



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO : 491

DATA : 27/02/2013

A P P U N T I

STUDENTE : Insana

MATERIA : Scienza delle Costruzioni
Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Politecnico di Torino



a.a 2012-2013

I facoltà di ingegneria
corso di laurea in Ingegneria Civile

Corso di Scienza delle costruzioni

Prof. Bernardino Chiaia

Parte I

a cura di Alessandra Insana

La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico → si opererà sul patrimonio esistente, densità del costruito degli anni '60-'70 nel boom economico post-guerra. Mentre la pietra è immortale, tali edifici in cemento armato tendono a invecchiare. Questo libro ci dice com'erano realizzate le opere in passato.

$$[E_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

cosa accade in un intorno di P lungo le 3 fibre

I termini sulla diagonale principale ricordano l'esempio della fibre → allungamento delle 3 fibre
 → deformazioni assiali lungo x, y, z

I termini fuori sono le distorsioni o variazioni di angolo

È simmetrica per costruzione perché rappresenta la parte simmetrica dello spostamento

Nella pratica ingegneristica la matrice di deformazione infinitesima $[E]$ è scritta come

$$[E_p] = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & E_z \end{bmatrix}$$

γ → scorrimenti (o distorsioni) angolari
 Mettiamo il doppio perché

↳ variazione di angolo rispetto a 90° tra asse x e asse z

> 0 x e z convergono → acuto
 < 0 x e z divergono → ottusi

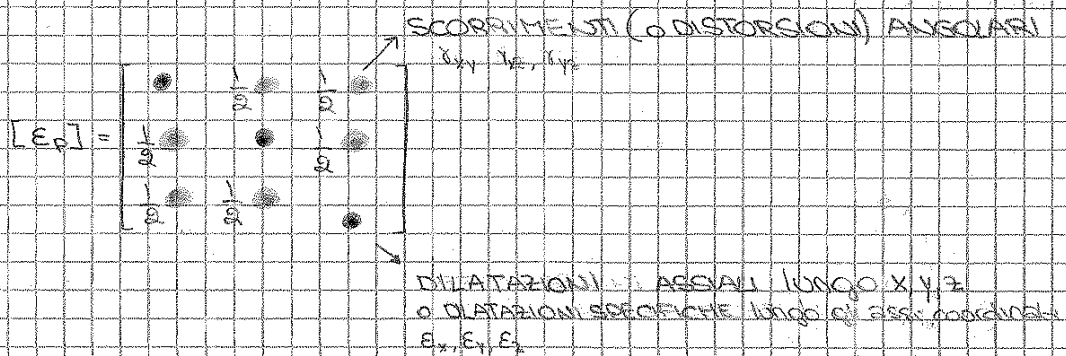
angoli
 E e γ sono:

(I) NON DIMENSIONALI → numeri puri

(II) NUMERI PICCOLI → espressi in percentuali o millesimali (nel ds deformazioni di $0.7\% \rightarrow 2 \text{ mm}$ per 1 metro, 28 mm per 1 km) → « \ll per l'hp di piccoli spostamenti regolanti di δ

E → derivate parziali delle componenti del vettore spostamento nelle relative direzioni

↳ somme delle derivate parziali incrociate
 Il termine γ_{yx} è col termine γ_{xy}



Tutto ciò è calcolato in un punto P per cui passano 3 fibre, ma per P nello spazio passano ∞^2 fibre nella stella di rette con centro P. È limitativo, ma dimostriamo una proprietà: determinata la matrice rispetto a una terna cartesiana, con una legge di trasform. tensoriale posso ricavare la matrice rispetto a qualsiasi altra terna. Questa proprietà definisce un TENSORE (studiando le tensioni del corpo).

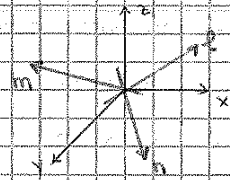
Trasformazione del tensore di deformazione per rotazione del s.r.

④ Sistema di partenza: x, y, z su cui abbiamo calcolato $[E_p]$

Sistema rotato: n, m, f passante per P

$$[E_p] \rightarrow [E_p^*]$$

$$x, y, z \quad n, m, f$$



La descrizione della deformazione è puntuale $\rightarrow [E_p]$

Il vettore spostamento $\{q\}$ di una fibra // al versore n è $[E_p] \cdot \{n\}$ (dovuto solo alla [E] è un'applicazione che trasforma vettori in vettori componenti deformativa). Voglio trovare $[E_p^*]$ su n, m, f conoscendo $[E_p]$ su x, y, z

Facciamo due ragionamenti di geometria. Il vettore spostamento di Q è $\{q_{nm}\}$ di: Sfera infinitesima con $r=1$ centro in P. Il versore n individua Q sulla sfera. Il vettore spostamento di Q, decorato della rotazione, è:

Ri $\{q_{nm}\}$ voglio le sue proiezioni su m e n

$\{q_{nm}\} = [E_p] \cdot \{n\}$

$\{q_{nm}\} = [E_p] \cdot \{m\}$

$\{q_{nm}\} = [E_p] \cdot \{f\}$

$\eta_{nm} = \{m\}^T [E_p] \{n\} = \{m\}^T \{q_{nm}\}$

$\eta_{nm} = \{n\}^T [E_p] \{m\} = \{n\}^T \{q_{nm}\}$

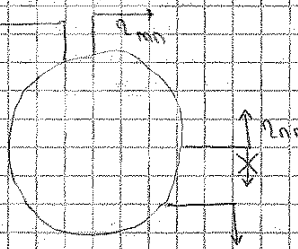
Proiezione di $\{q_{nm}\}$ sulla direzione n e m.

$\eta_{nm} = \{n\}^T \cdot \{q_{nm}\} = \{n\}^T [E_p] \{m\}$ Forma quadratica del versore n

$\eta_{nm} = \{m\}^T \cdot \{q_{nm}\} = \{m\}^T [E_p] \{n\}$

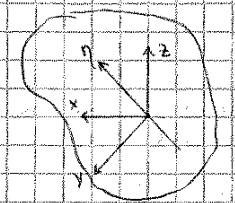
Le componenti del vettore spostamento sono forme quadratiche di m e n, ma solo quelle lungo le rispettive direzioni ~~ortogonali~~ sono forme bilineari, incrociate sono dei numeri

Le due componenti ortogonali sono uguali in modulo $\rightarrow \eta_{nm} = \eta_{mn}$ legge di reciprocità delle proiezioni del vettore spostamento, per la simmetria della matrice $[E_p]$



I due vettori o convergono o divergono, non possono inseguirsi. Si dimostra perché se $[E_p]$ è simmetrica fare $\{n\}^T [E_p] \{m\}$ è uguale a $\{m\}^T [E_p] \{n\}$

Chiamo $[N]$ le 9 componenti dei coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi



È la matrice di rotazione $x,y,z \rightarrow n,m,f$. Sono quantità $\leq 1, = 1$ se coincidono gli assi x e n, y e m, z e f .

$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} \quad \text{matrice ortogonale}$$

$[E_p^*] = [N] [E_p] [N]^T$ Questa proprietà ci permette di dire che $[E_p]$ è un tensore pre e post moltiplicazioni \rightarrow forma quadratica nei coseni direttori

Legge di trasformazione (vedi la dim sul libro da sapere) della matrice di def per rotazione del s.r.

(1) Equazione tensoriale $\{f_n\} = [E] \cdot \{f_n\}$ vale sempre ∇ direzione nella stella di centro P
 Il tensore del II ordine $[E]$ è un'applicazione che trasforma vettori in vettori
 A questa associamo: ∇ fibre ∇ vettori $\{f_n\}$ ∇ vettore spostamento $\{f_n\}$

(2) Equazione vettoriale $\{f_n\} = E_n \cdot \{f_n\}$ vale solo per terre principali

Ricerca del parallelismo $\{f_n\} \parallel n$

Sottraggio (2) - (1) = $\{f\} - [E] \cdot \{f\} - E_n \cdot \{f\}$

Metto in evidenza $\{f\} \rightarrow$ devo moltiplicare E_n per $I^{3 \times 3}$ matrice identità

$\{f\} = ([E] - [I] \cdot E_n) \cdot \{f\}$ sistema lineare omogeneo nelle incognite vettori di $\{f\} \rightarrow n_x, n_y, n_z$

3 eqz in 3 incognite n_x, n_y, n_z

Nella matrice dei coefficienti non è noto E_n . Espando il sistema:

$$\begin{bmatrix} E_x - E_n & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & E_y - E_n & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & E_z - E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le coseni direttori di questi assi di deformazione privilegiate

Risolvendolo trovo $n_x, n_y, n_z \rightarrow$ coseni direttori della direzione principale. Ma per determinarli devo prima trovare E_n .

Attenzione: un sist. lin. omog. può avere la sol. banale, ma dal p. di v. Eserc. n_x, n_y, n_z non possono essere 0 perché $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ modulo di un vettore. Ma se det della matrice dei coeff. è 0 trovo sol. \neq dalla banale \rightarrow troverò una direzione principale.

$\det(A) = \det([E] - [I] \cdot E_n) = 0 \rightarrow E_n^3 - J_1 E_n^2 - J_2 E_n - J_3 = 0$ \rightarrow forma canonica per scrivere un'eqz di III grado in incognita E_n , l'autovalore del tensore

Il det di una matrice 3×3 è un'eqz di terzo grado.

- J_1 invariante lineare
 - J_2 " " quadratica
 - J_3 " " cubica
- scalari
 Invarianti della deformazione \rightarrow costanti al variare della forma di riferimento. Varierebbe la sol. del problema fisico \rightarrow assurdo.

Invarianti del tensore di def. \rightarrow non dipendono dal sist. sono uguali per tutti i n.r.m. sono entità caratteristiche del tensore (EQZ CARATTERISTICA DEL TENSORE)

Se calcolo il determinante trovo che traccia del tensore \rightarrow somma degli elementi diagonali

$J_1 = E_x + E_y + E_z$ lineare perché le E sono alla prima potenza

$J_2 = - \begin{vmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & E_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & E_z \end{vmatrix}$ \rightarrow somma degli opposti dei determinanti dei minori principali

$J_3 = \det [E_n]$ (sono parità da $\det([E] - [I] \cdot E_n)$)

determinante del tensore delle deformazioni

Problema agli autovalori: E_n si chiamano AUTOVALORI

$\rightarrow \det[A] = 0 \rightarrow$ eqz di III grado (escluso la sol. banale)

I coefficienti di E_n sono gli invarianti

\rightarrow 3 soluzioni (autovalori E_1, E_2, E_3) \rightarrow si può dimostrare che per la simmetria di $[E_n]$ sono REALI, non complesse e coniugate, SEMPRE

\rightarrow Prendo E_1 , lo sostituisco a E_n e risolvo il sistema che dà avvia una matrice numerica

\rightarrow l'autovalore risolve il sistema e trovo una terna di sol. cioè un autovettore, cioè la direzione cercata.

Problema agli autovalori: $\det A = 0$
 \rightarrow 3 autovalori (le sol. di E_1, E_2, E_3)
 \rightarrow sostituisco in $[A]$ e risolvo
 \rightarrow 3 autovettori

(3) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ caso di deformazione idrostatica o sferica (intorno sferico di P a def avvenuta rimane una sfera)
 Nessuna direzione ha subito distorsioni angolari. In questo caso tutte le 10^9 direzioni della stella di centro P sono principali \rightarrow tensore sferico (liquido perfetto, $\kappa < 0$ comp.)

(4) $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \neq 0$ stato triassiale di def. \rightarrow nell'intorno del punto tutte le dir. si deformano

(a) $(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0, \epsilon_3 = 0$ " piano " " (o biassiale)

(b) $(\epsilon_2, \epsilon_3) = 0, \epsilon_1 \neq 0$ " monoassiale "

Nei materiali reali lo stato di def. è sempre TRIASSIALE. Se tro un caso questo si contrade nelle altre due direzioni.

Materiali reali \rightarrow schiacciamento \rightarrow allargamento trasversale \rightarrow tendenza del materiale a conservare il volume, che un po' cambia (dipende dal materiale)

A volte imponiamo lo stato piano per semplificare la teoria, ma in realtà non c'è ma

Invarianti letti nel riferimento principali:

(A) $J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ traccia

\rightarrow DILATAZIONE CUBICA (O VOLUMETRICA)

La somma delle 3 dilatazioni non varia

Individua la variazione di VOLUME

(B) $J_2 = -(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3)$

È un parametro di DISTORSIONE

Non ci sono le γ sugli assi 1,2,3, ma se mi sposto un po' ci sono.

È importante nei materiali duttili

(C) $J_3 = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = \det[E]$

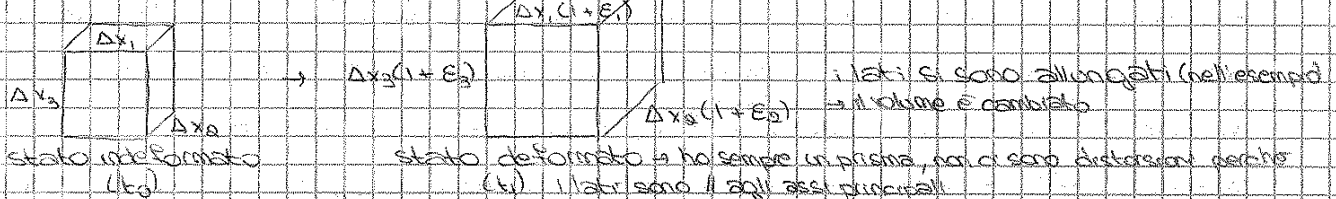
$J_3 \neq 0 \rightarrow$ stato triassiale di def.

$J_3 = 0 \Rightarrow$ stato piano o monoassiale

Dimostrazione del significato fisico di J_1

Consideriamo un intorno del punto P, prismatico per semplicità di lati $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$

(Cubo di lati: gli assi principali)



Vogliamo vedere la variazione specifica di volume.

t=0 volume iniziale V_0 nello stato indef = $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

t=t1 " finale V_f " " " def = $\Delta x_1 (1 + \epsilon_1) \Delta x_2 (1 + \epsilon_2) \Delta x_3 (1 + \epsilon_3)$

$V_f = V_0 (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) =$

prodotti binomiali, ricordo che ϵ è molto piccolo, avrò quadrati e cubi di ϵ che saranno ancora più piccoli \rightarrow li trascuro

$= V_0 (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3) =$ trascuro gli infinitesimi di ordine superiore al primo

$= V_0 (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) =$

$= V_0 (1 + J_1)$

⑤ Essendo studiato deformazioni piccole, siamo nell'ambito della teoria delle deformazioni infinitesime, teoria che dà ottimi risultati per materiali rigidi quali quelli di interesse strutturale (acciaio, cemento armato, ceramica, legno), mentre va corretta opportunamente per materiali molto deformabili come le gomme, le tendosolcature, dove l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni non è più valida.

$[E_p]$ tensore di deformazione (tensore 2° ordine) $[E] = E(p, x, y, z)$

Trasforma vettori di 3 elementi in vettori di 3 elementi

Consideriamo l'intorno di un punto P . Se ci mettiamo in una sfera di raggio unitario e prendiamo due direzioni f_n ed f_m , il vettore spostamento associato a queste due direzioni si ottiene moltiplicando il tensore $[E]$ per il versore f_n . Questa è la trasformazione tensoriale di f_n in f_n . Le componenti di f_n saranno η_{nn} in direzione parallela al versore e η_{nm} in direzione parallela a f_m . Allo stesso tempo f_m che si ottiene per trasformazione tensoriale del versore f_m avrà componenti η_{mn} in direzione n e η_{mm} in direzione m .

A deformazione avvenuta i due versori si saranno entrambi allungati (nell'esempio quindi E positivo) e avranno ruotato di un angolo α per il versore f_n , e per f_m . L'angolo tra le due direzioni non sarà più l'angolo retto originario, ma sarà un angolo β (nell'esempio più piccolo dell'angolo retto). Ricordiamo che sussiste la reciprocità delle componenti tangenziali del vettore spostamento $\eta_{mn} = \eta_{nm}$.

$$E_n = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \eta_{nn} = [f_n]^T [E_p] f_n$$

$$E_m = \eta_{mm} = [f_m]^T [E_p] f_m$$

$$\eta_{nm} = \eta_{mn} = \alpha$$

Dalle ipotesi di deformazioni infinitesime $\eta_{nm} = \alpha \cdot \tan(\alpha) = \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ $\eta_{mn} = \beta \Rightarrow \eta_{nm} = \alpha + \beta = 2\eta_{nm}$

⑥ Come avviene la ricerca degli assi principali in P ? Inanzitutto ricordiamo che siamo in un punto $P \rightarrow$ è una ricerca puntuale due punti distinti nel solido avranno in generale assi principali diversi. Prendiamo il solido intorno del punto P , infinitesimo, con assi f_n e f_m generici. Tali assi, trasformati tramite il tensore ci danno i vettori spostamento f_n e f_m che in generale non sono \parallel a n e a m . Cercheremo degli assi tali che il vettore spostamento ad essi associato sia parallelo all'asse stesso. Cercheremo un asse n_1 tale che il vettore spostamento f_{n_1} sia \parallel a n_1 e così per un asse f_{m_1} . Il parallelismo tra vettore spostamento e versore sarà la via per trovare gli assi principali della deformazione.

3. Grado di estremo delle dilatazioni principali

i mediante stru-
 ni, ϵ_{22} , ϵ_{12} . Una
 gura 5.18) basa-
 o lunghezza.
 ura. Applicando
 n le tre inco-
 o tre direzioni di
 ni ortogonali fra
 , un angolo φ .
 direttamente lo

(5.78)

Nel caso di Figura 5.18b, ove $\hat{\varphi} = 45^\circ$, si ottiene:

$$\bar{\epsilon}_n = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_{11} + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_{22} + \frac{1}{2}\gamma_{12} \quad \text{e quindi:} \quad \gamma_{12} = 2\left(\bar{\epsilon}_n - \frac{\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22}}{2}\right)$$

5.4 Deformazioni non omogenee. Equazioni di compatibilità

Come discusso in precedenza (Paragrafo 5.1), una generica deformazione si comporta come omogenea nell'intorno del generico punto \bar{x} a meno di un errore $o(\bar{x}^* - \bar{x})$ che tende a zero al tendere a zero della distanza $|\bar{x}^* - \bar{x}|$. In questo senso i tensori \mathbf{E} e \mathbf{W} possono intendersi rispettivamente come *ensore di deformazione locale* e di *rotazione locale* e sono funzioni del punto note in relazione al campo di spostamento. Si ritiene opportuno esplicitarne la forma in termini di componenti:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (5.79)$$

$$\mathbf{E} \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \quad (5.80)$$

$$\mathbf{W} \quad \omega_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \quad \omega_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \quad \omega_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \quad (5.81)$$

Mentre è sempre possibile assegnare un campo di spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e risalire alle componenti della deformazione locale mediante le relazioni precedenti non è viceversa possibile assegnare in modo arbitrario le 6 componenti distinte ϵ_{ij} e risalire al campo di spostamenti. Innanzi tutto perché esse definiscono solo la parte simmetrica del gradiente di spostamento ed è necessario conoscerne anche la parte antisimmetrica, cioè le tre ω_j ; ma soprattutto perché matematicamente le 5.80 definiscono un sistema di 6 equazioni differenziali in sole 3 incognite u_i . Perché questo sistema ammetta soluzione è necessario che tra le 6 quantità assegnate esistano ulteriori relazioni dette *condizioni di integrabilità* (o di *de Saint Venant*).

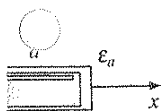
In altri termini poiché \mathbf{E} trasforma localmente un cubo in un parallelepipedo né retto né rettangolo (Figura 5.13) affinché, fra elementi prossimi, non si abbiano lacerazioni o compenetrazioni (Figura 5.19) è necessario che le componenti ϵ_{ij} siano legate da particolari restrizioni.

La derivazione di queste condizioni, che sono necessarie e sufficienti, in un dominio monoconnesso, oltrepassa gli scopi di questo testo e viene demandata a corsi successivi e a testi classici di Scienza delle Costruzioni. Tuttavia, nell'ipotesi introdotta in cui la deformazione e lo spostamento siano funzioni regolari e differenziabili fin che si desidera, è immediato derivare queste relazioni, almeno come condizioni necessarie.

Per esempio si consideri la prima delle 5.80 e la si derivi due volte rispetto a x_1 e x_2 , si ottiene:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.82a)$$

che rappresenta la condizione di integrabilità nel caso di deformazione piana nel piano $x_1 x_2$.



ti piani di deforma-

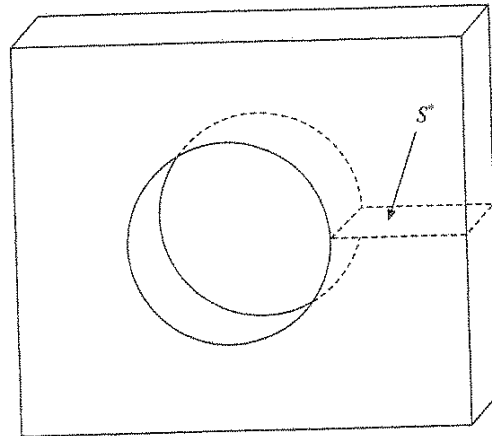


Figura 5.20 Corpo pluriconnesso.

