



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 490

DATA : 27/02/2013

# A P P U N T I

STUDENTE : Insana

MATERIA : Meccanica Applicata

Prof. D'Alfio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Politecnico di Torino



a.a 2012-2013

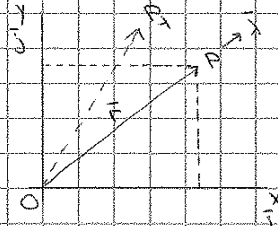
I facoltà di ingegneria  
corso di laurea in Ingegneria Civile

**Corso di Meccanica applicata**

**Prof. Nicolò D'Alfio**

a cura di Alessandra Insana

Considero un sistema  $xy$  o  $\vec{i}, \vec{j}$ , un punto  $P$  e il vettore che da  $O$  vede  $P$ .  
 $\vec{E} = \vec{O}$  che guarda  $P$



$$(\vec{P}-\vec{O}) = \vec{r} = [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}] = r(t) \cdot \hat{\lambda}(t)$$

→ anche  $r$  varia nel tempo

$$\vec{v}_P = \frac{d(\vec{P}-\vec{O})}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

↳ vettore che indica la direzione che varia nel tempo

$$(\vec{P}-\vec{O}) = \vec{r} = r \hat{\lambda}$$

$$\frac{d(r \hat{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\lambda} + r \frac{d\hat{\lambda}}{dt} \rightarrow \vec{v}_P = \underbrace{\frac{dr}{dt} \hat{\lambda}}_{\text{termine RADIALE}} + \underbrace{r \omega \hat{\mu}}_{\text{termine TANGENZIALE}} = v_r \hat{\lambda} + v_\mu \hat{\mu}$$

se  $P$  si avvicina o si allontana lungo  $\hat{\lambda}$

NB!

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = \omega \vec{k} \wedge \hat{\lambda} = \omega \cdot 1 \cdot \hat{\mu}$$

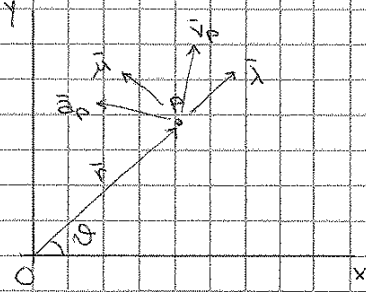
$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \omega \vec{k} \wedge \hat{\mu} = -\omega \hat{\lambda}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{r} \hat{\lambda} + \dot{r} \omega \hat{\mu} + \dot{r} \omega \hat{\mu} + r \ddot{\omega} \hat{\mu} + r \omega^2 \hat{\lambda} = \ddot{r} \hat{\lambda} + 2\dot{r}\omega \hat{\mu} + r \ddot{\omega} \hat{\mu} + r \omega^2 \hat{\lambda}$$

$$\vec{a}_P = (\ddot{r} - r \omega^2) \hat{\lambda} + (2\dot{r}\omega + r \ddot{\omega}) \hat{\mu} = a_r \hat{\lambda} + a_\mu \hat{\mu}$$

componente RADIALE

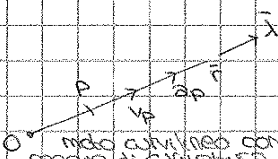
componente TANGENZIALE



$$\frac{d(r \omega \hat{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt} \omega \hat{\lambda} + r \omega \frac{d\hat{\lambda}}{dt} = r \omega \hat{\mu}$$

Considero un vettore  $(\vec{P}-\vec{O}) = R_0 \hat{\lambda}$

Moto rettilineo: la traiettoria è una retta  $r$  su cui  $P$  si muove con velocità  $v$  e accelerazione  $a$ .



• moto rettilineo uniforme  $\rightarrow v = \text{cost} \quad a = 0$

$$\text{legge del moto } x(t) = \int_0^t v dt + x_0 = v(t-t_0) + x_0$$

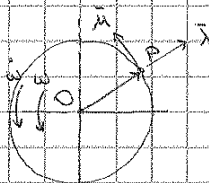
• moto rettilineo univ. acc  $\rightarrow a = \text{cost}$

$$\text{legge del moto } v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a dt = v_0 + a(t-t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a(t-t_0)^2$$

Moto rotatorio:  $\theta = \text{cost}, \omega = 0, \dot{\omega} = 0 \rightarrow \vec{a}_P = \ddot{r} \hat{\lambda}$

È definito da  $r = R_0 = \text{cost}$ , traiettoria circolare centro in  $O$



$\vec{v}_\lambda = 0$   
 $\vec{v}_\mu = R_0 \omega \hat{\mu}$   
 ↳ velocità ha direzione tangenziale

Il verso di  $\omega$  è legato a quello di  $\vec{v}_\mu$   
 $\vec{a}_P = -r \omega^2 \hat{\lambda} \rightarrow$  verso di  $\omega$  è sempre diretta da  $P$  verso  $O$   
 ↳ acc radiale o centripeta

$\vec{a}_\mu = r \dot{\omega} \hat{\mu} +$  il verso di  $\dot{\omega}$  è lo stesso di  $\hat{\mu}$

↳ l'accelerazione ha una componente tangenziale e una normale (centripeta)

$\vec{a}_P$  dev'essere coerente con  $\dot{\omega}$

$$\vec{v} = \omega r \hat{\mu}$$

$$\vec{a} = \dot{\omega} r \hat{\mu} - \omega^2 r \hat{\lambda}$$

IL CORPO RIGIDO

Un corpo si dice rigido se è formato da pti che non si avvicinano o si allontanano tra di loro → la distanza tra due punti qualsiasi che gli appartengono non varia nel tempo



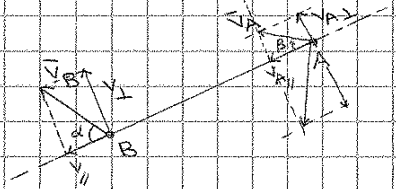
Se due punti A e B di un corpo fossero liberi nel piano avrebbero ciascuno 2 GL → 4 GL totali  
 Se li collego ho un segmento AB la cui <sup>lunghezza</sup> distanza è costante

vincolo di rigidità →  $\overline{AB} = \text{cost}$  → 3 GL → ne ho tolto uno

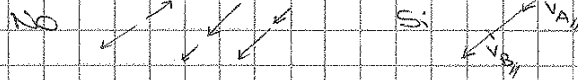
Corpo rigido nel piano → 3 GL  
 " " nello spazio → 6 GL

Possiamo sostituire al corpo rigido un segmento AB rappresentativo. Dal p.d.v. cinematico significa che la  $\vec{v}_A$  deve sottostare a certe condizioni.

