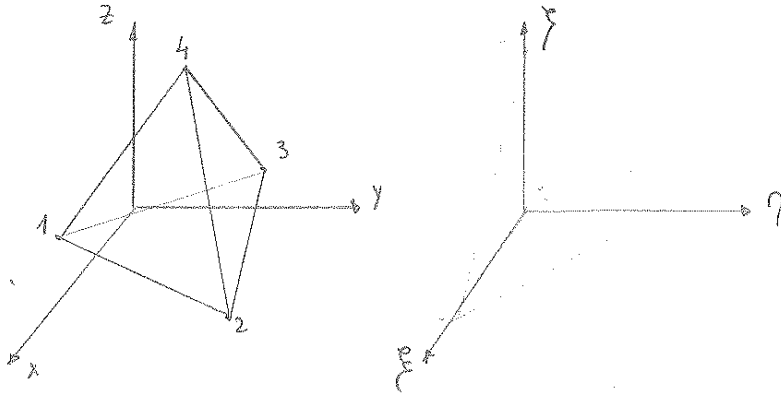


Se io ho descritto la geometria con coordinate naturali, vedo ad esprimere in funzioni spostamento. Il simulacro con sovrapposizione degli effetti, mi espone una volta la geometria una volta il campo degli spostamenti.

ELEMENTI SOLIDI TETRAEDRI

Il sistema di riferimento locale è descritto in termini di coordinate di volume

$$L_1 = \frac{V_1}{V} \quad L_2 = \frac{V_2}{V} \quad L_3 = \frac{V_3}{V} \quad L_4 = \frac{V_4}{V}$$

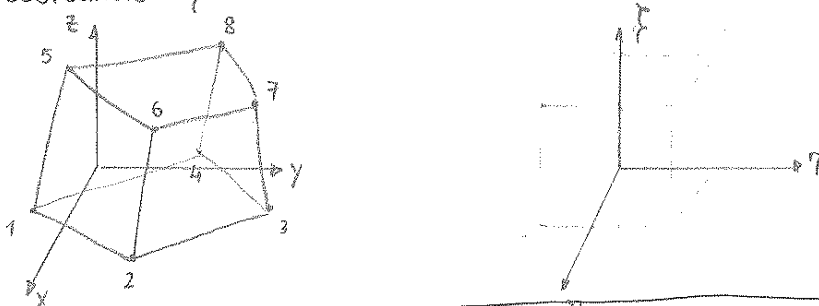


$$\eta_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad \eta_2 = \xi \quad \eta_3 = \eta \quad \eta_4 = \zeta$$

ELEMENTI SOLIDI PARALLELEPIPEDI

Le funzioni di forma per gli elementi solidi parallelepipedi possono essere ricavati a partire da quelle per gli elementi quadrangolari piani aggiungendo la terza coordinata ζ

metrica, biunivoca. i polinomi per la η tena tendo inventore $\{u\} = [N] \{s\}$ le 5 condizioni e viceversa $n \times m$ detti SUPERELEMENTI e di rigidità.



$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & \eta_2 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ \eta_3 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & \eta_4 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ \eta_5 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & \eta_6 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ \eta_7 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & \eta_8 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned}$$

Per calcolare la matrice di rigidità, che nel caso piano diventa

$$[K] = \int_V [b]^T [E] [b] dV = \int_A [b]^T [E] [b] h dA$$

Nota che

$$\{\epsilon\} = [b] \{s\} \quad \text{con } \{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{xy}\} \quad \text{dove}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Possiamo scrivere quindi le deformazioni in funzione delle funzioni di forma

$$\epsilon_{xx} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial n_i}{\partial x} u_i$$

$$\epsilon_{yy} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial n_i}{\partial y} v_i$$

$$\epsilon_{xy} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial n_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial n_i}{\partial x} v_i \right)$$

Tutto ciò vuol dire che il campo delle deformazioni è il prodotto delle matrici derivate per gli spostamenti

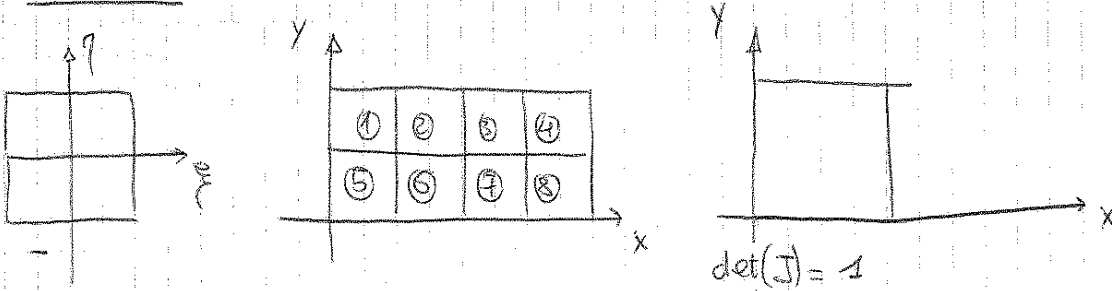
$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{\partial n_i}{\partial x} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \frac{\partial n_i}{\partial y} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial n_i}{\partial y} & \frac{\partial n_i}{\partial x} & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dots \\ u_i \\ v_i \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Notiamo che moltiplicando il gradiente possiamo fare un cambiamento di coordinate.

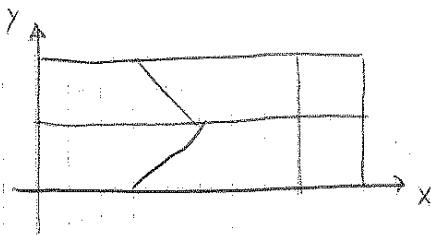
$$\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial \eta} = \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

ESEMPIO



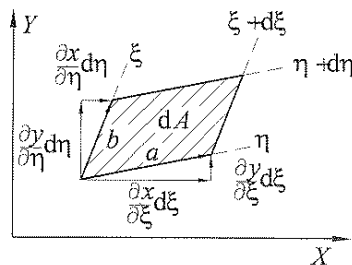
Lo Jacobiano rappresenta la modificazione della geometria dello elemento, se non c'è modificazione il determinante è unitario. Anche se c'è un cambio di scala, il determinante dello Jacobiano rimane 1. Lo Jacobiano dice punto distorzo rispetto alla forma originale.



Se $\det(J) = 1$, gli elementi sono tutti uguali, invece se cambia la forma $\det(J) \neq 1$ e non è più costante punto a punto.

Occorre quindi calcolare lo Jacobiano che deve essere ≤ 1 e diverso da zero.

Consideriamo una porzione infinitesimale di contorno.



Scriviamo due vettori $\{a\}$ e $\{b\}$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\xi \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\eta$$

e facendo il prodotto otteniamo

$$dA = \{a\} \cdot \{b\} = \left(\frac{\partial x \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y \partial x}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta = \det[J] d\xi d\eta$$

Potremmo quindi legare l'infinitesimo in coordinate naturali con l'infinitesimo in coordinate fisiche. Se l'elemento fosse ruotato un prodotto $\det(J) = 1$, altrimenti $\det(J) \neq 1$.

Potremmo scrivere la $[k]$ come integrale doppio

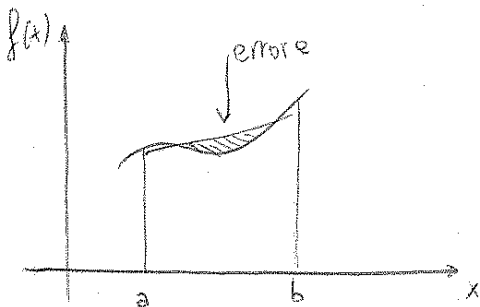
$$[k] = \int_A [b]^T [E] [b] b dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [b]^T [E] [b] \det[J] d\xi d\eta$$

Grazie a $\det(J)$ ho trasformato un integrale complesso in un integrale banale. Con il pc trasformo gli integrali in sommatorie.

$$[k] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j [b]_{ij}^T [E] [b]_{ij} \det[J]_{ij} b$$

Ho quindi un vantaggio numerico non indifferente.

ESEMPIO



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$I = \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] (b-a)$$

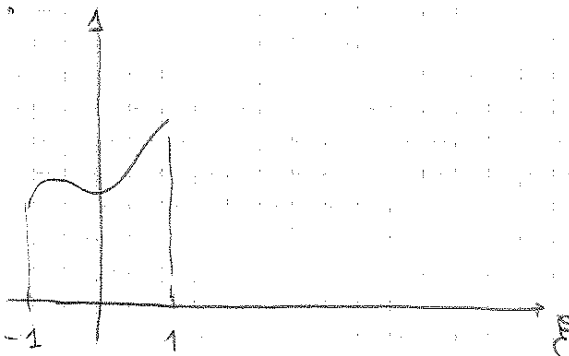
$$\approx I = (b-a) [w_1 f(a) + w_2 f(b)]$$

Vuol dire valutare la funzione in un determinato punto e moltiplicarlo per un peso (trapezi $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$)

Calcolando un integrale numericamente, discretizziamo il modello fisico in un certo numero di punti.