Si consideri per esempio la prima delle 5.81 e la si derivi rispetto alla terza coordinata x_3 ; si ha:

$$\omega_{12,3} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1})_{,3} = \frac{1}{2}(u_{1,32} - u_{2,31}) \quad (5.83)$$

ove si è inoltre applicata l'invertibilità dell'ordine di derivazione (Teorema di Schwarz); aggiungendo e togliendo alla precedente il termine $\frac{1}{2}u_{3,12}$ si perviene alla seguente identità:

$$\omega_{12,3} = \epsilon_{13,2} - \epsilon_{23,1} \quad (5.84)$$

In modo del tutto analogo si ottengono altre identità che possono essere sinteticamente espresse mediante l'espressione seguente:

$$\omega_{ij,h} = \epsilon_{ih,j} - \epsilon_{jh,i} \quad i, j, h = 1, 2, 3. \quad (5.85)$$

Pertanto se il campo delle deformazioni $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ è sufficientemente regolare, è possibile mediante le identità 5.85 ottenere le derivate delle componenti di \mathbf{W} e per integrazione il tensore di rotazione infinitesima \mathbf{W} . È pertanto noto, essendone nota sia la parte simmetrica sia quella antisimmetrica, il gradiente di spostamento \mathbf{H} . Il vettore di spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ può infine essere valutato, se sono soddisfatte le 5.82, per integrazione.

Condizioni di vincolo o di congruenza al bordo

Alle condizioni di *congruenza interna* (5.82.b) occorre affiancare ulteriori condizioni che derivano, come descritto nei capitoli precedenti, dalla presenza di eventuali vincoli che limitano la possibilità di deformarsi del corpo in esame.

Per esempio il punto \mathbf{x} (ovvero un insieme di punti) della superficie esterna $\partial\mathcal{B}$ può essere vincolato a muoversi su una superficie rigida di equazione:

$$g(\mathbf{y}) = 0 \quad (5.86)$$

In Figura 5.21 si mostra come può essere realizzato in pratica un vincolo di cerniera per

ostituzione diretta, si

(5.82b)

rmazione, o equazioni

ienti. Nel caso riportate S^* si ottiene un coramenti in tutto il volu- i punti separati dalla ruenza che impongano

i regolari e differenzia- i ω_j del tensore di rota- one infinitesima \mathbf{E} .

ANALISI DELLA TENSIONE

- Definizione del vettore tensione
- Tensore di tensione
- Trasformazione del tensore per rotazione del sistema di rif.

in inglese tensione = stress → sforzo sofferenza all'interno del materiale

Definizione del vettore tensione

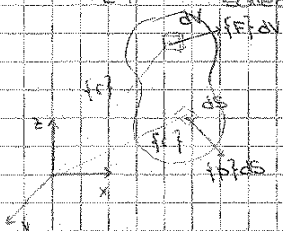
Prendo un corpo generico tridimensionale soggetto a forze esterne di volume $\{F\}$ (peso proprio, peso specifico del materiale) e di superficie $\{p\}$.

Forza di volume = F/dV

Forza di superficie = $F/area \rightarrow Pa = N/m^2$ o $MPa = N/mm^2$
 μ è una pressione

$\{F\} = \frac{F}{L^3}$ forza peso, inerzia o forze distribuite all'interno del corpo
 sono forze per unità di volume, misurate per esempio in N/m^3

$\{p\} = \frac{F}{L^2}$ forze di impatto, vincoli o forze distribuite o sollecitazioni concentrate sulla frontiera del corpo
 sono forze che agiscono sulla frontiera del corpo



Il raggio vettore $\{r\}$ che individua la posizione dei vari punti del corpo ci permetterà di descrivere l'equilibrio alla rotazione. Per avere delle forze dobbiamo moltiplicare $\{F\}$ per l'elementino dV , così come dobbiamo moltiplicare $\{p\}$ per l'elementino ds di superficie.

La statica ci insegna che

Affinché il corpo solido sia in equilibrio devono valere le equazioni cardinali della statica:

In forma integrale l'equilibrio delle forze si scrive come:

$$\int_V \{F\} dV + \int_S \{p\} dS = \{0\} \quad \text{FORZE ma non basta } \rightarrow \int r \text{ averci una rotazione}$$

Allo stesso tempo deve valere l'equilibrio dei momenti:

$$\int_V \{r\} \wedge \{F\} dV + \int_S \{r\} \wedge \{p\} dS = \{0\} \quad \text{MOMENTI}$$

Per avere delle quantità scalari il prodotto vettoriale deve essere moltiplicato per un vettore \parallel al vettore momento

Le eq. cardinali della statica valgono considerando il corpo nella sua integrità, sotto le azioni di $\{F\}$ e $\{p\}$.

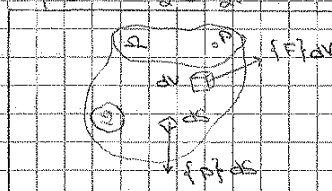
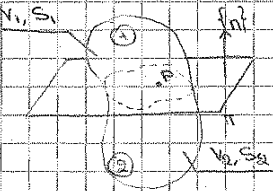
Soggetto alle forze $\{p\}$ ed $\{F\}$ il corpo sta soffrendo. Per capire cosa succede dentro il corpo

deformato, seziono idealmente il solido con un piano π di normale n passante per un punto P

generico. Tali parametri definiscono il piano (potrei sezionare il corpo con ∞ piani).

Il corpo è così suddiviso in 2 porzioni \rightarrow ① e ②. Considero una delle 2 porzioni del corpo

sezionato (es. la 2) sezionando il solido in corrispondenza del punto P otteniamo una superficie di separazione S , che divide il corpo nelle porzioni ① e ②, caratterizzate rispettivamente da un volume V_1 e da una frontiera S_1 , e da V_2 e S_2 .



Ritorniamo a scrivere l'equilibrio statico di una delle due porzioni, ad es. la ②

Scrivo l'eq. cardinale della statica su ②:

$$\int_{V_2} \{F\} dV + \int_{S_2} \{p\} dS \neq \{0\} \rightarrow \text{la porzione di solido isolata non è in equilibrio sotto le sole forze}$$

l'azione del
 manca la continuità del piano di taglio
 mutue
 di separazione

agenti. Per avere l'equilibrio devo aggiungere le azioni $\{F\}$ sviluppate sulla nuova sup. libera n' .
 Sono azioni mutue sviluppate tra le due porzioni di solido.

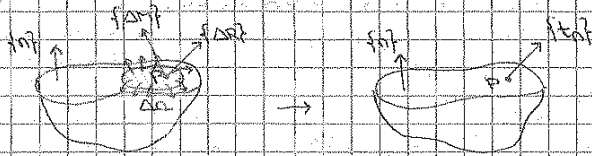
Saranno azioni di superficie che indico con $\{t_n\}$, perché che ricorda che ho fatto un taglio con un piano di normale n . Affinché tali azioni mutue siano delle forze $\rightarrow \{t_n\} dA$

Anche l'equilibrio alla rotazione non è soddisfatto se consideriamo solo le forze $\{F\}$ e $\{p\}$ agenti sulla porzione ② del solido sezionato dal piano π .

Definizione limite del vettore tensione in P

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{|\Delta R|}{\Delta a} = |\bar{t}_n|$$

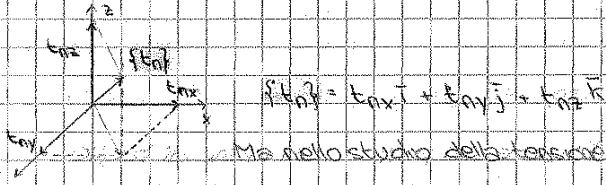
$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta a} = \rho \bar{t}_n$$



È un concetto limite, nel limite di a che collassa in P . Questo limite esiste finito, con la stessa velocità di tendenza all'infinitesimo. Non è dimostrato, ma è comodo credere così.

Nell'area Δa può esserci una coppia di risultanti. Noi ci concentriamo sul punto $P \rightarrow$ assenza di micro-copie. Anche se solo la teoria dei materiali granulari (teoria di Cauchy)

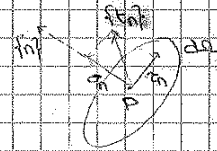
Come ogni vettore, il vettore tensione può essere scomposto nelle sue componenti cartesiane lungo x, y, z , appoggiandosi a Componenti cartesiane di f_{int} : lo scompongo lungo x, y, z sistema di riferimento x, y, z .



Ma nello studio della tensione...

Si preferisce scomporre il vettore f_{int} lungo due direzioni particolari (componenti rispetto a una terna locale)

- σ_n componente normale (al piano π)
- τ_n tangenziale (tangente sul piano di taglio π)



Sono le componenti speciali, conviene perché il σ_n è l'azione scambiata lungo la fibra n , sarà accoppiata a ϵ_n , la parte statica della dilatazione lungo n .

A sua volta τ_n è scomposta secondo due direzioni gradienti nel piano $\rightarrow \tau_{nx}, \tau_{ny} \rightarrow$ componenti tangenziali

È un sistema ausiliario, dove un asse coincide con la normale al piano.

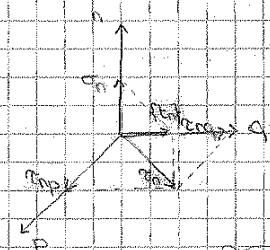
lungo il vettore normale sul piano di taglio

$$f_{int} = \sigma_n \bar{n} + \tau_{np} \bar{p} + \tau_{nq} \bar{q}$$

COMPONENTI SPECIALI DI f_{int} (1 comp normale, 2 comp tangenziali)

$$\tau_n = \sqrt{\tau_{np}^2 + \tau_{nq}^2}$$

componente tangenziale totale



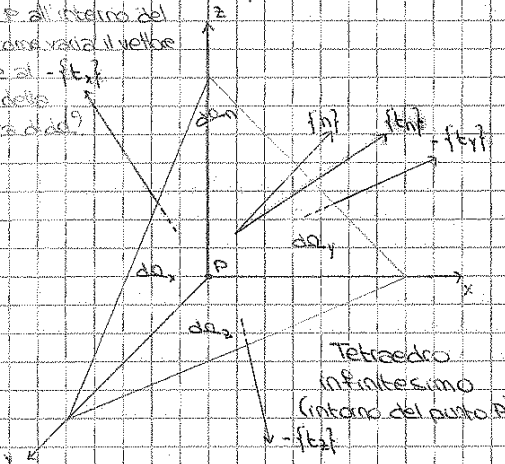
Si rifacciamo alla famosa dimostrazione di Cauchy che risale al 1827 basata sull'equilibrio di un intorno infinitesimo del punto P di forma tetraedrica. Il tetraedro è il poliedro più semplice con 4 facce piane triangolari. Costruiamo tale tetraedro nell'intorno di P in modo che i lati siano infinitesimi $\rightarrow dx, dy, dz$ e 3 delle facce giacciono sui piani coordinati.

Tensore di tensione

Grandezza in un punto \rightarrow dipende da P e dalla giacitura \rightarrow per descrivere la variazione al variare del piano di taglio \rightarrow descrizione di tipo TENSORIALE \rightarrow dimostrazione di Cauchy.

Tetraedro di Cauchy \rightarrow per descrivere la tensione in P al variare del piano di taglio

Fissato P all'interno del corpo, come varia il vettore tensione al variare della giacitura di Δa ?



Prendo l'intorno tetraedrico di P (solido poligonale

col minimo numero di lati). Appoggio il tetraedro su

$x, y, z \rightarrow d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z \rightarrow$ tre facce triangolari.

La quarta faccia di normale \bar{n} avrà area $d\Omega_n$.

Definisco i vettori tensioni su tali facce.

$f_{int,x}, f_{int,y}, f_{int,z} \rightarrow$ vettori tensione sulle 3 facce il cui piano coordinato \rightarrow d'area $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$

$d\Omega_x \rightarrow f_{int,x}, d\Omega_y \rightarrow f_{int,y}, d\Omega_z \rightarrow f_{int,z}$

Segno meno \rightarrow prendo i vettori opposti.

$f_{int} \rightarrow$ vettore corrispondente a piano di taglio di

normale \bar{n} . Ogni piano può essere la traccia di un

ipotetico piano di separazione. Faccio l'equilibrio nelle tre direzioni trascurando le forze di volume (infinitesime di ordine superiore).

Le tre componenti di σ_x non hanno braccio, perché è applicato in G, non entreranno mai in gioco \rightarrow non le disegno. Le componenti di τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} possono avere braccio.

Equilibrio attorno a $GG_x \rightarrow \sigma_x$ non conta, nemmeno σ_y , σ_z , non hanno braccio. Danno momento da alla volta le $\tau \rightarrow$ non $\tau_{zx} \parallel x$, ma τ_{yz} e τ_{xy} , uniche componenti con braccio.

$GG_z \rightarrow \tau_{yx}, \tau_{zy}$

Le σ hanno sempre braccio nullo, lavorano due alla volta le componenti tangenziali.

τ : area di competenza: braccio. già disegnate giuste (momento orario e antiorario \rightarrow sottrattive)

Equilibrio attorno a GG_x : $\tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} - \tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3} = 0$
area di base $\cdot \frac{1}{3}$ = volume tetraedro $\frac{1}{3}$

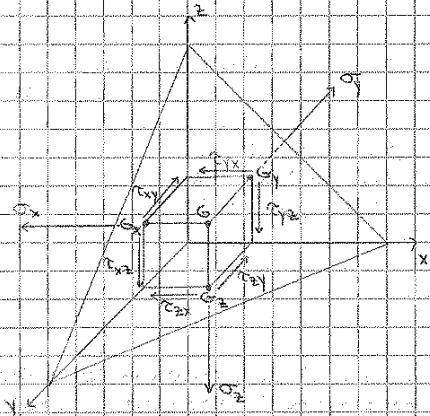
... Essendo $\frac{1}{3} d\Omega_y dy = \frac{1}{3} d\Omega_z dz = dV \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$ uguali non solo in modulo, ma reciproche ai sensi della rotazione \rightarrow "reciprocità delle tensioni tangenziali" le forze si inseguono o si respingono ma non possono essere concordate \rightarrow contributo opposto, equilibrio alla rotazione.

$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$

\rightarrow Simmetria di $[E]$ per l'equilibrio alla rotazione

\rightarrow 6 componenti indipendenti di tensione conica in $[E]$
 " " $[E]$ " costruzione (parte simmetrica dello Jacobiano degli spostamenti)

La simmetria di $[E]$ si perde nell'equilibrio micro-polare perché l'equilibrio prelude anche la presenza delle micro coppie.



Schema:

Equilibrio alla rotazione del tetraedro attorno agli assi GG_x, GG_y, GG_z

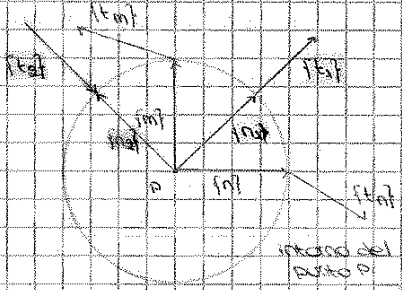
Esempio: equilibrio attorno GG_x

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ hanno braccio nullo perché convergono in G
 τ_{xy}, τ_{xz} " " " " " nella direz. GG_x

τ_{yx}, τ_{zx} sono parallele a GG_x
 τ_{zy}, τ_{yz} contribuiscono al momento

$\tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} - \tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3} = 0$
tensione \cdot area = forza

• Direzioni principali della tensione e esiste tensioni principali.
Mi chiedo se anche per la tensione una terna privilegiata → ricerca delle direzioni principali n_i si annullano le τ , ci sono solo le σ



Rispetto a due giaciture qualsiasi $\{m\}, \{n\}$ il vettore tensione non è ortogonale. Vediamo se esiste direzioni lungo cui il vettore tensione è solo normale → coincide con σ

trazione → $\{t_1\}$ uscente compressione → $\{t_2\}$ entrante
intorno infinitesimo di P, due generiche giaciture di normale $\{m\}$ e $\{n\}$ che associamo del vettore tensione in generale non ortogonale alla giacitura stessa. Noi invece chiediamo delle direzioni $\{m\}$ e $\{n\}$ privilegiate perché rispetto a queste il vettore è parallelo alle normali alla giacitura.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ autovalori n_1, n_2, n_3 autovettori

Risolvo un problema agli autovalori.

(1) Su qualunque giacitura → eqz tensoriale $\{t_{ij}\} = [L_{ij}] \cdot \{n_j\}$

Il tensore del II ordine trasforma il vettore normale nel vettore tensione.

(2) Eqz vettoriale → $\{t_{ij}\} = \sigma_n \cdot \{n_j\}$ non so se vale, vale solo per le eventuali direzioni prinl

Ricerca del parallelismo $\{t_{ij}\} // \{n_j\}$

Devo verificare la possibile coesistenza di queste 2 eqz.

Sottraggio 2-1 → $\{t\} = [L_{ij}] \{n_j\} - \sigma_n \{n_j\}$

Metto in evidenza $\{n_j\}$ → devo portare lo scalare σ_n alla dimensione di $[L_{ij}]$ → moltiplico per

$[I]$ → $([L_{ij}] - \sigma_n [I]) \cdot \{n_j\} = \{0\}$ problema agli autovalori: t_{ij} del tensore degli sforzi E_{ij}

Incongnite: coseni direttori della normale. Non le trovo perché non conosco σ_n .

Devo imporre $\sigma_n \neq$ dalla banale → $\det([L_{ij}] - [I] \cdot \sigma_n) = 0$ (NB: non è $\det([L_{ij}])$)

Sistema lineare omogeneo.

4 non ha senso fisico ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) perché deve sussistere la relazione di normalità tra i coseni direttori.

$$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{xz} & n_x \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} & n_y \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) & n_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrice coefficienti [A] incognite

Troverò un'eqz di III grado in σ_n , che in forma canonica è l'eqz di Lagrange:

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 invarianti della matrice di tensione nel punto P, in un altro punto sono ≠

↓ inv. cubico = $\det([L_{ij}])$ determ. det

↓ inv. quadratico = opposto della somma dei 3 minori.

inv. lineare = $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ traccia del tensore somma degli elementi sulla diagonale

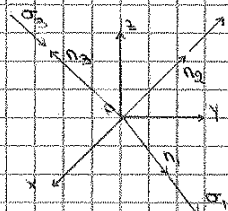
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Non cambiano al variare del S.R., da x, y, z a n, m, t . Nel punto P la somma delle 3 normali è costante indip. dalla rotazione del S.R. → altrimenti varrebbe anche la dz del problema fisico → assurdo

$\det[A]$ → eqz di III grado → la simmetria di $[L_{ij}]$ ci assicura che le 3 soluzioni sono in campo reale → 3 sl2 (autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) → sono le tensioni principali → li prendo una per volta, li sostituisco a σ_n → la matrice dei coeff è definita → risolvo il sistema → trovo

n_x, n_y, n_z → 3 sl2 (autovettori $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$) in autovettore

Non è detto che coincidano con le direzioni principali della def. Coincidono se il materiale è elastico lineare.



Sistema di partenza: x, y, z
Sistema principale (rotato): n_1, n_2, n_3
In corrispondenza di cui ci sono le tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sono assenti le tensioni tangenziali.

$\sigma_1 \rightarrow n_1$	direzioni principali di tensione
$\sigma_2 \rightarrow n_2$	
$\sigma_3 \rightarrow n_3$	

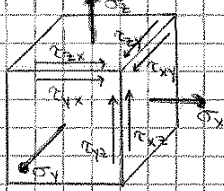
tensioni principali

monassiale di def, si contrae trasv. la fine, si dilata la colonna)

Per la tensione si può avere uno stato monoassiale

Tensore idrostatico e tensione deviatorica

Considero una matrice di tensione su 3 piani generici → condizione generale di sforzo in un punto P all'interno di un corpo:



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

In generale lo stato tensionale di un corpo è caratterizzato dalla presenza di 9 componenti di tensione di cui 6 sono indipendenti

Definiamo la **Tensione normale media** $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$

È il valor medio delle 3 tensioni principali, ma anche delle 3 tensioni normali su qualunque sistema di riferimento. Non vale solo per s.r. principale

È sempre possibile scomporre la sollecitazione in due parti distinte $[\sigma] = [\sigma'] + [\sigma'']$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

tensore idrostatico nel punto P → è un tensore diagonalizzato dove intrinsecamente principale come i tensori normali tutte uguali

nella diagonale ho $\bar{\sigma}$. Questa parte idrostatica della tensione è responsabile delle

variazioni di volume (indipendente dalla terra di riferimento) perché le sue componenti $\bar{\sigma}$ sono esse stesse degli invarianti

$$[\sigma''] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

tensore deviatorico, responsabile dei cambiamenti di

forma, delle distorsioni. Materiali come l'acciaio sono insensibili alla parte idrostatica della tensione. Una pallina d'acciaio può arrivare a grandi profondità con piccole riduzioni di volume, ma sarà molto sensibile a grandi carichi. I materiali di curv. occupano soffrono per le azioni di tipo deviatorico, non sferico.

La parte deviatorica dipende dal s.r. Si ottiene sottraendo ad $[\sigma]$, in corrispondenza della diagonale, il valore $\bar{\sigma}$. Sulle diagonali ho le deviazioni delle tensioni normali rispetto a $\bar{\sigma}$. Al di fuori il tensore deviatorico ospita le componenti tangenziali.

Cerchi di Mohr

La teoria dei cerchi di Mohr (1882) descrive graficamente lo stato tensionale del punto P nel piano (σ, τ) detto "piano delle tensioni". È una teoria grafica applicabile a qualunque tensore del II ordine. Non è introduttorio per l'analisi della tensione, ma vale anche per la deformazione.

