



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 492

DATA : 27/02/2013

# A P P U N T I

STUDENTE : Bertone

MATERIA : Scienza delle Costruzioni + Esercizi

Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

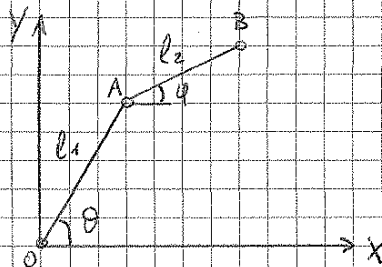
**CAPITOLO 3**

Grado di libertà = numero di coordinate necessarie e sufficienti a descrivere la configurazione. Un sistema a  $g$  gradi di libertà potrà disporre in  $\infty^g$  differenti configurazioni.

Un punto nello spazio ha 3 gradi di libertà, se lo vincoliamo e muoviamo su una superficie appertamente allo spazio  $f(x, y, z) = 0$  i gradi di libertà vengono ridotti a 2 del vincolo "f" che lega le coordinate del punto. Se lo costringiamo a percorrere una curva sghemba di equazione  $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$  i gradi di libertà si riducono ad 1 (curva = geometria o una sola dimensione)

Vincolo di rigidità = dato un sistema costituito da  $n$  punti fissi, il vincolo impone che la distanza  $T_{ij}$  due punti sia costante sempre.

AB collegati mediante biella rigida  
 OA collegati rigidamente con biella fissa



I vincoli di rigidità sono rappresentati.

dalle due equazioni delle circonferenze

$$x_A^2 + y_A^2 = l_1^2$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l_2^2$$

Il numero di gradi di libertà residui sarà dato dalla differenza  $T_{ij}$  e i gradi di libertà dei due punti materiali vincolati e i gradi di vincolo.

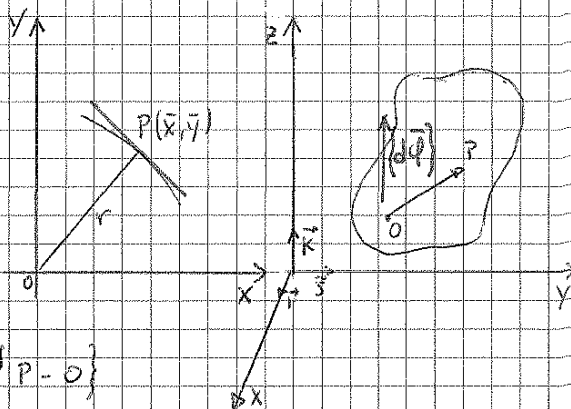
$$g_r = 4 - 2 = 2$$

$$4 \rightarrow x_A, y_A, x_B, y_B$$

$$2 \rightarrow l_1, l_2$$

$$\{dS_p\} = \{dS_o\} + \{d\varphi\} \wedge \{P - O\}$$

$$\begin{Bmatrix} U_p \\ V_p \\ W_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_o \\ V_o \\ W_o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} X_p - X_o \\ Y_p - Y_o \\ Z_p - Z_o \end{Bmatrix}$$



$$(U_p - U_o)i + (V_p - V_o)j + (W_p - W_o)k = \{d\varphi\} \wedge \{P - O\}$$

$$(1) \quad (U_p - U_o)i + (V_p - V_o)j + (W_p - W_o)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ X_p - X_o & Y_p - Y_o & Z_p - Z_o \end{vmatrix}$$

La relazione (1) può essere presentata sotto forma di prodotto di una

matrice antisimmetrica (MATRICE DI ROTAZIONE) per il vettore di posizione del punto P rispetto al punto O

$$\{dS_p\} - \{dS_o\} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p - X_o \\ Y_p - Y_o \\ Z_p - Z_o \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \varphi_y(Z_p - Z_o) - \varphi_z(Y_p - Y_o) \right] i + \left[ \varphi_x(Z_p - Z_o) - \varphi_z(X_p - X_o) \right] j + \left[ \varphi_x(Y_p - Y_o) - \varphi_y(X_p - X_o) \right] k$$

[2D] Nel caso di rotazioni elementari di un corpo rigido bidimensionale nel piano

XY l'equazione sarà:

$$(U_p - U_o)i + (V_p - V_o)j = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \varphi_z \\ X_p - X_o & Y_p - Y_o & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_p - U_o = -(Y_p - Y_o)\varphi_z$$

$$V_p - V_o = (X_p - X_o)\varphi_z$$

Le equazioni sono relazioni lineari che determinano il concetto di linearizzazione

del vincolo

Il sistema può essere risolto rapidamente sostituendo e ottenendo così la soluzione ovvia o banale. I momenti del polo o risultano tutti nulli.

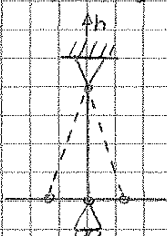
Si significa la l'endisposizione dei vincoli. Si usa la notazione

matriciale più ragionevole in termini generali:

$$\begin{matrix} \text{MATRICE CINEMATICA} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari ammetta la soluzione ovvia, è che il determinante D della matrice dei coefficienti sia diverso da zero nel nostro caso

si ha  $\det[D] = -l$ ,  $l > 0$  la soluzione è quella ovvia



←  $l = 0$  le soluzioni cinematiche diventano  $\infty^4$  e il sistema si libera producendo una mal disposizione vincolare (1 volta libile)

da normale  $n$  al piano di scorrimento del conello contiene la cima  $B$  che diventa così centro di istantanea rotazione.

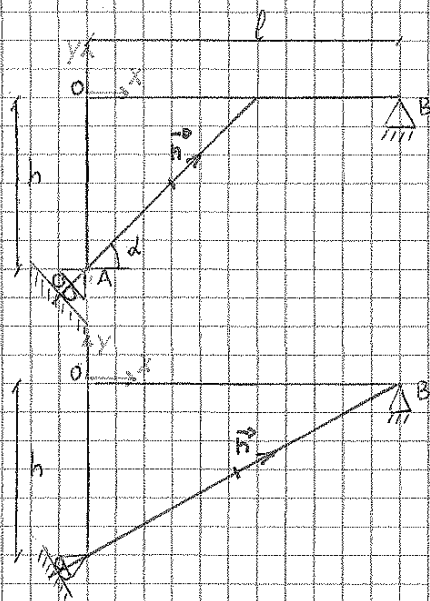
► Considerando la Trave  $ad$   $L$  con il conello inclinato di angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale si ha:

d'equazione  $v_B = 0$  dello spostamento orizzontale sono le seguenti  $\{dS_A\}^T \{h\} = 0$  ovvero:

$$v_A \cos \alpha + v_A \sin \alpha = 0$$

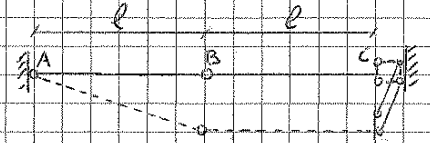
$$v_A = v_0 + h \varphi_0 \quad \text{si ha}$$

$$(v_0 + h \varphi_0) \cos \alpha + v_A \sin \alpha = 0$$



Se  $\det[D] = -2h$

Per  $h=0$ ,  $\det[D]=0$  si raggiunge una moldisposizione dei vincoli, si nota che i due centri assoluti e quello relativo sono allineati



Per  $h>0$  la soluzione non è banale.

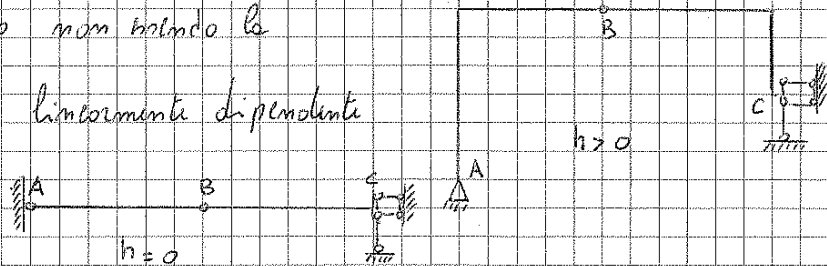
Se viene aggiunto un vincolo come una biella in C allora sono 7 equazioni vincolari mentre le incognite cinematiche restano le 6 di prima.

Nel caso di  $h>0$  la soluzione resta quella ovvia.

Nel caso di  $h=0$  la soluzione rimane ovvia in quanto dalla matrice dei coefficienti (7x6) non è possibile estrarre un minore di ordine 6 con determinante diverso da zero non avendo la

riga aggiunte linearmente dipendenti

dalle altre.



STUDIO GRAFICO DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI LABILI

Il metodo SEMIGRAFICO: permette di ottenere una singola reazione alla volta, quindi è un metodo di controllo delle reazioni da studio cinematico dei sistemi ad un grado di libertà o una volta labili olt. catene cinematiche si fonda su due teoremi:

1° TEOR. CAT. CINEM.: applicabile quando la catena è composta da almeno due corpi rigidi, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema meccanico sia una volta labile è che, per ciascuna coppia di corpi  $i$  e  $j$  i centri assoluti di rotazione  $C_i$  e  $C_j$  e quello relativo siano allineati.

2° TEOR. CAT. CINEM.: applicabile quando la catena è composta da almeno

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Si consideri un corpo rigido piano soggetto all'azione di  $n$  forze concentrate  $F_i$  e di  $m$  momenti concentrati  $M_i$ .

Condizione necessaria e sufficiente perché tale corpo sia in equilibrio, è che il sistema delle sollecitazioni soddisfi le equazioni cardinali della

statica:

$$\sum_{i=1}^n \{F_i\} = \{0\} = \{R\}$$

$$M(O) = \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{i=1}^n (\{r_i\} \wedge \{F_i\})^T \{k\} = 0$$

$R$  è la forza risultante,  $M(O)$  è il momento risultante rispetto ad un polo arbitrario  $O$  del piano. L'arbitrarietà del polo è conseguenza della condizione di annullamento della risultante. Se prendo un altro polo  $O'$ :

$$M(O') = M(O) + ((O-O') \wedge \{R\})^T \{k\} \quad M(O) = M(O')$$

$L_{O=O}$

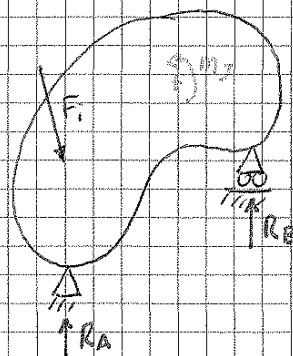
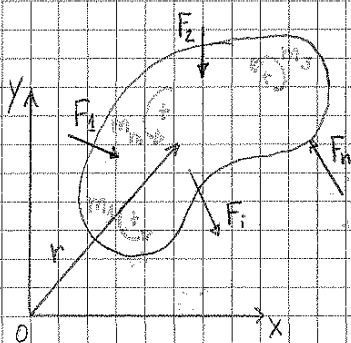
Considerando un corpo vincolato esso ha in corrispondenza dei vincoli massima delle forze reattive dette reazioni vincolari  $\{R_a\} + \{R_v\} = 0$

in quanto le reazioni vincolari equilibrano le forze esterne. Inoltre si ha

$$\{M_a\} + \{M_v\} = 0$$

Un sistema di sollecitazioni che soddisfi le condizioni sopra si dice

EQUILIBRATO O EQUIVALENTE A ZERO



de usarsi i vincoli esterni come  $R_A, V_B, H_B$  e rappresentiamo le incognite del problema statico, mentre le equazioni risolventi sono quelle cinematiche.

Per mettere in sistema la corrispondenza, o dualità, tra statica e cinematica è necessario scegliere il polo statico, attorno a cui esprimere l'equilibrio alle rotazioni, coincidente con lo stesso polo cinematico che caratterizza i momenti del singolo corpo rigido. Le equazioni saranno:

$$\begin{aligned} R_A \cos \alpha + H_B &= 0 \\ R_A \sin \alpha + V_B - F &= 0 \\ R_A \cos \alpha \cdot h + V_B \cdot l - \frac{F \cdot l}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (1) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 1 \\ h \cos \alpha & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ -\frac{F \cdot l}{2} \end{bmatrix}$$

$[A] \qquad [X] \qquad [F]$

Il vettore dei Term. nodi è l'opposto del cosiddetto vettore delle forze esterne ridotte, agenti nel polo O [forza verticale  $F$  trasportata in O, più il momento trasportato  $-F \cdot l/2$  (negativo poiché orario)]. La matrice dei coefficienti  $[A]$  è esattamente la trasposta della matrice  $[C]$  cinematica. Per risolvere il sistema

(1) si fa riferimento al Teorema di ROUCHE' - CAPELLI:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di  $m$  equazioni lineari con  $n$  incognite ammetta soluzione, è che la matrice dei coefficienti e la matrice formata dai coefficienti e dai Term. nodi, detta ORLATA, abbiano la stessa caratteristica.

La caratteristica o rango di una matrice è l'ordine massimo dei minori estribili della matrice stessa con determinanti diversi da zero.

Se  $\alpha = \alpha_{crit} = \arctan \frac{h}{l} \rightarrow P_{EAJ} = 2, P_{EOJ} = 3$  SIST. LABILE  $\rightarrow$  IMPOSSIBILE

Se  $\alpha \neq \alpha_{crit} = \arctan \frac{h}{l} \rightarrow P_{EAJ} = 3, P_{EOJ} = 3$  SIST. ISOSTATICO  $\rightarrow$  1 UNA SOLUZIONE



## CAPITOLO 4

Per la determinazione delle reazioni vincolari si possono usare due metodi algebrici:

1- metodo generale, per un nuovo corpo rigido viene posto in equilibrio con la scrittura di  $(3n)$  equazioni in  $(3n)$  incognite con  $n$  = numero di corpi rigidi del sistema.