Tab. 9.2 – Ascisse e pesi ponderali secondo il metodo di Gauss

m	1	2	3	4		
ξ_i	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm \sqrt{0.6}$	$\pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4.8}}{7}}$	$\pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{4.8}}{7}}$
w_i	2	1	8/9	5/9	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$



$2m - 1$
 $\leadsto m = 1$ $w = 2$
 $\xi = 0$
 $\leadsto m = 2$...

CONVERGENZA DEI METODI FEM

Politecnico di Torino - I Facoltà di Ingegneria
 Corso di Laurea in Ing. Meccanica A.A 2011/12

Progettazione di prodotto e processo con
 metodi numerici

Convergenza nei metodi FEM

Docente: Prof. Aurelio Somà

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A 2011/2012 - Prof. A. Somà - Convergenza FEM 1

METODO ELEMENTI FINITI :
 discretizzazione o mesh

□ Abbiamo a disposizione due possibilità
 per migliorare la discretizzazione del
 continuo :

- Aumentare il grado del polinomio N
 (funzione di forma)
- Incrementare il numero dei nodi e
 degli elementi

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A 2011/2012 - Prof. A. Somà - Convergenza FEM 2

**METODO ELEMENTI FINITI :
valutazione globale del residuo**

Quindi l'equazioni differenziali indefinite di equilibrio diventano ove il termine p_j è detto **residuo**

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} + \phi_j = p_j \quad \text{per } j=1,2,3$$

Negli elementi finiti si dovrebbero sommare tutti i contributi di tutti gli elementi scrivendo un vettore di errore relativo della stima della tensione, sugli elementi e mediata ai nodi

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma\}_E - \{\Delta\sigma\}_N$$

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 27

METODO ELEMENTI FINITI : CONVERGENZA

□ A questo punto sullo stesso esempio dopo aver valutato gli effetti sul residuo dell'incremento del grado del polinomio andiamo ad effettuare un test di convergenza a mantenendo fisso il tipo di elemento e

- Incrementando il numero dei nodi e degli elementi
- Ad esempio usando il parametro di generazione della mesh **Lesize** per incrementare le suddivisioni delle aree

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 29

**METODO ELEMENTI FINITI :
modello lastra piana con elementi 4 nodi**

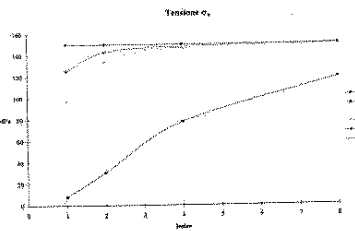
■ Modello con LESIZE 4

```
!Definizione elemento
et,1,42,1,3
!Definizione materiale
mp,ex,1,200000
nuxy,1,0,3
!Spessore della trave
r,1,5
!Definizione k point
k,1
k,2,25
k,3,25,20
k,4,0,20
k,5,50
k,6,50,20
k,7,75
k,8,75,20
k,9,100
k,10,100,20
!Definizione aree
a,1,2,3,4
a,2,5,6,3
a,3,7,8,6
a,4,9,10,8
!Definizione numero elementi
lesize,all,4
amesh,all
!Definizione carico
NSEL,S,LOC,X,100
NSEL,R,LOC,Y,20
F,ALL,FY,-1000
NALL
!Definizione vincoli
nset,s,loc,x,0
d,all,ux
nset,all
nset,s,loc,x,0
NSEL,R,LOC,Y,10
d,s,uy
nset,all
```

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 31

**METODO ELEMENTI FINITI : CONVERGENZA
RISULTATI PER LASTRA PIANA E DIVERSI ELEMENTI**

Si osserva la convergenza monotona valutata sulla tensione in un punto. La velocità di convergenza è diversa per ogni elemento. Una ottima convergenza per l'elemento ad 8 nodi. Una pessima convergenza per l'elemento a 3 nodi.



Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 33

**METODO ELEMENTI FINITI :
valutazione globale del residuo : PRERR**

Quindi in pratica il **residuo tensionale** viene stimato come prodotto scalare che è direttamente proporzionale ad un **errore energetico relativo globale su tutta la mesh**

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma\}_E - \{\Delta\sigma\}_N$$

$$\%ERR = \frac{\{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\sigma\}}{\|\{\Delta\sigma\}\|^2}$$

In **ANSYS** ad esempio **PRERR** errore energetico percentuale nella mesh

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 28

**METODO ELEMENTI FINITI :
modello lastra piana con elementi 3 nodi**

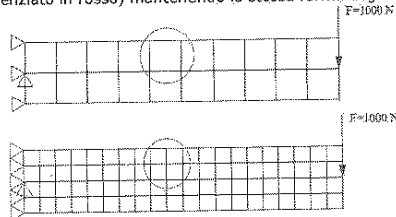
MODELLO CON 4 righe con 16 triangoli per riga (64 elementi)

```
!Definizione elemento
et,1,42,1,3
mp,ex,1,200000
nuxy,1,0,3
!Spessore della trave
r,1,5
!Definizione modello
n,1
n,21,100
fill
ngen,21,21,1,21,1,1
e,1,2,22
*repeat,20,1,1,1
e,2,23,22
*repeat,20,1,1,1
egen,20,21,1,40,1
!Definizione carico
NSEL,S,LOC,X,100
NSEL,R,LOC,Y,20
F,ALL,FY,-1000
NALL
!Definizione vincoli
nset,s,loc,x,0
d,all,ux
nset,all
d,190,all
/SOLU
SOLVE
/POST1
PLDISP,1
```

Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 30

METODO ELEMENTI FINITI : convergenza

■ Per essere valido il **test di convergenza** si devono impiegare elementi non distorti e mesh **AUTOCONTENUTE**. Ad esempio si può crescere da 1 a 4 suddivisioni nello stesso continuo (evidenziato in rosso) mantenendo la stessa forma degli elementi



Progettazione di prodotto e processo con metodi numerici A.A. 2011/2012 - Prof. A. Soma - Convergenza FEM 32

VALUTAZIONE DI σ ED ϵ

$$\{ \epsilon \} = [b] \{ s \}$$

$$\{ \sigma \} = ([E][b] \{ s \} + \epsilon_0) + \{ \sigma_0 \}$$

Tensioni e deformazioni sono direttamente calcolabili dalle derivate delle funzioni di forma, cosa non verificata nella teoria delle travi per la presenza di costanti geometriche.

Nel caso degli elementi finiti, ho immediatamente disponibili i campi di tensione e deformazione nel mio elemento.

Possiamo però interpolare in alcuni punti con lo stesso ordine del polinomio delle funzioni di forma?

Parliamo dei PUNTI DI BARLOW per studiare lo stato di tensione di un punto.

La logica è stata di prendere un elemento monodimensionale con polinomio del 3° e 4° grado in coordinate naturali.

$$v_a = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \{ a \}$$

$$\{ s_a \} = [A] \{ a \}$$

$$v_b = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \quad \xi^4] \{ b \}$$

$$\{ s_b \} = [B] \{ b \}$$

I due campi di spostamento hanno ordine diverso, ci sono punti in cui sono uguali ed eguali.

$$[A] \{ a \} \approx [B] \{ b \}$$

$$\Rightarrow \{ a \} = [A]^{-1} [B] \{ b \}$$

Lo stato di tensione è proporzionale alle derivate seconde del campo degli spostamenti

$$\frac{\partial^2 v_a}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v_b}{\partial \xi^2}$$

$$[A]^{-1} [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{ a \}$ e $\{ b \}$ non sono confrontabili però possiamo scrivere

$$[0 \ 0 \ 2 \ 6 \ \xi] \{ a \} = [0 \ 0 \ 2 \ 6 \ \xi \ 12 \xi^2] \{ b \}$$

e sostituendo in termini di $\{ b \}$:

$$[0 \ 0 \ 2 \ 6 \ \xi \ 4] \{ b \} = [0 \ 0 \ 2 \ 6 \ \xi \ 12 \xi^2] \{ b \}$$

I punti di Barlow in questo caso sono dati dalle relazioni

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

lo Con la formulazione degli elementi finiti a spostamento canonica assegnato si ha sempre una stima in eccesso della rigidità del sistema. Quindi sotto-integrale, cioè sotto-stimare la rigidità dell'elemento, può, di fatto, portare a risultati migliori a posto che l'errore nell'integrazione numerica compensi la sovrastima della rigidità strutturale dovuta al tipo di formulazione.