Troviamo analiticamente la giustificazione: nel sistema principale n_1, n_2, n_3 autovettori del tensore

$$\rightarrow \{t_{n_i}\} = [L] \{f_{n_i}\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Forma quadratica del tensore $\{f_{n_i}\}$

$$\rightarrow \sigma_n^2 = \{f_{n_i}\}^T [\sigma] \{f_{n_i}\} = [L_{n_i} \ n_2 \ n_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Il modulo del quadrato del vettore tensore:

$$(1) \sigma_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

La componente normale di tensione:

$$(2) \sigma_n = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2$$

Condizione di normalità dei coseni direttori:

$$(3) n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Assegnato uno stato tensionale generico, tramite i cerchi di Mohr si possono calcolare le tensioni principali e le direzioni principali in un punto

le (1) e la (2) sono 2 eqz non omogenee in 3 incognite, i coseni direttori al quadrato. Ci serve una terza eqz.

Queste 3 eqz lineari nelle 3 incognite rappresentano un sistema lineare non omogeneo che può essere risolto col metodo di Cramer.

Lo stato tensionale nell'intorno di punto P dev'essere:

- interno al cerchio di raggio $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$ che è il raggio più grande perché $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
↳ semidifferenza tra la massima e la minima tensione principale
- esterno " " " " $\left(\frac{-\sigma_3 + \sigma_2}{2}\right)$
- " " " " " $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$

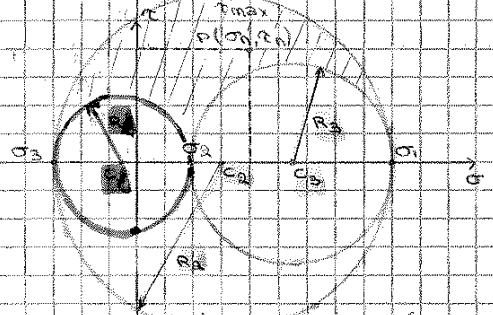
Circonferenza 1: $C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ $R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

" 2: $C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ $R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

" 3: $C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ $R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Sia C sia R si ottengono solo dalle tensioni principali. la somma di due tensioni principali alla volta divisa per 2 dà un cerchio, mentre la differenza di due tensioni principali sta volta divisa 2 dà il raggio dei cerchi di Mohr. Abbiamo quindi individuato 3 cerchi, detto cerchi di Mohr, rappresentativi dello stato tensionale nell'intorno del punto P.

Rappresentati graficamente nel piano delle tensioni (σ_n, τ_n) . L'intersezione è esterna ai cerchi 1 e 3 ed è Piano di Mohr stato di sforzo in P (σ_n, τ_n) interna al cerchio 2 (cerchio massimo).



Cerchio massimo e gli altri due interni e tangenti in σ_2
 ascissa \rightarrow componente normale σ_n
 ordinata \rightarrow " " " " tang. τ_n

I 3 cerchi hanno intersezione sull'asse delle ascisse in corrispondenza delle 3 tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tra cui vige la relazione d'ordine. In particolare σ_1 è la tensione più grande, σ_2 la più piccola. Quindi vedo graficamente che il cerchio 2 è il più grande il punto P di coordinate σ_n, τ_n è rappresentativo dello sforzo in quel punto.

un generico stato tensionale (σ_n, τ_n) nell'intorno di P deve giacere nello spazio tralleggiato.

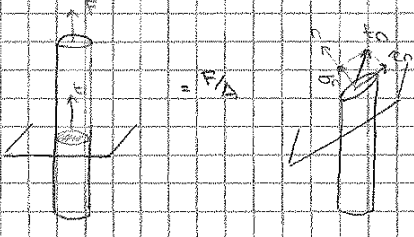
Sull'asse delle ascisse ho σ_1 e σ_3 con $\tau = 0 \rightarrow$ tensioni principali

Per trovare τ_{max} so che è pari alla metà di $\sigma_1 - \sigma_3 \rightarrow$ sono sul raggio del cerchio grande

Trattandosi di un demio giro, Vi sono pertanto ∞ coppie σ_n, τ_n così come sono ∞ le direzioni (fili) uscenti da P, e possibili. C'è una corrispondenza tra i possibili stati di sforzo e le possibili giaciture giaciture nell'intorno di P dell'intorno di centro P.

Casi particolari:

- Stati biassiali: se $\sigma_1 = 0 \rightarrow$ due cerchi tangenti all'origine. Abbiamo subito un'idea di compressioni e trazioni. Qui abbiamo solo compressione ($\sigma < 0$)
- Se $\sigma_2 = 0 \rightarrow$ due cerchi piccoli tangenti all'origine. È la situazione tensionale che abbiamo nelle travi (caso del solido di Saint-Venant) \rightarrow tensione media nulla \rightarrow abbiamo sempre una trazione e una compressione. Non possiamo mai avere per le travi due tensioni dello stesso segno $\neq 0$.
- Stati monoassiali: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow$ mi rimane solo un cerchio perché i due cerchi interni collassano in realtà uno coincide col cerchio grande? È il caso di un'asta tesa. Ma un cerchio c'è: se prendo un piano l'asse z



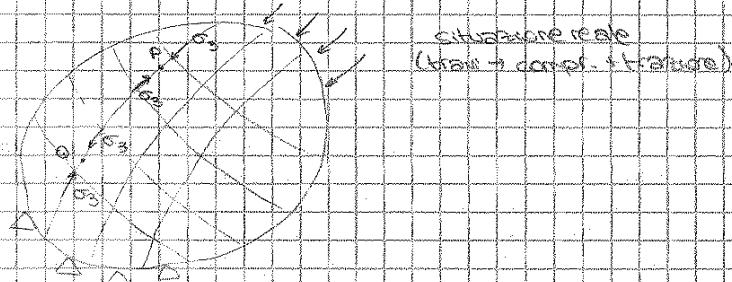
Un piano inclinato non è più principale \rightarrow ho le τ
 Nella fibre tesa la $\tau_{max} = \sigma/2$ e si ha per 45°



il piano di frattura per cui d'accordo è a 45°

Le linee isostatiche

Considero un corpo qualunque: lo stato tensionale in P è \neq da quello in Q in generale, non solo come entità, ma anche come direzioni principali che avranno gradienti \neq . Le eq. infinitesime dell'equilibrio del cubetto ci dicono che, in assenza di sorgenti di tensioni all'interno del corpo, il campo tensionale è un campo a divergenza nulla. Disegno idealmente una curva in cui la direz. princ. f_{ij} è tangente ad essa. La curva sarà liscia, continua, derivabile. Il loro involucro induce a definire 3 famiglie di linee mutuamente ortogonali: le linee isostatiche.



- linee isostatiche di compressione σ_3
- " " " trazione

Rappresentare il flusso di tensione all'interno del corpo.

Le particelle materiali disposte lungo una linea isostatica sono soggette, per definizione, a tensione normale di trazione o di compressione. Se si riuscisse a concentrare la materia

Teorema di Mitchell strutture di minimo peso sono reticoli di aste mutuamente ortogonali.
 tela del ragno \rightarrow la seta è posizionata su linee isostatiche di trazione minimizzare compr. / massimizzare trazione

Applicazioni delle linee isostatiche

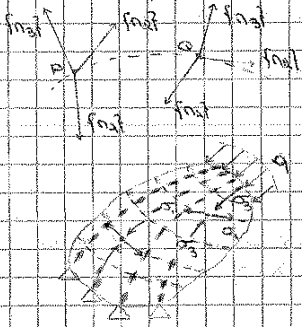
Una trave sollecitata in mezz'aria e con appoggi agli estremi: carico che all'interno segue delle linee isostatiche che vanno verso gli appoggi. In materiali fragili soffrono per le trazioni. Ci sono anche linee isostatiche di compressione. Le fessure delle travi sono ortogonali alle linee tensioni principali di trazione tangenti alle linee isostatiche gialle. La natura fa travi degli archi simili alle isostatiche celesti con dei tranti perpendere le trazioni. Gli sciogl. in alto sono materia in più. Il ds lavora bene a compressione, ma per tenere le trazioni si mettono barre d'armatura.

Stato tensionale piano

Una delle 3 tensioni principali è 0. Se $\sigma_3 = 0$ vuol dire che il vettore tensione non avrà in σ_3 componente lungo σ_3 , nell'intorno di P qualunque inclinazione dà un vettore tensione che non ha componente sull'asse σ_3 .

Linee isostatiche

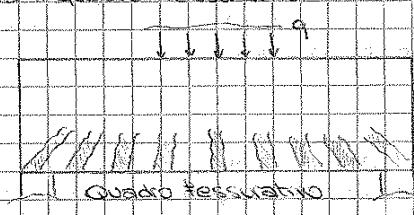
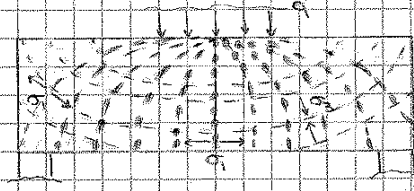
In ogni punto P all'interno del corpo possiamo definire tre direzioni (almeno) principali della tensione. Supponiamo di avere definito in un punto P f_{n1}, f_{n2}, f_{n3} e nel punto Q sufficientemente vicino abbiamo definito un'altra terna f_{n1}, f_{n2}, f_{n3} . Se prendiamo la tangente a f_{n1} per P e a f_{n1} per Q, supponendo che a f_{n1} sia associata una tensione principale di trazione, congiungendo le tangenti da P a Q descriviamo una linea cosiddetta isostatica, che segue punto per punto le tangenti a una tensione principale. Se si fa l'inviluppo di queste linee isostatiche, possiamo definire 3 famiglie di linee mutuamente ortogonali: le linee isostatiche.



- Vediamo un caso piano in cui sono ipotizzate due di queste 3 famiglie: in arancio le ISOSTATICHE DI TRAZIONE, in azzurro le ISOSTATICHE DI COMPRESSIONE. Abbiamo un corpo generico soggetto a un carico q . Le isostatiche di compressione sono come delle linee di forza che vanno dal carico verso gli appoggi. In corrispondenza di ciascun punto la tangente all'isostatica di compressione sarà parallela alla tensione σ_2 di compressione; viceversa le linee arancioni ortogonali a quelle azzurre, presentano in ogni punto come tangente la direzione principale di trazione, quindi σ_1 .
- Le particelle materiali disposte lungo una linea isostatica sono soggette per definizione a tensione normale, di trazione o di compressione. Se si riuscisse a concentrare la materia lungo un reticolo formato dalle linee isostatiche si realizzerebbe una condizione ottimale di sforzo, non avremmo

da nessuna parte tensioni tangenziali. Questo è un estremo teorico. È stato dimostrato da Michell un teorema che mostra come le strutture di minimo peso siano effettivamente dei reticoli di aste mutuamente ortogonali. Di questo concetto fa uso la natura: per esempio la tela del ragno è una struttura estremamente leggera e flessibile, ma anche incredibilmente resistente, in cui la materia è concentrata lungo reticoli di aste mutuamente ortogonali che seguono le linee isostatiche dello sforzo. Anche le ossa mostrano un'inconscia applicazione delle linee isostatiche: ad esempio la testa di un femore è caricata dall'alto verso il basso dal peso del tronco del corpo umano, le linee isostatiche di compressione partono dal carico e vanno verso l'altro appoggio che è il ginocchio. A queste linee pseudoverticali si contrappongono ortogonalmente le linee isostatiche di trazione. Il materiale resistente osseo sembra crescere e addensarsi all'interno dell'osso proprio rispettando la forma di queste isostatiche di compressione e di trazione teoriche. Anche in architettura vi sono molti esempi in cui ingegneri e architetti hanno cercato di modellare plasticamente il flusso degli sforzi secondo le isostatiche di trazione e di compressione: opere di Verri, Morandi e di Portoghesi (moschea di Roma in cui le strutture di copertura superiscono proprio il flusso degli sforzi da una colonna all'altra di compressione che avviene attraverso un reticolo di aste che rappresentano le linee isostatiche).

• Nei materiali fragili la fessurazione segue molto direttamente l'andamento delle isostatiche. Ad esempio una trave caricata più o meno nella parte centrale e poggiata alle sue estremità. Lo sforzo q sembra fluire dal punto di applicazione verso gli appoggi → si instaura un comportamento a arco all'interno della trave. Le isostatiche azzurre di compressione configurano degli archi che trasferiscono il carico dal punto di applicazione verso gli appoggi ortogonali a questi archi vi sono le linee isostatiche di trazione in arancio che lavorano idealmente come le catene di questi archi compressi. L'isostatica di trazione è quella che condiziona la rottura, perché in materiale fragile la fessura si fa nascere in direzione ortogonale alla σ_1 , tensione principale di trazione. Allora il quadro fessurativo dei materiali fragili segue in modo fedele le isostatiche di compressione perché la fessura si apre sempre ortogonalmente alla tensione principale di trazione → la fessurazione nei materiali fragili segue le linee isostatiche di compressione (la frattura è ovunque ortogonale alla tensione principale di trazione). Quindi il concetto di linea isostatica anche all'interno di un corpo continuo ci permette di capire il flusso degli sforzi all'interno. Per esempio nel caso del cemento armato il concetto di linea isostatica sarà fondamentale per la disposizione delle barre d'armatura che andiamo proprio a modellare le isostatiche di trazione, essendo il c/c un materiale che non reagisce bene a trazione, ma bene a compressione.



Quadro fessurativo

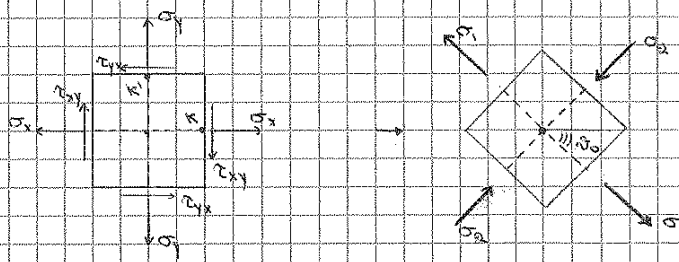
Questo è il cerchio di Mohr rappresentativo dello stato tensionale piano dell'elementino considerato. Dal polo P^* si tracciano due rette fino alle intersezioni M ed N del cerchio con l'asse σ_1 . Tali rette rappresentano le direzioni principali. In particolare la retta P^*N rappresenta la direzione 1, la retta P^*M la direzione 2. Questi due assi rappresentano l'inclinazione del sistema principale e in corrispondenza dei punti M e N ci permettono di leggere i valori delle tensioni principali. In particolare in N leggiamo σ_1 , tensione principale di trazione nell'esempio, in M leggiamo σ_2 , tensione principale di compressione.

Si mantiene la relazione d'ordine, cioè se:

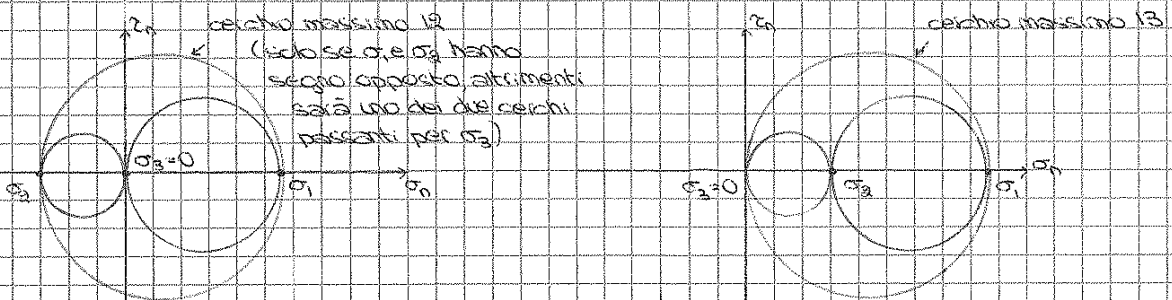
$$\sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow \sigma_1, \sigma_2$$

Passiamo ora all'angolo θ_0 che ci permette di passare dal riferimento xy di partenza, formato dalla x , al riferimento x^*y^* principale. Questo angolo lo leggiamo tra la retta P^*K orizzontale e la retta P^*N . In particolare, ci suggerisce la geometria, l'angolo al centro sarà $2\theta_0$.

Cosa ne deduciamo? Se si ruota l'elementino di partenza di un angolo θ_0 troviamo le direzioni principali e quindi l'elementino di partenza nel riferimento xy che era caratterizzato da σ_x, σ_y e τ_{xy} e τ_{yx} , nell'orientazione principale sarà soggetto soltanto alle tensioni principali che nel nostro esempio, sono una di trazione σ_1 e una di compressione σ_2 . In particolare queste due direzioni rappresentano le tangenti all'isostatica di trazione e all'isostatica di compressione passanti per un punto P .

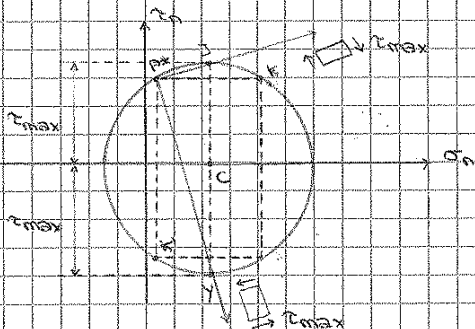


I momenti dei cerchi di Mohr si tracciano ricordando che $\sigma_3 = 0$, cioè che i cerchi hanno estremi σ_1 e σ_2 con $\sigma_3 = 0$. Il problema resta cioè tridimensionale. Questi due cerchi saranno interni al cerchio massimo perché σ_1 e σ_2 erano di segno opposto. Se invece σ_1 e σ_2 hanno lo stesso segno, per



esempio entrambe di trazione, il cerchio massimo non sarà più 12, ma sarà un cerchio tra σ_1 e σ_2 . A seconda dei casi, il problema resta sempre tridimensionale e il cerchio massimo è quello caratterizzato dalla massima differenza di tensioni principali. Più grande è il cerchio di Mohr più è potenzialmente pericolosa la situazione tensionale nell'intorno del punto perché cerchi di Mohr grandi puntano vicino al collasso i materiali d'ill.

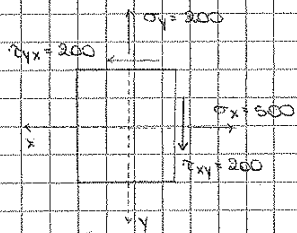
La rappresentazione grafica di Mohr ci permette anche di trovare le orientazioni dove si realizza la massima tensione tangenziale. Per far questo è sufficiente congiungere il polo P^* con le estremità verticali del cerchio, i punti J e L . In particolare la massima tensione tangenziale si verifica in corrispondenza dei piani individuati dalle rette P^*J e P^*L .



Esercizi sui cerchi di Mohr

• Esempio: stato piano

$\sigma_x = 900 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} = 300 \text{ MPa}$



- Si vogliono determinare:
- tensioni principali
 - direzioni principali della tensione

Calcolo analitico:

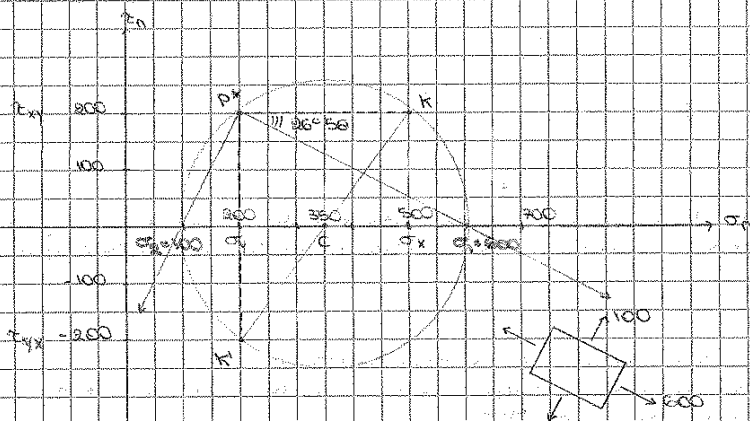
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{900 + 500}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(900 - 500)^2 + 4 \cdot 300^2}$$

$\sigma_1 = 800 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$ → tensioni principali dello stesso segno → il cerchio massimo non sarà nel piano σ_2 , ma σ_1

Si tratta entrambi i casi di tensioni di trazione

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = 26^\circ 56'$$

Graficamente:



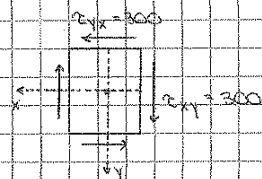
- Ripetto $K(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $K(\sigma_y, -\tau_{xy})$, cioè $K(\sigma_y, \tau_{xy})$
- Li congiungo e trovo C sull'intersezione con σ_n
- Trovo P^* e disegno il cerchio
- Da P^* trovo σ_1 e σ_2 inclinate di $2\theta_0$

Rotando di $2\theta_0 = 53^\circ 12'$ l'elementino esso sarà soggetto solo a tensioni normali, in particolare soltanto a trazioni, pari a 100 MPa nella dir. 2 e a 800 MPa nella dir. 1.

• Esempio: stato di taglio puro

Sarà caratteristico delle sollecitazioni di taglio e di torsione delle travi. Si ha uno stato di taglio puro quando rispetto a una generica giacitura xy sia σ_x sia σ_y sono nulle. Vi è solo una tensione tangenziale che nell'esempio portiamo pari a 300 MPa relativa sulla faccia di normale x .