2- metodo delle equazioni ausiliarie, per un si considera l'equilibrio globale e si fornisce allo stesso tempo l'informazione dell'esistenza di  $s$  = connessioni interne con la scrittura di  $(3+s)$  equazioni in  $(3+s)$  incognite,  $s = 3 - V$ , le  $s$ -esime equazioni sono relative al momento permesso dal vincolo interno.

Vi è anche un metodo grafico: si basa sulle equazioni cardinali della statica.

Nel caso in cui si Tre forze in equilibrio nel piano, esse dovranno formare un triangolo se riportate una di seguito all'altra (REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA).

Nel contempo le rette d'azione delle Tre forze dovranno passare tutte e Tre per uno stesso punto del piano. Il momento delle Tre forze deve infatti essere nullo rispetto a qualsiasi punto nel piano e quindi anche rispetto all'intersezione di ciascuna coppia di rette d'azione.

Quando i vincoli sono maldisposti, il triangolo delle forze non si chiude se non all'infinito, le reazioni risultano così Tollerare all'infinito e l'equilibrio è impossibile.

dove  $[J_p]$  è la matrice Jacobiana delle variabili dipendenti  $u, v, w$  rispetto alle variabili  $x, y, z$ .

Se gli spostamenti fanno parte di un atto di moto rigido l'equazione si ridurrebbe a:

$$\{m_a\} = \{m_p\} + [J_p] \{dr\}$$

dove la matrice Jacobiana è rappresentata dalla matrice di rotazione:

$$[J_p] = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

ANTISIMMETRICA

Poiché la matrice Jacobiana del risultato è la somma di un contributo di moto

rigido e di un contributo puramente deformativo

allora si ha che  $[J] = [J_p] + [E_p]$  e quindi  $[E_p] = [J_p] - [J_p]$

La matrice quadrata è costituita dalla somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

$$[J_p] = \frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^T) + \frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^T)$$

rotazione  $[J_p]$                       deformazione  $[E_p]$

$$\{m_a\} = \{m_p\} + [J_p] \{dr\} + [E_p] \{dr\}$$

Dove si ha somma di contributo traslatorio, rotatorio e deformativo.

Le matrici saranno:

$$[J_p] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$P'Q' \rightarrow b = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad a = dx \therefore \beta = \frac{\partial u / \partial x \cdot dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$   
 $P'R' \rightarrow b = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad a = dy \therefore \alpha = \frac{\partial u / \partial y \cdot dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$

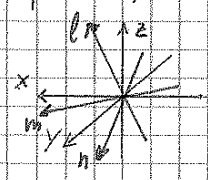
SCORRIMENTI ANGOLARI

$\gamma$  = rotazioni di angolo  $\theta$  + due ori + deformazione ovale

**LEGGE DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DELLE DEF. PER ROTAZ. SIST. RIFERIMENTO**

In un punto nello spazio passano un  $\infty^2$  fibre definite come STELLA; determina la matrice per 3 fibre, attraverso la legge di trasformazione posso trovare le deformazioni lungo altre 3 fibre qualunque.

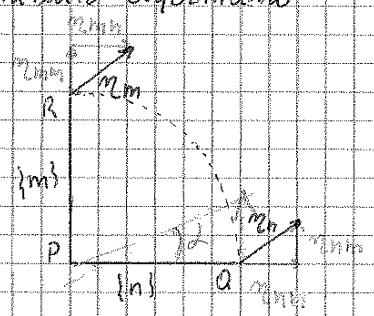
$X, Y, Z$  sistema iniziale  $[E_p]_{xyz}$   
 $n, m, l$  sistema finale  $[E_p]_{nml}$



Considerando una sfera unitaria centrata in P, il vettore  $\{n\}$  individua il punto Q sulla sfera. Tali vettore una volta deformato dalle componenti di rotazione sarà  $\{m_n\} = [E] \{n\}$  solo contributo deformativo

$\{m_{nm}\} = \{n\}^T [E] \{n\} = \{n\}^T \{m_n\}$  FORMA QUADRATICA

$\{m_{nm}\} = \{m\}^T [E] \{n\} = \{m\}^T \{m_n\}$  FORMA BILINEARE



N.B nella moltiplicazione tra matrici seguono gli

indici strani, quindi uno un numero; mentre per fare una moltiplicazione gli indici interni devono essere uguali.

legge di reciprocità per le proiezioni del vettore spostamento.

$m_{nm} = m_{mn} = \{n\}^T [E] \{m\} = E_x n_x m_x + E_y n_y m_y + E_z n_z m_z + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) +$

$+ \frac{1}{2} \gamma_{xz} (n_x m_z + n_z m_x) + \frac{1}{2} \gamma_{yz} (n_y m_z + n_z m_y)$

poiché  $[E_p]$  è simmetrica non importa l'ordine di moltiplicazione, vale anche per angoli non retti

$n_x, n_y, n_z$  coseni direttori nella direzione n

$m_x, m_y, m_z$  coseni direttori nella direzione m

La matrice delle deformazioni in unita è un TENSORE proprio in virtù della forma che assume la sua legge di trasformazione

per rotazioni:  $[N]\{m_n\} = [E_P]_{nmc} [N]\{n\}$  relazione nel rif. ruotato

premoltiplicando entrambi i membri per  $[N]^T$  si ha:

$$\{m_n\} = [N]^T [E_P]_{nmc} [N]\{n\}$$

$$[E_{xyz}] = \frac{[M]_{nm}}{[I]_{nm}} \Rightarrow [E_P]_{nmc} = [N]^T [E_P]_{nmc} [N]$$

**DIREZIONI PRINCIPALI DELLA DEFORMAZIONE**

Si ricerca un sistema di assi in cui si annullano gli scorrimenti e quindi il vettore spostamento risulta essere parallelo alle fibre stesse.

A deformazione avvenuta i  $\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$   
 Tre assi sono rimasti ortogonali

Si fa riferimento alle due notazioni:

$\{m_n\} = [E_P]\{n\}$  spostamento per qualunque fibre EQ. TENSORIALE ( $m_n \propto n$ )  
 $\{m_n\} = E_n\{n\}$  Tensore che trasforma vettore in vettore EQ. VETTORIALE ( $m_n \parallel n$ )

Metto a sistema e ottengo  $0 = ([E_P] - [I])E_n\{n\} = 0$  si me la matrice isolentata per rispondere lo valore alla dimensione della matrice. Ho ottenuto un sistema lineare omogeneo (Tutti i nodi sono nulli) in tre incognite  $n_x, n_y, n_z$

e 3 equazioni:

$$(1) \begin{bmatrix} E_x - E_n & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y - E_n & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & E_z - E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da adattare bande del sistema  $n_x=0, n_y=0, n_z=0$  non ha signif. fisico

fisico, dovendo i vettori direzioni obbedire a:  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

II)  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0; \epsilon_3 = 0$   $n_3$  principale con le  $n_1, n_2$  direzioni ad essa ortogonali. STATO PIANO di deformazione (prumo  $T_{ho}$  o compresso)

III)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$  le  $n_1, n_2, n_3$  direzioni sono principali, Tensore sferico o idrostatico  
STATO MONOASSIALE di deformazione

Se Tensore delle deformazioni nel sistema di riferimento sono

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

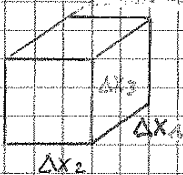
$$J_{II} = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3)$$

$$J_{III} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3$$

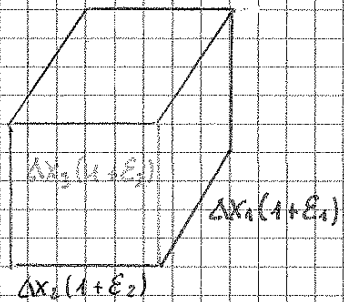
Dimostrazione del significato fisico del primo invariante (DILATAZIONE CUBICA)

Un parallelepipedo elementare di lati  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  orientati secondo le direzioni principali si trasforma a deformazione avvenuta in uno con

lati  $\Delta x_1(1+\epsilon_1), \Delta x_2(1+\epsilon_2), \Delta x_3(1+\epsilon_3)$  e rispettivi volumi sono:



$$V_0 = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$$



$$V = \Delta x_1(1+\epsilon_1) \cdot \Delta x_2(1+\epsilon_2) \cdot \Delta x_3(1+\epsilon_3) =$$

$$= V_0 (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

da dilatazione volumetrica sono:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = J_I$$

Materiali fragili  $\rightarrow$  tendono a propagarsi I alle massime dilatazioni  $\epsilon_{max}$

Materiali duttili  $\rightarrow$  non si ha lungo piani di massimo scorrimento angolare

$$\epsilon_{max} \quad \text{---//---}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta x \delta x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^3 v}{\delta x \delta x \delta z} + \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta x \delta y} \right)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \rightarrow \frac{\delta^2 \gamma_{zx}}{\delta x \delta y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta x \delta y} + \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y \delta z} \right)$$

nommando si ha:

$$\frac{\delta^3 \gamma_{xy}}{\delta x \delta z} + \frac{\delta^2 \gamma_{zx}}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta x \delta x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\delta^3 v}{\delta x \delta x \delta z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta x \delta y} + \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y \delta z} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta^3 v}{\delta x \delta x \delta z} + \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta x \delta y} \right) \Rightarrow \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\delta^2 \epsilon_{xx}}{\delta y \delta z}$$

### TENSORE DEGLI SFORZI

La Tensione è un grandezza derivata, non misurabile direttamente in quanto misura lo spostamento da cui ricavo la Tensione (valore di sofferenza interna del materiale). Si considera un corpo soggetto a:

forze di volume  $\{F\} \left[ \frac{N}{cm^3}, \frac{kg}{m^3} \right]$  quali forze di inerzia, peso specifico ecc... =  $F \cdot dv$

forze di superficie  $\{P\} \left[ \frac{N}{m^2} = Pa; \frac{N}{mm^2} = MPa; \frac{kg}{cm^2} \right]$

Diventano forze quando moltiplicate per  $dv$  e  $ds$ . Affinché il corpo sia in equilibrio la somma delle forze agenti sul corpo devono essere nulle:

EQ STATICO  $\int_V \{F\} dv + \int_S \{P\} ds = \{0\}$   $\{r\}$  = vettore di posizione rispetto ad un

EQ ROTAZ  $\int_V \{r\} \wedge \{F\} dv + \int_S \{r\} \wedge \{P\} ds = \{0\}$  polo generico (in quanto  $\{R\} = 0$ )

In quanto il corpo sta soffrendo quindi è deformato, per analizzarlo lo taglio idealmente con un piano  $\pi$  passante per il punto (P) e da normale (n) in questo modo dagli infiniti piani passanti per P ne ho individuato uno arbitrariamente.

Il vettore Tensione è il limite delle azioni agenti su una area  $\Delta S$

per  $\Delta S \rightarrow 0$  (i)  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\{AR\}}{\Delta S} = \{T_n\}$  (ii)  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\{AM\}}{\Delta S} = 0$

(i)  $\Delta R =$  risultante delle forze agenti su  $\Delta S$ , affinché al limite esiste finito allora la risultante di Tensione all'infinito dei due elementi deve essere dello stesso ordine.

(ii) Analisi della Tensione centrata nel punto, si considerano sulle le microscopie; nell'analisi microscopica di COSSERAT se ne tiene in conto

Scomponendo il vettore tensione rispetto alla terna di riferimento si hanno

le COMPONENTI CARTESIANE DELLA TENSIONE  $t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}$ ; Tale

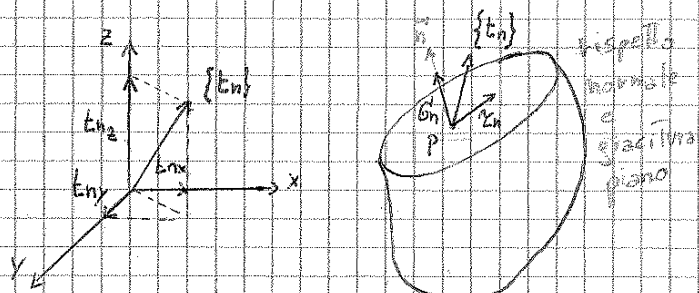
scomposizione non è la più comoda, Analizza la scomposizione lungo la normale al piano e alle giaciture del piano stesso ottenendo le COMPONENTI SPECIALI

DELLA TENSIONE  $T_n, G_n$ .

Si scompone  $T_n$  secondo due direzioni

del piano  $T_{nx}, T_{ny} \rightarrow \delta$  COMPONENTI TANGENZIALI

$G_n \rightarrow \delta$  COMPONENTE NORMALE  $T_n = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2}$



$T_n$  è un vettore, se voglio descriverlo al nonno del piano, allora posso arrivare alla definizione tensoriale DIMOSTRAZIONE DI CAUCHY o legge di conservazione del vettore tensione al nonno della giacitura di  $\delta S$ .