Poiché scompongo  $\vec{v}_B$  in due componenti: una lungo AB, una  $\perp$  AB. A e B non possono allontanarsi o avvicinarsi.

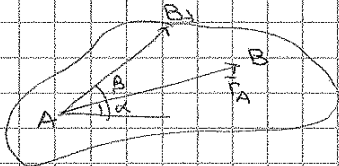


In un corpo rigido  $\vec{v}_{B\parallel} = \vec{v}_{A\parallel}$   
 → stesso modulo  
 → stessa direzione  $\parallel$  AB  
 → concordi



$$v_B \cos \alpha = v_A \cos \beta$$

Il corpo rigido ha in tutti i suoi punti la stessa  $\omega$ ,  $\dot{\omega}$ .  
 Considero una retta r che forma un certo angolo  $\alpha$ .



$$\alpha = \omega, \dot{\omega}$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad \dot{\omega} = \frac{d\dot{\omega}}{dt}$$

$\alpha$  definisce la direzione AB. Scelgo un'altra direzione per A che forma l'angolo  $\beta$  rispetto al sr.

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} \quad \dot{\omega} = \frac{d\dot{\omega}}{dt}$$

cost. per il vincolo di rigidità

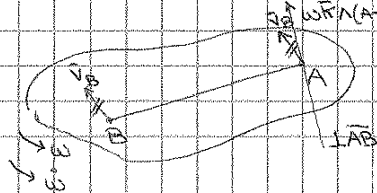
$\alpha$  e  $\beta$  sono tra loro indipendenti. Come esprimo  $\beta$ ?  $\beta = \alpha + \alpha\beta$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + 0 \quad \omega \text{ e } \dot{\omega} \text{ non dipendono dalla scelta di riferimento}$$

Tutti i pti del cr hanno le stesse  $\omega$  e  $\dot{\omega}$

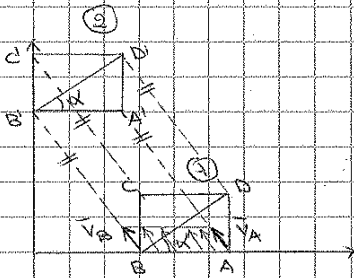
Un c.r. quando ruota ha per tutti i punti e rispetto a un qualsiasi centro di rotazione le stesse  $\omega$  e  $\dot{\omega}$ .

EQUAZIONE FONDAMENTALE NELLA CINEMATICA



Nota  $\vec{v}_B$  e la velocità  $\omega$  del c.r. posso ricavare in direzione, modulo, verso  $\vec{v}_A$  con  $\forall A \in \text{c.r.}$

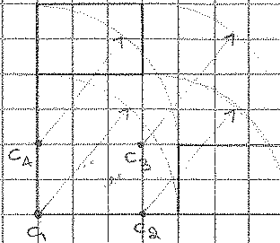
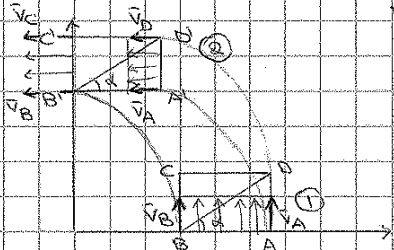
Accelerazione: componenti  $t_g$  e cent. proporzionali a  $d^2/dt^2$  in modulo e rispetto al raggio stesso angolo



- $\alpha = \text{cost}$
- $\rightarrow \omega = 0$  e  $\dot{\omega} = 0$
- $\rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B$  in direzione, verso e modulo
- $\rightarrow$  il corpo trasla
- $\rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B$  istante per istante
- $\rightarrow$  MOTO TRASLATORIO

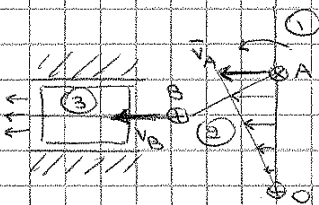
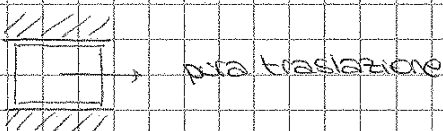
Come passa il corpo da ① a ②?

- traslazione rettilinea  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D$
- le direzioni non cambiano  $\rightarrow$  traiettorie rettilinee tra loro //
- Poi può essere uniforme, unif. acc. o qualsiasi
- traiettoria circolare, sono traiettorie circolari parallele, ciascuna col suo centro MA il corpo non ruota



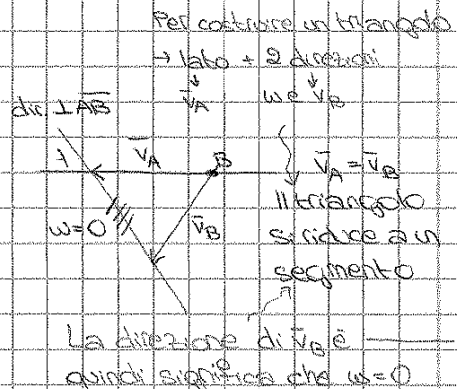
L'ultimo caso è

- moto rotatorio NO!
- moto traslatorio NO!
- $\rightarrow$  moto di traslazione circolare, dove non c'è rotazione (locomotiva, montagne russe)
- l'oggetto rimane sempre lì a se stesso