$\sigma_x = 0$
 $\sigma_y = 0$
 $\tau_{xy} = 300 \text{ MPa}$



- Si vogliono determinare:
- tensioni principali
 - direzioni principali della tensione

Calcolo analitico:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 300^2}$$

$\sigma_1 = 300 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = -300 \text{ MPa}$ → le due tensioni principali non nulle sono una di trazione e una di compressione

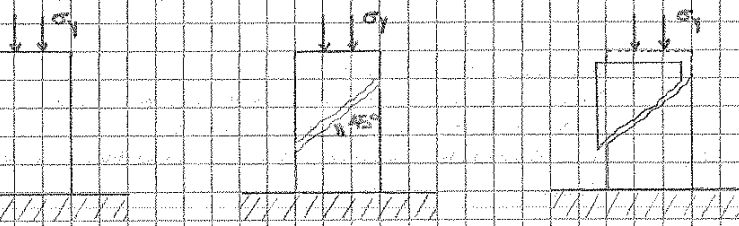
L'angolo di cui bisogna ruotare il sistema di partenza xy per trovare il sistema principale θ_0 è

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \text{ in questo rapporto il denominatore è } 0 \rightarrow \theta_0 = 45^\circ \text{ (degenera)}$$

È un risultato molto importante ingegneristicamente nello studio del solido di Saint-Venant e delle sollecitazioni di taglio e di torsione. Lo stato di taglio puro ci dà delle direzioni principali inclinate di 45° e fornisce delle tensioni principali in modulo uguali alla tensione tangenziale, ma di segno opposto tra loro.

Graficamente ciò è molto rappresentativo: il cerchio di Mohr ha centro nell'origine perché σ_x e σ_y sono 0, il polo P^* coincide col punto K e le direzioni principali sono inclinate di 45° . Essendo il cerchio centrato nell'origine $\sigma_1 = 300 \text{ MPa}$ come τ_{xy} e $\sigma_2 = -300 \text{ MPa}$, quindi sarà di compressione.

La tensione tangenziale massima è la responsabile della rottura, per esempio, in un provino sottoposto a compressione. Essa origina la superficie di scorrimento inclinata a 45°. È proprio rispetto a questa superficie che si ha la rottura a taglio dei provini compressi. (Lo stato tensoriale è monodirezionale di compressione, ma responsabile della rottura è la tensione tangenziale!)



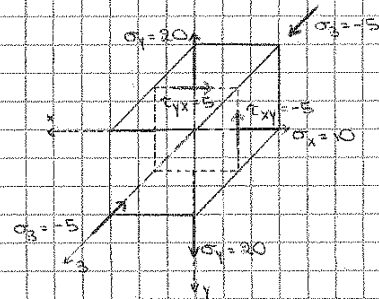
Rottura a taglio dei provini compressi

Un provino soggetto a sforzo normale che si rompe per raggiungimento della tensione tangenziale massima si romperà su piani prevalentemente inclinati a 45°

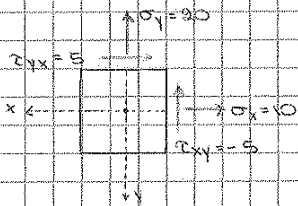
Esempio: stato triassiale

È semplice solo se σ_3 , se è $\neq 0$, perbomero è una tensione principale. Allora la situazione sarà semplice. Ci viene assegnato un volume nello spazio dove è già nota una direzione principale che è la 3, rispetto a cui abbiamo un valore non nullo di tensione principale \rightarrow stato triassiale. $\sigma_3 = -5$ MPa, quindi di compressione, ma è principale \rightarrow non abbiamo tensioni tangenziali sulla faccia di normale 3.

- $\sigma_3 = -5$ MPa (tensione principale)
- $\sigma_x = 10$ MPa
- $\sigma_y = 20$ MPa
- $\tau_{xy} = -5$ MPa



La soluzione grafica può agevolmente ottenersi soltanto se si conosce una tensione principale σ_3 è principale. Si lavora allora sul piano ortogonale al piano 3.



Si determinano inizialmente le due tensioni principali σ_1 e σ_2 sul piano xy, ortogonale alla σ_3 principale.

Calcolo analitico

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{10 + 20}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10 - 20)^2 + 4 \cdot 5^2}$$

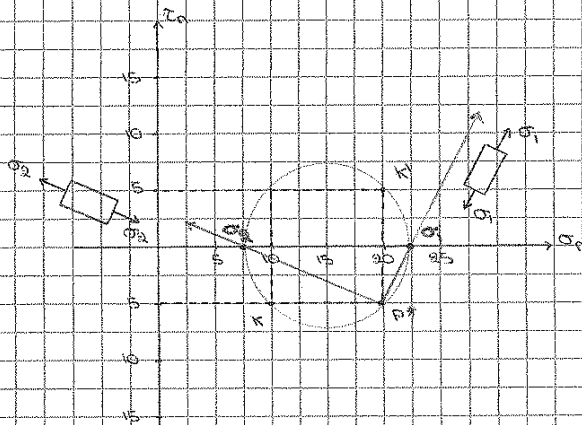
$$\sigma_1 = 22,07 \text{ MPa} \rightarrow \text{entrambe le tensioni principali sul piano 12 saranno di trazione}$$

$$\sigma_2 = 7,93 \text{ MPa}$$

L'angolo θ_0 di cui deve ruotare il sistema xy per diventare principale è

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = 22^\circ 50'$$

Costruzione grafica nel piano di Mohr:



- Asciando $K(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $K'(\sigma_y, -\tau_{xy})$
- Trovo il polo P^* della rappresentazione
- Traccio il cerchio
- Collego P^* con gli estremi in ascissa del cerchio
- Trovo la direzione 1 cui corrisponde σ_1 la massima tensione principale e la direzione 2 cui corrisponde σ_2 la minima tensione principale
- $\sigma_1 \sim 22$ MPa
- $\sigma_2 \sim 7$ MPa
- Inserendo il valore di σ_3 si possono disegnare gli altri due cerchi di Mohr. Si avvia $\sigma_3 \neq 0$ perché lo stato è triassiale

30 ottobre 2018

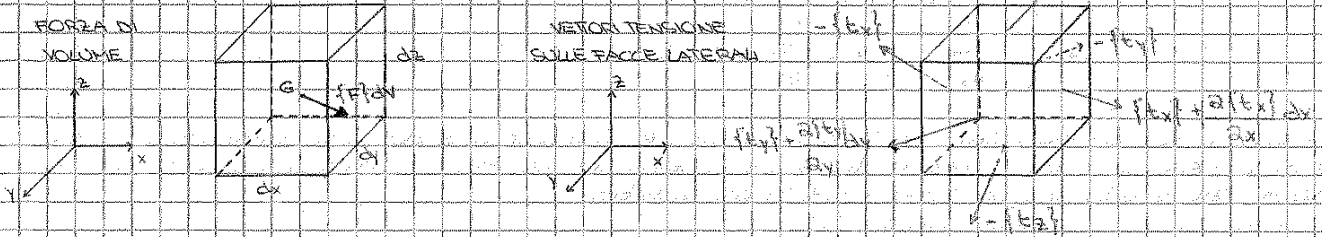
Mechanics del continuo: epilogo

- Equazioni indefinite di equilibrio → mentre finora ci si è limitati a esaminare ciò che accade in un certo punto del corpo, ora vediamo la relazione d'FF che lega gli sforzi che si sviluppano in punti del corpo assai prossimi fra loro
- Dualità statico-cinematica
- Principio dei lavori virtuali
- Legami costitutivi

Equazioni indefinite di equilibrio (o di equilibrio infinitesimo)

Sono equazioni differenziali che legano le tensioni tra due punti a una certa distanza infinitesima in un corpo deformabile. Così come le eq. cardinali della statica regolavano l'equilibrio di un corpo rigido macroscopico, le eq. indefinite di equilibrio regolano e controllano l'equilibrio statico di una porzione infinitesima di continuo deformabile all'interno di un corpo tridimensionale generico. Legano gli sforzi che si generano in punti posti a distanza infinitesima.

Prendiamo questa porzione infinitesima di continuo deformabile. Considero un parallelepipedo infinitesimo con lati paralleli agli assi coordinati. Su di esso agisce la forza di volume $\{F\}$ relativa all'elementino stesso (forza-peso, forza d'inerzia) applicata nel baricentro. Per avere una forza moltiplico $\{F\}$ per $dV \rightarrow$ newton.



Sul parallelepipedo agiscono poi i vettori tensione sulle facce laterali. Sulle facce giacenti sui piani coordinati agiscono i vettori tensione $\{f_x\}$ sulla faccia di normale x , $\{f_y\}$ sulla faccia di normale y , $\{f_z\}$ sulla faccia di normale z , tutti col segno - perché si tratta di una normale uscente con segno opposto alla normale positiva. Sulle altre 3 facce agiscono i vettori tensione $\{f_x\}$, $\{f_y\}$, $\{f_z\}$ incrementati di una certa variazione dovuta al fatto che ci siamo spostati di una certa quantità infinitesima dx, dy o dz .

Vediamo ad esempio le facce di normale x :

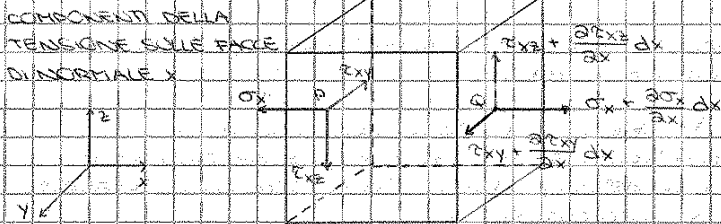
- sulla faccia di sinistra agirà $\{f_x\}$
- ci spostiamo sulla faccia di destra, cioè di dx
- su questa faccia agisce $\{f_x\} + \frac{\partial \{f_x\}}{\partial x} dx$ dove dx è l'incremento di spostamento.

Allo stesso modo tra la faccia di sotto e quella di sopra avremo una variazione del vettore $\{f_z\}$ che passa da $\{f_z\}$ a $\{f_z\} + \frac{\partial \{f_z\}}{\partial z} dz$.

Queste variazioni ci servono per avere l'equilibrio rispetto alla $\{F\}$ che agisce sul baricentro. Se scomponiamo questi 6 vettori tensione nelle loro tre componenti possiamo scrivere equazioni di equilibrio in direzione x, y, z . Si semplifica $\{f_x\}$ con $\{f_x\}$, $\{f_z\}$ con $\{f_z\}$, $\{f_y\}$ con $\{f_y\}$.

Rimangono soltanto gli incrementi nell'equilibrio alla traslazione.

Vediamo le componenti del vettore tensione sulle facce di normale x :



Le 3 componenti di $\{f_x\}$ sono $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ tutte negative, opposte alla convenzione assunta. Sulla faccia di destra avremo $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$.

Scriviamo l'equilibrio in direzione $x \rightarrow$ prendiamo solo le componenti dei 6 vettori tensione agenti lungo x . Quindi rimangono:



- la componente F_x della forza di volume
- gli incrementi in direzione x . Per $\{f_x\}$ la componente lungo x è σ_x che si semplifica con σ_x della faccia a destra \rightarrow rimane solo $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Per gli altri vettori tensione sono le componenti tangenziali che hanno come secondo pedo $x \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz$ e $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy$. Queste 3 componenti devono equilibrare $\{F\}$ in direzione x , altrimenti il cubetto si muoverebbe lungo x .

Nell'eq. di equilibrio lungo x ricordiamo che per avere delle forze:

- tensione \cdot area = forza
- forza di volume \cdot volume = forza

Dualità statico-cinematica

I concetti fondamentali di congruenza ed equilibrio possono esprimersi in forma matriciale, rivelando un'intima struttura dal profondo significato fisico. I campi di tensione e di deformazione sono funzioni dipendenti dal punto P e dalla quantità n considerata, infatti li abbiamo espressi come tensori $\rightarrow [e(P)] [c(P)] \forall P \in V$. Sono tensori a 9 componenti di cui però solo 6 sono indipendenti. Anche tensori a 9 componenti posso usare dei vettori a 6 componenti, cioè le 6 comp. indep. del tensore (dato che i tensori sono simmetrici)

$$\begin{matrix} \text{pareti quadre} & & \text{giatte} \\ \text{tensore } [E(P)] & \rightarrow & \text{vettore } \{e(P)\} \\ \text{tensore } [c(P)] & \rightarrow & \text{vettore } \{c(P)\} \\ 3 \times 3 & & 6 \times 1 \end{matrix}$$

• Vettore delle deformazioni

$$\{e\} = \begin{matrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{dilatazioni specifiche} \\ \text{scorimenti angolari} \end{matrix} \right\}$$

Equazioni cinematiche

$$\{e\} = [a] \cdot \{q\}$$

$\forall P \in V$

$$e_x = \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} \\ a_{41} & a_{51} & 0 \\ a_{61} & 0 & a_{71} \\ 0 & a_{81} & a_{91} \end{matrix}$$

Questa scrittura ha bene se conosci già il significato fisico

non numeri ma operatori

[a] matrice cinematica \rightarrow è una matrice operatoriale, al suo interno ha delle derivate parziali o degli zeri. Applicata alle componenti del vettore spostamento u, v, w dà le 6 componenti della deformazione.

Queste sono le eqz cinematiche che esprimono la congruenza: possibilità di ricavare {e} da {q}

• Vettore delle tensioni

$$\{c\} = \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{tensioni normali} \\ \text{tensioni tangenziali} \end{matrix} \right\}$$

Eqz statiche
Equazioni indefinite di equilibrio (viste pure) vettore delle forze di volume

$$[a]^T \cdot \{c\} + \{f\} = \{p\}$$

$\forall P \in V$

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{42} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & a_{61} & a_{71} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{81} & a_{82} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{91} & a_{92} & 0 \\ 0 & a_{61} & a_{71} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} + \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{matrix} = \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix}$$

Si scrivono anch'esse in forma operatoriale, utilizzando la stessa matrice [a] di prima, ma trasposta $\rightarrow [a]^T$ matrice statica

Tramite la notazione vettoriale {e} e {c}, in un calcolatore risparmio il 30%

La dualità statico-cinematica si esprime nel fatto che l'operatore statico è il trasposto di quello cinematico. È il principio che ci permette di fondere la descrizione cinematica in termini di deformazione con quella statica in termini di tensione. Come nella meccanica dei corpi rigidi la matrice statica è la trasposta di quella cinematica, così nella meccanica dei corpi deformabili tra i due operatori vige la stessa relazione. Questa proprietà sottintende il Principio dei Lavori Virtuali, che lega equilibrio e congruenza, tensioni e deformazioni.

• Equazioni di equivalenza al contorno (anch'esse possono scriversi in forma operatoriale)

$$[N]^T \cdot \{c\} = \{p\}$$

$$\begin{matrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix}$$

Non è più differenziato ma è una scomposizione della normale uscente

Si apre ora una digressione, per dimostrare la regola di integrazioni per parti su un dominio tridimensionale. Tale regola non è che una estensione del Teorema di Green, e verrà utilizzata nella dimostrazione del *Principio dei Lavori Virtuali per i Corpi Deformabili*.

Dimostrazione analitica

Si considerino due funzioni delle tre coordinate cartesiane, $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$, definite su un dominio tridimensionale V . Se ne derivi parzialmente il prodotto rispetto, ad esempio, alla coordinata x :

$$(8.16) \quad \frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x},$$

e si integrino entrambi i membri su una generica corda parallela all'asse X e appartenente ad una generica sezione A del dominio, $z = \text{costante}$ (fig. 8.4):

$$(8.17) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial x}(fg) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} g dx + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f \frac{\partial g}{\partial x} dx.$$

L'integrale della derivata del prodotto è uguale alla differenza dei valori che il prodotto presenta agli estremi dell'intervallo di integrazione:

$$(8.18) \quad [fg]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} g dx + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f \frac{\partial g}{\partial x} dx.$$

Integrando i membri dell'equazione (8.18) rispetto alla variabile y si ottiene:

$$= \int_A \frac{\partial f}{\partial x} g dx dy + \int_A f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy,$$

che rappresenta la circuitazione antioraria del prodotto eseguita sulla superficie bidimensionale A . Se con n_x si indica il coseno direttore della normale alla curva \mathcal{C} , e con ds l'incremento della coordinata s precedente equazione si ottiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} fg n_x ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} g dA + \int_A f \frac{\partial g}{\partial x} dA.$$

Integrando infine entrambi i membri rispetto alla terza coordinata z , si ha:

$$\int_S fg n_x dS = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} g dV + \int_V f \frac{\partial g}{\partial x} dV,$$

avendo S la frontiera dell'intero dominio tridimensionale V . L'equazione (8.21) rappresenta un'estensione del Teorema di Green, come risulta evidente ponendo $f(x, y, z) = 1$, oppure $g(x, y, z) = 1$.

→ Sulla base della equazione (8.21), e utilizzando la formulazione matriciale compatta, non è difficile ottenere l'equazione dei lavori virtuali. Si consideri il lavoro virtuale compiuto dalle forze di volume $\{\mathcal{F}_a\}$ per gli spostamenti $\{\eta_b\}$, essendo questi due campi appartenenti a due sistemi del tutto indipendenti, il primo staticamente ammissibile e il secondo cinematicamente ammissibile:

$$(8.22) \quad L_F = \int_V \{\mathcal{F}_a\}^T \{\eta_b\} dV.$$

Applicando le equazioni statiche (8.14.a) si ha:

$$(8.23) \quad L_F = - \int_V ([\partial]^T \{\sigma_a\})^T \{\eta_b\} dV.$$

Notando che, sotto il segno di trasposizione, non vi è un prodotto matriciale algebrico, bensì un operatore differenziale che trasforma una funzione vettoriale, e ricorrendo alla (8.21), si ottiene:

$$(8.24) \quad L_F = \int_V \{\sigma_a\}^T [\partial] \{\eta_b\} dV - \int_S \{\sigma_a\}^T [\mathcal{N}] \{\eta_b\} dS.$$

Quindi:

$$L^*_{\text{interno}} = \int_V \{\sigma_a\}^T \cdot \{E_b\} dv$$

Lavoro interno di deformazione (virtuale) = Prodotto scalare tra il vettore delle tensioni e il vettore delle deformazioni (indipendenti)

Per avere un prodotto scalare ho $\{E_b\}^T \rightarrow$ il risultato è uno scalare, l'energia è una quantità scalare, un numero puro misurabile in J o in kJ/m.

Un materiale deformabile accumula energia al suo interno, in questo caso in modo virtuale, tramite il lavoro delle tensioni per le deformazioni del corpo.

* Calcolo del lavoro virtuale esterno

$$L^*_{\text{esterno}} = \int_V \{F_a\}^T \cdot \{q_b\} dv + \int_{S_r} \{p_a\}^T \cdot \{q_b\} dS \quad \text{+ coppia rotazione}$$

Anche qui ho il trasposto delle forze per ottenere un numero, uno scalare \rightarrow un'energia.

ci siamo scordati però su L^* perché è

$$L^*_{\text{esterno}} = L^*_{\text{interno}} \rightarrow P.L.V.$$

$$\int_V \{F_a\}^T \cdot \{q_b\} dv + \int_{S_r} \{p_a\}^T \cdot \{q_b\} dS = \int_V \{F_a\}^T \cdot \{E_b\} dv$$

Dati due sistemi (a) e (b) indipendenti, $L^*_a = L^*_a$ e $L^*_b =$ prodotto delle tensioni di (a) per le deformazioni di (b). È il P.L.V. per corpi deformabili.

Il P.L.V. è l'identità fondamentale della Meccanica del Continuo. Il Principio è indipendente dal tipo di materiale (ossia dal legame costitutivo tra tensioni e deformazioni). Vale per acciaio, legno, gomme... Qui sta la sua potenza, oltre che nella virtualità, che ci permetterà di risolvere strutture iperstatiche e resistenze, spostamenti di travi, pilastri e telai.

La dimostrazione reciproca del Principio può condursi attraverso il teorema di Gauss-Green applicato ai domini tridimensionali sfruttando la fondamentale proprietà di dualità tra gli operatori statico e cinematico.

(Data un sistema congruente di spostamenti-deformazioni, la sussistenza del P.L.V. equivale a scrivere l'equilibrio del sistema.)

(Data un sistema equilibrato, la sussistenza del P.L.V. equivale a dichiarare la congruenza del sistema di spostamenti-deformazioni.)

LA TEORIA DELL'ELASTICITÀ - 1

- Introduzione
- Il potenziale elastico
- Il potenziale elastico complementare

Introduzione

Legame costitutivo elastico $[\sigma] = \sigma([\epsilon])$

Un corpo deformabile si dice elastico quando il campo tensionale $[\sigma]$ è funzione diretta e biunivoca del campo di deformazione $[\epsilon]$.

$[\sigma(\rho)] = \sigma([\epsilon(\rho)])$ legame locale

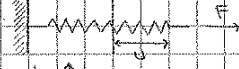
Quindi quando ϵ si annulla, si annulla anche σ e il valore di $[\sigma]$ dipende dal valore di $[\epsilon]$.
I materiali del nostro corpo sono elastici.

Evidenza sperimentale: R. Hooke (1678)

Proporzionalità tra forze ed elongazione della molla $F = K \cdot u$

dove K è la costante elastica della molla, $K \uparrow$ rigidità del materiale \uparrow

In questo caso ho un legame elastico LINEARE, ma anche $F = K u^2$ o $F = K \sqrt{u}$ sono legami elastici.
G. Bernoulli (1706): $\sigma = E \cdot \epsilon$ dove E è il modulo di Young



Iperelasticità

Un corpo deformabile si definisce iper-elastico quando la sua energia di deformazione, cioè il lavoro eseguito per portarlo in un dato stato deformativo $[\epsilon]$, non dipende dal processo di carico, ma soltanto dallo stato finale.

Quindi non c'è dissipazione, non interessa la storia prima. L'energia immagazzinata è quella corrispondente allo stato finale.