Prendo un punto P ed un intorno del punto P di forma Tetraedrica

(solido poligonale con il numero minimo di lati = 4), appoggio il

Tetraedro ad un sistema xyz in P con Tre lati coincidenti con le

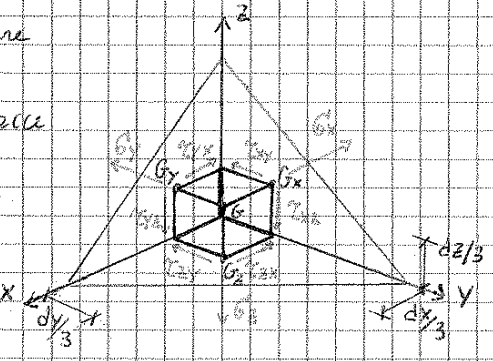
direzioni della terna. Definisco i vettori tensione delle 4 ideali facce

$\{\epsilon_n\} = [G]\{\eta\}$  , la matrice degli sforzi  $[G]$  è interpretata come matrice di trasformazione del vettore normale  $\{\eta\}$  nel relativo vettore tensione  $\{\epsilon_n\}$ .

$\{\eta_n\} = [E]\{\epsilon_n\}$  , la matrice delle deformazioni può essere interpretata come matrice di trasformazione del vettore  $\{\epsilon_n\}$  nel relativo vettore spostamento  $\{\eta_n\}$  del punto di vista meccanico (simile a rotazione)  
 la matrice  $[G]$  è simmetrica per costruzione mentre quella  $[E]$  abbiamo imposto che fosse  $\frac{1}{2}([S] + [S]^T)$  (simile per costruzione)

DIMOSTRAZIONE:  $[G] \rightarrow$  simmetrica (per equilibrio alle rotazioni)

La simmetria si può vedere nella teoria micropolare. Considero un parallelepipedo appoggiato alle facce del Tetraedro, ottenuto collegando sui orizzontali delle facce triangolari, in tali punti sono applicate le tensioni. Si esprimono le condizioni



di equilibrio alle rotazioni del Tetraedro rispetto agli assi  $G_x, G_y, G_z$ .

N.B. Le tre componenti di  $\epsilon_n$  non danno contributo alle rotazioni poiché braccio = 0

N.B. Allo stesso modo  $G_x, \epsilon_x$  non dà contributo, neanche  $G_x, G_y, G_z$  poiché hanno

braccio nullo rispetto a  $G$ ; non dà contributo neanche le componenti //

a  $G_x$  come  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{zx}$ . Solo due componenti delle  $\tau$  alla volta danno

contributo  $\tau_{zy}, \tau_{yz}$

N.B. ugual. non solo in

$$G_x: \tau_{zy} \cdot d \cdot dz \cdot \frac{dy}{3} - \tau_{yz} \cdot d \cdot dy \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

Forza risult. infinitesimo · braccio

modulo ma anche

reciproche sui seni delle

$$\frac{1}{3} d \cdot dy \cdot dz = \frac{1}{2} d \cdot dz \cdot dz = dV \rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

area · altezza · 1/3 = Volume Tetraedro

rotazione  $\rightarrow$  MATRICE E

SIMMETRICA



$$\sigma_1^3 - T_1 \sigma_1^2 - T_2 \sigma_1 - T_3 = 0 \quad \text{EQ. LAPLACE}$$

$T_1, T_2, T_3$  invarianti della tensione (nel punto P)

$$T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad \text{INV. LINEARE}$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{vmatrix} \quad \text{INV. QUADRATICO}$$

$$T_3 = \det[\sigma_p] \quad \text{INV. CUBICO}$$

non variano se cambia

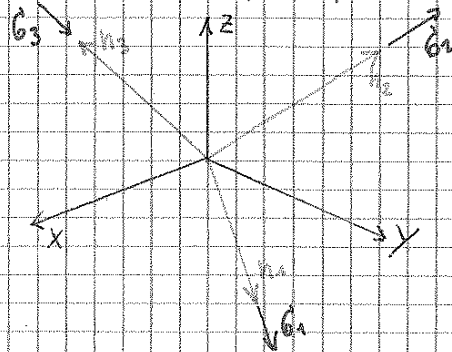
la giunzione delle  
asse di riferimento

l'equazione ammette tre radici ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) dette autovalori (Tensioni principali), a cui corrispondono dal sistema tre diverse soluzioni

( $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ ) detti autovettori (direzioni principali).

$$[\sigma_p] = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

matrice diagonale



$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$

$$T_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 3 \bar{\sigma} \quad \text{STATO TENSIONALE MEDIO}$$

$$T_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad \text{PARAMETRO DI DISTORSIONE}$$

$$T_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad \text{STATO PIANO O MONOASSIALE}$$

Se  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

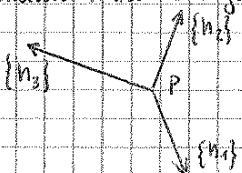
N.B. Per le deformazioni  $\rightarrow$  non esiste uno stato monoassiale.

Per la tensione  $\rightarrow$  esiste uno stato monoassiale la linea tesa.

max Trazione	min Trazione
in P ( $\sigma_1 > 0$ )	in P ( $\sigma_3 > 0$ )
min Compr.	max Compr.
in P ( $\sigma_1 < 0$ )	in P ( $\sigma_3 < 0$ )

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$$

3 direzioni principali  
mutuamente ortogonali



$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$$

$\{n_3\}$  principale con  $\sigma^2$   
direzioni ortogonali



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

Tutte le  $\sigma^2$  direzioni della stella  
di centro P sono principali

$$N_1 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} > 0 \quad \begin{matrix} N_1 \\ D(+)\end{matrix}$$

$$N_2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} > 0 \quad \begin{matrix} N_2 \\ D(-)\end{matrix}$$

$$N_3 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} > 0 \quad \begin{matrix} N_3 \\ D(+)\end{matrix}$$

Studiando il segno: Num e Den, affinché si abbia segno positivo entrambi devono essere positivi o negativi. d'IPOTESI è che esiste la seguente relazione d'ordine tra le Tensioni:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$N_1 \geq 0 \quad \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$(0) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

$$N_2 \leq 0 \quad \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0$$

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$$

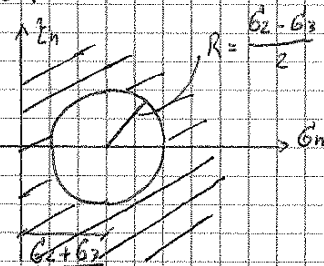
$$N_3 \geq 0 \quad \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$



Si possono vedere come il raggio di un cerchio:

$$(N_1) \quad \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad \text{DOMINIO ESTERNO}$$

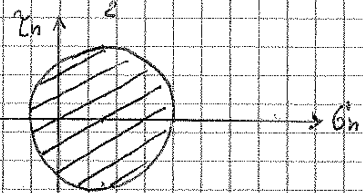
$$y^2 + (x - X_0)^2 \geq R^2$$



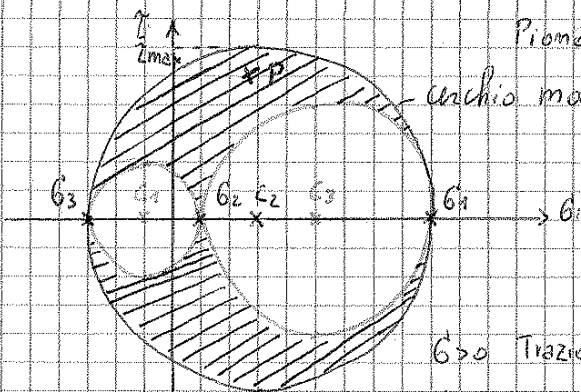
gli stati tensionali sono esterni al dominio

$$(N_2) \quad \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad \text{DOMINIO INTERNO}$$

$$y^2 + (x - X_0)^2 \leq R^2$$



$$(N_3) \quad \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad \text{DOMINIO ESTERNO}$$



Piano di Mohr: stato di sforzo in P( $\sigma_n, \tau_n$ )

Vi sono  $\infty^2$  coppie  $\sigma_n, \tau_n$  così come sono  $\infty^2$  le direzioni  $\{n\}$  incidenti da P

$\sigma > 0$  Trazioni

$\sigma < 0$  Compressioni

Condizione necessaria e sufficiente affinché uno stato tensionale sia piano è che si annulli una delle tre tensioni principali.

Poiché il vettore tensione ha componenti sempre nulle nelle direzioni 3,

il tensore degli sforzi rispetto ad una generica terna di assi  $X \setminus Y \setminus Z$  sarà:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Il problema degli autovalori si} \\ \text{risolve annullando il determin.} \\ \text{della seguente matrice:} \end{array} \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

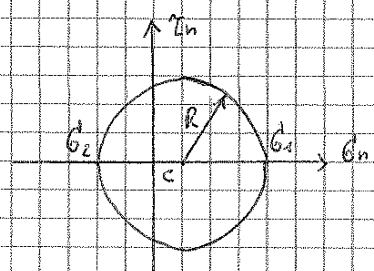
Le tre radici si ottengono dalle due equazioni:

- 1)  $\sigma_n = 0 \rightarrow$  Tensione principale nulla ( $\sigma_3 = 0$ )
  - 2)  $\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \rightarrow \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$
- $T_1 = \text{Traccia}[G] \quad T_2 = \Sigma(\det(\text{minori}[G]))$

Dalla 2) si ottengono:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



ovvero centro  $c$  diametro cerchio di Mohr

da questo risultato lo si può ottenere diagonalizzando il tensore degli sforzi (imponendo  $\tau_{xy} = 0$ ):

$$\begin{bmatrix} \sigma^* \\ \tau^* \\ 0 \end{bmatrix}_{x^*y^*z^*} = [N] \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix}_{XYZ} [N]^T = \begin{vmatrix} \sigma^* & \tau_{yx}^* & 0 \\ \tau_{xy}^* & \sigma_y^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \sigma^* - \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^* - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

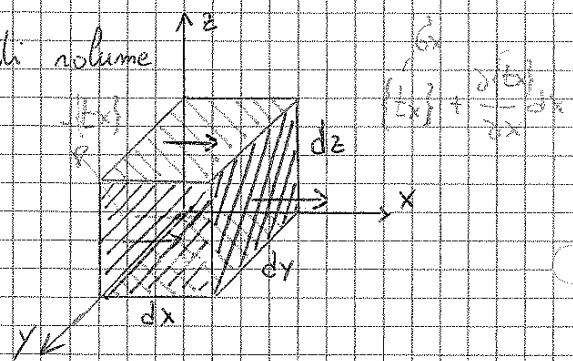
$$\begin{bmatrix} \sigma^* \\ \tau^* \\ 0 \end{bmatrix}_{x^*y^*z^*} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

**CAPITOLO 8**

**EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO**

Si considera, al fine di definire la relazione differenziale che lega gli sforzi che si sviluppano in punti del corpo prossimi tra loro, un parallelepipedo elementare con lati paralleli agli assi coordinati di lunghezza  $dx, dy, dz$ , sul corpo agisce la forza di volume



$\{F\} \cdot dV$  (applicata nel baricentro) e i rettoni d'azione sulle facce laterali d'equilibrio alle trasmissioni nelle direzioni  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx(dydz) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy(dx dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz(dx dy) + F_x(dx dy dz) = 0$$

dividendo per il volume elementare  $dV = dx dy dz$  si ottengono le equazioni indefinite di equilibrio nelle Tre direzioni:

$$\left. \begin{aligned} X) \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ Y) \quad & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ Z) \quad & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{aligned} \right\} \text{div}[\sigma] = -\{F\}$$

Se  $\{F\} \neq 0$  non si sono forze di volume non si sono agenti di tensioni interne

Se  $\{F\} = 0$  linee trasmissive con discontinuità linee trasmissive continue

Sono equazioni della statica infinitesimale e valgono in punto del corpo  $\in V$

Il sistema risulta essere staticamente indeterminato ha 3 equazioni in 6 incognite (3 gradi iperstaticità). Perché non aggiungo le 3 equazioni di equilibrio alla rotazione? Perché quando faccio equilibrio alla rotazione me mi consente implicitamente di dire che le incognite sono 6 e non 9 grazie alla reciprocità tra le  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

EQ. EQUIVALE DA FRONTIERA INTERNA DI UN CORPO SI PUO' PENSARE COME NELLA SU FRONTIERA

dogli spostamenti le deformazioni)

La Matrice operatoriale (matrice differenziale) cinematica è costituita da derivate

- per quanto riguarda l'equilibrio si esprimono le equazioni indefinite di equilibrio, in forma matriciale e con le componenti di Tensione ordinate nel vettore tensione:  $\{G\} \rightarrow \{G^T\}$

$$\begin{matrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{matrix} \right\} \text{Tensioni normali} \\ \left. \begin{matrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} \text{Tensioni Tangenziali} \end{matrix} \text{ vettore tensione}$$

$$\boxed{[D] \cdot \{G\} + \{F\} = \{0\}} \rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{matrix} \begin{matrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} + \begin{matrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

EQUAZIONI STATICHE

La matrice operatoriale è la stessa matrice della

deformazione ma trasposta = dualità statico - cinematica dell'equilibrio del corpo (corpo deformabile)

Anche le equazioni di equilibrio del contorno possono essere scritte in forma

$$\boxed{[N] \cdot \{G\} = \{P\}} \rightarrow \begin{matrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{matrix} \begin{matrix} G_x \\ G_y \\ G_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} = \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix}$$

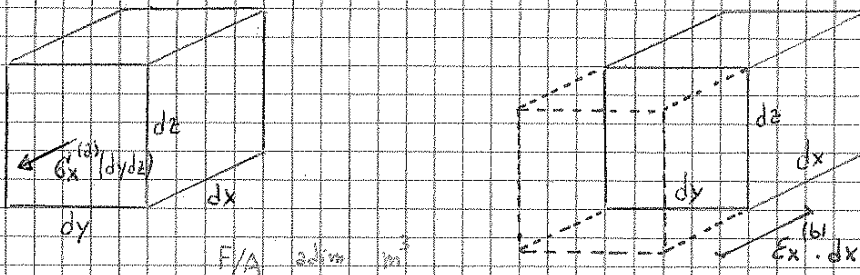
$[N]$  è un operatore non differenziale ma geometrico (coseni direttori)

C'è un legame tra  $[N]$  e  $[D]$  alla derivata  $\frac{\partial}{\partial x}$  all'interno del corpo corrisponde il coseno direttore  $n_x$  sulla sup. come spiega il Teorema di Green

DIMOSTRAZIONE EURISTICA: lavoro componenti di tensione loro più effetto delle corrispondenti componenti di deformazione.