- 3 Moto rigido
- * bending 2
- Δ shear 1
- compression 1
- ~~shear~~ extension 1

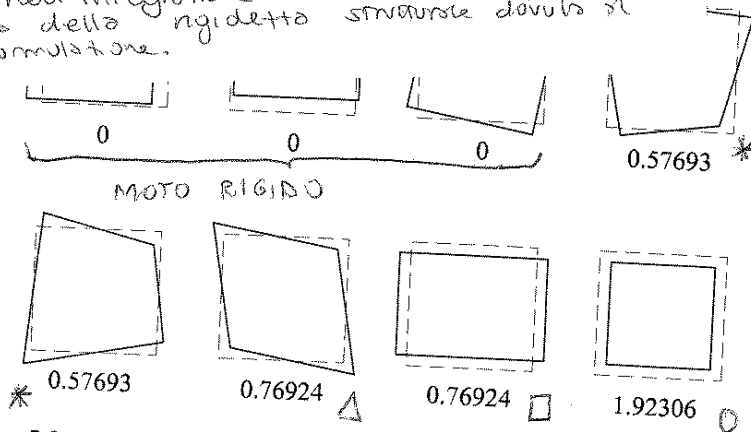


Fig. 5.31 - Modi di deformazione dell'elemento a 4 nodi (integrazione esatta).

Andiamo a vedere una regola empirica che ci dica la qualità della mesh.

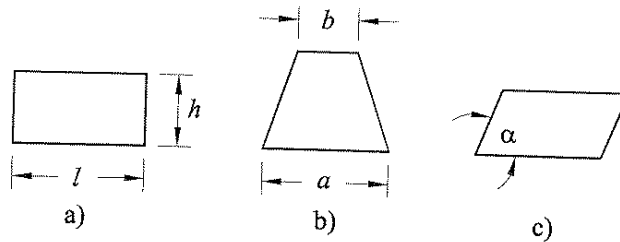


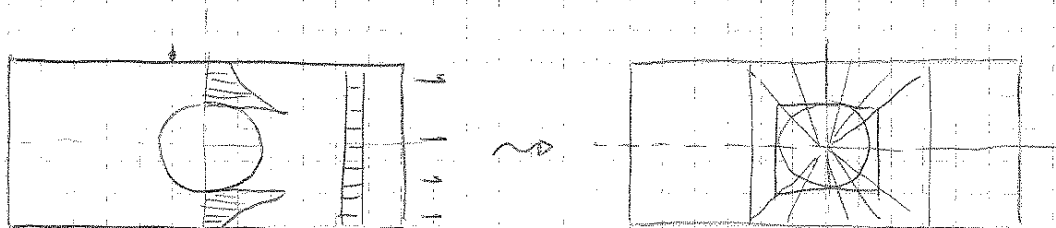
Fig. 5.24 - Distorsione di un elemento.

Con riguardo al primo tipo di distorsione (fig. 5.24a) si può accettare un rapporto 1:2 per elementi situati in zone dove si vuole conoscere lo stato di tensione e di 1:10 per elementi lontani da zone critiche.

Nel caso della figura 5.24b un rapporto accettabile è di 1:4 in zone critiche e di 1:10 in zone non critiche.

Per ciò che riguarda la distorsione angolare (fig. 5.24c) è in genere consigliabile non avere angoli interni minori di 45° per elementi quadrangolari e minori di 15° per elementi triangolari.

Un componente può avere zone a tensione costante ed altre con forti gradienti. Quindi nel primo caso gli elementi saranno più larghi e nel secondo più fini. Immaginiamo una piastra forata in trazione.



Gli elementi oltre ed entro piccoli devono essere poco distorti

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [b] \{s\} = [D][n] \{s\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [n] \{s\}$$

Sarebbe quindi ottimo scrivere

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} [n] \{s\}$$

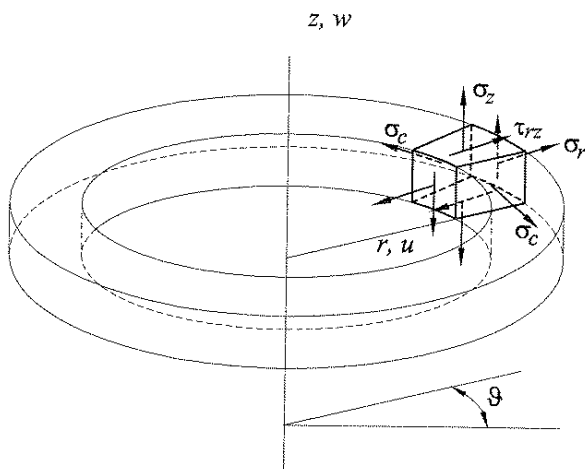
Nell'integrazione selettiva le deformazioni sono integrate esattamente mediante un gnglio 2x2, mentre i termini corrispondenti alla deformazione a taglio sono sotto-integrati, calcolati cioè nel punto centrale dell'elemento.

Viene quindi fuori che la matrice di rigidità è dovuta allo effetto della ϵ e delle γ

$$\begin{aligned} [k] &= \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_V \{\gamma\}^T \{\tau\} dV = \\ &= \int_A [b_1][E_{11}][b_1] h dA + \int_A [b_2][E_{22}][b_2] h dA \end{aligned}$$

e quindi posso venire giusta la matrice di rigidità. Gli integrali numerici quindi eliminano un errore tramite la integrazione selettiva.

SOLIDI ASSIALSIMMETRICI



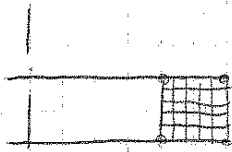
Geometria cilindrica
 $\theta \rightarrow$ anomalia

È uno stato di tensione particolare, lo possiamo rappresentare come tensione circonferenziale, assiale, radiale ed eventualmente una τ .

Non a deve essere solo simmetria geometrica, ma anche di carichi.

Il problema assialsimmetrico si traduce in un problema piano.

La matrice di rigidezza è comandata da [b], ma c'è anche la [E] che è il legame $\sigma - \epsilon$, devo quindi scrivere il legame in coordinate cilindriche tenendo conto delle influenze dei coefficienti di Poisson.



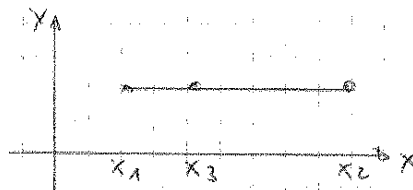
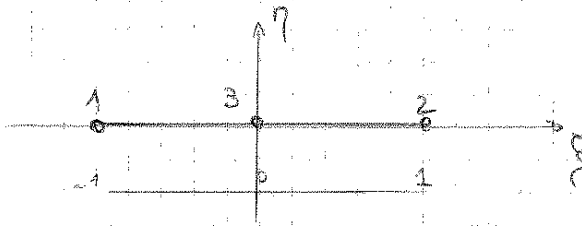
AMESH su Ansys. Devo però dirgli che è una struttura axisimmetrica. Quando vedo a definire l'elemento PLANE42 ha una serie di opzioni legate allo stato di deformazione che mi può descurare

- 0 AXIAL
- 1 STRESS PLANE
- 2 PLANE STRAIN
- 3 PLANE STRAIN + (H)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

continua...

ESEMPIO ELEMENTO ISOPARAMETRICO



Facciamo passare un polinomio di 2° grado.

Le derivate valgono

che mi permettono di valutare lo Jacobiano delle funzioni di forma

~~$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} & 1 - 2\xi \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$~~

Questo accade in funzione della scelta del punto x_3 .

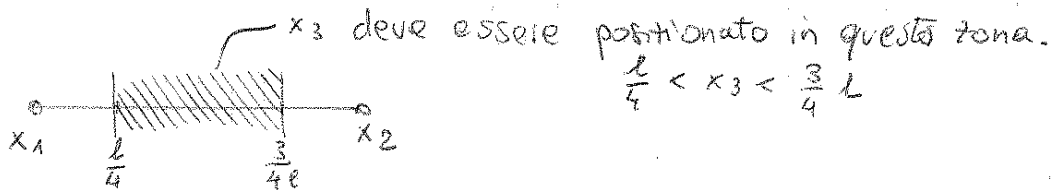
$$[J] = \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) \left(\frac{1}{2} + \xi \right) \left(-2\xi \right) \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

con $x_1=0$, $x_2=0$ e $0 < x_3 < l$ che porta a

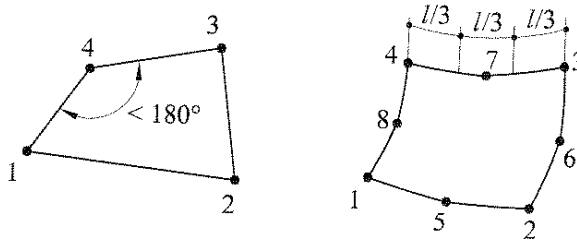
$$J = \left(\frac{1}{2} + \xi \right) l - 2\xi x_3$$

se $x_3 = l/2$ non c'è distinzione. Voleremo $x_3/J < 0$, e otterremo che se $x_3 = \frac{l}{4}$ \vee $x_3 = \frac{3}{4}l \Rightarrow J=0$.