Energia di deformazione

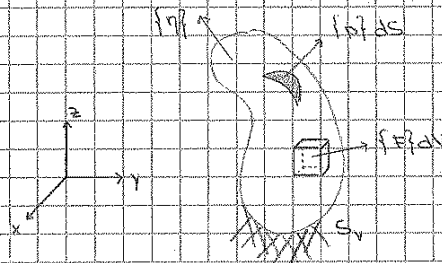
in rot. acq. e conservata =

non, ind. della storia prima. Funzione di stato

il lavoro infinitesimo di deformazione dev'essere un differenziale esatto (esisterà un en. potenziale)

Introduciamo la definizione di potenziale elastico, come lavoro di deformazione nei materiali iper-elastici.

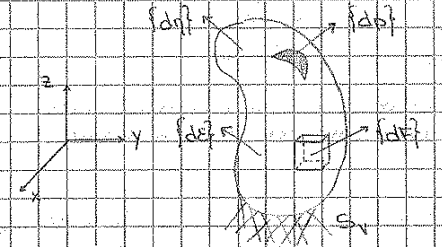
Considero un corpo 3D deformabile, EQUILIBRATO, in equilibrio sotto l'azione delle forze $\{f\}$ di superficie e $\{F\}$ di volume, in cui nascono degli spostamenti $\{u\}$ sulla superficie libera, mentre sulla superficie vincolata gli spostamenti sono nulli o, in generale, imposti.



Corpo 3D deformabile

→ Campo di spostamenti $\{u\}$
 $\{u\} = 0 \quad \forall \rho \in S_v$

Incremento le forze esterne $\{f\}$ e $\{F\}$ di una quantità infinitesima $\rightarrow \{df\}$ e $\{dF\}$ \rightarrow nascono un campo incrementale di spostamenti $\{du\}$ e un campo incrementale di deformazioni $\{d\epsilon\}$.



→ Campo incrementale di spostamenti $\{du\}$
e per conseguenza attraverso le eq. cinematiche
→ Campo incrementale di deformazioni $\{d\epsilon\}$

Applico il P.L.V. Scelgo il sistema staticamente ammissibile dato da $\{F\}$, $\{f\}$ cui corrispondono per l'equilibrio le tensioni $\{t\}$. Come sistema cinematicamente ammissibile invece prendo solo gli incrementi $\{du\}$ cui corrispondono gli incrementi di deformazione $\{d\epsilon\}$.

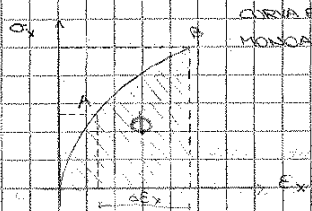
Quindi:

- (1) Sistema staticamente ammissibile \rightarrow forze-tensioni $\{F\}, \{f\} \rightarrow \{t\}$
- (2) " cinematicamente " \rightarrow spostamenti-deformazioni $\{du\} \rightarrow \{d\epsilon\}$

Facciamo lavorare $\{F\}$ e $\{f\}$, le forze originarie, per l'incremento di spostamento $\{du\}$ e le tensioni originarie $\{t\}$ per l'incremento di deformazione $\{d\epsilon\}$.

NB: il lavoro infinitesimo è reale \rightarrow non netto più \rightarrow Gli spostamenti e le deformazioni derivano da forze e tensioni reali.

I punti A e B corrispondono ai due istanti in cui abbiamo fotografato le condizioni dell'asta. Per andare da A a B, cioè per allungare di dE_x l'asta, abbiamo percorso il tratto AB sulla curva $\sigma_x - \epsilon_x$; andando a immagazzinare l'energia Φ che rappresenta l'area sottesa dalla curva, ottenuta come $\int \sigma_x d\epsilon_x$



energia elastica
monossiale il lavoro di deformazione è pari all'area sottesa dalla curva
 $\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$
 Φ energia per unità di volume

Il materiale iperelastico per definizione non dissipa energia nei processi di carico. Allora l'energia di deformazione per passare da A a B sarà semplicemente la differenza tra lo stato finale e lo stato iniziale, come avviene in ogni campo conservativo.

$\Delta \Phi_{A \rightarrow B} = \Phi_B - \Phi_A$ Non dipende dal percorso di carico, ma solo dallo stato iniziale e dallo stato finale. Ciò vale solo per materiali iperelastici. È un'energia conservativa, non interessa la storia di carico.

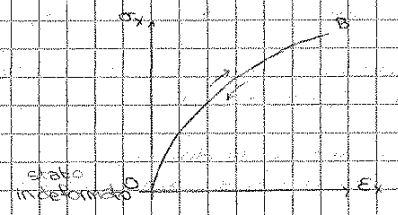
Nel piano $\sigma - \epsilon$ i percorsi di carico e scarico devono coincidere, questa è la def. di funzione monodroma. Ciò significa che il lavoro di deformazione in corrispondenza di un cammino chiuso è nullo. L'energia immagazzinata durante il carico è totalmente restituita nel processo di scarico.

$L = \oint \sigma d\epsilon = 0$ integrale di circuitazione \oint

$L_{\sigma \rightarrow \epsilon} = 0$

È la differenza $\Phi_B - \Phi_A = 0$

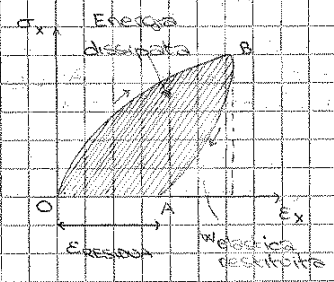
Questo è il principio usato nei collaudi.



Materiale anelastico

In tal caso ciò che abbiamo detto non vale.

Caso monodimensionale: se la curva di carico da O a B è quella indicata, in un materiale anelastico non si percorre la curva come in un materiale elastico, bensì scende da B a A quando viene il scarico. I percorsi di carico e scarico sono diversi \rightarrow all'annullarsi delle σ , cioè della forza, rimane una deformazione permanente \rightarrow non tutta l'energia è stata restituita meccanicamente, ma è stata restituita solo una parte dell'energia, che è al di sotto della curva di scarico.



Area interna = energia dissipata, tra curva di carico e di scarico.

Le funzioni di ϵ e σ non sono più monodrome in ϵ_x . prendo un valore di σ - possiamo avere 2 diverse ϵ che dipendono dalla storia di carico.

Nel materiale anelastico la storia delle deformazioni diventa importante, mentre è irrilevante per un materiale elastico.

La deformazione residua che si origina testimonia una dissipazione energetica all'interno del materiale. Ciascun materiale ha i propri meccanismi di dissipazione: fratture, microfessure, plasticità, sovrimento, piani cristallini, nell'acciaio.

Allo scarico l'energia di deformazione viene restituita solo parzialmente. $L_{\sigma \rightarrow \epsilon} \neq 0$

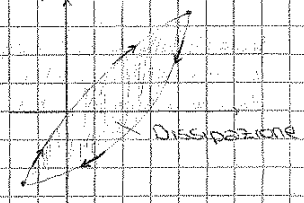
È dissipata in calore, nel rompere i legami.

Percorrendo cicli di carico e scarico, le traiettorie daranno origine ad una dissipazione per isteresi. Se infatti compiamo un ciclo completo abbiamo:

- $\sigma > 0$ di trazione \rightarrow cambia segno
- poi scarichiamo e arriviamo a $\sigma < 0$ di compressione
- poi scarichiamo

In ogni ciclo l'energia dissipata è pari all'area racchiusa dalla curva di carico e scarico.

Tale processo porta a rottura i materiali perché la dissipazione è additiva. È ciò che accade quando pieghiamo alternativamente nelle due direzioni un filo d'acciaio: il punto di piegamento si riscalda (il riscaldamento testimonia la dissipazione energetica) e dopo una serie di cicli di piegatura inversa che corrispondono a cicli di isteresi, il filo si spezza perché abbiamo dissipato energia fino a rompere i legami molecolari \rightarrow carichi alternati.



Isteresi \rightarrow dissipazione cumulativa

Fatica dell'acciaio \rightarrow dovuta al numero di cicli che possono essere sopportati in sicurezza.

invertire il legame elastico → non è più definibile $\Psi \rightarrow$ non è possibile ricavare una formula per il legame inverso ϵ in funzione di σ .

Quindi:

se $\exists \Psi \rightarrow$ è possibile invertire il legame costitutivo

se $\nexists \Psi \rightarrow$ non è possibile

I nostri materiali avranno sempre una curva monotona, ma a un certo punto cedono (o si affiorano)

Da un punto di vista matematico, l'invertibilità del legame costitutivo (e l'esistenza di Ψ) sono assicurate se $\Phi(\epsilon_{ij})$ è una funzione strettamente convessa e definita positiva:

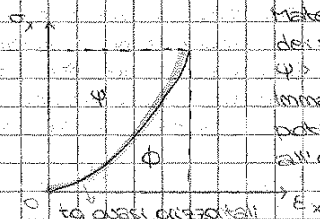
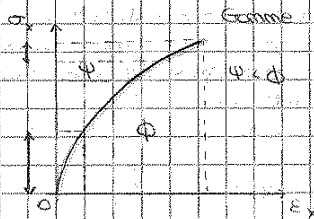
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} > 0$ convessità stretta del potenziale elastico → non ho il problema di non invertibilità del legame costitutivo
 ↳ derivata parziale rispetto alle ϵ_{ij} e ϵ_{kl}
 $\Phi(\epsilon_{ij}) > 0 \quad \forall \epsilon_{ij} \neq 0$ definita positiva → l'energia finita non può diminuire se aumento il carico

Elasticità non lineare (il legame σ, ϵ è una curva)
 Nel caso generale $\Phi \neq \Psi$

Usano diagrammi meridiani (cavallo fucile) ma vengono nello spazio

I materiali come le gomme mostrano in genere concavità verso il basso: $\Phi > \Psi$

I materiali biologici mostrano invece una concavità verso l'alto: $\Phi < \Psi \rightarrow$ "curva a J"



Materiali biologici (cortei, tessuti dei vasi sanguigni...)
 $\Psi > \Phi$
 immagazzinano meno energia potenziale nel corpo, rispetto all'energia complementare

Il comportamento dei materiali biologici deriva dalla particolare forma delle molecole biologiche, sottili e spesso di materiali fibrosi che prima di entrare in trazione devono allungarsi, quindi il comportamento è molto deformabile all'inizio della curva di carico e diventa progressivamente più irrigidite.

Il contrario avviene nelle gomme che sono più rigide all'inizio e più cedevoli verso la fine del processo di carico (come quando si gonfia un palloncino → max resistenza all'inizio)

Aneurisma (arteria) - la vera s, concavità come la gomma

Vantaggi della curva a J

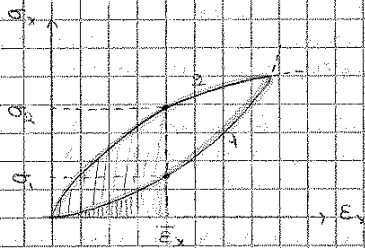
Grande tenacità a frattura delle strutture biologiche (per es. nella pelle vi è molta resistenza alla propagazione di un difetto, mentre nella gomma la frattura si propaga molto rapidamente).

Ciò è dovuto al fatto che un materiale con una curva a J immagazzina poca energia nella parte iniziale del carico → ha poca energia elastica a disposizione per far propagare le fessure (1).

Invece un materiale con una curva a concavità verso il basso, a parità di deformazione avrà accumulato un'energia $\Phi_0 > \Psi_0 \rightarrow$ avrà un potenziale di rottura più alto (2).

ridotto accumulo di energia elastica per grandi deformazioni

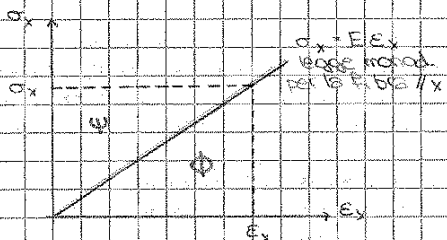
Per i materiali strutturati ci interessa una grande rigidità già all'inizio...



Ecco l'utilità di una curva a J, di un comportamento deformabile quantomeno nelle prime fasi del processo di deformazione.

Elasticità lineare via di mezzo tra gomme e materiali biologici

Si ha quando la curva di carico è una retta



La gran parte dei materiali strutturali (acciaio, c/c) mostrano un esteso ramo lineare: $\Phi = \Psi$ (area triangolare)

La legge costitutiva nel caso monodimensionale può scriversi come proporzionalità diretta $\sigma_x = E \epsilon_x$ dove E è il modulo di elasticità che fa le veci della k nella legge di Hooke (3)

longitudinale, o modulo di Young

"Utensio, sic vis" (estensio)

Tale è l'allungamento di un corpo, tale dev'essere la forza

Legge di Hooke: $\sigma = E \cdot \epsilon$

La relazione di proporzionalità diretta tra tensioni e deformazioni del caso monodimensionale deve estendersi al caso tridimensionale → relazione diretta tra vettore di tensione e vettore di deformazione tramite matrice di elasticità detta matrice Hekseriana

Potremo applicare la teoria dell'elasticità lineare ai materiali strutturali

Potenziale elastico lineare

Andando a vedere lo sviluppo in serie, posso esprimere il potenziale elastico Φ in forma matriciale compatta:

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 1 \\ \{ \epsilon \}^T & [H] & \{ \epsilon \} \end{matrix} \quad \text{il risultato è uno scalare} \rightarrow \text{lavoro, energia}$$

Si tratta di una forma quadratica nelle deformazioni. Al suo interno ha le costanti elastiche raccolte nella matrice hessiana $\frac{1}{2}$ è dovuto all'area del triangolo Φ

Analogia col potenziale dell'oscillatore armonico, che è una forma quadratica: $\Phi = \frac{1}{2} kx^2$

Cerchiamo di ottenere il legame costitutivo in forma tridimensionale \rightarrow legame tra vettore di tensione $\{ \sigma \}$ e vettore di deformazione $\{ \epsilon \}$. È sufficiente derivare rispetto a ϵ l'espressione del potenziale, poiché le tensioni sono le derivate del potenziale elastico rispetto a ϵ .
Tramite derivazione parziale si ottiene il legame costitutivo elastico lineare:

(analogia con l'oscillatore $F = kx$)

$$\frac{d\Phi}{d\epsilon} = \{ \sigma \} = [H] \{ \epsilon \}$$

\rightarrow lega il vettore delle 6 tensioni indip. al vettore delle 6 def. indip. \rightarrow legge di $\sigma = E \cdot \epsilon$ è valida per la singola

Si ricava l'espressione bilineare di Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \{ \epsilon \} = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \}$$

Quindi:

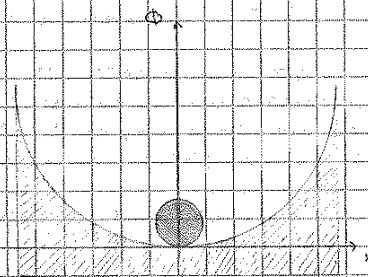
potenziale elastico Φ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Forma quadratica nelle deformazioni, oppure} \\ \text{Forma bilineare nelle tensioni e nelle deformazioni} \end{array} \right.$ legate da $\{ \sigma \} = [H] \{ \epsilon \}$, legame costitutivo elastico lineare

A seconda delle situazioni converrà usare l'una o l'altra

Analogia con la buca di potenziale dell'oscillatore armonico

$$\Phi = \frac{1}{2} kx^2$$

$$F = \frac{d\Phi}{dx} = kx$$



Ritroviamo in forma tridimensionale la legge della molla, di Hooke Φ forma quadr. nelle def. (per la molla nelle elongazioni) \rightarrow sempre positiva \rightarrow abbiamo sempre un minimo dell'energia potenziale. I soffitti di carico delle strutture cessano tale minimo

Invertibilità del legame costitutivo

Vediamo ora cosa succede al potenziale elastico complementare. Intanto vogliamo che il legame costitutivo sia invertibile, quindi vogliamo poter scrivere $\epsilon(\sigma)$.

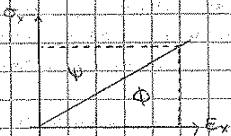
Allora la matrice Hessiana deve risultare definita positiva: $\det[H] > 0$. Tale proprietà ci assicura che lo stato indeformato sia un minimo assoluto di $\Phi \rightarrow \Phi$ sarà sempre positivo se poniamo $\Phi = 0$ nell'origine.

Quindi:

$\det[H] > 0 \rightarrow$ implica l'invertibilità del legame costitutivo (esistenza di Ψ): $\{ \epsilon \} = [H]^{-1} \{ \sigma \}$

Potenziale complementare lineare

Per i corpi elastici lineari:



$$\Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T [H]^{-1} \{ \sigma \} \quad \text{forma quadratica delle componenti di tensione}$$

lo possiamo vedere se $\det[H] > 0$

Un potenziale elastico convesso corrisponde in elasticità lineare a una matrice Hessiana definita positiva.

Se avessimo messo nello sviluppo di McLaurin ϵ^{III} e ϵ^{IV} non avremmo avuto una retta, ma anche oscillazioni, approssimazione giustificata dagli esperimenti

Principio e teoremi fondamentali

L'elasticità lineare gode di alcune comode proprietà

Tali proprietà discendono dalla linearità delle eq. Le componenti di $\{f\}$ comparso alla prima potenza - sono eq. diff. lineari.

(1) Principio di sovrapposizione degli effetti

Posso sommare gli effetti di un sistema di carichi con quelli di un altro sistema di carichi

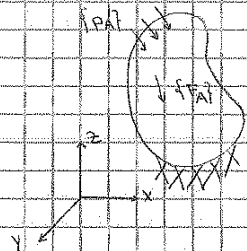
Se un corpo elastico lineare agisce un sistema di forze $A \rightarrow \{F_A\}, \{p_A\}$

Per effetto di queste forze nasceranno:

- un campo di spostamenti $\{q_A\}$
- " " deformazioni $\{E_A\}$
- " " tensioni $\{C_A\}$

Es. porta - caso orzario, 2 persone, auto, vento. Lo studio singolarmente e sommo gli effetti. Ciò è possibile solo se il materiale è elastico lineare.

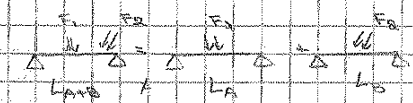
Es. girante - se applico il carico dopo un altro carico cambia E. importante la successione dei carichi.



Aggiungendo un sistema di forze $B \rightarrow \{F_B\}, \{p_B\}$

Per effetto di queste forze nasceranno nuovi:

- campi di spostamenti $\{q_B\}$
- " " deformazioni $\{E_B\}$
- " " tensioni $\{C_B\}$



È possibile dimostrare che l'azione simultanea dei sistemi A e B produce la somma degli effetti, grazie alla linearità delle eq.

Quindi se considero contemporaneamente presenti il sistema $\{F_A\}, \{p_A\}$ e il sistema $\{F_B\}, \{p_B\}$:

- il campo di spostamenti risultante sarà $\{q_A\} + \{q_B\}$
- " deformazioni " $\{E_A\} + \{E_B\}$
- " tensioni " $\{C_A\} + \{C_B\}$

Ragionando al contrario, preso un qualunque sistema di forze applicato su un corpo, potremo scriverlo in componenti elementari da studiare singolarmente e sommare alla fine gli effetti (ad es. per la trave elastica)

La sovrapposizione degli effetti vale per gli spostamenti, le tensioni e le deformazioni, ma non vale per il lavoro di deformazione, per le energie.

Ci sarà un contributo aggiuntivo che è il lavoro di trascinato

$$L_{(A+B)} \neq L(A) + L(B) \quad \text{le energie sono positive} \rightarrow L_{A+B} \text{ è più grande}$$

↓ energia derivante dall'applicazione simultanea di due sistemi A e B
 ↓ energia del sistema singolo (B)
 ↓ energia del sistema singolo (A)

(2) Unicità della soluzione elastica (teorema di Kirchhoff)

Grazie alla linearità siamo sicuri che esiste una sola soluzione al problema elastico di Lamé

Assegnati a un certo corpo tridimensionale

$\{F_A\}, \{p_A\}, \{q_{0A}\}$
forze spost. imposti, vincoli

se la soluzione $\{q_A\}$ esiste, essa è unica

$\{q_A\}, \{E_A\}, \{C_A\}$

Saranno allora unici il campo di tensione e il campo di deformazione

Dim. per assurdo: Si immagina che un sistema di sollecitazioni $\{F\}, \{p\}$ possa generare due diverse risposte

$\{q_A\}, \{E_A\}, \{C_A\}$
 $\{q_B\}, \{E_B\}, \{C_B\}$

Si applichi il P.V. al sistema differenza:

ΔR differenza delle reazioni vincolari

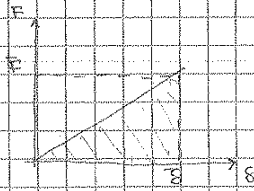
$$\int_V \{f\}^T \cdot \{q\} dv + \int_{S_v} \{p\}^T \cdot \{q\} ds + \int_{S_r} \{q\}^T \cdot \{p\} ds = \int_V \{q\}^T \cdot \{C\} dv$$

↓ lavoro delle forze di volume differenza per lo spostamento differenza
 ↓ lavoro del sistema diff. delle forze di sup. per lo spost. differenza
 ↓ differenza degli spost. imposti che sono unici
 ↓ diff. deformazioni
 ↓ diff. tensioni

lavoro delle forze di volume differenza per lo spostamento differenza

La forza del teorema di Clapeyron sta nel fatto che posso trascurare l'integrale, non interessa la storia del processo di carico, ma solo i valori finali di F e η .
 Se invece la forza agisce fin dall'inizio col suo valore finale F_0 , fornirò un'energia "extra", avrò una crescita orizzontale dello spostamento con F_0 costante.
 Quindi nel caso di processi impulsivi, dinamici (proiettile che urta la trave) non è più lecito l'ho di processo quasi statico \rightarrow surplus di energia rispetto a quello dato da Clapeyron, che può essere energia di frattura che frattura il materiale o energia cinetica trasmessa e poi dissipata dalla trave sotto forma di vibrazione.