Lvi  $\Rightarrow$  1) lavoro di deformazione delle componenti normali di tensione:

prendo un cubetto e applico  $G_x$ , la forza sarà  $G_x^{(a)} (dydz)$ , Tale Tensione non sa se positiva o negativa quindi lo spostamento duale sarà un allungamento o accorciamento lungo x:  $dW^{(b)} = \epsilon_x^{(b)} dx$ .

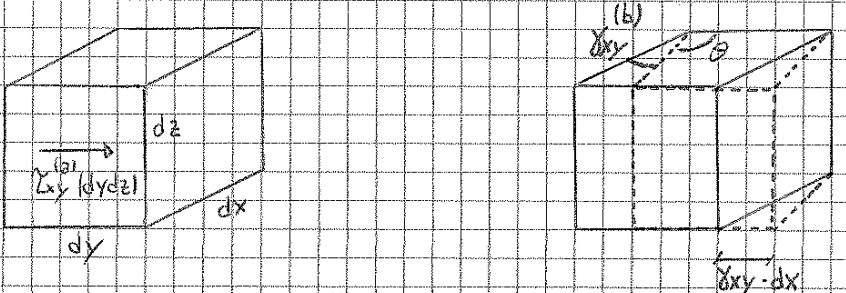


$$dLvi = G_x^{(a)} \epsilon_x^{(b)} dx dy dz = G_x^{(a)} \epsilon_x^{(b)} dV = [N \cdot m; Joule; Watt \cdot secondi]$$

Tensione normale lettera m (a) - dilatazione specifica (b) - volume

2) lavoro di deformazione delle componenti tangenziali:

prendo lo stesso cubetto su cui applico una Tensione Tangenziale  $\tau_{xy}$ , la forza corrispondente sarà  $\tau_{xy}^{(a)} (dydz)$ , la distorsione indotta sarà una rotazione rispetto all'angolo retto =  $\delta$ :  $dV^{(b)} = \gamma_{xy}^{(b)} dx$  con  $\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta$



$$dLvi = \tau_{xy}^{(a)} \gamma_{xy}^{(b)} dx dy dz = \tau_{xy}^{(a)} \gamma_{xy}^{(b)} dV$$

N.B. di [G] compiono lavoro più effetto delle [E]  
 di [E] compiono lavoro più effetto delle distorsioni [G] Tra gli assi  
 il lavoro interno di deformazione (irrituale) = prodotto scalare tra il  
 vettore delle tensioni ed il vettore delle deformazioni (indipendenti)

dominio Tridimensionale  $V$ . Sulla base dell'equazione 1) e usando la formulazione matriciale compatta si ottiene l'equazione dei lavori virtuali. Si consideri il lavoro virtuale compiuto dalle forze di volume  $\{F_a\}$  più gli spostamenti  $\{m_b\}$  essendo questi due campi appartenenti a due sistemi del tutto indipendenti, il primo staticamente ammissibile e il secondo cinematicamente ammissibile:  $L_F = \int_V \{F_a\}^T \{m_b\} dV$  e usando le equazioni statiche:  $L_F = - \int_V ([D]^T \{G_a\})^T \{m_b\} dV$  Sotto il segno di Trasposizione non vi è un prodotto matriciale algebrico ma un operatore differenziale che trasforma una funzione vettoriale, ricorrendo alla 1) si ha:

$L_F = \int_V \{G_a\}^T [D] \{m_b\} dV - \int_S \{G_a\}^T [N] \{m_b\} dS$ , applicando equazioni cinematiche e condizioni al contorno si ha:  $L_F = \int_V \{G_a\}^T \{E_b\} dV - \int_S \{P_a\}^T \{m_b\} dS$  quindi:  $\int_V \{G_a\}^T \{E_b\} dV = \int_V \{F_a\}^T \{m_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{m_b\} dS$  che è l'equazione del principio dei lavori virtuali per corpi deformabili:  $L_{vi} = L_{ve}$

### LEGAME COSTITUTIVO

A corpi aventi la stessa geometria ma differente natura corrispondono deformazioni differenti sotto uno stesso sistema di forze e quindi necessario introdurre ipotesi sulle natura dei materiali, nasce così la Teoria delle relazioni costitutive:

1) Relazioni che legano lo stato di deformazione con quello di tensione:

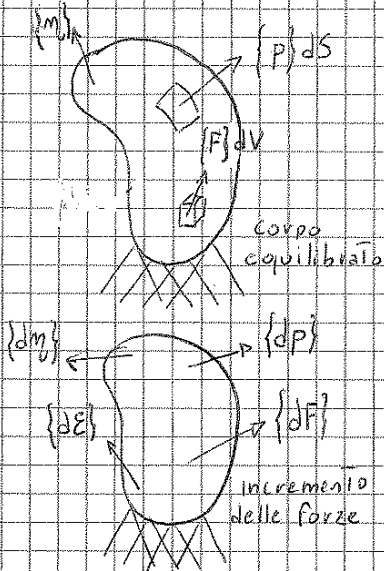
$$\text{Legame } G = G(E, E', E)$$

- comportamento elastico: le deformazioni si annullano all'annullarsi dello stato tensionale

- comportamento plastico: al cessare della sollecitazione resta una deformazione permanente

di lavoro ma solo dallo stato finale di deformazione. L'energia di deformazione è una funzione di stato mentre il lavoro è un differenziale esatto.

Considerando un corpo tridimensionale:



$\{dm\}$  = campo incrementale di spostamenti

$\{dE\}$  = campo incrementale di deformazioni

Si applichi P & V considerando

1) sistema statico ammissibile  $\{F\}, \{P\} \rightarrow \{G\}$

2) sistema cinematico ammissibile  $\{dm\} \rightarrow \{dE\}$

In questo caso si tratta di lavoro infinitesimo non virtuale, in quanto le forze esterne lavorano realmente per gli incrementi di spostamento, mentre il lavoro degli incrementi delle forze  $\{dF\}$  e  $\{dP\}$  per gli incrementi di spostamento  $\{dm\}$  risulta essere un infinitesimo di ordine superiore quindi trascurabile.

veramente per gli incrementi di spostamento, mentre il lavoro degli incrementi delle forze  $\{dF\}$  e  $\{dP\}$  per gli incrementi di spostamento  $\{dm\}$  risulta essere un infinitesimo di ordine superiore quindi trascurabile.

$$\left. \begin{aligned} dL_e &= \int_V \{F\}^T \{dm\} dV + \int_S \{P\}^T \{dm\} dS \\ dL_i &= \int_V \{G\}^T \{dE\} dV \end{aligned} \right\} dL_e = dL_i$$

Sotto le ipotesi di iperelasticità, se il  $dL_i$  è un differenziale esatto allora  $\exists$  un potenziale  $\phi$  delle deformazioni, tale che:

$$d\phi = \{G\}^T \{dE\} \rightarrow \phi = \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$$

il potenziale elastico è funzione delle 6 componenti di deformazione

CAMPO CONSERVATIVO: l'esistenza di un potenziale delle deformazioni presuppone che il processo deformativo avvenga a spese di un lavoro meccanico compiuto dall'esterno, che viene completamente restituito



Si consideri il lavoro virtuale infinitesimo:  $d\psi = \{d\epsilon\}^T \{\epsilon\}$

(incrementi di tensioni per deformazioni, componimenti duali con  $d\phi$  che vedeva incrementi di deformazione per tensioni),  $d\phi = \{\epsilon\}^T d\{\epsilon\}$ . Il

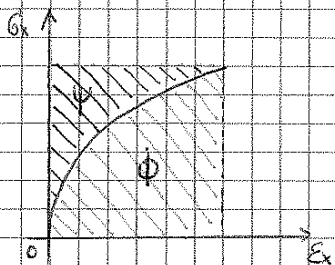
differenziale  $d\phi + d\psi = d(\{\epsilon\}^T \{\epsilon\}) = \{\epsilon\}^T d\{\epsilon\} + \{d\epsilon\}^T \{\epsilon\}$ , essendo il potenziale elastico  $\phi$  e lo scalare  $\{\epsilon\}^T \{\epsilon\}$  entrambi funzioni di stato allora  $d\phi$  e  $d(\{\epsilon\}^T \{\epsilon\})$  sono differenziali esatti, ne deriva che anche  $\psi$  è una funzione di stato e  $d\psi$  è un differenziale esatto.

$\psi$  è detta potenziale elastico complementare (funzione delle 6 componenti di tensione)  $\psi = \psi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  dalla quale si possono dedurre le componenti di deformazione mediante derivazione parziale

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$\text{ma } d\psi = \{d\epsilon\}^T \{\epsilon\} = \epsilon_x d\epsilon_x + \epsilon_y d\epsilon_y + \epsilon_z d\epsilon_z + \gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{xz} d\gamma_{xz} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz}$$

$$\text{da cui } \epsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{xy}} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{xz}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{yz}}$$



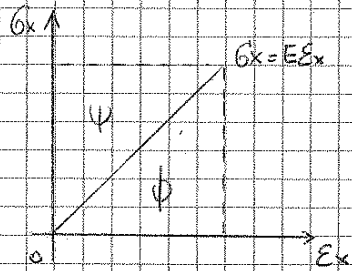
elasticità non lineare

l'energia elastica complementare è l'area compresa tra la curva di carico  $\epsilon_x(\epsilon_x)$  e l'asse  $\epsilon_x$  ossia è l'area complementare a quella che rappresenta l'energia elastica immagazzinata. l'area rettangolare

$(\phi + \psi)$  rappresenterebbe il lavoro di deformazione laddove la tensione fosse costante e uguale a quella finale durante l'intero processo deformativo.

Irreversibilità del legame elastico: l'esistenza del potenziale elastico complementare è condizione necessaria per l'irreversibilità del legame costitutivo

ELASTICITÀ LINEARE



- potenziale elastico = area Triangolo ( $\phi = \psi$ )
- invertibilità  $\sigma$  funzione di  $\epsilon$  e  $\epsilon$  funzione di  $\sigma$   
 dovuto all'esistenza di  $\psi$
- $G = E\nu$  nel caso monodimensionale

Se torniamo al caso spaziale si può introdurre un tensore del 4° ordine

che trasforma  $[E]$  in  $[\sigma] \rightarrow [\sigma] = [A][E]$  NOTAZIONE TENSORIALE  
 $3 \times 3$        $3 \times 3$     $3 \times 3$

$[A]$  = Tensore di elasticità con 81 componenti =  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

- per la simmetria tra  $[\sigma]$  ed  $[E]$  il tensore gode delle proprietà di  
 SIMMETRIA MINORE  $A_{ikj\ell} = A_{kij\ell} = A_{ik\ell j}$  ha solo 36 componenti indipendenti
- se aggiungo le condizioni di iperelasticità ( $\exists \phi$ ) il tensore  $[A]$  ha solo  
 più 21 componenti indipendenti SIMMETRIA MAGGIORE

Sviluppo in serie di Taylor attorno allo zero sono chiamate serie di McLaurin del potenziale  $\phi$  (nell'ipotesi di piccole deformazioni)

$$\phi(\epsilon_x, \dots, \delta y_2) = \phi(0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \delta x_2}\right)_0 \delta x_2 +$$

costante       $\epsilon_{x=0}$        $\epsilon_{y=0}$        $\delta x_2=0$   
 $\psi(0)=0$        $\psi(0)=0$        $\psi(0)=0$   
 $\psi$  stato indotto materia

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta x_2^2}\right)_0 \delta x_2^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta x_1 \partial \delta x_2}\right)_0 \delta x_1 \delta x_2 \right\} + \dots$$

lo sviluppo in serie mi serve per derivare una funzione senza conoscere l'andamento delle legge costitutive, funzionando alle derivate seconde conosco - pendenza e - concavità.