Abbiamo quindi provato due punti di singolarità



L'elemento 8 nodi di Zienkiewicz ci porta alla scelta della posizione del nodo intermedio



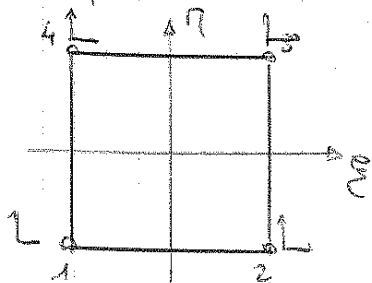
Devono stare oltre loro tra $l/4$ e $3/4l$ per non avere lo Jacobo nullo, le regole empiriche dice

$$\frac{l}{3} < x_3 < \frac{2}{3}l$$

ELEMENTO WILSON-TAYLOR

Prende il nome di elemento con extra-shape, o con modi incompatibili.

L'obiettivo è quello di avere un elemento a 4 nodi che si comporti come un elemento a 8 nodi.



$$\eta_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$\eta_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

Non possono essere usate perché il gradiente di tensione è elevato, ma la matrice di rigidezza non è computabile.

Questo accade in funzione della scelta del punto x_3 .

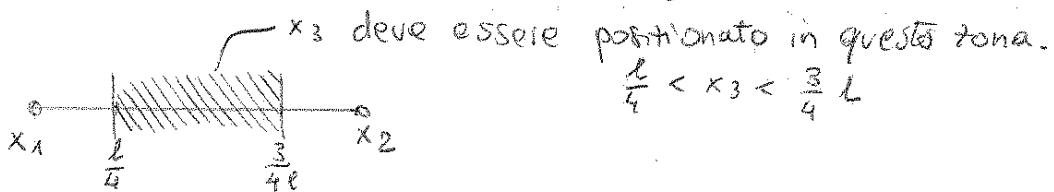
$$[J] = \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) \left(\frac{1}{2} + \xi \right) \left(-2\xi \right) \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

con $x_1=0$, $x_2=l$ e $0 < x_3 < l$ che porta a

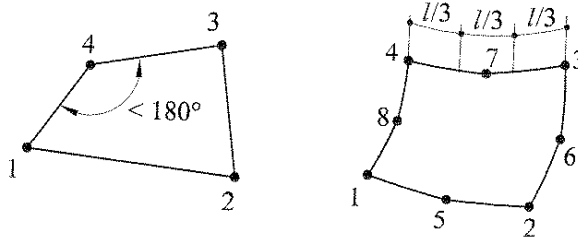
$$J = \left(\frac{1}{2} + \xi \right) l - 2\xi x_3$$

Se $x_3 = l/2$ non c'è distinzione. Volentieri $x_3 / J < 0$ e otteniamo che se $x_3 = \frac{l}{4}$ \vee $x_3 = \frac{3}{4}l \Rightarrow J = 0$.

Abbiamo quindi provato due punti di singolarità



L'elemento 8 nodi di Zienkiewicz si porta alle scelte della partizione del modo intermedio



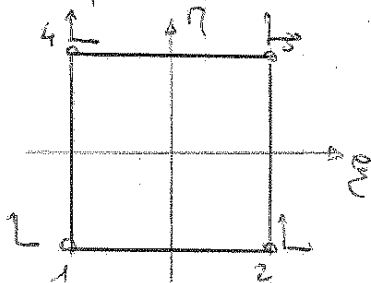
Devono stare anche loro tra $l/4$ e $3/4l$ per non avere lo Jacobian nullo, le regole empiriche dice

$$\frac{l}{3} < x_3 < \frac{2}{3}l$$

ELEMENTO WILSON - TAYLOR

Prende il nome di elemento con extra-shape, o con modi incompatibili.

L'obiettivo è quello di avere un elemento a 4 nodi che si comporti come un elemento a 8 nodi.



$$n_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$n_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$n_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$n_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

Non possono essere usate quando il gradiente di temperatura è elevato, ma la matrice di rigidità non è computabile perché presente.

Dobbiamo calcolare la matrice di rigidità, che porta a

$$[k] = \int_V [b_s][b_a]^T [E] [b_s][b_a] dV = \int_V \frac{[b_s][E][b_a][E][b_s]}{[b_s][E][b_a][E][b_a]} dV$$

$$\rightarrow [K] = \begin{bmatrix} [k_{ss}] & [k_{sa}] \\ [k_{as}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidità dell'elemento quattro nodi è una 8×8 , mentre per l'elemento a 8 nodi è una 16×16 . Il risultato che stiamo ottenendo è una 16×16 in funzione di parametri α .

La matrice iniziale per scrivere il solito problema $[k]\{s\} = \{f\}$

$$\begin{bmatrix} [k_{ss}] & [k_{sa}] \\ [k_{as}] & [k_{aa}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Le parti le poniamo solo mettere sui nodi, fuori dai nodi non mettere solo zero. Questo porta alla riduzione di Guyan (o statica)

$$[k_{as}]\{s\} + [k_{aa}]\{a\} = \{0\}$$

$$\rightarrow \{a\} = -[k_{aa}]^{-1}[k_{as}]\{s\}$$

$$[k_{ss}]\{s\} + [k_{sa}]\{a\} = \{f\}$$

Sostituendo ottengo $[k_{ss}]\{s\} + [k_{sa}][k_{aa}]^{-1}[k_{as}]\{s\} = \{f\}$

I coefficienti $\{a\}$ sono scomparsi. È una matrice 8×8

$$\underbrace{[k_{ss}] - [k_{sa}][k_{aa}]^{-1}[k_{as}]}_{[k]} \{s\} = \{f\}$$

I nodi $\{a\}$ sono "virtuali". Abbiamo condannato staticamente le giunzioni di fessura.

L'elemento di Wilson Taylor non è isoparametrico, è il primo superelemento che incontriamo, 4 nodi, ma 8 campi di spostamento, quindi $n > m$.

Le extra shapes hanno determinato una matrice che andiamo a sottrarre alla matrice di rigidità iniziale, se no non andrei a convergere.

Andiamo a premoltiplicare il tutto per la matrice dei modi

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] \{ \alpha \} = [\Phi]^T \{ P \}$$

$$\leadsto [\Lambda] \{ \alpha \} = [\Phi]^T \{ P \}$$

da cui ricavo

$$\lambda_i \alpha_i = \{ \Phi \}_i^T \{ P \}$$

$$\alpha_i = \frac{\{ \Phi \}_i^T \{ P \}}{\lambda_i}$$

Lo spostamento $\{ s \}$ diventa la sovrapposizione modale dei modi di deformazione

L'entorvolare è direttamente proporzionale allo spostamento e quindi all'energia elastica

$$\{ \Phi \}_i^T [K] \{ \Phi \}_i = 2U_i = \lambda_i c$$

$\lambda_i = 0$ rappresenta il moto rigido del sistema.

Ad esempio un elemento 4×4 porterà ad 8 autovalori, 3 sono rigidi a 0 (molti rigidi) e 5 modi di deformazione.

Se il numero di autovalori nulli è minore del numero di g.d.l. di moto rigido del sistema allora il campo di spostamenti assunto non è adeguato alla rappresentazione della cinematica del sistema. Se invece il numero di autovalori nulli è maggiore del numero di g.d.l. di moto rigido del sistema allora sono presenti dei moti rigidi spuri o meccanismi nascosti, cioè modi di deformazione associati ad un'energia di deformazione nulla.

$$\lambda = 0$$

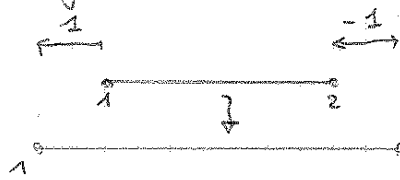
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

$$\{ \Phi \}_1^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ 1 \ 1 \}$$

$$\{ \Phi \}_2^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ 1 \ -1 \}$$

moto rigido

motto "deformato" (molto)



Riesco quindi a comprendere il metodo e le sue portate.