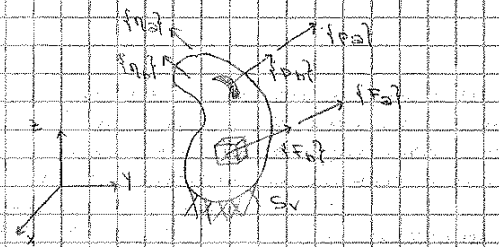
Cozzi, Mem. delle Strutture McGraw-Hill
 Belluzzi, Sc. delle costr. Zanichelli



processo quasi-statico $F\delta/2$? energia immagazzinata
 impulsivo $F\delta$

Noi considereremo sempre processi quasi statici \rightarrow sarà valido il teorema di Clapeyron

le $\{F_a\}$ sono trascinate in orizzontale e compiono il lavoro di trascinamento rettangolare L_{ab} che si somma a dei triangoli a formare il lavoro complessivo L_{a+b} . Ciò dimostra come il principio di sovrapposizione degli effetti non sia valido.



Si inverta ora l'ordine del processo di carico, applico prima il sistema $\{F_b\}$, $\{p_b\}$ che ha come soluzione il campo di spostamenti $\{u_b\}$ poi $\{F_a\}$ ($\{p_a\}$) con soluzione $\{u_a\}$ → prima il sistema (b) e poi (a), sempre nell'ho di processi quasi-statici.
 Si vuol dimostrare che $L_{ab} = L_{ba}$ applicando prima b e poi a. E' ora lo solo osservato che esiste il lavoro di trascinamento.

Allora $L_{a+b} = L_b + L_a + L_{ab}$

ove L_{ab} lavoro di trascinamento delle forze (N) applicate per prime per effetto degli spostamenti $\{u_a\}$ provocati dal secondo sistema di forze

$$L_{ba} = \int_V \{F_b\}^T \{u_a\} dV + \int_{S_i} \{p_b\}^T \{u_a\} dS$$

Altra invece $L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ba}$ che sembra diverso dal L_{a+b}

E' di nuovo un lavoro rettangolare, non vale il teorema di Betti. E' da L_{ab} in cui sono le forze (a) a lavorare per gli spostamenti (b). In generale non sappiamo se i lavori mutui sono uguali. Il teorema di Betti dimostra la loro uguaglianza. La dimostrazione è immediata, osservando che:

In presenza di un corpo iperelastico, il lavoro totale di deformazione non dipende dal processo di carico, cioè dall'ordine con cui vengono applicate le forze esterne, ma solo dallo stato finale.

$$L_{a+b} = L_{b+a}$$

TEOREMA DI BETTI: UGUAGLIANZA DEI LAVORI MUTUI
 Se dati due sistemi di forze (a) e (b) applicati su un corpo risulta $L_{ab} = 0$, i due sistemi di forze si dicono energeticamente ortogonali.

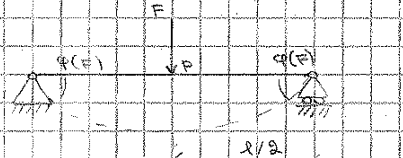
Ci sono importanti situazioni in cui il lavoro mutuo è 0. Sistemi energeticamente ortogonali.



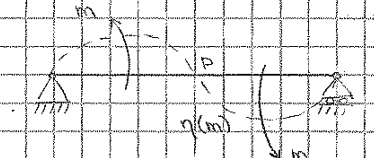
F_1 non compie lavoro per uno spost. orizzontale → $L_{12} = 0$. Il th di Betti associa anche $L_{21} = 0$.

Se dati due sistemi di forze (a) e (b) applicati su un corpo risulta $L_{ab} = 0$, i due sistemi di forze si dicono energeticamente ortogonali.

Esempi:



Trave caricata con una forza applicata in mezzetta (a) che L_{12} è a zero



e con due coppie di senso contrario alle estremità (b) che danno una def. antisimmetrica dove il dolo in mezzetta non si muove

Il teorema di Betti ci dice che il lavoro mutuo dei due sistemi dev'essere uguale:

$$F \cdot 0 = m \phi(F) - m \phi(F) = 0$$

lavoro delle coppie per le rotazioni di estremità

- $m \phi(F)$ coppia antior. → rotaz. oraria
 + $m \phi(F)$ coppia antior. → rotaz. antioraria

Perché $F \cdot 0 = 0$, deduco che le rotazioni di estremità del sistema (a) sono uguali in modulo e opposte in verso. Quindi se quello è un solido iperelastico e meteo, quelle coppie non risultano nulle. Danno invece vettore due coppie così.

Questo è il caso delle sollecitazioni applicate alle travi elastiche (solido di Saint-Venant) → potremo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti anche alle energie al lavoro di deformazione perché $L_{ab} = 0$ sono energeticamente ortogonali.

* I due sistemi non interagiscono dal p.d.v. energetico → vale la sovrapposizione degli effetti per le energie. Ciò è molto usato per il consolidamento delle strutture.

Isotropia: costanti elastiche

Come si semplifica il problema quando il corpo elastico, oltre ad essere lineare e iperelastico, è anche isotropo? Sotto l'ip di isotropia il comportamento elastico può essere descritto da 2 sole costanti indipendenti, e non 21 come nel caso generale di elasticità lineare

Isotropia significa "cresciuto nello stesso modo" → comportamento omogeneo in tutte le n^a direzioni

È diverso dal concetto di omogeneità. Un solido omogeneo è un solido che ha proprietà uguali in ogni punto del corpo.

Il cis è isotropo, ma quando mette le barre d'armatura diventa anisotropo. L'acciaio è isotropo

Isotropia significa invece:

corpo deformabile isotropo

le proprietà meccaniche sono identiche in tutte le direzioni uscenti dal punto P

stella di centro P → n^a direzioni uscenti, su cui ho le stesse proprietà elastiche. Il legno non è isotropo, resiste bene a trazione nella direzione delle fibre, ma non a compressione. È ortotropo → 9 cost elastiche

In assenza di direzioni preferenziali, il potenziale elastico complementare Ψ dipende dai valori dei tre invarianti della tensione (o dalle tre tensioni principali) e non dall'orientazione del sistema principale di riferimento: ciò semplifica molto gli sviluppi analitici.

Quel caso l'ip di isotropia

$$\Psi = \Psi(T_1, T_2, T_3) = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

ma anche ρ ciò che succede sulla terra sismologica accade su qualsiasi altra terra per via di isotropia

Essendo Ψ una forma quadratica delle componenti di tensione:

→ può essere funzione di I_2

$$\Psi = \Psi(T_1, T_2, T_3) = \Psi(T_1, T_2)$$

e può quindi esprimersi come:

Non è una dim, l'ho imposto io. È bene scriverlo come $\Psi = aI_1^2 + bI_2$, ma è comodo usare E, ν, G

$$\Psi = \frac{1}{2E} \{ T_1^2 + 2(1+\nu)T_2 \}$$

Ma introduce due costanti, E e ν

ν controlla il comportamento accoppiato di una fibra rispetto a quelle ortogonali. Le costanti elastiche da 21 diventano 2

Andiamo a definire e a dare un preciso significato fisico alle costanti. Esplicitando gli invarianti nel sistema principale.

$$\Psi = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

Se si è così che la tridimensionalità termica → ho 2 costanti, escluso il comportamento termico → la resistenza. Anche la pelle è bidirezionale

Nell'ipotesi di isotropia, i 21 coefficienti elastici collezionati nella matrice Hessiana, si riducono a 2 sole costanti indipendenti → E e ν . Se il materiale è omogeneo, tali costanti saranno le stesse in tutti i punti del corpo.

Possiamo esprimere gli invarianti anche in funzione delle generiche componenti di $\{\sigma\}$ su un sistema che non sia quello principale

$$\Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

G modulo di rigidità al taglio. Lo introduco perché è comodo

avendo posto $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ → G non è indipendente, ma è una funzione delle altre due

Conferma la molta, l'energia è $\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx F^2$ → analoga

→ il materiale è sempre caratterizzato da due costanti elastiche indipendenti.

Ricordiamo che le componenti di deformazione si ricavano dalle derivate parziali di Ψ :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

NB: Ciascuna dilatazione dipende, in generale, da tutte e tre le tensioni normali → ciò significa che è difficile avere uno stato monoassiale di deformazione. Se c'è solo σ_x , questa produce tutte e tre le ϵ . Invece non da stato monoassiale di des, anche Es: pure tesa → stato tensionale monoassiale (l'angolo l'asse della fibre → lo stato deformativo non sarà mai monoassiale perché avremo anche delle deformazioni trasversalmente alla fibre, per cui ogni ϵ dipende da tutte e 3 le tensioni normali.

Lo stato di des è sempre triassiale

→ a stati monoassiali di tensione non corrispondono stati monoassiali di deformazione

Passiamo alle γ :

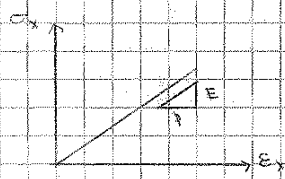
$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

NB: A differenza delle dilatazioni, ciascuno scostamento angolare dipende soltanto dalla omologa tensione tangenziale, tramite il coefficiente di proporzionalità detta γ/G .

La proporzionalità diretta tra τ e γ ci permetterà di dire che in isotropia le direzioni principali di tensione e di deformazione coincidono.

• **E** modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young

Rappresenta la rigidità del materiale (coefficiente angolare della retta che descrive il processo di carico) nei confronti delle dilatazioni normali assiali



$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ Qualunque fibra si oppone alla def. con rigidità E

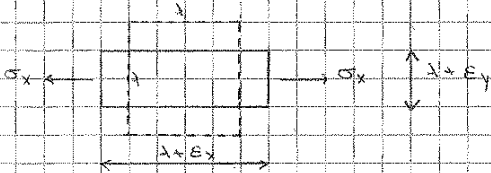
E la pendenza della retta, pendenza costante nell'ip. di elasticità lineare
 Più è rigida, ↑ E, più si oppone alle deformazioni a parità di forze applicate

E = 95-30000 MPa ds
 E = 95000 MPa acciaio → un ordine di grandezza più grande

• **ν** coefficiente di Poisson o coefficiente di contrazione trasversale

Trasversalmente ho:

$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$



Trazione lungo x → contrazione lungo y (segno -) proporzionale a ν

Se la tensione fosse di compressione → rigonfiamento trasversale

Le deformazioni trasversali sono sempre di segno opposto alla tensione monoassiale dominante

Per definizione:

$\nu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ è il rapporto tra le dilatazioni ortogonali e quella parallela alla direzione di sollecitazione ds 0,2, acciaio 0,25

$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$

$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$

Sperimentalmente ν = 0,2-0,3 per i materiali da costruzione
 Dipende dalla presenza di vuoti nel materiale (il dolo è un po' poroso se l'evaporazione dell'acqua libera)

Perché le dilatazioni trasversali sono sempre discordi a quelle longitudinali, ν dev'essere positivo
 Allora si ricava una limitazione più stringente per il valore di ν:

$0 \leq \nu < 1/2$ osservazione sperimentale

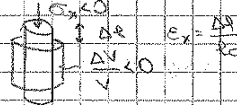
Questa osservazione, grazie all'invertibilità della matrice hessiana, implica che la dilatazione volumetrica si concorda con la tensione normale dominante (caso di σ_x monoassiale)

$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu)$ $\epsilon_x > 0 \rightarrow \frac{\Delta V}{V} > 0$ coincide con σ_x $\sigma_x > 0$ che allunga un asse → incremento di V
 $\sigma_x < 0$ che schiaccia una colonna → riduz. di V

↳ è il primo invariante di deformazione, traccia di $[\epsilon_p]$, che esprime la variazione di volume

Se osservo il segno della variazione di volume $\frac{\Delta V}{V}$, noto che il segno è concorde col segno di σ_x :

- corpo teso → aumento di volume
- " compresso → diminuzione di volume



$E > 0 \quad \nu < 1/2 \rightarrow \frac{\Delta V}{V} \text{ e } \sigma_x \text{ sono concordi}$

Caso: $\nu = 1/2 \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0$ deformazione isocora (corpi incompressibili)

$\nu \rightarrow 1/2 \quad \frac{\Delta V}{V} \rightarrow 0$
 È il caso delle gomme con $\nu = 1/2$

max. valore teorico, asintoto non raggiungibile perché $\nu < 1/2$

Più ν è grande, più la def. trasversale è grande → ciò può essere sfruttato (cavi d'acciaio per cerchiare le colonne)

• Significato fisico di G

Parallelepipedo elementare soggetto alla sola componente tangenziale τ_{xy}
 Fibr. inizialmente // a x, y subiscono lo scivollamento angolare che rappresenta la deformazione

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ dall'angolo retto
 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

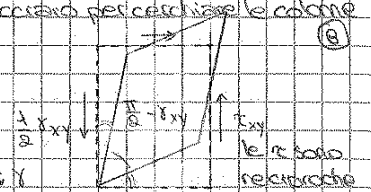
Più il materiale si oppone alla distorsione da parallelepipedo a rombo, ↑ G, ↓ γ
 G rappresenta la proporzionalità tra tensioni tangenziali e scivollamenti angolari
 la rigidità che il solido oppone agli scivollamenti angolari

G modulo di elasticità tangenziale legge di Hooke

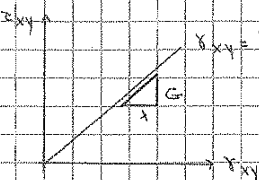
↳ opposto alla distorsione di due assi inizialmente ortogonali

Rappresenta la pendenza della retta τ_{xy} in funzione di γ_{xy} importanti i segni

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ se E è grande, G è grande



Si mettono le barre d'armatura dove il c/c si allunga → sono importanti i segni di τ



Una volta calcolato il campo tensionale elastico di un ~~elemento~~ elemento strutturale, in base alle forze applicate $\{F\}$ e $\{p\}$ e agli spostamenti imposti $\{f_0\}$, utilizzando le eqz statiche, cinematiche che lo costituiscono e risolvendo quindi l'eqz di Lamé, ci si trova di fronte al problema di valutare se le tensioni teoricamente determinate eccedano, anche in un sol punto del corpo o in una sua porzione, la resistenza del materiale di cui è costituito il corpo stesso.

In fatti, pur essendo la legge $\sigma(\epsilon)$ lineare ed elastica nel tratto iniziale, essa perde tale linearità nel tratto successivo dando luogo a fenomeni di snervamento, plasticizzazione e infine rottura. Il campo tensionale, d'altra parte, è proporzionale alle forze applicate quando si è in regime elastico lineare. Quindi se il calcolo fornisce valori eccessivamente elevati delle tensioni, è sufficiente considerare carichi esterni ridotti di un opportuno fattore, per ottenere un campo tensionale effettivamente elastico. Tale fattore sarà pari al rapporto tra le tensioni eccessivamente elevate e le tensioni realmente elastiche e ammissibili per il materiale. Queste ultime sono scelte dal progettista strutturale in base a criteri di resistenza e di sicurezza.

I materiali strutturali vengono catalogati, in base alle caratteristiche della curva $\sigma(\epsilon)$ in ^{duttili} ~~fragili~~.

Duttili \rightarrow ampi tratti non lineari nel diagramma $\sigma(\epsilon)$, prima di pervenire a rottura; $\sigma_t / \sigma_c \approx 3$

Fragili \rightarrow si rompono in modo improvviso, quando la risposta è ancora elastica e lineare; $\sigma_t / \sigma_c \approx 10^{-1} - 10^{-2}$

Le differenze di comportamento dipendono in gran parte dai meccanismi microscopici di danneggiamento e di frattura che sono molto diversi nei vari materiali di impiego strutturale.

Leghe metalliche \rightarrow scorrimenti tra i piani atomici e cristallini \rightarrow comportamento plastico con notevoli deformazioni permanenti.

Cis e rocce \rightarrow le microfessure e gli scollamenti tra i componenti granulari e la matrice possono estendersi e formare una fessura macroscopica che separa improvvisamente in due parti l'elemento strutturale \rightarrow comportamento fragile.

Incrementi di carico.

(c) Dopo la fase plastica il materiale non può più sopportare incrementi di carico. Tuttavia è possibile, con particolari macchine di laboratorio, seguire ancora un po' un'evoluzione deformativa del solido. Il solido può ancora deformarsi andando da U a R.

Aumenta la deformazione ϵ , diminuiscono le tensioni σ .

È una fase intrinsecamente instabile, perché basterebbe un piccolo incremento di carico $\Delta\sigma > 0$ e il materiale si romperebbe.

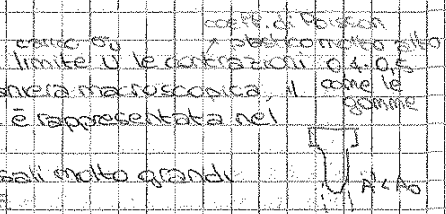
Questa fase può essere descritta solo con macchine a controllo di deformazione che consentano un incremento di deformazione e non di carico.

Arrivati in R si ha la rottura del provino.

Fisicamente il tratto UR è dovuto al fenomeno della strazione: oltre il limite U le contrazioni trasversali diventano così forti che la sezione A_0 inizia a diminuire in maniera macroscopica, il cilindro che forma il provino si contrae trasversalmente. La contrazione è rappresentata nel tratto instabile UR a pendenza negativa.

La strazione avviene in fase plastica avanzata per contrazioni trasversali molto grandi.

Ad incrementi positivi di deformazione $\Delta\epsilon$ corrispondono incrementi negativi della forza F .



Il tratto di interesse ingegneristico è il tratto (AU). Se scendiamo da un generico punto B che si trova nel tratto AU, percorriamo ancora un tratto di pendenza $E \rightarrow$ lo scarico è ancora $BC \parallel OL$ parallelo al tratto elastico, ma non ritorna nell'origine bensì in un punto C. La distanza OC sull'asse delle ascisse rappresenta una deformazione permanente che implica una dissipazione di energia pari all'area tratteggiata OBC che non è stata restituita dal materiale durante lo scarico. L'energia che il materiale ha potuto restituire è data dal triangolo BCD non conservativo. Quindi se ci sono cicli di carico isteretici cioè di segno opposto, in cui si va ciclicamente a dissipare una certa energia, ciò implica che il materiale sta subendo dei danneggiamenti interni a livello atomico, molecolare o dei grani (dipende dal tipo di materiale considerato) \rightarrow problema della fatica e della rottura isteretica dei materiali \rightarrow anche se non si arriva a U alcuni cicli di carico possono portare a rottura il materiale.

Esempio: sottopongo un fil di ferro a flessione alternata nelle due direzioni andando oltre il limite elastico \rightarrow gli assegni deformazioni permanenti, il materiale si riscalda \rightarrow dissipa energia \rightarrow a un certo punto si rompe.

energia dissipata per plasticità di cui mi accorgo intuendo il calore nella zona di A. Il provino rimane un po' allungato (colla di \rightarrow negativo) \rightarrow il provino deve lavorare in campo elastico.

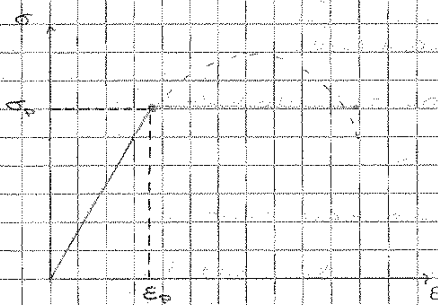
Da un punto di vista delle applicazioni ingegneristiche, la curva vista prima viene spesso approssimata con una curva bilabera, più semplice \rightarrow comportamento elastico plastico perfetto \rightarrow tratto plastico rettilineo.

Normale \rightarrow il materiale deve lavorare tra 0 e L.

Improvviso \rightarrow non sfruttato le capacità del materiale, il tratto AU.

Allora la normativa scosta un po' più in alto il limite elastico.

Oltre σ_p non posso applicare carichi, la curva si ferma.



Anche avere un tratto plastico curvilineo si definisce σ_p = tensione di snervamento (in molti materiali come l'acciaio viene poi calcolata in base a una ϵ_p , deformazione limite che per gli acciai è posizionata tra 2-10%) al di sopra della quale il comportamento viene ipotizzato piatto, ossia si ha la cosiddetta plasticità perfetta.

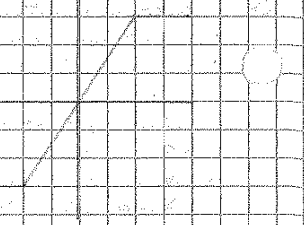
A vantaggio di sicurezza nel calcolo strutturale andiamo a trascurare questo incremento di tensioni che il materiale tecnicamente potrebbe ancora sostenere \rightarrow oltre σ_p possiamo avere ancora deformazione senza rottura, ma non incrementi di carico (in un materiale duttile).

Nel calcolo a rottura degli acciai si assume σ_p come tensione ultima del materiale.

Distinzione tra materiali duttili e materiali fragili.

MATERIALI DUTILI: sono caratterizzati da un'estesa fase plastica sia in trazione sia in compressione. Il diagramma mostra come sia in trazione sia in compressione il comportamento è di tipo elasto-plastico.

Inoltre $\sigma_t^* \approx \sigma_c^*$, tensioni ultime a trazione e a compressione dello stesso ordine di grandezza \rightarrow si assume σ_p a traz e comp. identica nella normativa \rightarrow nelle travi in acciaio inflesse non ho bisogno di rinforzi. Invece una trave in cui lavora male a trazione \rightarrow si arma dalla parte della trazione con barre in ferro.