- N.B. - impongo che in "0" non ho energia  $\Rightarrow \phi(0) = 0$  in quanto è come se fosse una costante che si semplifica (il corpo non ha variazione all'origine)
- in quanto non mi sono conformati posso semplificare anche le derivate

1)  $\phi = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}^T [H] \left\{ \varepsilon \right\}$  EQ. MATRICIALE (forma quadratiche)

Se focus lo denota lungo le forze agenti, analogia molla:

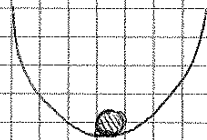
$\phi = \frac{1}{2} K x^2 \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = Kx = F$

2)  $\left\{ G \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial \left\{ \varepsilon \right\}} \rightarrow \left\{ G \right\} = [H] \left\{ \varepsilon \right\}$  legame costitutivo Tridimensionale

equivalente per le 3 fibre rispetto a  $G = E\varepsilon$  delle singole fibre

3)  $\phi = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}^T [H] \left\{ \varepsilon \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}^T \left\{ G \right\}$  forma bilineare

Emendo 1) e 3) legate a) assume 2), ed essendo  $\phi$  forma quadratica nelle deformazioni, qualunque sia il segno di  $\varepsilon$  sarà sempre positivo quindi ha sempre un minimo dell'ingie potenziale



Instabilità del legame costitutivo:

- deve essere  $\det [H] > 0$ ; - lo stato indeformato è un

buco di potenziale

minimo assoluto del potenziale  $\left\{ \varepsilon \right\} = [H]^{-1} \left\{ G \right\}$

potenziale complementare lineare:  $\phi = \psi = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}^T \left\{ G \right\} = \frac{1}{2} \left\{ G \right\}^T \left\{ \varepsilon \right\} = \frac{1}{2} \left\{ G \right\}^T [H]^{-1} \left\{ G \right\}$

NB da positività del determinante Hessiano implica l'instabilità della relazione  $\left\{ G \right\} = [H] \left\{ \varepsilon \right\}$

**PROBLEMA ELASTICO LINEARE**

de  $\varepsilon$  sono le derivate di  $u, v, w \rightarrow \left\{ \eta \right\}$  unica incognita

EQ. EQUILIBRIO  $\left[ \begin{smallmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{smallmatrix} \right]^T \left\{ G \right\} = - \left\{ F \right\}$  eq. mat. cinematica equilibrio  $\rightarrow f(\eta)$

EQ. COSTITUTIVE  $\left\{ G \right\} = [H] \left\{ \varepsilon \right\}$  eq. statica (entramo in gioco cost. del materiale)

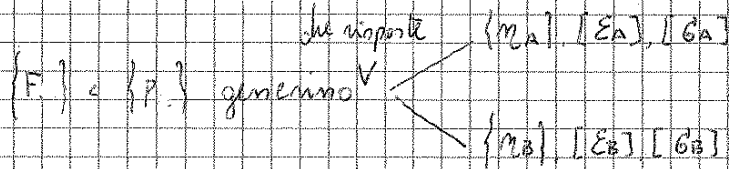
EQ. CONGRUENZA  $\left\{ \varepsilon \right\} = [\delta] \left\{ \eta \right\}$

$3EQ. \ 6 \ IN$   $[\delta]^T \left\{ G \right\} = - \left\{ F \right\} \Rightarrow [\delta]^T [H] \left\{ \varepsilon \right\} = - \left\{ F \right\} \Rightarrow \left[ \begin{smallmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{smallmatrix} \right]^T [H] [\delta] \left\{ \eta \right\} = - \left\{ F \right\}$  3EQ. 3 IN (u,v,w) EQ. OPERATORIALE DI CAVE

**TEOREMA CRITICITÀ DELLA SOLUZIONE ELASTICA - KIRCHHOFF**

Assegnati  $\{F\}, \{P\}, \{m_0\} \rightarrow$  se la soluzione  $\{m\}$  esiste, è  
 unica  $\begin{Bmatrix} m_A \\ \varepsilon_A \\ \sigma_A \end{Bmatrix}$ .

DIMOSTRAZIONE (più omologo)



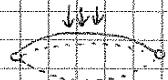
Si applichi il principio dei lavori virtuali al sistema differenziale

$$\int_V \{0\}^T \{\Delta m\} dV + \int_{S_L} \{0\}^T \{\Delta m\} dS_L + \int_{S_U} \{\Delta R\}^T \{0\} dS_U = \int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \varepsilon\} dV =$$

$$= 2 \int_V \phi(\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \dots, \Delta \varepsilon_z) dV = 0$$

diff. reazioni vincolari

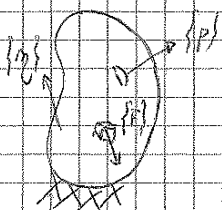
avendo una forma quadratica definita positiva, deve annullarsi solo se tutti i  $\Delta$  sono nulli  $\Rightarrow \Delta \varepsilon_x = \Delta \varepsilon_y = \dots = \Delta \varepsilon_z = 0$ , quindi occorre solo se la soluzione è unica

NB loro in un man ha un'unica soluzione è l'arco ribonato 

**TEOREMA DI CLAPEYRON**

Dopo un processo di carico quasi statico con un sistema di forze si genera un campo di spostamenti che è la soluzione del problema elastico lineare.

Applicando il PLV:



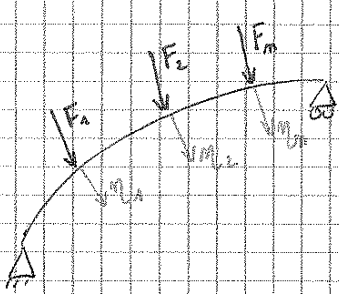
$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{P\}^T \{u\} dS = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

reale

$$\int_V \phi dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{P\}^T \{u\} dS = \int_V \phi dV$$

**TEOREMA DI CASTIGLIANO**



$m_i$  spostamenti duali

non opposizione degli effetti  $\eta_i = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} F_j \quad i=1,2,\dots,m$

$\psi_{ij}$  coefficiente di influenza

Teorema Betti:  $L_{def} = \frac{1}{2} \sum F_i \eta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F_i F_j \psi_{ij}$

derivata dell. rispetto alle forze  $\frac{\partial L_{def}}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^m \psi_{ij} F_j \quad i=1,2,\dots,m \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L_{def}}{\partial F_i} = m_i$

La derivata del lavoro di deformazione rispetto al modulo di una forza è uguale allo spostamento elastico globale duale rispetto alla forza stessa.

**ISOTROPIA**

Si ha che le proprietà meccaniche sono considerate identiche in tutte le direzioni uscenti dal generico punto P, non esistono direzioni preferenziali, il potenziale elastico complementare  $\Psi = \Psi(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3) = \Psi(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3)$  cioè non dipende dall'orientamento del sistema di riferimento principale ma dipende dalle 3 tensioni principali. Essendo  $\Psi$  forma quadratica delle

componenti di tensione:  $\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ (\bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2 + \bar{G}_3^2) - 2\nu (\bar{G}_1 \bar{G}_2 + \bar{G}_1 \bar{G}_3 + \bar{G}_2 \bar{G}_3) \right\} *$

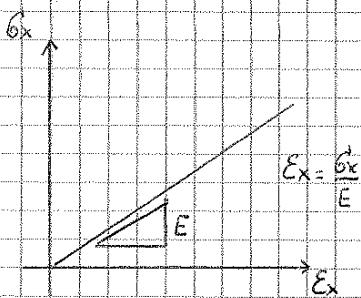
da esprimersi con gli invarianti:  $\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ J_1^2 + 2J_2 (1+\nu) \right\}$

gli invarianti li esprimiamo sotto forma di tensioni:

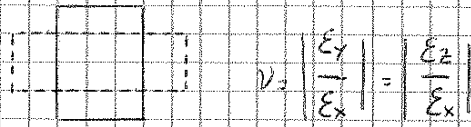
$\Psi = \frac{1}{2E} (\bar{G}_x^2 + \bar{G}_y^2 + \bar{G}_z^2) - \frac{\nu}{E} (\bar{G}_x \bar{G}_y + \bar{G}_x \bar{G}_z + \bar{G}_y \bar{G}_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$  dove  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

potenziale elastico complementare nel caso di elasticità lineare isotropa

\* nell'ipotesi di isotropia i 21 coefficienti elastici si riducono a 2 sole costanti indipendenti (E e  $\nu$ )



$\nu$ : coefficienti di Poisson (coeff. contrazione trasversale)



$$\nu = \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right|$$

trasversali

in quanto le dilatazioni  $\nu$  risultano sempre discordi da quelle longitudinali.

$$\nu > 0 \rightarrow 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

l'invertibilità della matrice Hertziana implica una dilatazione volumetrica concorde con la tensione normale  $\sigma_x$ , e inversa.

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu)$$

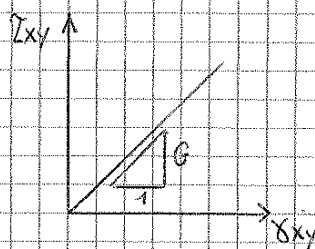
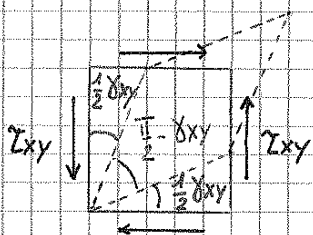
poiché  $E > 0$  e  $\nu < \frac{1}{2}$  si ha che  $\frac{\Delta V}{V}$  e  $\sigma_x$  sono concorde (se  $\sigma_x$  è di tensione le dilatazioni volumetriche sono positive, se compressione sono negative)

► Significato fisico di  $G$ :

si consideri un parallelepipedo elementare sollecitato dalle sole componenti di tensione tangenziale  $\tau_{xy}$ , le equazioni sono:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$G$  = modulo elastico Tangenziale, rigidezza che il solido oppone agli scorrimenti angolari superficialmente e il coefficiente angolare positivo della retta di concomitanza nel piano  $\gamma_{xy} - \tau_{xy}$



NB Se le funzioni  $E$  e  $\nu$  si rivelano costanti, allora il corpo si dice anche omogeneo oltre che elastico ed isotropo.

2 costanti isotropo

Comportamento ortotropico: legno (ha 2 piani di simmetria ortogonali) 9 costanti ortotropico

21 costanti anisotropo

- sta continuando a portare carico deformandosi plasticamente fino a  $\sigma_u$
- 4) in  $\sigma_u$  ho  $\sigma$  ultima. Tangente alla curva è orizzontale e la fibra non può più crescere più assorbire carico
- 5) Se la prova è a controllo di forza, dopo  $\sigma_u$  il provino si rompe poiché è come se den  $\Delta\sigma$  al provino e dopo  $\sigma_u$  non è più in grado di assorbire carico e si rompe.
- 6) Per poter leggere il comportamento dopo  $\sigma_u$  deno lavorare a controllo di spostamento, e vedo che c'è ancora la possibilità di avere deformazioni se riusciamo a mantenere o risolvere la  $\sigma$  e un  $\sigma$  è soggetto al provino

Lu: fase plastica (innesco = yielding)  $\sigma_y = \sigma_u$

ur: strizione (fenomeno che mi dice che oltre un certo carico  $A_0$  tende a diminuire poiché il coefficiente di poisson  $\nu$  passa da 0,2 nella fase elastica a 0,4-0,5 nella fase plastica, contrazione molto elevata)

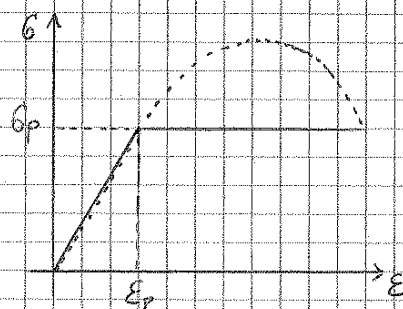
bc: il mio corpo non è più conservativo poiché dissipa energia (dissipazione plastica = area OBC) posso accorgermene misurando il calore in quanto è il modo in cui si dissipa energia.

BCD: energia elastica restituita.

de normative semplificano il diagramma dicendo di usare un valore intermedio tra  $\sigma_e$  e  $\sigma_u$ , accetto che si possa scendere oltre il limite elastico ma non oltre il limite plastico

$\sigma_p$ : tensione di mescolamento

ELASTO - PLASTICO PERFETTO



N.B. nel caso di isotropia del materiale, la Tensione ideale è una funzione delle sole componenti principali di tensione:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \Rightarrow \sigma_{eq} < \frac{\sigma_p}{\gamma}$$

**CRITERIO DELLA MASSIMA TENSIONE NORMALE - RANKINE**

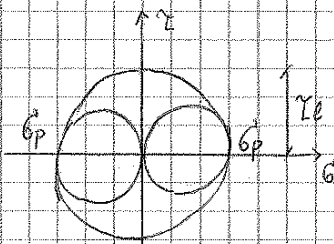
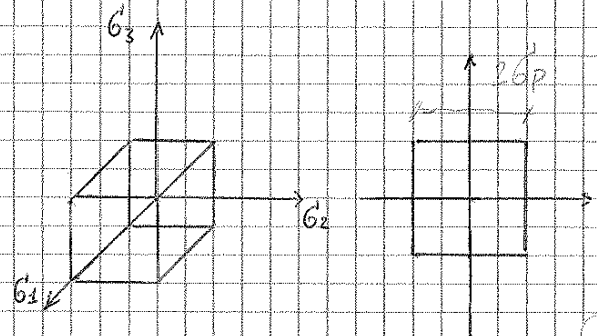
$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_p / \gamma$$

graficamente è cubo di lato  $2\sigma_p$

defetto del criterio: non tiene conto delle  $\tau$

$\tau_{ll}$  (Tensione Tangenziale massima)  $\rightarrow$  rottura

le prove evidenziano rotture se  $\tau < \max(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$



**CRITERIO DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE - TRESCA**

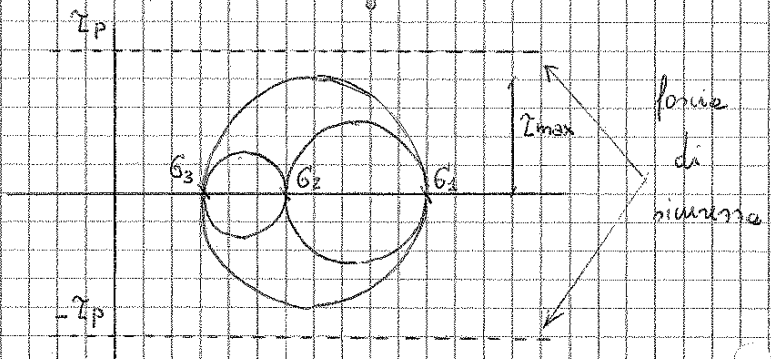
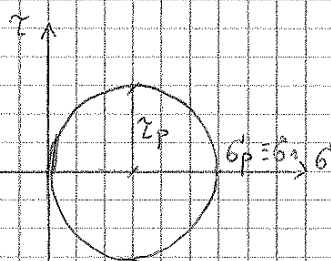
Strainamento:  $\rightarrow$  maxime tensioni Tangenziali  $\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(\sigma_1 - \sigma_2; \sigma_1 - \sigma_3; \sigma_2 - \sigma_3)$

quanto più piccolo è il cerchio di Mohr e quanto più alta è la

resistenza e quindi lo stato idrostatico da stato idrostatico non

influenza sullo strainamento.