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{A})$$

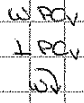
moto



velocità uguali in direzione  $\rightarrow \omega = 0$

Velocità = in direzione, verso e modulo  $\rightarrow$  traslazione rettilinea o circolare

$\vec{v}_p = \vec{\omega} \wedge (P - C_v)$  per P generico



Riporto P sulla direzione  $C_v B \rightarrow P' \rightarrow$  trovo  $v_{p'}$  in modulo con la distr. triang. di velocità,  $\perp C_v B$ , verso coerente con  $\omega$ . Non devo fare conti

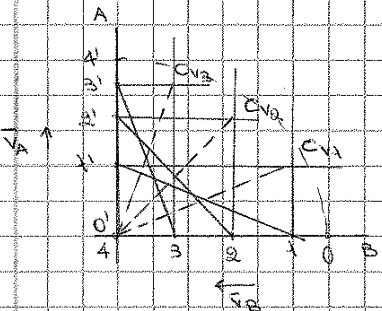
$\vec{v}_p = \vec{\omega} \wedge (P - C_v)$

La distribuzione istantanea delle velocità è quella di un moto rotatorio attorno al  $C_v$  variabile in generale istante per istante, in genere  $C_v$  non è un po' fisso

- (a)  $\omega \neq 0$   $C_v =$  fisso  $\perp$  alle  $v$  passano per  $C_v$
- (b)  $\omega = 0$   $C_v \rightarrow \infty$  traslazione  $\perp$  alle  $v$  sono  $\parallel$

Teorema di Chasles: il c.i.r. si trova in ogni istante sulle normali alle traiettorie dei punti del sistema

$C_v$  sulle  $\perp$  alle velocità }  $C_v \perp$  alle traiettorie  
 velocità tangenti alle traiettorie



istante per istante  $\rightarrow$  normali alle velocità  $\rightarrow$  normali alle traiettorie  $\rightarrow C_v$  non fisso ma varia posizione  
 L'asta ruota attorno ai vari centri di rotazione al passare del tempo  
 MOTO POLARE FISSO \*  
 $OC_v$  diagonale del triangolo  $O'AC_v$  che non cambia lunghezza  
 Anche  $C_v$  ha la sua traiettoria

Centro delle accelerazioni  $\neq$  centro delle velocità

$\hookrightarrow$  centro di un moto rotatorio guardando le accelerazioni

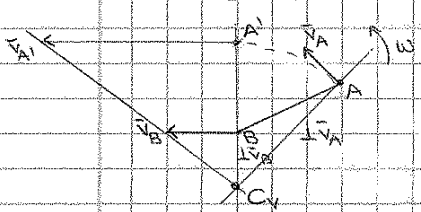
Differenza: trovare  $C_v$  è semplice ( $\perp$  alle velocità) ma per le acc. ci sono due componenti il cui angolo è  $\gamma \neq \pi/2$  per le velocità  $\rightarrow$  più complicato

ROLARE MORILE

Alcuni punti dell'elemento mobile possono andare a toccare il  $C_v$

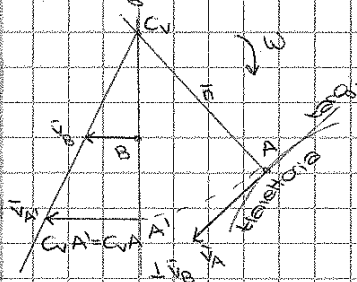
Esempi Operativi

- Noti  $v_B$  e  $v_A$  trovare  $\omega$  e  $C_v$



tracciare  $\perp$  a  $\vec{v}_B$  e  $\vec{v}_A \rightarrow$  intersezione =  $C_v$   
 $\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C_v)$   $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C_v)$   
 $\omega = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{v_A}{AC_v}$   
 distr. triang. di velocità  
 $B - C_v \rightarrow$  ruota per avere  $\vec{v}_B \rightarrow$

- Noti  $\vec{v}_B$  e traiettoria di A



$\perp \vec{v}_B, \perp \vec{v}_A (\rightarrow \perp$  traiettoria  $\rightarrow \perp$  tang.)  $\rightarrow$  trovo  $C_v$   
 $\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - C_v) \rightarrow \omega = v_B / BC_v$  e verso tale da B ruoti attorno a  $C_v$   
 $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - C_v)$   
 $\perp AC_v$   
 $\perp BC_v$   
 $\omega$

### Appunti aggiunti dal libro

#### • ACCOPPIAMENTI TRA CORPI RIGIDI

Le macchine sono costituite da sistemi di organi che possono essere rigidi o flessibili. Il contatto tra due corpi accoppiati avviene sempre su due superfici ricamate sui corpi stessi. La FORMA delle superfici lungo le quali avviene il contatto durante il moto relativo determina il tipo di moto relativo possibile.

Tali superfici prendono il nome di superfici coniugate della coppia; esse definiscono il vincolo cinematico tra i due corpi accoppiati.

Il contatto tra le superfici durante il moto può essere mantenuto per effetto:

- della forma stessa delle superfici  $\rightarrow$  i due corpi formano una coppia cinematica
- delle forze scambiate tra i due corpi  $\rightarrow$  ACCOPPIAMENTO DI FORZA (oltre che della forma delle superfici)

#### • Coppe cinematiche

**Coppia prismatica**  $\rightarrow$  le superfici coniugate dei due corpi accoppiati sono prismatiche. L'unico moto concesso ad A è una TRASLAZIONE rispetto a B  $\rightarrow$  1 GL  $\rightarrow$   $v_x$  e  $w$  impediti  $\rightarrow$  l'unico moto relativo possibile è una traslazione lungo l'asse della coppia. Le superfici coniugate strisciano  $\rightarrow$  attrito  $\rightarrow$  dissipazione di energia  $\rightarrow$  ridotta o la lubrificazione delle parti a contatto in moto relativo.