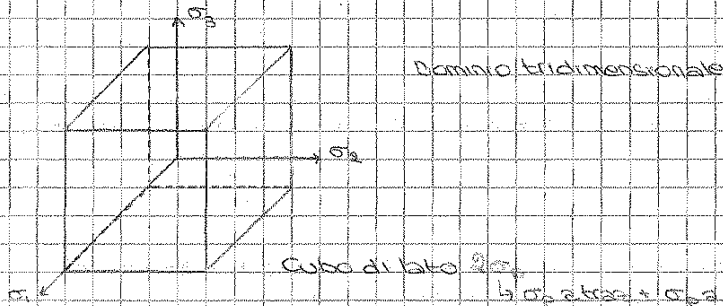
Il Criterio delle massime tensioni (Rankine) non si usa più ma è il più intuitivo

Questo criterio di resistenza ci dice che dobbiamo confrontare ciascuna delle tensioni principali con la tensione limite del materiale, in valore assoluto perché parliamo di trazione e compressione
 più grande delle 3 tens. princ. $\leq \sigma_{pl}$

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_{pl}$$

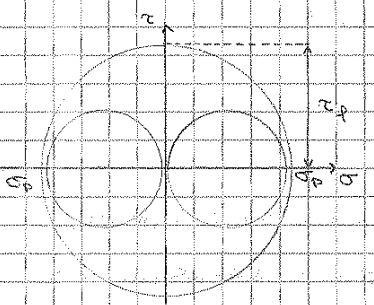
La normalizzata rimane sempre di dividere per σ_{pl}

Questo confronto delle tre tensioni principali, la più pericolosa delle quali è ovviamente la max, col valore σ_{pl} fornisce 6 disequazioni nello spazio delle tensioni principali. Allora in questo spazio il dominio di resistenza sarà un cubo \rightarrow tridimensionale. Ciascuna delle 6 facce è una delle 6 disequazioni.



Il cubo è la frontiera del dominio di resistenza:
 - punto all'interno del cubo \rightarrow la verifica è soddisfatta \rightarrow punto sicuro
 - " " esterno " " \rightarrow " " NON è "

Difetti del cubo: nella situazione limite coi cerchi tangenti al valore σ_{pl} in trazione e in compressione, la tensione tangenziale massima τ_{max} porta a rottura ben prima del valore σ_{pl} che ci darebbe il criterio delle massime tensioni. Infatti le prove sperimentali evidenziano rotture se $\tau > \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Allora quel cubo non è la frontiera giusta: da un lato è troppo restrittivo nei confronti delle tensioni idrostatiche, dall'altro è troppo comparente perché la rottura avviene prima in corrispondenza delle tensioni tangenziali.



I materiali datti hanno dei problemi sugli stati distortivi $\rightarrow \tau$
 \rightarrow il criterio non funziona. Sperimentalmente è proprio τ che controlla la rottura.
 Materiale d'isole: $\sigma_p^t = \sigma_p^c$, $\tau = \frac{1}{2}$ diametro cerchio grande.
 Provato in cis.



si rompe così \rightarrow disordine τ

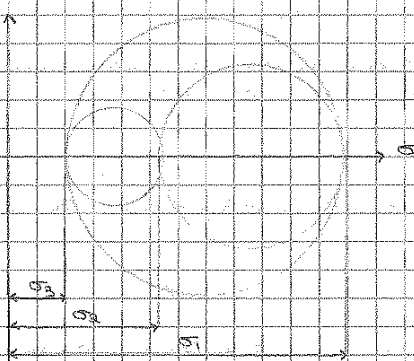
La rottura è dovuta alle τ , non alle σ

Prove assiali di trazione e compressione su campioni metallici \rightarrow lo stato idrostatico non influisce sul valore della tensione σ . Criterio di Tresca (1828) o DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE di snervamento.

L'osservazione che sullo snervamento hanno grande importanza le massime tensioni tangenziali e scarsa importanza lo stato idrostatico porta Tresca a dire che responsabile della crisi di un materiale è la massima tensione tangenziale. Essa è il raggio del cerchio massimo tra i 3 cerchi di Mohr, ossia:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|)$$

Cerchi di Mohr per uno stato generico di sollecitazione



In questo caso $\tau_{max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$

Se il provino cubico di c/c è sotto posto a uno stato triassiale di compressione \rightarrow resist. entra infinitamente $\infty \rightarrow$ i cerchi di Mohr degenerano in un punto \rightarrow stato idrostatico con $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Conta lo stato deviatorico.

sezione esagonale regolare otteniamo un esagono allungato.

In corrispondenza delle intersezioni sugli assi il valore è σ_p , ma tensioni dello stesso segno ci danno un dominio allungato \rightarrow sono benefiche per il materiale. Invece nei quadranti negativi tensioni di segno opposto ci danno un dominio più stretto, possiamo assorbire sollecitazioni più piccole perché sollecitazioni di segno opposto ci danno problemi. Sono uno la metà dell'altro.

tensione \rightarrow A che lo stesso \rightarrow sicuro
Per questo si fanno i confronti su
come compressi

Verifica biassiale:

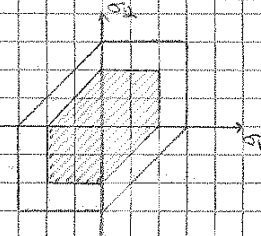
$P(\sigma_1, \sigma_2)$ all'interno dell'esagono \rightarrow verificato stato tensionale sicuro
 $Q(\sigma_1, \sigma_2)$ " esterno " \rightarrow non verificato " " che comporta la rottura del materiale

Caso del solido di Saint-Venant

Stato tensionale piano $\begin{cases} N, M_x, M_y \rightarrow \sigma_2 \\ T_x, T_y, M_z \rightarrow \tau_{21} = \sqrt{\tau_{21x}^2 + \tau_{21y}^2} \end{cases}$

In tal caso l'eqz di Tresca è $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{4} + \tau_{21}^2}$

Da un punto di vista grafico dividere σ_p per $\sqrt{2}$ significa contrarre il dominio di resistenza \rightarrow assumere un dominio più piccolo, che sarà ancora un esagono, a vantaggio di sicurezza, tanto più ridotto quanto più grande è τ .



3. Caratterizzazione (non) - Von Mises (1882) (1882) (1882) A Valenza elastica, incompressibile

Acquiesce più o meno alla stessa conclusione di Tresca. L'ip del criterio è

Responsabile della crisi, in questo caso è la componente deviatorica del tensore di tensione

Ricordiamo che $\sigma = \sigma' + \sigma''$

Il criterio è un rapporto tra l'energia deviatorica e quella associata alla prova monoassiale.

σ' componente idrostatica

$$\begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

σ'' componente deviatorica

$$\begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_m) & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & (\sigma_2 - \sigma_m) & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & (\sigma_3 - \sigma_m) \end{pmatrix}$$

"La crisi in un materiale è dovuta all'energia di deformazione associata al tensore deviatorico σ'' "

Non è più un criterio tensionale, ma energetico. MA risultati simili come Tresca
energetica idrostatica e elastica

L'energia, come la tensione, può scindersi in: $\phi = \phi' + \phi''$ ma il principio di sovrapposizione non vale per le energie! Tuttavia si può dimostrare che le energie idrostatica e deviatorica sono sistemi ortogonali \rightarrow posso scrivere la sovrapposizione degli effetti. Oppure non come fanno per le deform. causate dall'altro.

$$\phi = \phi' = \frac{1}{2E} \{ T_1^2 + 2T_2(1+\nu) \} \rightarrow \phi^d = \frac{1+\nu}{3E} (T_1^2 + 3T_2^2) \quad \text{ma } T_1^d = 0 \text{ per def} \rightarrow \phi^d = \frac{1+\nu}{3E} (T_2^d)$$

Questo valore è da confrontare col valore dell'energia deviatorica ricavata in una prova monoassiale di laboratorio.

minori del II ordine estratti dalla matrice
 $T_{II}^d = - \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)]$ scritto nel sistema principale

Ricordo $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, sostituire e trovo:
 $\rightarrow \phi^d = \frac{1+\nu}{3E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$ da confrontare col valore limite monoassiale

Valore limite della prova monoassiale: $\phi_{monoassiale}^d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2$ d'è solo un σ energia deviatorica elastica accumulata dal provino quando si rompe

Quindi il criterio di Von Mises è:

$$[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \leq \sigma_p^2$$

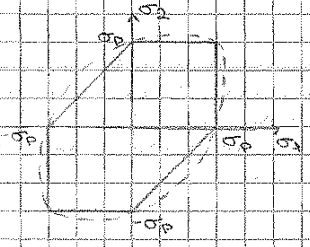
basano i valori di Von Mises

Comparo i quadrati e i prodotti misti delle tensioni principali, da confrontare con la tensione di snervamento del materiale elevata al quadrato.

Conclusioni

Confrontando il criterio di Tresca e il criterio di Von Mises, posso affermare che:

- condizioni di carico idrostatiche non provocano crisi nel materiale, infatti in entrambi i casi ho un cilindro indefinito sull'asse idrostatico
- il criterio di Tresca è tensionale, max tens. tang.; quello di Von Mises è energetico, max energia distortante. Se il grafico nel caso bidimensionale vediamo che l'asse di Tresca è inscritto all'interno dell'ellisse di Von Mises → il criterio di Von Mises è meno restrittivo di quello di Tresca che è più stringente, più conservativo per il materiale. Comunque i due criteri sono molto vicini da un punto di vista pratico.



Il dominio di Von Mises è un po' più grande → meno severo, più benevolo di Tresca che invece è più restrittivo. Ma sono molto simili per quanto riguarda il dominio. Valgono per materiali dotti (infatti $\sigma_p^+ = \sigma_p^-$)

4. Criterio di Coulomb (Fratt.) - Mohr (sciv.)

importanti per scavo, fondazioni, galere...

Criterio applicato per materiali fragili (cioè che scivola)

Due parametri caratteristici: attrito interno e coesione usati in geotecnica

A differenza del criterio di Tresca, afferma che la resistenza aumenta con lo stato di compressione.

La rottura avviene per raggiungimento di τ_c → ha simile a Tresca → trasposizione del c di T per materiali fragili.

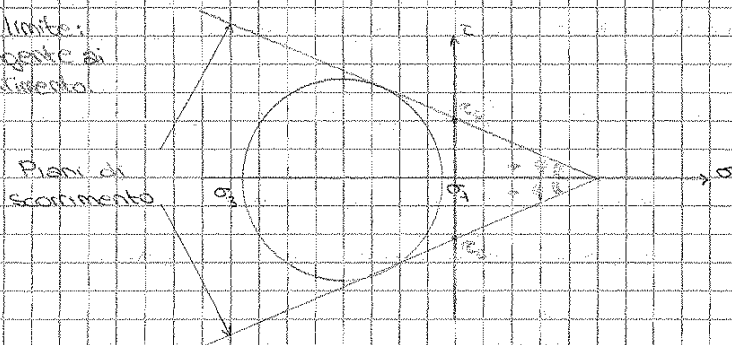
Visualizziamolo nel piano di Mohr. L'equazione è

$$\tau_c = c + \sigma \tan \phi$$

ma è la capacità del terreno di resistere a coesione → angolo di attrito interno → capacità del terreno di resistere a sforzi in presenza di una forza compressiva. Pensiamo a materiali incoerenti, che all'interno hanno attrito tra i grani come i terreni, infatti tale criterio è nato per i terreni, per esteso a materiali fragili.

Questa eq nel piano di Mohr è rappresentata da due rette convergenti sull'asse delle ascisse inclinate di ϕ . In corrispondenza delle ordinate. L'intersezione è c . Il criterio ci dice che si raggiunge il collasso quando il cerchio di Mohr relativo alla nostra sollecitazione tocca queste rette limite, che sono le rette limite di Tresca che per un materiale duttile erano orizzontali, l'asse σ_c e che ora sono ruotate e caratterizzano un comportamento che è più buono dal lato delle compressioni e meno buono dal lato delle trazioni. Il dominio è infatti ingombro e largo dal lato delle compressioni, stretto dal lato delle trazioni. Le due rette limite sono dette piani di scorrimento.

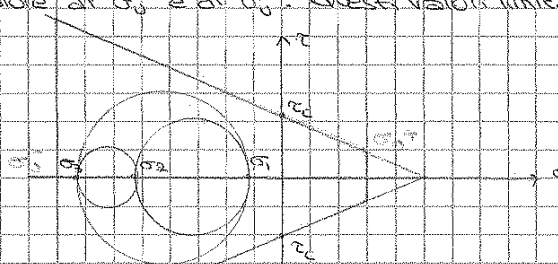
Condizione limite: cerchio tangente ai piani di scorrimento



Inclinazione rette → ϕ come la resistenza del materiale cresce all'aumentare dello stato di compressione.

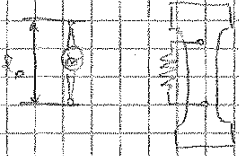
Se il materiale non ha coesione devo dare un po' di compressione. Se ha coesione, ha un po' di trazione. Se i cerchi di Mohr sono al di fuori il materiale collassa. Compressione → enormi cerchi. Trazione → piccolissimi cerchi.

Domino ammissibile per Mohr-Coulomb: è tale che i cerchi di Mohr siano sempre contenuti all'interno. Questo dominio sarebbe indefinito dal lato delle trazioni, ma è comunque limitato da 2 rette (cut-off), dal valore di σ_p^+ e di σ_p^- . Questi valori limitano il criterio e non possono essere superati.



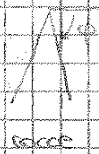
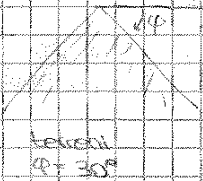
nella realtà anche i materiali fragili non resistono indefinitamente alle compressioni → limite. Anche per trazioni → limite ma per problemi di calcolo dai software perché ho uno spigolo, un punto singolare. Quindi ho 4 disequazioni.

⑨ Dovrei misurare ϵ esattamente dove ho σ . Si usano comparatori meccanici o elettronici che misurano le lunghezze con la legge di Ohm $\rightarrow I = \frac{V}{R}$



⑩ Al crescere della sollecitazione, vado da L_0 a L . In realtà vicino L non ho più $\sigma = \frac{F}{A_0}$ perché A_0 è un po' diminuita, ma la scrittura dice di usare A_0 tanto la contrazione è piccola. A_0 supera la linearità l'elasticità, ma continua a portare carico il materiale se cresce σ cresce ϵ . Il materiale prima di rompersi continua a prendere carico fino a L dove non può assorbire carico. Se la prova è a controllo di forza oltre L il provino si spezza, la condizione di massima sicurezza viene del provino. Se la prova è a controllo di deformazione posso proseguire, c'è ancora possibilità di deformare, non c'è più possibilità di prendere carico. È un fatto teorico. In un materiale oltre vado oltre l'elasticità, dissipazione energia.

⑪ Angolo col quale il materiale resiste a scricchiolii:



Osservo l'instabilità del cono -

$$\text{Vediamo che } \phi_0 = \frac{1+\nu}{2E} (T_1^2 + 3T_2^2) + \phi + \frac{1-\nu}{2E} (T_1^2 - 2T_2^2(1+\nu)) = \phi^0$$

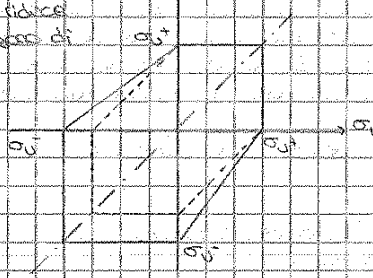
$$\phi^0 = \frac{1}{2E} (2T_1^2 + 6T_2^2 + 6\nu T_1^2 - 2T_1^2 - 6T_2^2 - 2\nu T_1^2 - 2\nu T_2^2) = \frac{T_2^2}{2E} (3 - 2\nu)$$

$$\phi = \frac{1}{2E} (9\sigma_m^2 - 2(1+\nu)(\sigma_m^2 \cdot 3)) = \frac{1}{2E} (6\nu\sigma_m^2 + 5\sigma_m^2) \quad \text{ma } \sigma_m = \frac{T_1}{2}$$

$$\rightarrow \phi^0 = \frac{1}{2E} \left(\frac{5}{8} T_1^2 + \frac{3}{8} T_2^2 \right) = \frac{1}{8E} (5T_1^2 + 3T_2^2) = \frac{T_1^2}{8E} (5 + 2\nu)$$

Stato tensionale piano ($\sigma_3 = 0$)

Peggio (attrito interno) σ_3
 nello stato di
 allungamento di
 Tresca

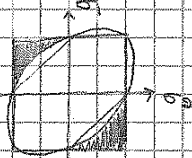


Il valore in trazione σ_y^+ per i materiali fragili è più piccolo del valore in compressione σ_y^- → ricavo nello spazio delle tensioni principali un esagono non più simmetrico, ma allungato dalla parte delle compressioni → area >

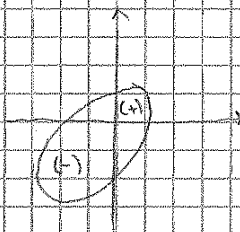
All'annullamento dell'attrito interno il dominio coincide con quello di Tresca, cioè un esagono simmetrico rispetto all'origine. Ma anche questo esagono si dice che è meglio avere tensioni dello stesso segno. Anzi meglio se si è compressione.

Nello spazio $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sarà una piramide esagonale, invece del prisma esagonale di Tresca.

Il criterio 1 sarebbe un quadrato → include una parte come buona, resistente del materiale, ma non è così. Inoltre, ecco il dominio in un cubo limitato da ogni lato → da un lato troppo benevolo, dall'altro troppo penalizzante perché non si accorge che stati idrostatici non rombono il materiale.



Per chi la memoria ci dia:



è il criterio di Von Mises per i materiali fragili

Il solido di Saint Venant

Ipotesi e sforzi consentiti

- Introduzione
- Ipotesi di Saint Venant
- Sforzo normale

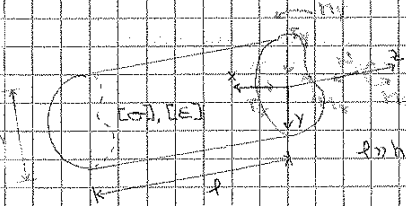
Uno dei principali scopi della Scienza delle Costruzioni è lo studio della risposta strutturale dei corpi soggetti alle sollecitazioni esterne

Dati:

- caratteristiche della sollecitazione

Ricerca:

- stato deformativo
- stato tensionale interno



Solido di Saint-Venant = solido cilindrico, generato dalla traslazione di una figura piana lungo l'asse z, snello ($l \gg h$)
 Esso può essere soggetto a $N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$. Nel piano si riducono a 3.
 Vogliamo trovare $\{\sigma\}, \{E\}$ sotto l'azione delle 6 caratteristiche delle sollecitazioni.
 Questa teoria non è valida per nodi, vincoli, punti di applicazione delle forze concentrate

Ipotesi di De Saint Venant

Equazioni governanti del problema elastico:

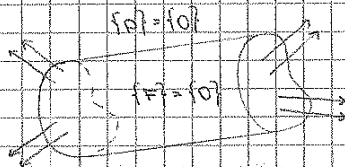
$\text{div}(\sigma) + f = 0$	eqz di equilibrio indefinito	} eqz statiche
$\text{div}(\epsilon) = g$	eqz di equivalenza al contorno	
$\epsilon = \text{sym}(\nabla u)$	eqz di congruenza	} eqz cinematiche
$\sigma = D \epsilon$	eqz di vincolo	
$\sigma = \sigma(\epsilon)$	eqz costitutive	

La stz del problema elastico è complicata, risolvere in forma chiusa questo sistema di eqz diff non è facile. Le hp che introduciamo semplificano il problema, per avere stz semplici e utili.

Geometrica: solido snello ($l \gg h$)
 asse z = asse dell'asse (luogo dei baricentri delle successive sezioni)
 xy assi centrali (baricentrici + principali d'inerzia) → $I_{xy} = 0$

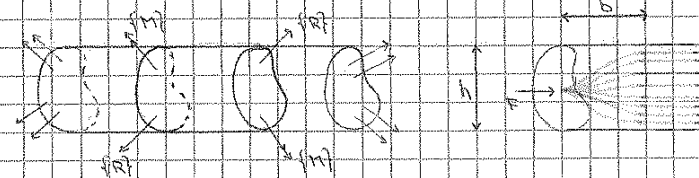
Materiale: elastico, lineare, omogeneo e isotropo → modulo elastico E, coefficiente di Poisson ν , modulo di rigidezza al taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ → queste 3 quantità sono sufficienti per descrivere la risposta meccanica del materiale

Forze: si assume forze di volume nulle ($f = 0$)
 " " " sulla superficie laterale nulle ($t = 0$)
 Quindi cilindro caricato solo alle estremità con un sistema di forze equilibrato per soddisfare le eqz cardinali della statica



Principio di Saint Venant (1856): a sufficiente distanza da ciascuna base lo stato deformativo e tensionale dipende soltanto dalla risultante (R) delle forze agenti sulla base medesima, nonché dal momento risultante (M) delle forze rispetto al baricentrico della base considerata

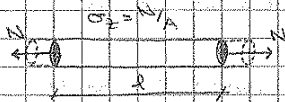
Significa che l'effettiva distribuzione delle forze agenti sulle basi può essere, a una certa distanza dalle basi, ricondotta alla sola risultante e al suo momento risultante → $\{\sigma\}, \{E\}$ dipendono solo da (R) e da (M)



A una certa distanza b l'effetto di singola riba di concentrazione di F sarà dimenticato

Distanza di concentrazione b	} sezioni compatte	$b \geq h$
		} sezioni sottili

Mentre la dilatazione assiale ha lo stesso segno dello sforzo normale ($N > 0 \rightarrow$ trazione \rightarrow il corpo si allunga; $N < 0$ compressione \rightarrow il corpo si accorcia) ed è inversamente proporzionale alla rigidità E del materiale, le dilatazioni trasversali hanno segno opposto a N e sono in generale più piccole della dilatazione assiale perché ν è compreso tra 0 e 0,5. Le τ sono tutte nulle perché sussiste la proporzionalità diretta tra τ e γ tramite G .