$\tau_p =$  Tensione Tangenziale di strainamento



$$\tau_{lim, Tc} = \tau_p = \sigma_p / 2$$

(prova monoassiale)

representazione del criterio su piano di Mohr

da prova  $\tau_{xy}$   $\tau_{xz}$   $\tau_{yz}$



$$\phi = \frac{1}{2E} \left\{ T_I^2 + 2T_{II} (1+\nu) \right\}$$

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{3E} (T_I^2 + 3T_{II})$$

$$T_I = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m = 0$$

$T_I = 0$  per definizione

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{E} T_{II}$$

$$T_{II}^d = - \left[ (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \right]$$

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{3E} \left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]$$

ENERGIA DEVIATORICA

devo confrontare con il limite monassiale (course della rottura secondo v.M)

$$\phi_{monassiale}^d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2$$

$$\left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right] < \sigma_p^2$$

CRITERIO VON MISES

Tensione ideale

Rappresentazione nello spazio

$$\left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right] = \sigma_p^2$$

cilindro a base circolare modellato sull'asse

isostatico. la frontiera è continua descritta da

una sola equazione.

Stato tensionale piano ( $\sigma_3 = 0$ )

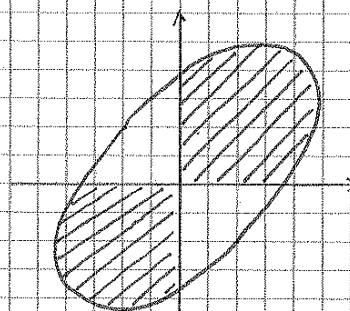
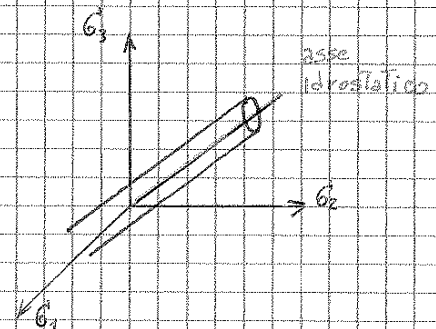
$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \leq \sigma_p^2$$

Ellisse con asse maggiore sui quadranti positivi.

NB !!! opposte meglio tensioni dello stesso segno

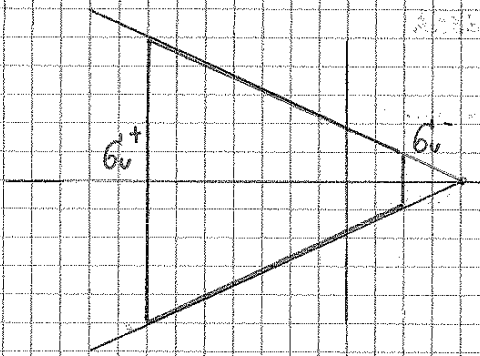
criterio di Von Mises per tensione non principale (6 variabili):

$$\left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] < \sigma_p^2$$



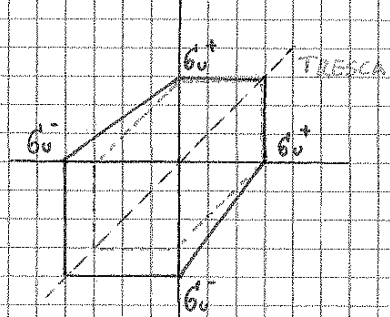
più che mentre delle parti della compressione ( $\sigma^-$ ) ha resistenza "infinita" delle parti della trazione ha solo piccolissimi archi di modo quindi resistenza quasi nulla da condizione limite è quando il cerchio è Tangente.

Si impongono due limiti  $\sigma_u^+$  (Trazione) e  $\sigma_u^-$  (Compressione) che rappresentano i due stati di cui simmetrici di Trazione e compressione.



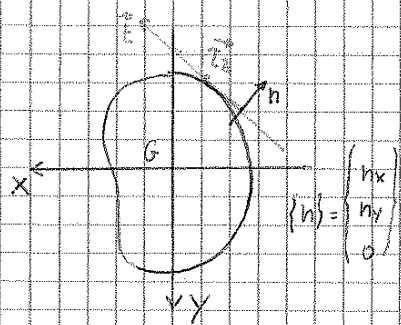
Stato tensionale piano !

Esagono non simmetrico con dominio più grande per compressioni che per trazioni.



EQ. CONTORNO:  $[N]^T \{G\} = \{P\} = \{0\} \quad \forall P \in S_0$

$$\begin{cases} G_{xx}n_x + G_{xy}n_y + G_{xz}n_z = P_x = 0 & \text{VERIFICATA} \\ G_{xy}n_x + G_{yy}n_y + G_{yz}n_z = P_y = 0 & \text{VERIFICATA} \\ G_{xz}n_x + G_{yz}n_y + G_{zz}n_z = P_z = 0 \end{cases}$$



$$G_{xz}n_x + G_{yz}n_y = 0 \rightarrow \{I_z\}^T \{n_z\} = 0 \quad \text{Thmose Tang. contorno}$$

Sull'area A  $\rightarrow \{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \{P^0\} \quad [N]^T \{G\} = \{P^0\} \rightarrow \begin{cases} I_{zx} = P^0_x \\ I_{zy} = P^0_y \\ G_z = P^0_z \end{cases} \quad \{I_z\} = -\{P^0\}$

Sull'area A'  $\rightarrow \{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \{P^0\} \quad [N]^T \{G\} = \{P^0\} \rightarrow \begin{cases} I_{zx} = P^0_x \\ I_{zy} = P^0_y \\ G_z = P^0_z \end{cases} \quad \{I_z\} = \{P^0\}$

EQ. COSTITUTIVE:  $\{G\} = [H] \{E\}$

$$E_x = G_{xx}/E - \nu/E (G_y + G_z) = -\nu/E (G_z) \quad \delta_{xy} = \gamma_{xy}/G = 0$$

$$E_y = G_{yy}/E - \nu/E (G_x + G_z) = -\nu/E (G_z) \quad \delta_{xz} = \gamma_{xz}/G$$

$$E_z = G_{zz}/E - \nu/E (G_x + G_y) = G_z/E \quad \delta_{yz} = \gamma_{yz}/G$$

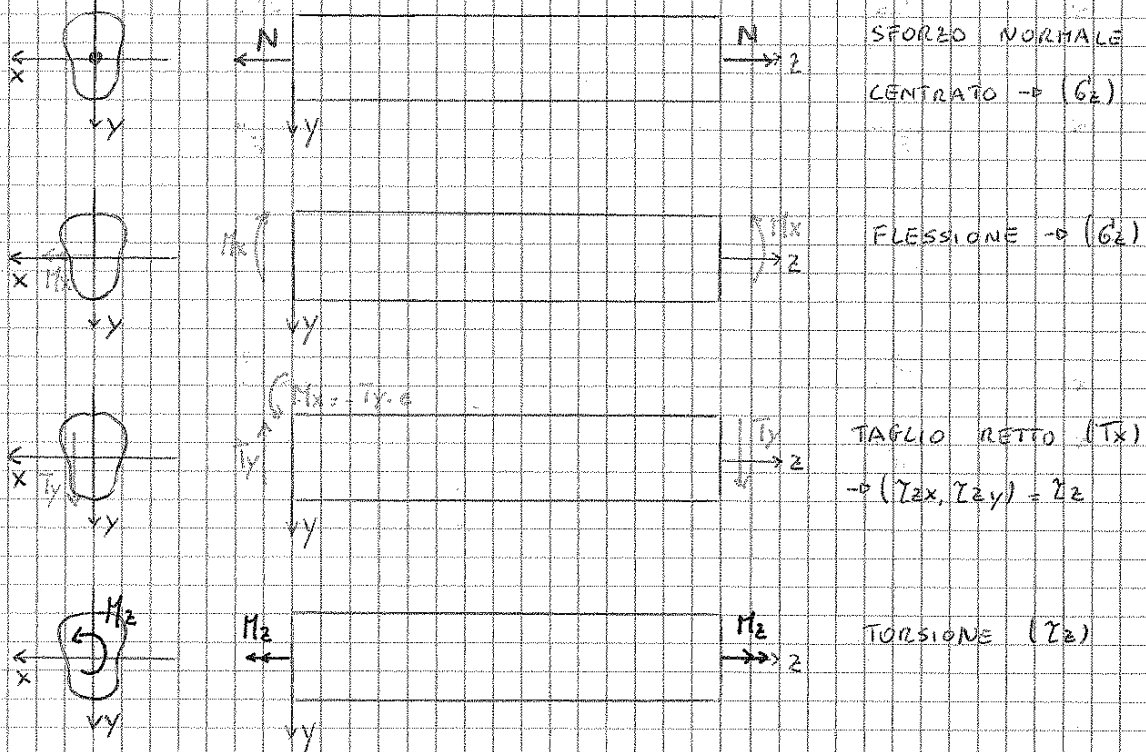
CAMPO SPOSTAMENTI:  $\{E\} = [R] \{u\} \quad \{u\} = \{u_0\}$

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} G_z \quad \delta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} G_z \quad \delta_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}/G$$

$$E_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{G_z}{E} \quad \delta_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}/G$$

Principio fondamentale: a sufficienti distanze dalle basi il campo tensionale e deformativo non dipendono dalle distribuzioni delle tensioni  $\{p^0\}$  e  $\{p^1\}$ , ma dipendono solo dalla loro risultante e del loro momento risultante rispetto al baricentro delle basi considerate.

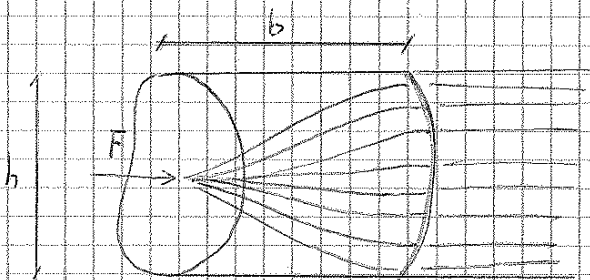


Si considerano i casi composti:

$M_x, M_y, N \rightarrow G_z : M_x + M_y = \text{FLESSIONE DEVIATA}$

$M_x + M_y + N = \text{SFORZO NORMALE ECCENTRICO}$

$T_x, T_y, M_z \rightarrow T_z : T_x + T_y + M_z = \text{TAGLIO - TORSIONE}$



$b$  : distanza di omogeneizzazione

$b \cong 3 = 10h$  (strutture sottili)

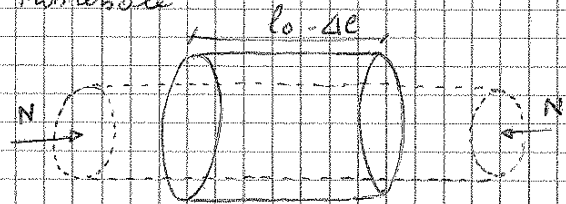
$b = h$  (sez. compatte)

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z & \text{Se } N \text{ è di Trazione si verifica dilatazione} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} & \text{uniforme in direzione assiale e costanti in tutte} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 & \text{uguali tra loro nelle direzioni trasversali} \end{cases}$$

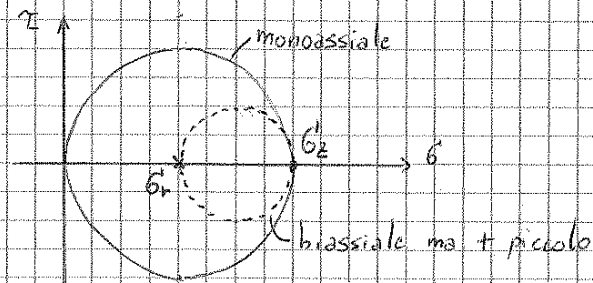
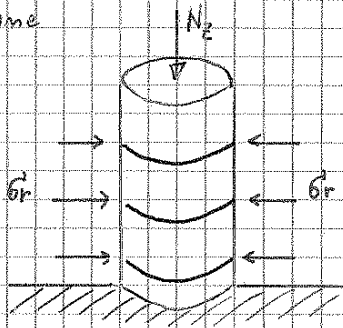
$EA$  : RIGIDEZZA ESTENSIONALE della sezione trasversale