**Coppia rotoidale o cerniera**  $\rightarrow$  le superfici coniugate sono cilindriche. A può solo ruotare rispetto a B, essendo  $v_x$  e  $v_y$  impediti  $\rightarrow$  1 GL. Come prima  $\rightarrow$  superfici coniugate strisciano  $\rightarrow$  forze di attrito  $\rightarrow$  dissipazione di energia e usura  $\rightarrow$  eliminate o ridotte con sostanze lubrificanti o cuscinetti (lenti o cuscinetti volenti). I cuscinetti radenti sono in genere costituiti da bronzo. La bronzina, che è una bussola costituita da materiale tenero, è accoppiata con un perno di materiale più duro. I cuscinetti volenti sono di vari tipi.

(Bronzina: acciaio, ma non si usa più il bronzo ma babbler, attrito volente  $<$  attrito radente  $\rightarrow$  non facciamo strisciare ma facciamo rotolare).

**Coppia elicoidale**  $\rightarrow$  l'accoppiamento tra i due corpi avviene lungo una superficie cilindrica su cui è ricavata una filettatura a sezione triangolare. Elementi geometrici fondamentali della coppia  $\rightarrow$  angolo  $\beta$  dell'elica del filetto, diametro medio  $d$ , passo  $p$  del filetto. Vincolo ad uno stesso telaio fisso il corpo interno (vite) mediante una cerniera (che consenta la rotazione attorno al suo asse) e il corpo esterno (madrevite) mediante una coppia prismatica (che consenta la traslazione // al suo asse). Ad ogni giro della vite si ha una traslazione della madrevite pari ad un passo lungo l'asse della coppia  $\rightarrow$  moto relativo possibile tra i due corpi = rotazione + traslazione, ma i due moti sono reciprocamente dipendenti  $\rightarrow$  1 GL. Infatti:

$$v = p \rightarrow \dots \text{ e la madrevite trasla di un passo } p \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

$t \rightarrow$  tempo in cui la vite compie un giro completo...

$\rightarrow v = \frac{p}{2\pi} w$  relazione biunivoca tra "moto rotatorio della vite" e "traslazione" madrevite

#### • Accoppiamenti di forza

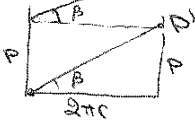
**CAMMA-PUTERIA**  $\rightarrow$  formato da una camma a disco che ruota attorno ad un asse fisso e da una puteria che può traslare verticalmente  $\rightarrow$  sistema usato per il controllo dell'apertura e della chiusura di valvole di motori a scoppio secondo leggi desiderate. La molla ha la funzione di garantire il contatto tra camma e puteria in qualsiasi condizione, anche



accoppiamento bronzo acciaio per ridurre l'attrito  
 Ora si usano altri materiali (non bronzo, ma tetton).

Per ridurre ancora l'attrito  $\rightarrow$  cuscinetti  $\rightarrow$  attrito volvente  $<$  attrito radente  $\rightarrow$  non facciamo strisciare, ma facciamo rotolare.

Sellipunto il filetto sul piano vede tante rette parallele che formano l'angolo  $\beta$



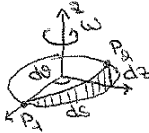
$$p = 2\pi r \tan \beta$$

$$\tan \beta = \frac{p}{2\pi r} = \frac{1 \text{ passo}}{2\pi r}$$

Ad ogni giro completo salgo di un passo p



$$ds = r d\theta$$



$$dz = ds \tan \beta = r \omega dt \tan \beta$$

legame tra z e omega  $\rightarrow$  rimane un solo GL

Legame tra le velocità:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = r \tan \beta \frac{d\theta}{dt} = r \tan \beta \cdot \omega = \frac{p}{2\pi} \omega$$

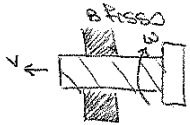
velocità angolare

velocità di avanzamento della vite

Sistema vite - madrevite

Elemento A = vite che non può spostarsi orizz o vert ma solo ruotare attorno a z  
 inseriamo la madrevite in un accoppiamento prismatico  $\rightarrow$  può solo traslare

CORRA PRISMATICA

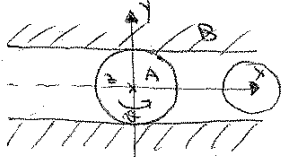


rotazione omega della vite  $\rightarrow$  avanzamento a sx o a dx

moto rotatorio che permette di trasformarsi in avanzamento

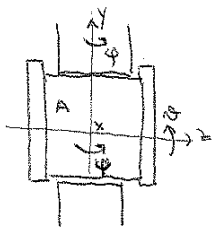
Usato in sistemi di sollevamento, moti di precisione abbastanza veloci

Considero nel piano una sorta di accoppiamento prismatico ma con A che è un dischetto



A non può viaggiare secondo y, ma può viaggiare lungo x e ruotare attorno a z  $\rightarrow$  restano x e theta  $\rightarrow$  2 GL Indip. tra loro  
 perno inserito in una guida

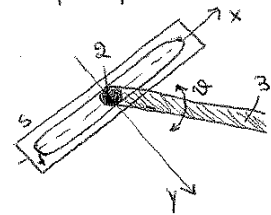
Nello spazio (6 GL)



toglie y; z; phi, psi  $\rightarrow$  - 4 GL

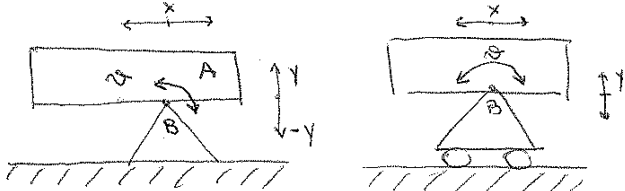
Lascio x, theta  $\rightarrow$  2 GL

Caso tipico dell'asta AB coi perni A e B che traslano in una guida orizz e vert



Restano 2 GL  $\rightarrow$  rotazione di z e spostamento del perno

**APPoggio - 1 GL**

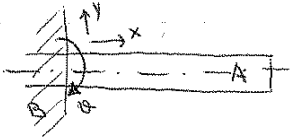


8 pto di appoggio

Toglie 1 GL → non permette la discesa, lo spostamento verticale

UNIDIREZIONALE (bidirezionale è la cerniera)