PATCH TEST

Sono test numerici che possono essere fatti su tutti i codici commerciali per conoscere la bontà e la validità dell'elemento. Il test di Iron valuta la compatibilità.

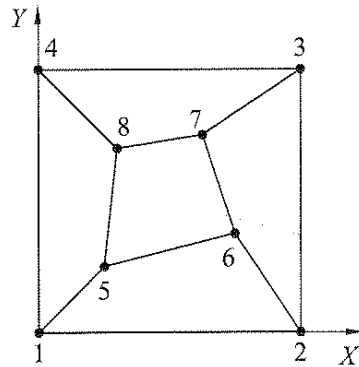
L'elemento di Taylor potrebbe non essere compatibile.



I superelementi sono considerati debolmente incompatibili.

Non posso pensare di analizzare i codici dei vari elementi. Il patch test è molto utile per validare una delle caratteristiche degli elementi, cioè garantire un campo di deformazione costante.

Si fa una mesh molto distorta



Abbiamo 5 elementi molto distorti in un sistema x-y. Vincoliamo 1 e spostiamo 2, 3, 4 dando degli spostamenti interi tale che la deformazione in tutti i punti sia costante.

$$u = \frac{1}{10} \left(x + \frac{y}{2} \right)$$

$$v = \frac{1}{10} \left(\frac{x}{2} + y \right)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0,1$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,1$$

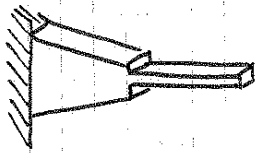
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,1$$

Potremmo anche avere un elemento omobimetrico a 4 nodi.

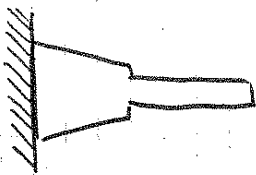
CONSIDERAZIONI DI MODELLISTICA

Partendo da $\{u\} = [n] \{s\}$, possiamo scegliere diversi elementi da mettere nello studio.

→ VOLUMI → SOLID

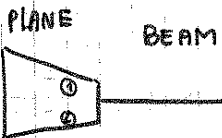


Lo possiamo anche studiare come elemento piano, essendo lo spessore costante



→ AREE → PLANE STRESS

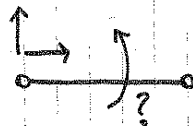
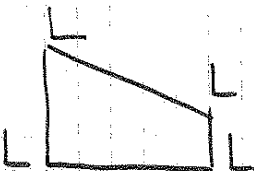
Posiamo anche avere una soluzione detta MIXED ELEMENT TYPE



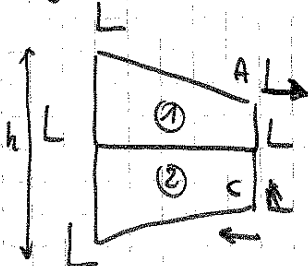
È il modello computazionalmente meno oneroso, da buoni risultati. Perdo l'intensificazione delle tensioni.

Immaginiamo che l'obiettivo sia il massimo spostamento.

La rotazione non è vincolata.



Tutte le volte che mettiamo insieme elementi di diverso tipo, possono essere uniti nello stesso modello se hanno lo stesso numero di g.d.l. per nodo.



$$\alpha = \frac{M_A - M_C}{hB}$$

CONSTRAIN EQUATION

Il vincolo della beam me lo dà elasticamente (l'elemento plane)

È il legame cinematico tra elementi diversi

ANALISI DINAMICA

Dipende dall'equazione del moto

1 g.d.l. $m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$

multi g.d.l. $[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\}$

Sono equazioni di equilibrio. Quelle note fino ad ora sono istant del tipo $Kx = f$ oppure $[K] \{x\} = \{f\}$.
In dinamica compare la variabile tempo, il sistema cambia la sua configurazione nel tempo.

Le vibrazioni possono essere considerate

- * LIBERE O FORZATE
- * SMORZATE O NON SMORZATE
- * LINEARI E NON LINEARI
- * RANDOM

L'equazione del moto deve essere vista come divisa in due parti

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + Kx = f(t)$$

INTRINSECO AL MODELLO MONDO ESTERNO

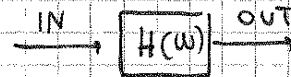
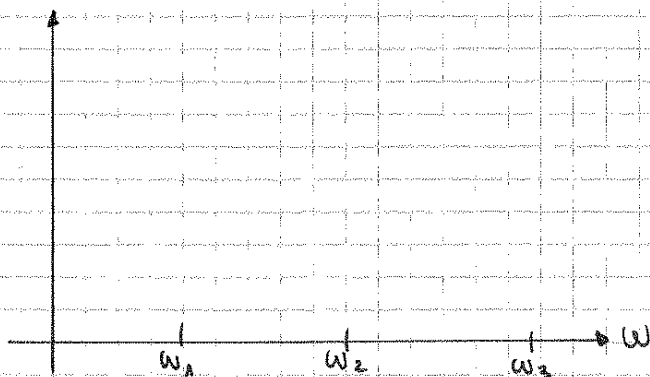
Nelle vibrazioni libere, $f(t) = 0$, quando $f(t) \neq 0$ sto studiando le interazioni tra il sistema ed una determinata condizione.

Abbiamo problemi nel determinare lo smorzamento. Quando abbiamo difficoltà introduciamo particolari smorzamenti.

Il sistema è lineare se m, c, K sono costanti nell'intervallo di tempo di interesse, viceversa sono non linearità (prevalentemente K).
Posso anche avere funzioni non lineari, quando una delle x e/o le sue derivate sono funzioni della costante.

I problemi di dinamica strutturale possono essere classificati in

- * ANALISI MODALE valutazione delle frequenze naturali e i modi
- è la carta d'identità del sistema, solo se esso è lineare.
Sto ragionando nel dominio delle frequenze e posso pensare che le frequenze proprie siano riportate nel diagramma di Bode.



Il sistema ha quindi una funzione di trasferimento che lega input ed output. La funzione di trasferimento è una cumulata che m da le risposte ad un determinato tipo di sollecitazione

Le funzioni di forma son sempre le stesse.
 La matrice di massa è molto semplice da calcolare. La matrice di smorzamento ha una particolarità, l'effetto viscoso non è sufficiente a dimostrare lo smorzamento del sistema.

Lo smorzamento può essere classificato in

- * VISCOZO $\propto \dot{x}$ $F = -c \dot{x}$
- * COULOMBIANO (stato) $F = \mu F_n$
- * ISTERETICO \propto deformazione / \neq da velocità

È un fattore di perdita di energia. Sperimentalmente, lo smorzamento non è omogeneo.

L'energia cinetica può essere scritta

$$E = \frac{1}{2} \{s\}^T \left(\int_V [n]^T [n] \rho dV \right) \{s\}$$

è direttamente proporzionale alla matrice di massa.

Nel caso dell'asta abbiamo

$$[m] = \rho A \int_0^l \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mentre quella concentrata

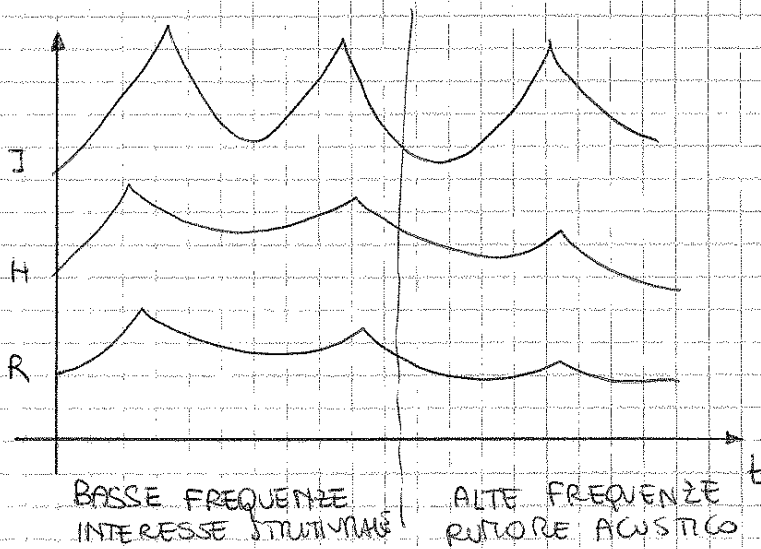
$$[m] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'elemento beam

$$[m] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 6l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

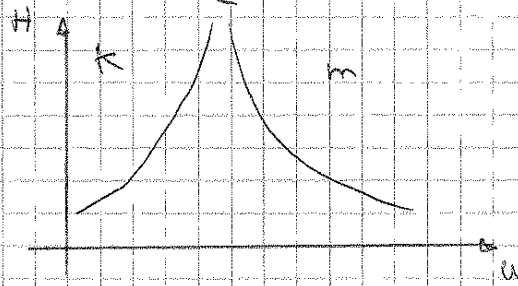
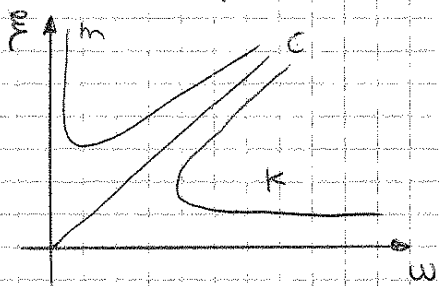
la matrice a masse concentrate è:

$$[m] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A parità di sollecitazione, il modo maggiore è quello che si porta dietro la massa maggiore \rightarrow fattore di partecipazione modale.