$EA/E$  : rigidità estensionale dell'asta

$$\Delta l = N \cdot l / EA$$



- Possono essere impediti le dilatazioni trasversali attraverso il inchiodaggio delle colonne



si impediscono dilatazioni trasversali, con la nascita di tensioni radiali centripete secondo il criterio di Tresca  $\tau_p = \sigma_p / 2$  con inchiodaggio

- Instabilità:

le strutture snelle non rispettano la teoria di De Saint Venant  $\Rightarrow$  si implettano dando vita allo SVERGOLAMENTO o INSTABILITÀ dell'equilibrio

D.S.V. vale fino ad un carico limite.

$$N_c = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad \text{carico critico di Eulero}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} \quad l_0 = \text{lunghezza libera d'inflessione}$$

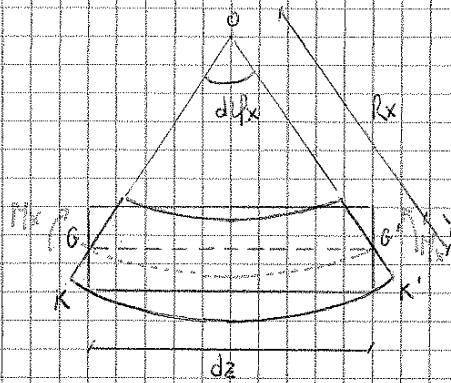
$\rho$  = raggio d'inerzia minimo della sezione trasversale

$\lambda$  = snellezza dell'elemento strutturale

Dalla similitudine tra i Triangoli:

$G \circ G'$  e  $K \circ K'$

$$K_x = \frac{1}{R_x} = - \frac{M_x}{E I_x}$$

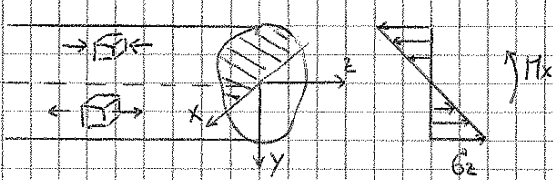


$$\epsilon = \epsilon_z = -K_x \cdot y = \frac{M_x}{E I_x} y$$

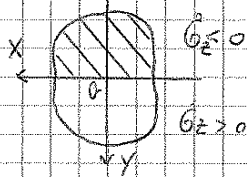
Formule Navier per  $M_x \Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$  distanza della fibra dal baricentro

- lo stato tensionale è monotonico anche per il momento flettente; e differenziale dello stato normale, per la flessione compare il momento d'inertia e non l'area. I punti che soffrono di più sono quelli più lontani dal baricentro (più in ripida deformazione, reattori di più); tutti i punti corrispondenti all'asse baricentrico non sono sollecitati.  $\Rightarrow$  asse neutro ( $\sigma_z = 0$ ).

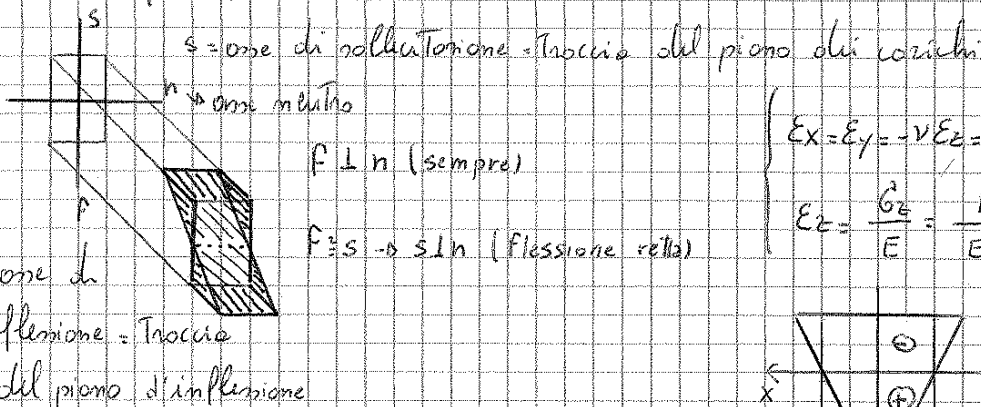
Formule Navier per  $M_y \Rightarrow \sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x$



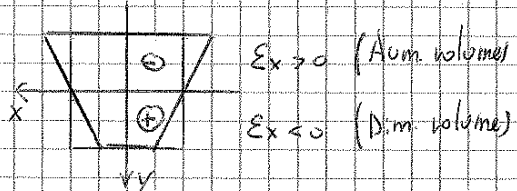
$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$  la tensione normale ruota attorno ad x, x è asse neutro della tensione



- Stato deformativo:



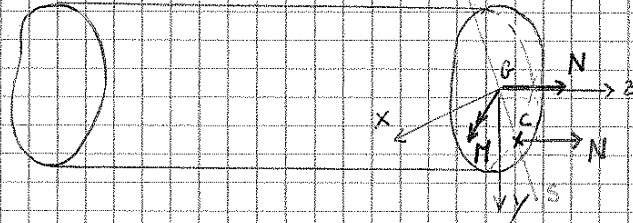
$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{E I_x} y \end{cases}$$



**SFORZO NORMALE ECCENTRICO**

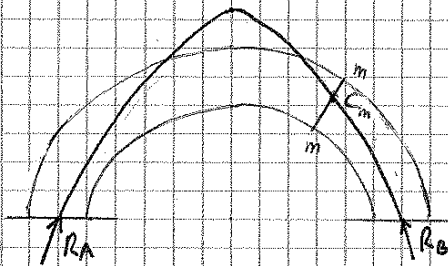
Il solido di d.s.v. è soggetto a sforzi normali eccentrici quando la risultante dei carichi  $N$  non passa per l'asse  $z$  ma bensì // a  $z$ .

CG = eccentricità



Essendo eccentrico posso operare  $N$  in G dando momento di trasporto, che è il momento che produce  $N$  (azione di trasporto) su G più lo sforzo normale unitario. Il luogo  $C(z)$  dei centri di pressione nelle successive sezioni:

Tronconi rappresenta la curva delle pressioni:



$N \rightarrow$  trazione = TENSO FLESSIONE

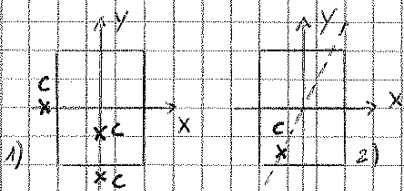
$N \rightarrow$  compressione = PRESSOFLESSIONE (pilastri, travi)

1)  $M$  diretto secondo un asse centrale d'inertia =

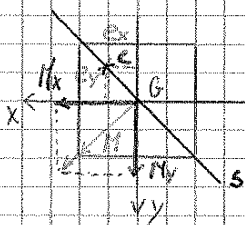
PRESSOFLESSIONE RETTA

2)  $M$  non diretto secondo asse centrale d'inertia =

PRESSOFLESSIONE DEVIATA



d.s. = asse di collettore (congiungente tra centro pressione e baricentro)



$$M = N \cdot e \rightarrow M_x = N \cdot e_y$$

$$\rightarrow M_y = -N \cdot e_x$$

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$G_z = N/A$$

$$G_z = M_x/I_x \cdot y - M_y/I_y \cdot x$$

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

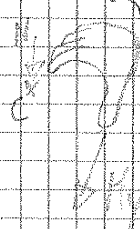
Aggiungo Trasporto:

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_y}{I_x} y + \frac{N \cdot e_x}{I_y} x$$

$$I_x = A \cdot p_x^2$$

$$I_y = A \cdot p_y^2$$

$M_y$  positivo tende a fibre longitudinali del trapezio  $x < 0$



**NOCCIOLA CENTRALE D'INERZIA**

- Individua il luogo dei centri di pressione che generano assi neutri "radenti" alla sezione
- contiene il baricentro G
- è conico
- è sempre interno all'inviluppo delle rette radenti (non è detto che sia contenuto nella sezione)
- le rette radenti non voglio che intersechino la sezione senza che sia trazione che compressione
- se il centro di pressione è interno al nocciolo, l'asse neutro è interno alla sezione e devo determinare una sola componente di trazione max; se c'è esterno al nocciolo ho un diagramma a farfalla delle tensioni con due valori di tensione max (Trazione e compressione)

$N, M_x, M_y$  sono magneticamente ortogonali (non ha lavoro mutuo, somma magie)

Lavoro di deformazione: @ Usa Clapeyron

$$dL = \frac{1}{2} N \cdot d\Delta = \frac{1}{2} N \cdot \epsilon \cdot dz = \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} dz = D \left[ \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \right] \quad \begin{array}{l} \text{EN. IMMAGAZZINATA SU UN} \\ \text{CONCIO PER EFFETTO D, N} \end{array}$$

$$dL = \frac{1}{2} M_x \cdot d\phi_x = \frac{1}{2} M_x \cdot \chi \cdot dz = D \left[ \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI} \right] \quad \text{EN. ELASTICA IMMAGAZZINATA PER EFFETTO M}$$

@ Lavoro magie con potenziale elastico:

$$dL = \int_A \psi \cdot dA \cdot dz = \int_A \frac{G\theta^2}{2E} \cdot dA \cdot dz \Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \int_A \left( \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 \cdot dA$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] + \frac{1}{E} \left[ \frac{NM_x}{A I_x} S_x + \frac{NM_y}{A I_y} S_y - \frac{M_x M_y}{I_x I_y} I_{xy} \right]$$

$X, Y \rightarrow$  sono assi centrali ( $S_x = S_y = I_{xy} = 0$ )

$$dL/dz = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] \Rightarrow \text{@@ steso risultato}$$



eq. retta :  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 1 + a x + b y$

asse neutro  $1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x$

equogho  $a = \frac{e_x}{\rho_y^2}$  o  $b = \frac{e_y}{\rho_x^2}$  e ricorso  $e_x, e_y$  (coordinate del centro di gravità)

del solido) rimane indeformato; la Torsione è un problema sui bordi delle Trave in quanto ho  $x$  e  $y$  elasti

- Stato di deformazione

$$u = -\theta z \cdot y$$

$$v = \theta z \cdot x$$

$$w = 0$$

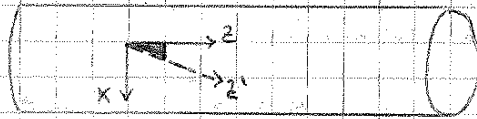
dalle eq. cinematiche  $\rightarrow$   
 $\{\epsilon\} = [\theta] \{u\}$

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy} = \epsilon_x = \frac{du}{dx} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = -\theta \cdot y$$

$$\gamma_{zy} = \theta \cdot x$$



$\gamma_{xy} = 0$  se i dischi sono circolari, rimangono tali e non diventano elissoidali non subiscono rotazioni

$\gamma_{zx}$  rotazione di angolo  $\theta$  di due fibre originariamente ortogonali dirette come  $x$  e  $z$   $\neq 0$  quindi non più ortogonali

Stato di Torsione

ogni  $\sigma$  dipende da tutte le  $\epsilon$  ( $E, \nu, \dots$ )

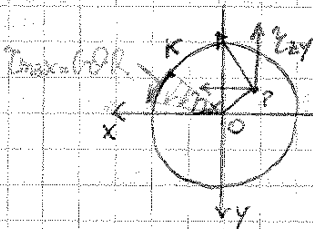
la corrispondenza della  $\tau$  è diretta con  $\theta$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = -G \theta y$$

$$\tau_{zy} = G \theta x$$

$\tau_z(r) = G \cdot \theta \cdot r$  Torsione Tangenziale risultante



$$\tau_z = G \cdot \theta \sqrt{x^2 + y^2} = G \theta \cdot r$$

distanza del punto dal sistema di riferimento  
 man mano che mi allontanano dal centro la

$$\tau_z = 0 \quad \text{pt } r = 0 \quad (O)$$

$$\tau_z = \text{max} \quad \text{pt } r = R \quad (K)$$

DIM: Composizione vettoriale

$(\tau_{zx} + \tau_{zy})$  la risultante è ortogonale al raggio vettore

"STATO TENSIONALE BIASSIALE" in quanto abbiamo la  $\tau \neq 0$

NB  $\tau_{\max}$  non è che aumenta se aumenta  $r$  in quanto ho il raggio anche nell'intima polare  $I_p = \pi R^4 / 2$

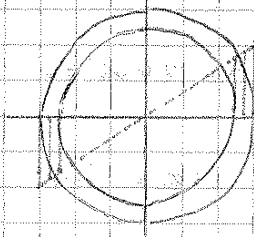
$$\tau_{\max} = \frac{2 M_z}{\pi R^3}$$

► CORONE CIRCOLARI

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$\tau_z(r) = \frac{M_z}{I_p} \cdot r = \frac{2 M_z}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} \cdot r$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_z R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)}$$



NB. da parte interna del materiale si reagisce molto poco a Torsione in quanto ho "g" piccole poiché gli "r" sono piccoli quindi mi conviene usare strioni core (centrifugo il materiale)

NB Massimo intima polare nelle strioni core

► Per corona circolare con  $\delta \ll R_m$ , SEZIONI SOTTILI

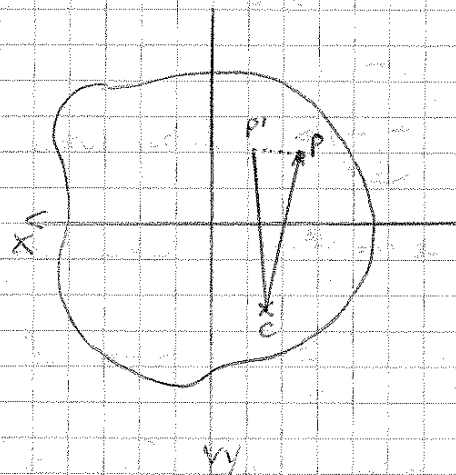
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2 (\pi R_m^2) \delta}$$