**ASTA RIGIDA**

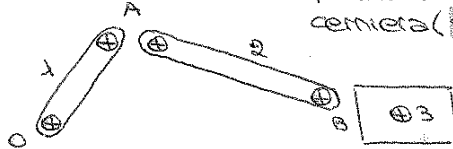


**INCASTRO - 3GL**

**Applicazione: sistema biella-manovella**

1 asta → manovella  
2 " → biella  
3 corso

Nel piano hanno ciascuno 3GL → 9GL complessivi. Li monto: collego 3 a 2 con una cerniera in B → toglgo 2GL; inseriamo il corso in una guida prismatica (PIEDE DI BIELLA) che toglie 2GL; collego manovella e biella con una cerniera (BOTTEGHE MANOVELLA e TESTA DI BIELLA) → toglgo 2GL; vincolo la manovella attraverso una cerniera fissa O che toglie 2GL. Rimane 1GL.



cerniera fissa O → -2GL  
" mobile A " → -1GL  
" " B " → -1GL  
acc. prismatico " → -2GL

$\Rightarrow 1GL$

$x = x(t)$   
 $\theta = \theta(x)$

-2GL

Il moto rotatorio della manovella è trasformato in un moto rettilineo alternato dell'estremità B.

**Libro Fig. 5.12**

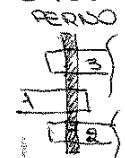
↑ e ↓ → 6GL  
↓ ↓  
3GL 3GL

Cerniera in 1 → -2GL → restano 4GL  
Altra cerniera → -2GL → " 2GL →  $\theta_1$  e  $\theta_2$

$qdf = 3n - 2q - 1h - 3i$

Cerniera in O la posso considerare come un piano fisso di riferimento, è un pseudoelemento in più che poi devo togliere.

Fig. 5.13 in A cerniera doppia, come un perno che si inserisce tra l'elemento 1 e 2, basta 1GL, la rotazione di 1 rispetto a 2 o viceversa. Aggiungo l'asta 3.



$qdf = 3n - 2q - 1h - 3i$

- n = numero di corpi rigidi
- q = " " coppie (giunti) che eliminano 2qdf
- h = " " " che eliminano 1qdf
- i = " " incastri " " 3qdf

P. 150-151

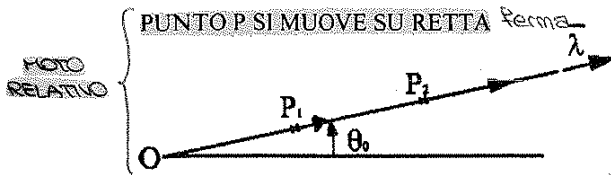
Trasf. di moto rotatorio in moto traslatorio  $\rightarrow$  camma-punteria equivalente a biella-manovella\* che però non sopporta alte velocità. Usato nei meccanismi tessili (ago per cucire, piccoli movimenti ma molto veloci)

Disco che ruota attorno ad A  $\rightarrow AB = \cos t =$  raggio disco. Posso variare la distanza uncinando la  $O \neq A$  centro geom. del dischetto

Rotol. puro  $\rightarrow$  è un vincolo  $\rightarrow v_{baricentro} = \omega r$ , nel pto di contatto 0

MA = 4 - 12/13  
②

**MOTO COMPOSTO**



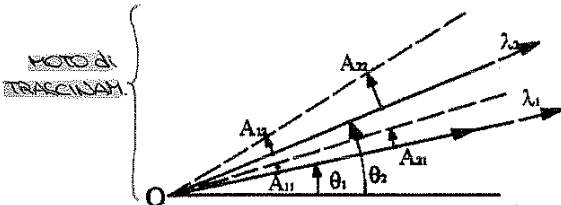
$$(P-O) = r\bar{\lambda}$$

Dirada sulla retta di versore  $\hat{\lambda}$

$$r = r(t)$$

$\theta = \theta_0 = \text{cost}$  retta non si muove

$$\bar{\lambda} \text{ DIR} = \text{cost}$$



$A_{11}, A_{21}$  e retta  $\rightarrow$  viaggiano con la v della retta ( $\omega$ )

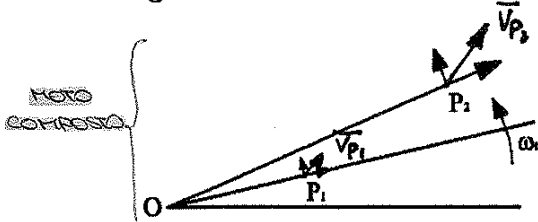
$A_{12}, A_{22}$  sono trascinati

$$(A-O) = r\bar{\lambda}$$

$$r = \text{cost}$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(t)$$



$$(P-O) = r\bar{\lambda}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{P che si muove sulla retta} \\ r = r(t) \text{ REL} \\ \lambda = \lambda(t) \text{ TRAS} \end{array} \right.$   
 rotazione della retta

$$\bar{V}_P = \frac{d(P-O)}{dt} = r\dot{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda} \frac{dr}{dt} = r\dot{\bar{\lambda}} + \omega_k \Lambda(r\bar{\lambda}) = \bar{V}_r + \bar{V}_t$$