Calcolando ω_n , ricavo α e β proporzionali



Gli autovettori sono modi propri in base modale

$$\{u\} = [\Phi] \{x\}$$

Si parla di $[m]$ e $[k]$ ortogonalità

I modi di vibrazione sono moti a meno di una costante,

MODELLI DI SIMULAZIONE

MODELLO

MATEMATICO è la descrizione matematica dei fenomeni fisici e sostituisce una descrizione di tipo qualitativo con una di tipo quantitativo. Possibile presenza di variabili logiche. Elementi come modelli matematici, operazioni come funzioni matematiche. Può essere:

- * ANALITICO
- * NUMERICO
- * LINEARI / NON LINEARI
- * A PARAMETRI CONCENTRATI / DISTRIBUITI
- * STATICI / DINAMICI
- * CONTINUI / DISCRETI
- * DETERMINISTICI / STOCASTICI

Le tecniche della RICERCA OPERATIVA forniscono metodologie per la definizione di modelli di sistemi produttivi in particolare nella pianificazione, schedazione e controllo. Tali metodi sono per la maggior parte attuati nella simulazione off-line il che ne costituisce un limite e i fattori di disturbo rendono onerosa ed arduata la fase di modellazione.

GRAFICO le operazioni produttive possono essere visualizzate tramite icone o simboli. Le icone hanno una gestione più onerosa, anche se sono più efficaci.

FISICO prevedono la realizzazione (normalmente in scala) di un modello fisico del sistema produttivo che deve contenere tutte le funzioni del sistema reale. Attualmente poco utilizzati.

METODI DI SIMULAZIONE

* ANALITICO

* **BLACK BOX** si considera il processo come un blocco il cui contenuto è ignoto. NON gli ingressi e le corrispondenti uscite, tramite la sperimentazione, si determina la relazione che legano gli ingressi e le uscite. Viene spesso utilizzata per descrivere i processi continui e semi continui.

* **AD EVENTI DISCRETI** è idonea ad analizzare il flusso attraverso un'attività produttiva per determinare:

- le sue potenzialità
- i colli di bottiglia
- distribuzione dei tempi nelle stazioni di lavoro
- individuazione delle alternative

La maggior parte dei processi produttivi sono ad eventi discreti e devono essere descritti come tali e non da funzioni matematiche continue.

Si utilizzano linguaggi di programmazione ad alto livello.

LO STRUMENTO PER LA SIMULAZIONE GLOBALE

Non esiste un pacchetto di simulazione in grado di coprire tutte le singole funzioni aziendali e adattabili a qualsiasi contesto produttivo. Vengono utilizzati codici general purpose + opportuni moduli. Il sistema globale non è ancora realizzabile per le seguenti motivazioni:

- 1) difficoltà a collegare i singoli moduli relativi ad una funzione specifica dell'azienda
- 2) tempi di calcolo estremamente lunghi
- 3) le interfacce tra i vari moduli non sono affidabili
- 4) Non si ha la certezza che il modulo sviluppato in proprio sia collegabile ad un pacchetto commerciale general purpose.

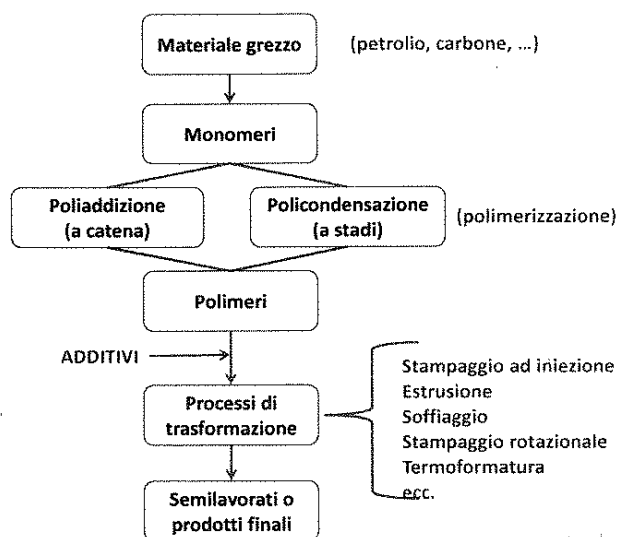
LE MATERIE PLASTICHE

Vengono classificate come materie plastiche tutte le sostanze organiche ottenute attraverso reazioni chimiche di prodotti naturali o di sintesi derivanti dalla scissione chimica del carbone, del petrolio e del gas naturale.

Vengono altresì dette materie plastiche i semilavorati destinati alla trasformazione, ma infine i prodotti che presentano caratteristiche di comportamento fortemente dipendenti da quelle dei loro costituenti organici. Le materie plastiche ottenute in modo uniforme ma allo stato solido che liquido, vengono successivamente trasformate in semilavorati oppure in pezzi finiti.

MATERIALI POLIMERICI

I polimeri sono sostanze composte da macromolecole, cioè molecole molto grandi formate dalla successione di un piccolo gruppo molecolare, caratteristico del polimero stesso, che si ripete in modo uguale per centinaia o migliaia di volte. L'unità ripetente è definita monomero.



PARAMETRI FONDAMENTALI

Valutazione caratteristiche e proprietà materiali polimerici

* GRADO DI POLIMERIZZAZIONE (n) rappresenta il numero di catene ripetitive che vanno a costituire una catena

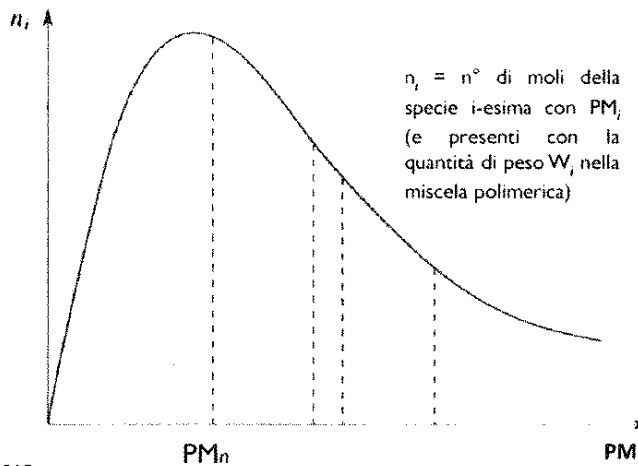
• Classificazione in base al grado di polimerizzazione

- oligomeri $2 \leq n \leq 10$
- bassi polimeri $10 < n < 100$
- medi polimeri $100 \leq n < 1000$
- alti polimeri $n > 1000$

* PESO MOLECOLARE (PM) rappresenta il peso di una catena polimerica espresso in Dalton (unità di massa atomica)