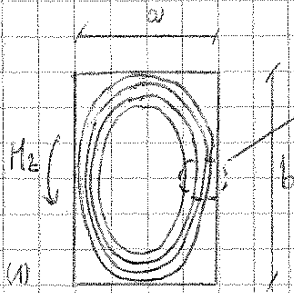
► SEZIONE GENERICA

$I_{pd}$ : cinematica

- ogni strione ruota attorno ad un'asse longitudinale (asse di Torsione) passante per C (C ≠ G in genere)
- non esistendo piana ma subendo "ingobbamento"
- C = G nelle strioni a doppia simmetria

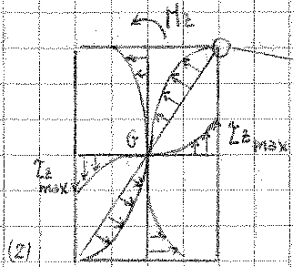
possibile spostamento nelle divisioni 2



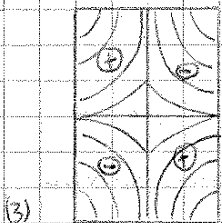


$\tau_{max}$  si ha nei punti medi dei lati lunghi  
in una sezione rettangolare

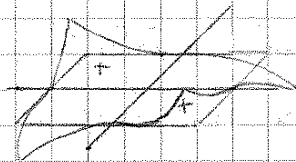
negli spigoli la velocità è 0 quindi tensioni presso che = 0



Tensioni nulle negli spigoli



curve di livello



approssimazione cinematica

(1) analogia idrodinamica in una sezione rettangolare

(2) andamento delle tensioni nella sezione

(3) deformazione da ingobbamento

Ingobbamento impedito: se la Trave non può applicare liberamente le deformazioni di ingobbamento, nascono tensioni normali pressite con effetto emigliente e tensione; diventa rilevante per Travi molto lunghe e snelle

Raddoppiando lo spessore del profilo la tensione massima si riduce di quattro volte.

Inserendo il valore tabellato  $\beta = \frac{1}{3}$  nelle formule del fattore di rigidezza torsionale, si ha:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b^3$$

NB più è grande  $I_t$  e più le deformazioni sono ridotte in quanto aumenta la resistenza della sezione.

La massima tensione sarà  $\tau_{zx \max} = \frac{M_z}{I_t} b$

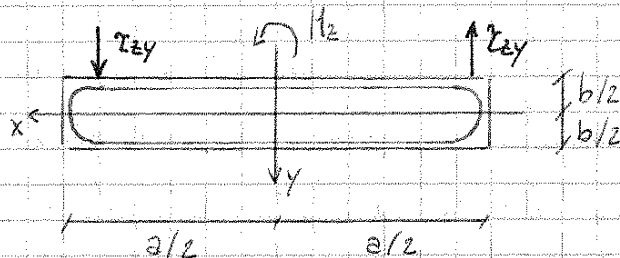
- Analisi zone terminali del rettangolo sottile

Equazioni di equilibrio sulle basi  $\rightarrow$  le tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  non sono sufficienti ad assicurare l'equilibrio con il momento Torcente esterno

$$M_z = - \int_A y \cdot \tau_{zx} dA = \frac{6 M_z}{a \cdot b^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \cdot \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy$$

$M_z(\tau_{zx}) = \frac{M_z}{2}$  le  $\tau_{zx}$  equilibrano solo metà del momento Torcente

le tensioni Tangenziali  $\tau_{zy}$  di estremità, per quanto piccole in modulo rispetto alle  $\tau_{zx}$  presentano braccio notevole ( $a \gg b$ ) rispetto al momento e quindi equilibrano l'altra metà di  $M_z$ .



dalle tre equazioni al contorno sulla sup laterale:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] n_x + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] n_y = 0$$

derivata di  $w$  imposta sul contorno

PROBLEMA DI NEUMANN (problema di Neiman)

$\nabla^2 w = 0$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] n_x + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] n_y = 0$$

da soluzione basta ed è  
unica a meno di una costante

Coordinate del centro di Tomone

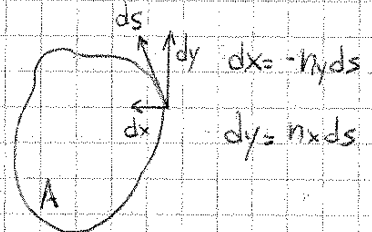
annullamento dei tagli sulle basi:

$$T_x = \int_A z_x dA = G \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] dA = 0 \quad \cancel{V dA = 0}$$

$$T_y = \int_A z_y dA = G \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] dA = 0$$

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial y} dA = - \frac{1}{A} \int_C w dx$$

$$y_c = - \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA = - \frac{1}{A} \int_C w dy$$



NB Una sezione a doppia simmetria presenta una funzione ingobbamento  $w$  simmetrica e  $\oint w = \text{flussi nullo}$  quindi  $x_c$  e  $y_c$  sono si che  $C \in G$

noti  $x_c$  e  $y_c$  le metto in NEUMANN

$$\nabla^2 w + \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - y - \frac{1}{A} \int_C w dy \right] n_x = 0$$

$$\nabla^2 w + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + x + \frac{1}{A} \int_C w dx \right] n_y = 0$$

## Verifica delle equazioni statiche

$$\{\sigma\} = -\{F\};$$

$$\text{div Tensore} = -F$$

$$\text{div Tensore} = 0$$

le equazioni infinitesime di equilibrio sono soddisfatte

in quanto:

$$\frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma_{xy}}{\partial y} = -G\delta + G\delta = 0$$

sup. laterale:  $\Sigma_z$  sul bordo è Tangente al bordo

$$\text{prodotto per le normali uscenti} = 0 \quad \Sigma_{zx}nx + \Sigma_{zy}ny = 0$$

d'ortogonalità tra  $\Sigma_z$  e il vettore normale, l'equazione si può scrivere oltre

che al contorno anche ai punti interni:  $\{\Sigma_z\} \cdot \{n\} = -G\delta xy + G\delta xy = 0$

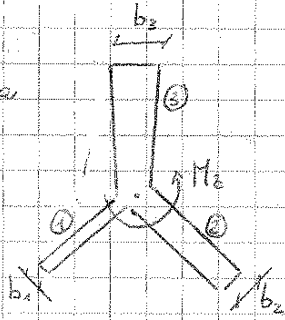
prodotto scalare = 0  $\rightarrow$  vettori ortogonali

c) SEZIONE SOTTILE COMPOSTA APERTA

da sezione seppure composta

è soggetta ad una sola

collezione  $M_z$  e



un unico elemento neutro di  $\theta$  (uguale in tutti)

$$I_{L_i} = \frac{1}{3} b_i \cdot b_i^3 \quad (i=1,2,3) \text{ sezioni}$$

$$\tau_{L_{max}} = \frac{M_z}{I_{L_i}} \cdot b_i$$

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot I_{L_{TOTALE}}} = \sum \frac{M_z}{G \cdot I_{L_i}}$$

ESERCIZIO

$$I_L = \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 = \frac{1}{3} 170 \cdot (18)^3 + \frac{1}{3} 180 \cdot (20)^3 = \frac{1}{3} (2731740) = 810480 \text{ mm}^4$$

$$b_{max} = 20 \text{ mm}$$

Criterio di resistenza di Tresca:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{xz} \\ 0 & 0 & I_{yz} \\ I_{xx} & I_{xy} & G_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{L_{max}} = \sqrt{G_z^2 + 4 I_z^2} < G_p \quad \text{TRESCA} \quad \text{in caso di torsione } G_z = 0 \quad \tau_{L_{max}} = 2 I_z < G_{min}$$

$$\tau_{L_{max}} = \sqrt{G_z^2 + 3 I_z^2} < G_p \quad \text{VON MISES}$$

$$\tau_{L_{max}} = \frac{G_{min}}{2 I_z} \quad \text{TRESCA} \quad \tau_{L_{max}} = 120 \text{ MPa}$$

$$M_{z_{max}} = \frac{\tau_{L_{max}} \cdot I_L}{b_{max}} = \frac{120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 810480 \text{ mm}^4}{20 \text{ mm}} = 4862880 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

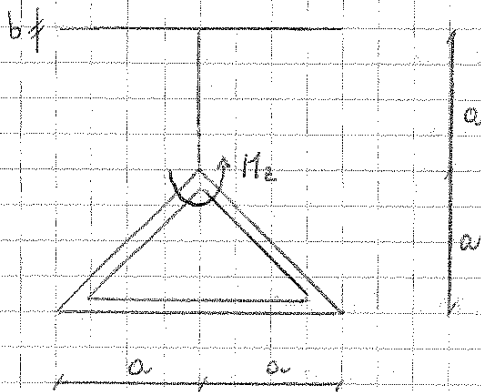
$$\theta_{max} = \frac{M_{z_{max}}}{G \cdot I_L} = \frac{\tau_{L_{max}} \cdot I_L}{b_{max} \cdot G \cdot I_L} = \frac{120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 20 \text{ mm}} = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm} = 4^\circ 18'$$



g) SEZIONE SOTTILE COMPOSTA

$$\frac{d}{b} = 20$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta^{(a)} = \theta^{(c)} \\ M_z &= M_z^{(a)} + M_z^{(c)} \end{aligned} \right\} \text{CONGRUENZA ANGOLARE}$$



$$\frac{M_z}{I_L} = \frac{M_z^{(a)}}{I_L^{(a)}} = \frac{M_z^{(c)}}{I_L^{(c)}}$$

$$I_L = I_L^{(a)} + I_L^{(c)}$$

$$M_z^{(a)} = \frac{M_z}{I_L^{(a)} + I_L^{(c)}} \cdot I_L^{(a)}$$

$$M_z^{(c)} = \frac{M_z}{I_L^{(c)} + I_L^{(a)}} \cdot I_L^{(c)}$$

$$I_L^{(a)} = \frac{1}{3} 2a \cdot a^3 + \frac{1}{3} a \cdot b^3 = \frac{1}{3} b^3 (2a) = b^3 \cdot a$$

$$I_L^{(c)} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot b}{L} = \frac{4(2a \cdot \frac{a}{2})^2 \cdot b}{(2a + 2\sqrt{2}a)} = \frac{2a^3 b}{(1 + \sqrt{2})} = 2a^3 b (\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{M_z^{(c)}}{M_z^{(a)}} = \frac{M_z}{I_L^{(a)} + I_L^{(c)}} \cdot \frac{I_L^{(c)}}{I_L^{(a)}} = \frac{I_L^{(c)}}{I_L^{(a)}} = \frac{2a^3 b (\sqrt{2} - 1)}{b^3 a} = 2(\sqrt{2} - 1) \frac{a^2}{b^2} =$$

$$= 0,83 \cdot 400 = 332$$

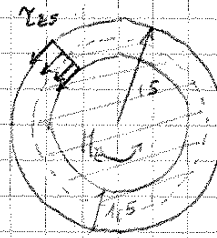
d'elemento chiuso viene 300 volte la sollecitazione di quello aperto  
 di chi sono blandamente sollecitate

ESERCIZIO 5

$G_d = 240 \text{ MPa}$

$G = 80'000 \text{ MPa}$

$M_{z \max} = 7$



FORMULA GREDL

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{2 \pi b(s)}$$

oia nechiuse linea media

considero andamento delle tensioni costanti

$$I_z^{(c)} = \int \rho^2 \frac{ds}{b(s)} = \frac{\pi R^2 b}{b} = \frac{\pi R^2 b}{1}$$

$H_p \rightarrow \tau_{zs}$  approssimata costante su ciascuna corda  $\perp$  alle linee medie  $\epsilon$

$\tau_{zs}$  sempre dello stesso segno

$\tau_{zs}$  sempre concordi con  $M_z$

Strutture Tubolari  $\Rightarrow$  rigidità e resistenza

- (a) aperte
- (c) chiuse

$$\tau_z^{(c)} = \frac{M_{z \max}^{(c)}}{2 \pi R^2 \cdot b} = \frac{648'240 \text{ N} \cdot \text{cm}}{2 \pi (15)^2 \cdot 1,5} = 400 \text{ N/cm}^2$$

CONFRONTO

$$\frac{\tau_z^{(a)}}{\tau_z^{(c)}} = \frac{M_z \cdot b}{I_z} \cdot \frac{2 \pi R \cdot b}{M_z} = \frac{b}{\frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot 2 \pi R} \cdot \frac{2 \pi R^2 b}{1} = 3 \left( \frac{R}{b} \right) = 30$$

- Tensioni nella sezione aperta sono 30 volte quelle chiuse

$$\frac{\theta^{(a)}}{\theta^{(c)}} = \frac{M_z^{(a)}}{I_z^{(a)}} \cdot \frac{I_z^{(c)}}{M_z^{(c)}} \cdot \frac{I_z^{(c)}}{I_z^{(a)}} = \frac{4(\pi R^2)^2 b}{2 \pi R} \cdot \frac{3}{b^3 2 \pi R} = 3 \left( \frac{R^2}{b} \right) = 300$$

- la sezione aperta si sposta di più