**MOTO COMPOSTO**

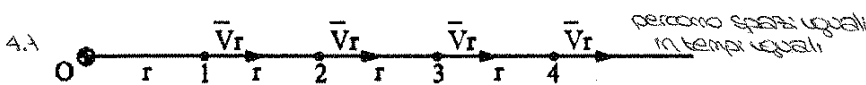


figura 4.1

moto ret. uniforme

$$\bar{V}_R = \text{cost} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r}{\Delta t}$$

$$r_{12} = r_{23} = r_{34} = r$$

moto rotatorio unif.  $\frac{\pi}{6}$

$$\omega_i = \text{cost} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\pi/6}{\Delta t}$$

$$\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{34} = \frac{\pi}{6}$$

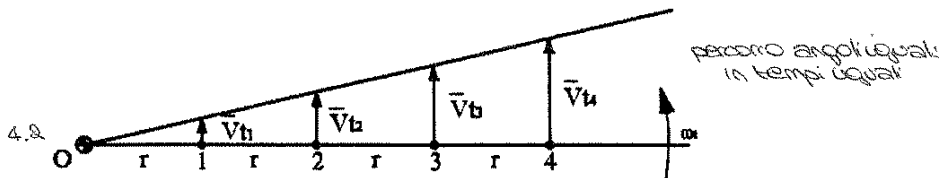


figura 4.2

$v_r =$  in modulo e verso

$v_t \perp$  alla retta, verso coerente con  $\omega$ , con modulo prop alla distanza

Compara le velocità

$v_1, v_2, v_3$  cambiano in dir., verso e modulo

Traiettoria tq alle velocità nei pti 1, 2, 3, 4

Istante per istante c'è un C.I.R. che si trova sulle normali alle vel. a distanza...

$$\bar{V}_i = \omega_i \bar{\lambda}(P-O)$$

$$V_{11} = \omega_1 r$$

$$V_{12} = \omega_1 \cdot 2r = 2V_{11}$$

$$V_{13} = \omega_1 \cdot 3r = 3V_{11}$$

$$V_{14} = \omega_1 \cdot 4r = 4V_{11}$$

$$P_1 C_1 = \frac{V_1}{\omega_1} ; P_2 C_2 = \frac{V_2}{\omega_1}$$

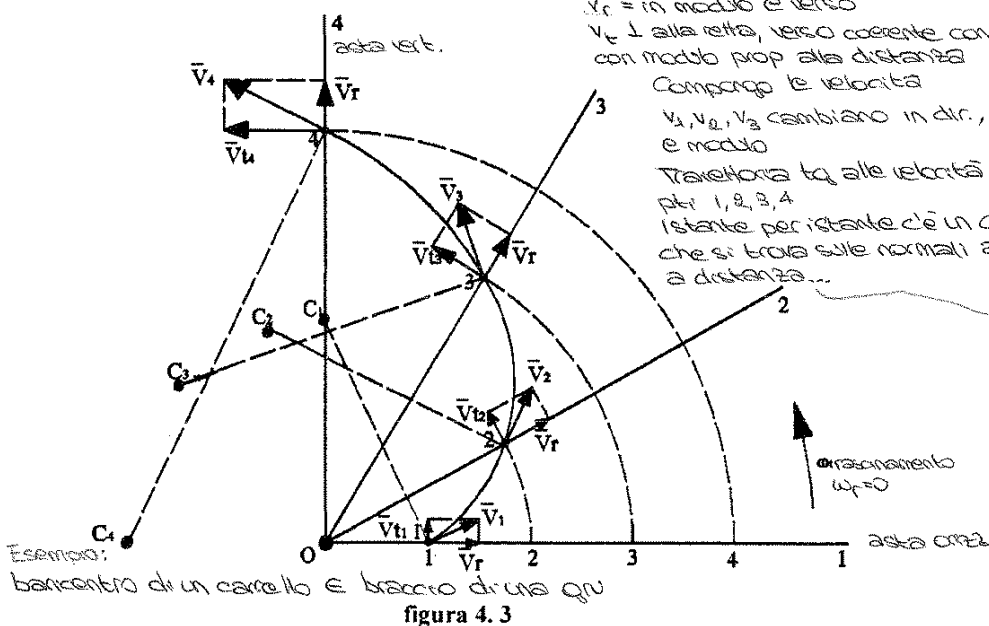
perché  $\bar{v}_i = \bar{v}_{C_i} + \omega \bar{\Lambda}(P-C_i) \rightarrow v_i = \omega PC_i$   
 $i=0$  perché è c. di I.R.

$$V_2 = 1,28V_1$$

$$V_3 = 1,65V_1$$

$$V_4 = 2,06V_1$$

aumento di velocità



Meccanica Applicata

MA = 5 - 12/13

$$\begin{aligned} \overline{a}_P &= \frac{d\overline{V}_P}{dt} = \frac{dr}{dt} \overline{\lambda} + r \frac{d\overline{\lambda}}{dt} + \dot{\omega}_i [\overline{k}\Lambda(r\overline{\lambda})] + \omega_i \overline{k}\Lambda \left( \frac{dr}{dt} \overline{\lambda} \right) + \omega_i \overline{k}\Lambda \left( r \frac{d\overline{\lambda}}{dt} \right) \\ &= \ddot{r} \overline{\lambda} + \omega_i \overline{k}\Lambda(\dot{r} \overline{\lambda}) + \dot{\omega}_i \overline{k}\Lambda(r\overline{\lambda}) + \omega_i \overline{k}\Lambda(\dot{r} \overline{\lambda}) - \omega_i^2 (r\overline{\lambda}) \\ &= \ddot{r} \overline{\lambda} + \left[ \dot{\omega}_i \overline{k}\Lambda(r\overline{\lambda}) - \omega_i^2 (r\overline{\lambda}) \right] + 2\omega_i \overline{k}\Lambda(\dot{r} \overline{\lambda}) \\ &= \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_{co} \end{aligned}$$