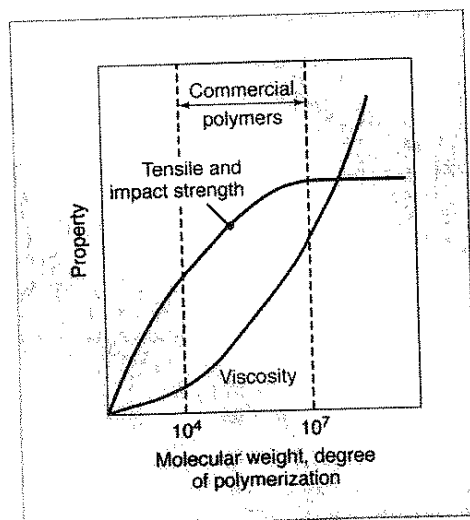
$$PM = PM_0 \cdot n$$

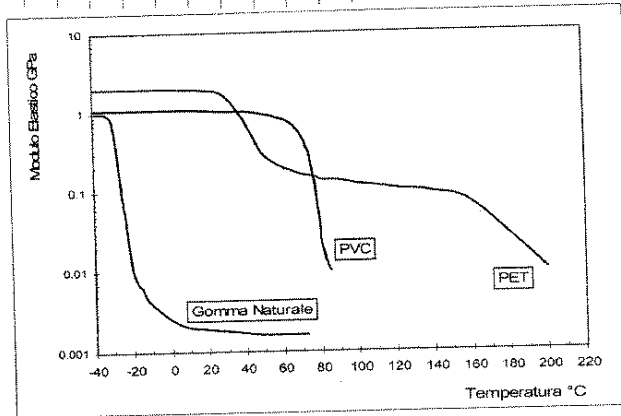
I processi polimerici sono governati da eventi stocastici, non tutte le catene hanno la stessa lunghezza, quindi stesso PM $\rightarrow \overline{PM}$



$$PM_n = \frac{\sum_i PM_i \cdot W_i}{\sum_i W_i}$$

Effetto del peso molecolare e del grado di polimerizzazione sulla resistenza e sulla viscosità dei polimeri





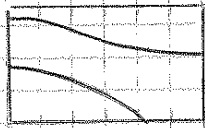
Il modulo elastico subisce una drastica diminuzione in corrispondenza di Tg soprattutto in polimeri completamente amorfi. Nel caso di polimeri semicristallini la diminuzione è tanto minore quanto maggiore è la frazione cristallina presente. Questo limita il campo di utilizzo dei materiali polimerici.

* TEMPERATURA DI FUSIONE T_f temperatura alla quale scompare l'ultimo cristallo presente. Il processo di fusione avviene in un intervallo di T molto ben preciso (inizia a fondere i cristalli più piccoli ed imperfetti).

CONFIGURAZIONE DELLE MACROMOLECOLE

A seconda di come procede la polimerizzazione, la configurazione delle macromolecole assume aspetti diversi.

* POLIMERO LINEARE



Le macromolecole possiedono i forti legami covalenti carbonio-carbonio solo lungo le catene. Tra le catene si instaurano solo delle deboli interazioni che, allo stato solido danno luogo a legami di tipo secondario. Basta un limitato aumento di temperatura per consentire lo scorrimento tra le catene ed il passaggio allo stato fluido.

* POLIMERO RAMIFICATO



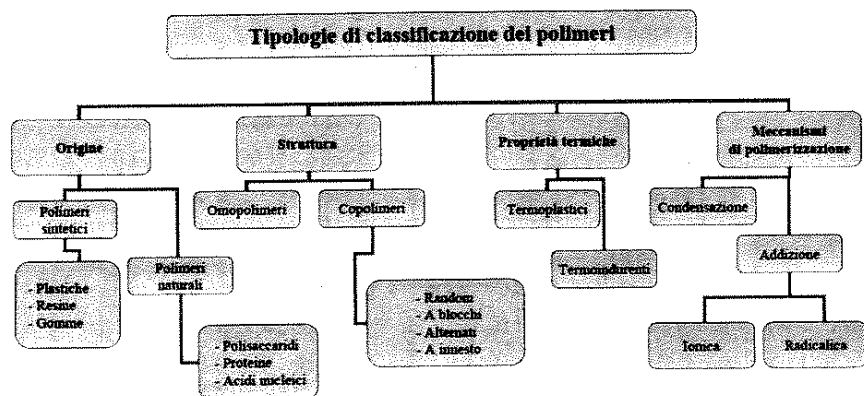
La crescita delle catene non avviene più solo lungo il suo asse, ma si ha anche la formazione di catene laterali più o meno lunghe. Le catene, anche se ramificate, rimangono indipendenti ed interagiscono solo con legami secondari. La presenza delle ramificazioni porta comunque a maggiore difficoltà di scorrimento per semplici ragioni fisico-geometriche.

* POLIMERO RETICOLATO



Le macromolecole non sono più indipendenti, ma hanno dei tratti trasversali di catene covalenti, che le collegano in maniera stabile e forte. Lo scorrimento tra le catene è impedito e le caratteristiche del materiale dipendono dalle lunghette di tratto di catena principale tra due legami trasversali consecutivi. Se tale tratto è sufficientemente lungo il comportamento è gommoso o elastomerico. Se le reticolazioni sono molto strette il materiale è rigido e fragile. All'aumentare della temperatura il polimero arriva alle temperature di decompazione di poter trasformare in fluido.

CLASSIFICAZIONE DEI POLIMERI

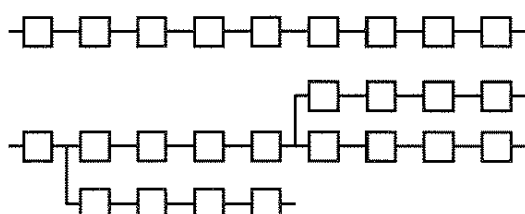


Le materie plastiche vengono generalmente classificate in modi differenti e i principali sono

- * **CLASSIFICAZIONE STORICA** in base allo sviluppo storico delle materie plastiche
 - materie plastiche da sostanze naturali
 - materie plastiche da condensazione di resine
 - prodotti di polimerizzazione

- * **CLASSIFICAZIONE TECNICO-ECONOMICA** in base alla loro collocazione sui mercati, in modo da rendere più agevoli le valutazioni economiche di un settore che si presenta in continue espansione
 - fibre chimiche
 - gomme sintetiche e prodotti in gomma
 - resine sintetiche

- * **CLASSIFICAZIONE CHIMICO-TECNOLOGICA** basata sulle differenti degli aspetti chimici delle materie plastiche, sulle modalità della loro trasformazione e sulle caratteristiche fisico-chimiche dei prodotti ottenuti che rappresentano la base per la trasformazione in manufatti finiti. Secondo questo tipo di classificazione le materie plastiche vengono suddivise in tre gruppi principali
 - **TERMOPLASTICI** sono costituiti da polimeri (grandi molecole costituite da monomeri in un dato ordine strutturale a catena lineare o leggermente ramificata)
 - monomero



Catena lineare

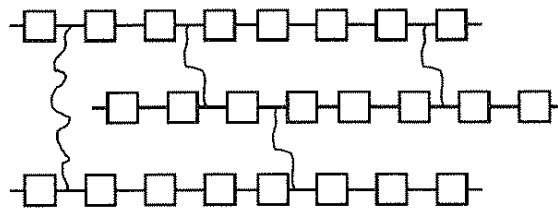
Catena ramificata

Le catene sono inizialmente disposte a caso, ma possono subire orientamenti per effetto della lavorazione a cui vengono sottoposte. Se sottoposti a riscaldamento ramolliscono fino allo scolorimento e sono in grado di recuperare spontaneamente la forma originale se ripartiti a loro volta.

PROPRIETÀ	POLIMERI TERMOPLASTICI	POLIMERI TERMOINDURENTI
cristallinità	massima	minima
trasparenza	minima	massima
punto di fusione	relativamente basso	non fusibili
comportamento al calore	fragili alle basse temperature	stabili
resistenza	buona	scarsa
solubilità	solubili in solventi organici	insolubili
infiammabilità	cicvata	alta
effetto degli agenti atmosferici	degradabili nel tempo	talvolta rapidamente degradabili
proprietà elettriche	isolanti	isolanti

ELASTOMERICI sono costituiti da polimeri reticolati a maglia larga che presentano alle temperature ambiente un comportamento gommo-elastico.

□ monomero

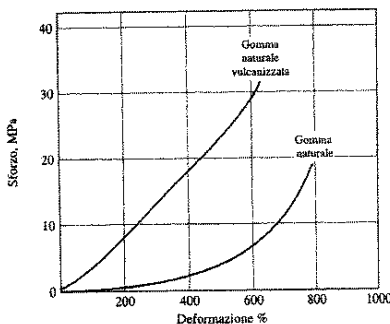


Struttura di un elastomero

La struttura è prevalentemente lineare. Soggette a sollecitazioni le macromolecole si orientano, al cessare delle sollecitazioni recuperano rapidamente la configurazione iniziale.

La vulcanizzazione provoca una modifica della conformazione molecolare del polimero alla quale è dovuto l'aumento di elasticità e resistenza a trazione. Le sopramenzionate proprietà negative quali l'abrasività e l'appiccicosità oltre che una maggiore resistenza agli effetti dell'ossigeno atmosferico e a molte sostanze chimiche.

La vulcanizzazione viene realizzata partendo dall'elastomero, una fonte di zolfo e additivi vari. L'insieme di questi prodotti costituisce la miscela le condizioni di



preparazione e temperature variano in funzione dello spessore presente coinvolto.