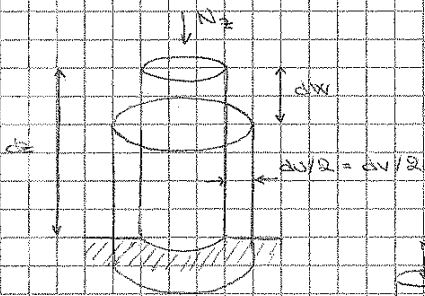
Esempio: fune tesa con $N > 0 \rightarrow$ si allunga di $\Delta l = \epsilon_2 l = \frac{N l}{EA}$
 $\epsilon_2 = \frac{N}{EA}$ (1) capacità dell'asta di opporsi alle def. assiali. $\uparrow EA \downarrow$ deformazione ϵ_2 a parità
 $\Delta l = \frac{N l}{EA}$ (2) capacità di un'asta lunga l di opporsi alle def. assiali. A parità N , materiale e sezione trasv. un'asta più lunga subisce allungamenti o accorciamenti più grandi.

ipotesi $N < 0 \rightarrow$ compressione \rightarrow anche $\sigma_2 < 0$ di compressione \rightarrow cosa succede da un punto di vista deformativo? Il solido si accorcia passando da l_0 a $l_0 - \Delta l$ e subisce anche una dilatazione trasversale



$\epsilon_2 = \frac{N}{EA}$ (1) capacità dell'asta di opporsi alle def. assiali. $\uparrow EA \downarrow$ deformazione ϵ_2 a parità
 $\Delta l = \frac{N l}{EA}$ (2) capacità di un'asta lunga l di opporsi alle def. assiali. A parità N , materiale e sezione trasv. un'asta più lunga subisce allungamenti o accorciamenti più grandi.

Le deformazioni trasversali possono essere sfruttate in certe situazioni. Considero un conico di pilastro alto da soggetto a sforzo normale centrato di compressione. A deformazione avvenuta avremo uno spostamento verso il basso Δv e una dilatazione trasversale Δu ed Δv .



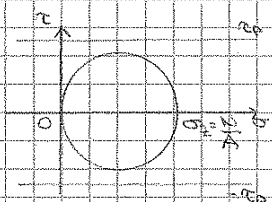
$$\Delta x = \epsilon_x \Delta z$$

$$\Delta u = \epsilon_x \Delta x = \Delta v = \epsilon_y \Delta y$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

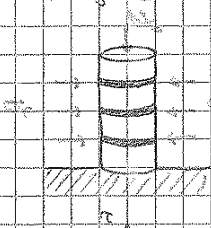
Questa colonna compressa è soggetta alla sola $\sigma_z \rightarrow$ stato tensionale monoassiale \rightarrow il cerchio di Mohr corrispondente sarà un unico cerchio tangente nell'origine e passante per σ_z . Gli altri due cerchi collacciano nell'origine.

La colonna compressa si rompe con piani di frattura inclinati a $45^\circ \rightarrow$ responsabile della rottura è $\tau_0 = \sigma_z/2$.



Secondo il criterio di Tresca più il diametro è grosso più sono in pericolo perché oltrepassa la fascia di sicurezza.

La colonna schiarciatò si allarga trasversalmente. Altra possiamo pensare di impedire le dilatazioni trasversali col ~~restringimento della colonna~~ tramite degli anelli d'acciaio così da aumentare la capacità portante.



Nel momento in cui impediamo le dilatazioni trasversali nascono delle tensioni radiali centripete che stringono la colonna. Queste σ_r di compressione trasformano lo stato tensionale della colonna da monoassiale a biassiale \rightarrow il cerchio di Mohr diventa più piccolo perché nasce una $\sigma_r \neq 0 \rightarrow$ raggio minore \rightarrow migliore situazione tensionale.

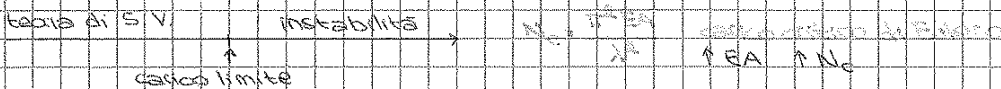


Cerchiare la colonna rende più rigida la risposta della colonna \rightarrow le deformazioni assiali saranno molto ridotte. Allora l'effetto delle contrazioni trasversali può essere positivo, se sfruttato in modo intelligente.

INSTABILITÀ

Non è detto che una struttura compressa risponda sempre alle sollecitazioni di sforzo normale con la sta di Saint Venant, cioè che la configurazione di un'asta rettilinea compressa con sforzo normale centrato rimanga rettilinea e $\sigma_2 = N/A$.

Nelle aste SVEUE vi può essere l'instabilità dell'equilibrio e quindi un cambiamento di forma ~~l'istituzionale~~ solo con l'ipotesi di Saint Venant \rightarrow superamento o perdita dell'equilibrio. Solo per piccoli carichi soddisfano Saint Venant, altrimenti si incurvano.



23 novembre 2012

IPOTESI DI SAINT VENANT

La teoria di S.V. evita di risolvere il problema elastico per trovare lo stato tensionale e deformativo. Vale per strutture snelle (strutture a telajo per uso civile) $\rightarrow h \ll L$

Ipotesi fondamentale: le situazioni locali di carico a una certa distanza si omogenizzano \rightarrow a una certa distanza b dalla base abbiamo una distribuzione di tensione omogenea

$b \ll h$ per sezioni compatte
 $b > h$ cave, sottili ($b \approx 3 \cdot 10 \text{ N}$)

Tutto ciò che diremo vale da b in poi, non dove ho carichi locali o nei nodi tra le aste

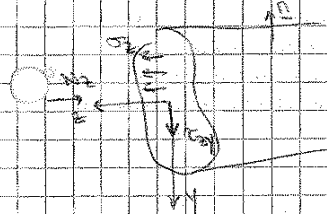
STAZIO NORMALE

Qual è lo stato tensionale in un'asta monodim. soggetta a sforzo normale?

- Trazione (fili, tralicci) +
- Compressione (pilastri, archi) -
- Colonne edifici soggette a sforzo normale eccentrico

- Centrato \rightarrow perché passa per il baricentro geom. della sez. trasv.
- Qual è σ_{11} , ϵ_{11} nei punti del solido dove vale l'omog. degli sforzi?
- La base è in equil. \rightarrow sistema equilibrato
- Condizioni di equivalenza al contorno sulle basi: piovono l'eqz. statica sul contorno e non su x, y, z

$$\int_{A_1} \sigma_{11} dA = \int_{A_2} \sigma_{11} dA = N$$



$$\int_{A_1} \tau_{12} dA = 0 \text{ perché non ho forze di taglio}$$

$$\int_{A_1} \sigma_{11} dA = N$$

$$\int_{A_1} \tau_{13} dA = 0$$

Metodo semirigido: ipotesi sulle torsioni $\rightarrow \sigma_{12} = 0$, le altre 5 componenti sono tutte nulle. Dall'eqz. di prima capiamo che l'integrale delle τ è 0, ma non $\tau = 0$ in \forall punto. Falta fare l'is. indifferico nelle eqz. statiche e vedo se sono soddisfatte

$N = \int_A \sigma_{11} dA = c \cdot A \rightarrow c = \frac{N}{A} = \sigma_{11}$ la tensione normale per effetto dello S.N.C. è costante nel solido di S.V. e pari a $N/A \rightarrow$ produce uno stato tensionale monodimensionale

le lungo z , asse longitudinale del solido.
 vedo se l'ho soddisfatta le eqz. indefinite di equilibrio
 $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0 \quad \forall \sigma \in V$

le prime 3 eqz. sono identicamente soddisfatte. l'unica dove non ho $0 + 0 + 0 = 0$ è la terza, che è soddisfatta: $0 + 0 + \frac{\partial c \cdot A}{\partial z} = 0$

Verifico le cond. al contorno sulla sup. lat. \rightarrow non ha componente lungo z : $\tau_{12} \cdot y + \tau_{13} \cdot x = 0$
 \rightarrow sono soddisfatte le eqz. al contorno sulla base, sulla sup. laterale che è scanza, le eqz. indefinite di equilibrio \rightarrow l'ho verificata l'equilibrio

Comenziamo di segno: trazione $N > 0 \rightarrow \sigma_{11} > 0$
 compressione $N < 0 \rightarrow \sigma_{11} < 0$

È universale (viceversa in geotecnica) dove ho spesso compressioni \rightarrow comodo segno (+)

Verificato che l'ho verificata l'equilibrio, verifico lo stato deformativo, se è possibile \rightarrow devo applicare l'eqz. costitutiva inversa $= \epsilon_{ij} = [H]^{-1} \cdot \sigma_{ij}$. Trovo lo stato def. associato allo S.N.C. Scopro che non c'è Nolo assiale perché esiste ν , il parametro delle def. trasversali.

Trao $\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{N}{EA}$ nella assettavo è la legge di Hooke. Sono formule importanti nel calcolo strutturale
 stesso segno di σ_{11}
 Se ho la trazione con c.n. positivo, la flessione allunga di $\Delta l = Nl$ se $N > 0$, si accorcia se $N < 0$



EA rigidezza estensionale della sezione tralicciata
 Dice quanto quella sezione si oppone alle deformazioni

EA rigidezza estensionale dell'asta (fune o colonna se siamo in compressione)
 acciat, ds $\nu = 0,1 - 0,15$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \nu \epsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \quad (\text{segno meno } \nu) \quad \rightarrow \text{la } \nu \text{ varia di volume}$$

Anche se lo S.N.C. dà uno stato def. monodim., lo stato def. è biaassiale

$\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ le τ dipendono direttamente dalle τ che sono nulle \rightarrow la base soggetta a S.N.C. non ha distorsioni $\rightarrow x, y, z$ sono principali

Ho uno stato piano di def. Tutte le direzioni radiali sono principali



FLESSIONE

→ Flessione retta = momento flettente agente attorno a uno degli assi centrali d'inerzia
 → Flessione deviata = " " il cui vettore non coincide con nessuno dei due assi centrali d'inerzia
 ↳ agiscono due flessioni rette contemporaneamente. Vale il principio di sovrapposizione - studio M_x , poi M_y e infine il sommo.

Flessione retta molto importante e diffusa (strutture curve soggette a carichi distribuiti) le strutture soffrono spesso per flessione

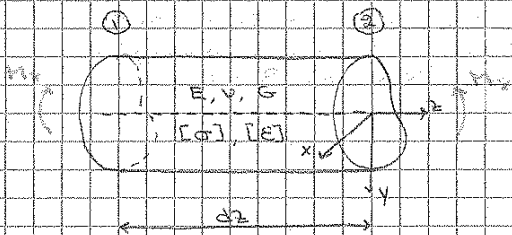
Considero una trave appoggiata, per semplicità, nel piano xy che è il piano dei carichi. z è l'asse della trave. xy, z terza triadica di riferimento. xy piano delle sollecitazioni



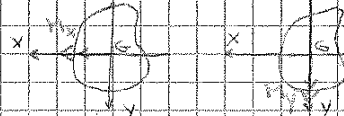
Cosa succede all'interno della trave per effetto di M_x ?

Diagramma del momento

Concavo di trave di dimensione d_2 , momenti flettenti M_x agenti sulle basi attorno a x in modo che ci sia equilibrio alla rotazione rispetto a qualsiasi polo



Problema: determinare all'interno del solido $[E]$, $[G]$ edotta l'azione di M_y . Per il principio fondamentale ciò che conta è che la risultante delle forze applicate sulle basi coincida con M_x , non importa la particolare distribuzione di forze

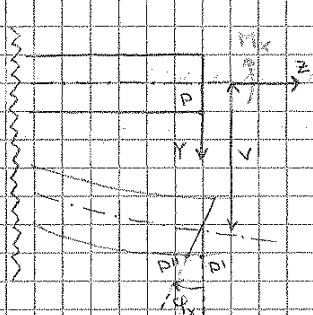


Si definisce Flessione retta l'applicazione di una componente di momento attorno ad un asse centrale $(x, y) \rightarrow M_x, M_y$

METODO SEMI-INVERSO: a differenza dello sforzo normale concentrato \rightarrow tipo di problema \rightarrow ipostaziamo una sia cinematicamente ammissibile (conguente) e verifico che soddisfa le equazioni del problema elastico

N_z hp statica $[G]$
 M_x hp cinematica $[E]$

Faccio l'integrale di Bresse (1831) - Eshel (1871) - conservazione delle sezioni piane



z asse della trave
 Trave \rightarrow inflessione \rightarrow abbassamento v lungo y , le sezioni trasversali ruotano di un angolo $\varphi_x \neq 0$ mantenendosi piane

Convenzione: φ_x antiorario
 Il baricentro subisce solo l'abbassamento, tutti gli altri punti anche uno spostamento w in direzione z per effetto della rotazione φ_x
 $P \rightarrow$ abbassamento $\rightarrow P' \rightarrow$ rotazione $\rightarrow P''$ traslato a sx
 Voglio scrivere lo spostamento di P

- Rotazione $\varphi_x = \frac{\partial v}{\partial z}$ (angolo)
- Spostamento assiale $w_p = \varphi_x \cdot y$ (distanza dall'asse neutro da G)

I punti più lontani dal baricentro sono quelli che soffrono di più per azione del momento flettente

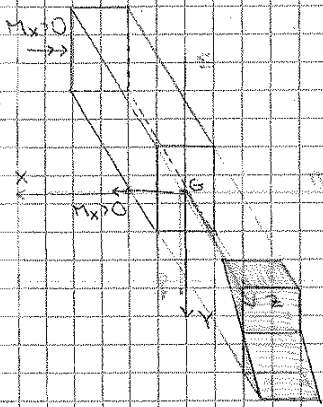
- Deformazione assiale $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \cdot y$
- Curvatura attorno x $\epsilon_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y$ *
- Tensione normale $\sigma_z = E \epsilon_z = E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) y$ le fibre che soffrono di più sono le più lontane da G e con la massima curvatura

* La sofferenza deformativa è proporzionale alla curvatura, non alla rotazione! Ed è proporzionale alla distanza da G.

Esempio: mensola \rightarrow massima rotazione sulla punta ma qui la mensola non soffre, il momento è 0. Soffre di più nell'incastro dove ho il momento massimo.



Diagramma bi-triangolare anche per le deformazioni ϵ_z
La sezione trasversale si mantiene piana.



Compressione → le fibre si accorciano

Trazione → le fibre si allungano

Nomenclatura

Asse neutro: asse sul quale giace il vettore momento

Asse x : asse di sollecitazione, è la traccia del piano dei carichi

Asse y : asse di flessione, traccia del piano di flessione su cui si deforma la trave per azione del momento flettente

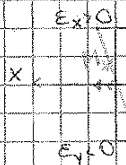
In generale

Nel caso di flessione retta $\vec{M} \parallel \vec{a}_x$

Riguardando il concio infinitesimo

- lembo sup → fibre compresse → si accorciano
- lembo inf → fibre tese e → si allungano
- le fibre dell'asse neutro si inflettono, ma non variano di lunghezza → G non subisce spostamenti lungo z

Lo stato deformativo di flessione è anisotropo per effetto di ν , come nella sbarra normale, nonostante lo stato tensionale sia monoassiale



$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$$
$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y$$

dilatazioni trasversali ϵ_x, ϵ_y più piccole rispetto a quelle assiali ϵ_z di segno opposto

↙ ortogonalmente alle trazioni → la sezione trasversale si accorcia → trapezio
↘ " " " compressioni " " " allunga " " "

Si chiamano deformazioni antistatiche (ϵ_x, ϵ_y). Sono opposte a quella longitudinale (ϵ_z)

Esso permettono di capire perché una lastra continua formata da un certo numero di travi solidali tra loro sia più rigida delle singole travi indipendenti

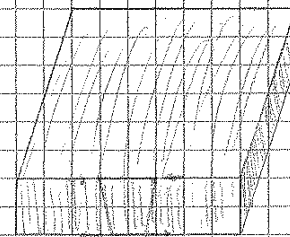
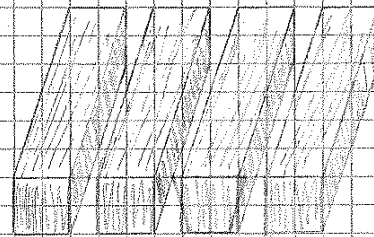
n-travi adiacenti

Ciascuna trave caucata può liberamente contrarsi e dilatarsi trasversalmente, perché non c'è un'opposizione trasversale

lastra piana (la posso pensare come formata da strisce tra loro adiacenti e solidali)

Le deformazioni antistatiche sono ostacolate dalle strisce adiacenti come per i cerchi appesi, ogni volta che impedisco delle deformazioni, nascono delle sollecitazioni che bloccano le deformazioni e aumentano globalmente la rigidità della struttura → la lastra piana è più rigida, a parità di materiale, dell'insieme di travi libere di potersi contrarre trasversalmente → aumenta la rigidità → diminuiscono le deformazioni

Si crea uno stato biassiale di tensione con tensioni dello stesso segno → benefiche



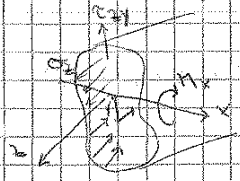
è alla distanza da G → è l'abbassamento della trave



menisco
max rotazione sulla punta, ma la menisco soffre di più nell'incastro dove ho il momento massimo

$\sigma_z = \epsilon \cdot E_z = E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \cdot y$ fibre che soffrono di più sono le più lontane da G e con la max curvatura

Hp sulla cons. delle sezioni piane → σ e ϵ sono formule che vengono fuori da quest'hp. Ora verifico l'equilibrio statico. Verifico in un tratto l'equilibrio alla rotazione sulla forza trasversale



$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$ affinché sussista l'eq. alla rotazione sulle facce trasv.
 Q non dà contributo perché non ha braccio, grazie a x
Solo σ_z dà momento

$M_x = \int_A E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \cdot y^2 \cdot dA$ la curvatura non dipende da dA → $M_x = E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \int_A y^2 \cdot dA = E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) I_x$
momento d'inerzia attorno all'asse x

Indico la curvatura come $\chi_x = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{E \cdot I_x}$ lega la curvatura al momento flettente

curvatura dirett. prop. al momento (es. menisco) → la trave soffre maggiormente dove ho il momento massimo

- $E \cdot I_x$ RIGIDEZZA FLESSIONALE della sezione
↳ la caratt. geometrica Per la flessione χ costante è il m
↳ caratt. del materiale

Interpretazione geometrica della curvatura: è l'inverso di un raggio. Rotazione infinitesima del concio → le sezioni ruotano rimanendo piane. Vale l'hp di piccole deformazioni → il raggio di curvatura R sarà grande. Faccio un'esemplificazione: la fibra baricentrica non si è allungata, si incurva ma non ci interessa, è un effetto del 1° ordine; la fibra sopra si allunga → compressa

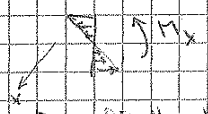
$\epsilon_z = -\chi_x \cdot y = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \cdot y$

Formula di Navier per M_x → $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$ → stato tensionale monoassiale come per lo s.n.c., ma la

formula è molto diversa. Compare l'inerzia, anche l'area perché sto studiando un comport. rotazionale, prima era traslato. I punti che soffrono di più sono quelli baricentrici da G, per l'hp fatta. Se $G = y=0$ → i punti si c. non soffrono → tutti i punti x non sono sollecitati → x ASSE NEUTRO della flessione

Analogamente → formula di Navier per M_y → $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$ non è inerzia solo stesso asse tensori normali per effetto delle flessioni rette

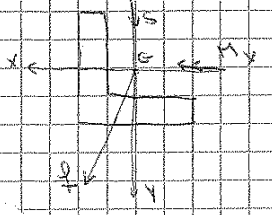
Non fidati dei segni, ma regola mano dx mettere i fermi al positivo → sotto



ricordo i valori dalle formule

Per effetto di M_x la trave è stata polarizzata in due parti. L'asse x è asse neutro. Se axes M_y → asse neutro → y . Ecco perché si usano travi π per mettere tanto materiale dove sono lontani dall'asse neutro dove muove molto magna

Sotto l'azione di M_x → x asse neutro → Π ortogonale a Π → asse di flessione Π , direzione lungo cui la trave si inflette. Si traccia del piano di carichi; non è sempre vero $E \cdot I$



gli assi x e y non sono centrali d'inerzia → Π è diretto così. Finora x e y erano centrali d'inerzia

Le fibre tese si allungano → si accorciano travi
" " compresse si accorciano → si dilata travi per v
Stato tens. monoassiale, ma stato de^o pluriaxiale
Le ϵ sono piccole (acciaio → $\epsilon_{max} \approx 7-8 \cdot 10^{-3}$) → de^o di fibra di 7mm al metro → la trave sembra indeformata. Accer. nero vedo le contrazioni laterali che sono 0,1-0,2 di quelle dominanti.