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r + \left[ \dot{\omega}_i \overline{k}\Lambda(P-O) - \omega_i^2 (P-O) \right] + 2\omega_i \overline{k}\Lambda \overline{V}_r$$

acc. di Coriolis e complementare

$$\omega_i \overline{k}\Lambda(\omega_i \overline{k}\Lambda r \overline{\lambda}) \quad \omega_i \overline{k}\Lambda(\dot{\omega}_i \overline{k}\Lambda r \overline{\lambda})$$

moto relativo rett. unif. + moto rot. unif. → moto in cui nascono accelerazioni

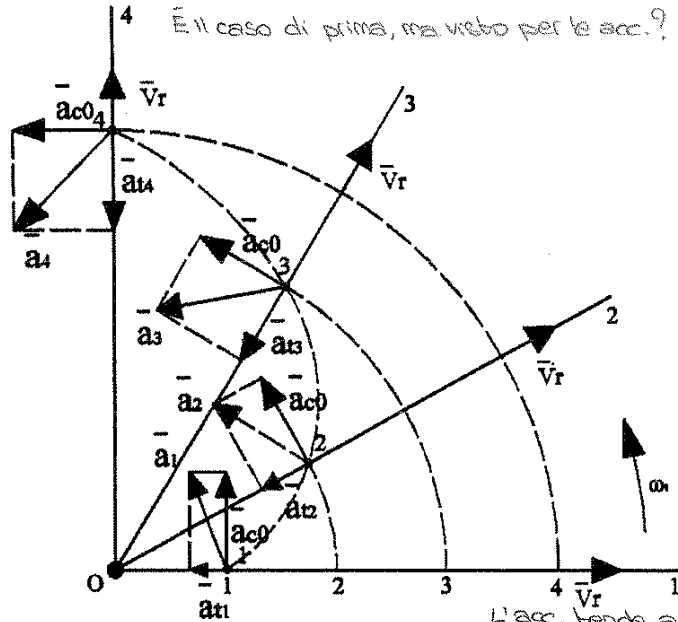


Fig. 5

$V_r = \text{cost};$

$\omega = \text{cost}; \dot{\omega} = 0;$

Il solo termine che rimane è:

$\overline{a}_t = -\omega_i^2 (P-O)$

$a_{t1} = \omega_i^2 r$  radiale, verso il centro ma aumenta

$a_{t2} = \omega_i^2 \cdot 2r = 2a_{t1}$

$a_{t3} = \omega_i^2 \cdot 3r = 3a_{t1}$

$a_{t4} = \omega_i^2 \cdot 4r = 4a_{t1}$

$\overline{a}_{co} = 2\omega_i \overline{k}\Lambda \overline{V}_r$

→  $a_{co} = 2\omega_i V_r = \text{cost}$  normale alla retta, modulo cost → cambia direzione; verso con  $\omega_i$

- $a_2 = 1,09a_1$
- $a_3 = 1,23a_1$
- $a_4 = 1,4a_1$

L'acc. tende a portare il pto radialmente verso l'esterno, ma anche trasversalmente (acc. complm.)

$\omega_t$  velocità angolare di trascinamento  
 $V_r$  velocità relativa che nasconde tutti i possibili moti

$\overline{a}_{co} = 2\omega_i \overline{k}\Lambda \overline{V}_r$ ,  $a_{co}$  esiste solo se il moto di trasc. è rotatorio

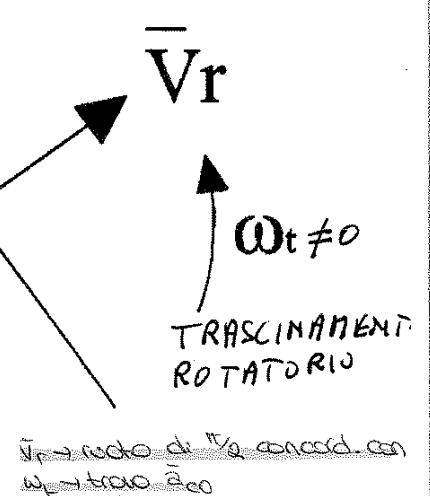
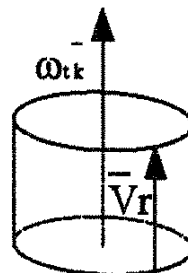
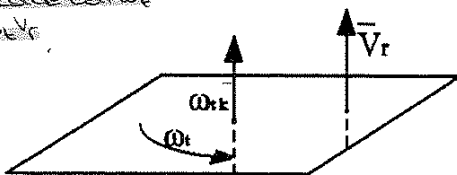
$2\omega_i \overline{k}\Lambda \overline{V}_r = 0$  se:

- 1.  $\overline{V}_r = 0$  NO MOTO RELATIVO
- 2.  $\overline{V}_r \neq 0$  MOTO RELATIVO
- $\omega_i = 0$  TRASCINAMENTO TRASLATORIO

il trasc. c'è ma non è rotatorio

→ 3.  $\overline{V}_r \parallel \omega_i \overline{k}$

cioè  $\perp V_r$  verso concorde con  $\omega_t$  modulo  $2\omega_i V_r$



TRASCINAMENTO ROTATORIO

$\overline{V}_r \rightarrow$  moto di trasc. concorde con  $\omega_t \rightarrow$  trasc.  $\overline{a}_{co}$

Meccanica Applicata

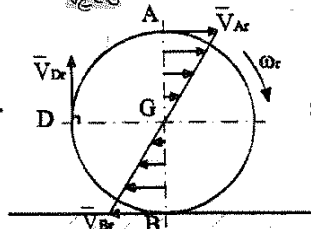
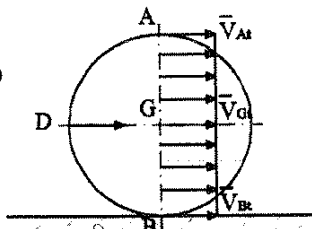
MA = 7-12/13

**TRASCINAMENTO (TRASLAZIONE RETTILINEA)**

**RELATIVO (ROTAZIONE)**

**MOTO ASSOLUTO (ROTOTRASLAZIONE)**

**MOTO COMPOSTO**



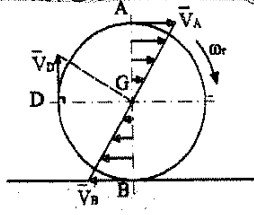
$\vec{V}_P = \vec{V}_I + \vec{V}_r$   
 $\vec{V}_{P,r} = \vec{V}_I = \vec{V}_G$  traslazione  
 $\vec{V}_{P,r} = \omega_r \cdot k\Lambda(P-G)$  rotazione ( $v_G=0$ )  
 $\vec{V}_P = \vec{V}_I + \omega_r \cdot k\Lambda(P-G)$  moto assoluto

$\vec{V}_P = \omega_r \cdot k\Lambda(P-C_v)$   
 ROTAZIONI INTORNO A  $C_v$

G è fermo solo se la ruota è ferma altrimenti si muove, se no si muove, trasla con la v del veicolo

La ruota ruota, ma il veicolo non avanza (roll o girare). Non c'è aderenza tra ruota e terreno.