OMOPOLIMERI E COPOLIMERI

Se durante la polimerizzazione le unità ripetenti derivano da solo monomero, il prodotto è un OMOPOLIMERO. Se provengono da due o più monomeri (normalmente in quantità relative variabili) si hanno i COPOLIMERI.

Reattività e composizione della miscela dei monomeri di partenza controllano la composizione del copolimero e le relative proprietà fisiche e meccaniche risultano intermedie rispetto a quelle dei componenti omopolimeri.

POLIVINILCLORURO (PVC)

Si ottiene facendo polimerizzare in emulsione o in sospensione il gas cloruro di vinile. Il polimero ottenuto è presente sotto forma di polvere bianca, molto fine, inodore ed insapore. È un solido e resiste rispetto al polietilene. Resiste a moltissimi aggressivi chimici. È insolubile in acqua, alcol e benzina, ma è solubile in acetone. Il PVC può essere sottoposto ad estrusione o trasformato in gesso e quindi lavorato a compressione o a iniezione.

In commercio esistono due tipi di PVC

- rigido (pene)
- plastificato (sedili)

POLISTIROLO (PS)

Deriva dalla polimerizzazione dello stirolo. Liquido oleoso che polimerizza spontaneamente, ma lentamente, se sottoposto all'aria ed alla luce. Il polimero è duro, trasparente, incolore, ha notevole resistenza all'acqua ed all'umidità, buone proprietà meccaniche ma discreta fragilità. Può essere facilmente colorato e si lavora bene per stampaggio ad iniezione. Ottimo isolante elettrico; imballaggio diventa espanso con CH_2ClF .

POLIMERI ACRILICI (PMMA)

Le resine acriliche si ottengono dalla polimerizzazione di diversi acidi, come l'acido acrilico, metacrilico e dai loro esteri. La più nota è il PMMA nota come plexy glass, polimero termoplastico leggero, molto stabile alla luce, poco ossidabile, più resistente di vetro, duro, con buone caratteristiche meccaniche, abbastanza resistente agli agenti chimici, ma facilmente solubile. I semisferti si congiungono per incollaggio, o saldatura e possono essere metallizzati ed opacizzati.

POLIESTERI (PE)

Sono prodotti ottenuti per policondensazione tra un alcol polibenzico come ad esempio il glicole etilenico, ed un acido polivalente, come ad esempio l'acido maleico.

Possono essere suddivisi in:

- SATURI
- INSATURI unfortati con fibre di vetro, per contenitori ed imballaggi
- MODIFICATI per vernici.

POLICARBONATI

Resine ottenute per policondensazione tra il fosgene ed il bis-fenolo. Sono prodotti leggeri termoplastici, trasparenti ed ingombrabili, resistenti termicamente e meccanicamente, buone proprietà elettriche e di durezza. Hanno il difetto di ingiallire (emissione UV) e di dilatarsi al calore. Possibilità di stratificare, combinando il vetro e porido in avanti a caldo.

RESINE FENOLICHE (BACHELITE)

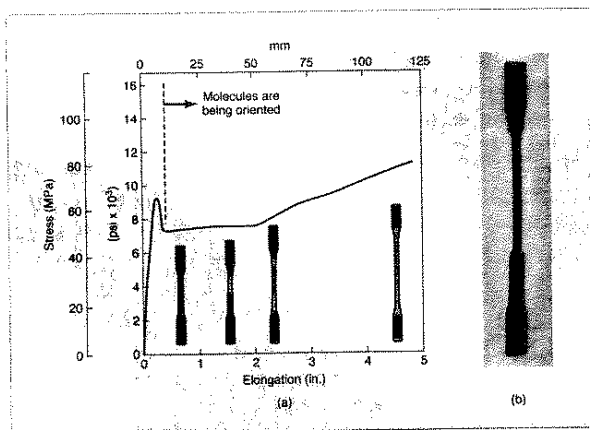
Ottenute dalla policondensazione tra aldeide formica e fenolo. Sono in genere materiali termoindurenti. Hanno elevata durezza, caratteristiche meccaniche medie, temperature di utilizzo fino a 130°C, carbonizzazione.

ACRILONITRILE BUTADIENE STIRENE (ABS)

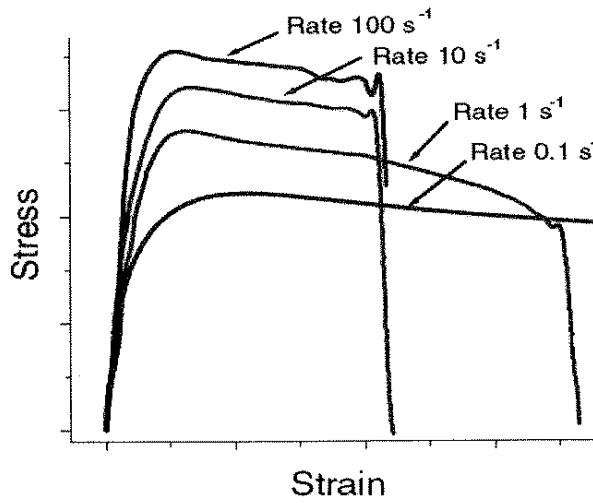
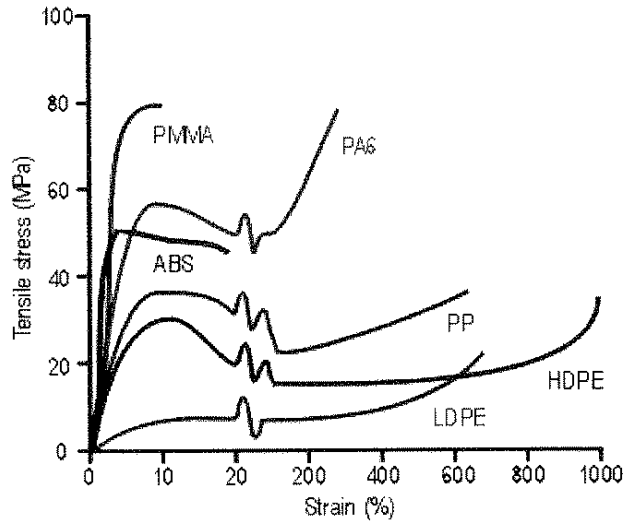
Resina termoplastica ottenuta per polimerizzazione di gomma. È una delle più pregiate mescolanze tra una resina ed una gomma e deve il suo successo alle ottime proprietà tecniche che lo caratterizzano. È infatti un materiale rigido e tenace anche a basse temperature, molto duro, resistente alle scalfitture, con elevata resistenza all'urto. È facilmente modellabile se non confrontato da altre tipologie di plastiche non compatibili.

PROPRIETÀ MECCANICHE DELLE MATERIE PLASTICHE

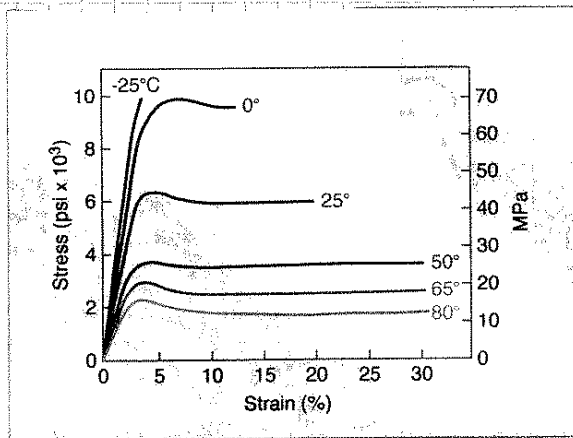
Le materie plastiche si differenziano molto dalle sostanze solide ordinarie, in particolare i materiali termoplastici non presentano una transizione netta tra il campo delle deformazioni plastiche elastiche e quello delle deformazioni permanenti plastiche. Il fenomeno della rottura avviene soltanto dopo una deformazione plastica enormemente più spinta che nei materiali metallici. Le proprietà meccaniche sono fortemente influenzate dalle temperature. I termoplastici hanno una rigidità inferiore di due ordini di grandezza a quella dei metalli, mentre il carico di rottura è di un ordine di grandezza inferiore.



Curva carico-deformazione per il policarbonato (termoplastico) (a); provetta per trazione del polietilene ad alta densità, che presenta un allungamento uniforme (b).



All' aumentare delle velocità di deformazione aumenta la resistenza, diminuisce l'allungamento.



Effetto della temperatura sulla curva carico-deformazione per l'acetato di cellulosa (Si nota la notevole riduzione della resistenza e l'aumento di duttilità con incrementi di temperatura relativamente bassi)

All' aumentare delle temperature diminuiscono fortemente le caratteristiche meccaniche.