1)  $\vec{V}_I = 0$   
 $\vec{V}_G = 0$   
 $\omega_r \neq 0$



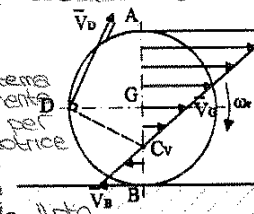
$V_A = \omega R$   
 $V_G = 0$   
 $V_B = -\omega R$

$C_v \equiv G$   
 $\vec{V}_P = \omega_r \cdot k\Lambda(P-G)$   
 ROTAZIONE ATTORNO A G  
 STRISCIAMENTO IN B → attrito + potenza dissipata

e  
v  
0  
1  
0  
2

Esiste in C.I.R.  $C_v$ . Fase di avviamento in cui si parte strisciando

2)  $\omega R > V_G$



$V_A = V_G + \omega R$   
 $V_G = V_I$   
 $V_B = V_G - \omega R$

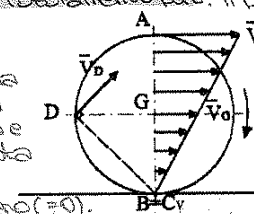
$C_v$  TRA G E B  
 $\vec{V}_P = \omega_r \cdot k\Lambda(P-C_v)$   
 ROTOTRASLAZIONE  
 ROTAZIONE ATTORNO A  $C_v$   
 STRISCIAMENTO IN B e ROTOLAMENTO

$\omega = \frac{v_G}{GC_v}$  maggiore del caso 1)

Le forze agenti sul sistema determinano uno scorrimento all'indietro di B (ades per una eccessiva coppia motrice applicata sulla ruota). Mentre G ha sempre la velocità del veicolo  $V_G$ , il pto B ha una velocità discorde con  $V_G$ . Il C. di I.R. è interno ad AB

Condizione ottimale: rotolamento puro. Il punto di contatto B è C.I.R.

3)  $\omega R = V_G$



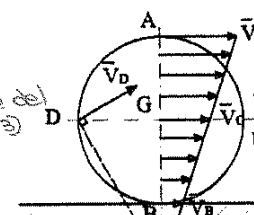
$V_A = V_G + \omega R = 2R\omega$   
 $V_G = \omega R$   
 $V_B = 0$

$C_v \equiv B$   
 $\vec{V}_P = \omega_r \cdot k\Lambda(P-B)$   
 ROTOLAMENTO PURO tra i corpi accoppiati  
 → moto relativo con +GL  
 $V_G = \omega R$ ;  $a_G = \omega R$ ;  $S = 9R$

Le forze agenti sono tali da determinare ADERENZA nel punto di contatto tra ruota e piano → il punto B della ruota ha la stessa velocità del corrispondente pto del piano (=0). → B è C. di I.R. della ruota →  $\omega = \frac{v_G}{R}$

Precedono i 2 casi precedenti. La ruota ruota e inizia a scivolare. Il C.I.R. va fuori.

4)  $\omega R < V_G$



$V_A = V_G + \omega R$   
 $V_G = V_I$   
 $V_B = V_G - \omega R$

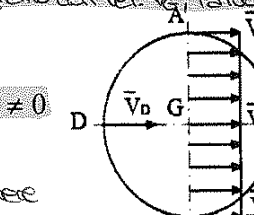
$C_v$  ESTERNO A B  
 $\vec{V}_P = \omega_r \cdot k\Lambda(P-C_v)$   
 ROTOTRASLAZIONE  
 ROTAZIONE ATTORNO A  $C_v$   
 STRISCIAMENTO IN B e SCORRIMENTO

$\omega_4 = \frac{V_G}{GC_v}$  minore del caso 3)  
 $GC_v > R$   
 $\omega_4 < \omega$

Le forze agenti sul sistema determinano uno scivolamento in avanti della ruota. Mentre il centro G ha sempre la velocità del veicolo B ha velocità  $V_B$  minore di  $V_G$ .

Se il punto di contatto B è fermo mentre il veicolo avanza

5)  $\omega_r = 0$



$V_A = V_G$   
 $V_G = V_I$   
 $V_B = V_G$

$C_v \Rightarrow \infty$   
 $\vec{V}_P = \vec{V}_I = \vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_G$   
 TRASLAZIONE  
 STRISCIAMENTO IN B

legame  $v_G$  e  $\omega$   
 Se  $\frac{v_G}{R} = \omega$  → rotol. puro da zero  
 anche in frenata per la migliore efficienza frenante

quando, per effetto delle forze d'inerzia, la cartesia tenderebbe a distaccarsi dalla camma. Se il contatto tra i due corpi è sempre assicurato  $\rightarrow$  tgl perché ad ogni posizione angolare  $\theta$  della camma corrisponde una e una sola posizione  $h$  della puleggia.

15 ottobre 2012

**Eqz fondamentali del moto composto**

Considero un elemento 2 di forma qualsiasi, 1 quadrato e la sua diagonale. Scrivo l'eqz fond della cinematica ①

$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \omega_1 \vec{r}(P-A)$   
 1 si muove rispetto a 2  $\rightarrow$  moto relativo  $\rightarrow \omega_1 = \omega_2$

$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{A,rel} + \omega_{rel} \vec{r}(P-A)$  cosa  
 con questa  $v$  1 si muove a prescindere dall'2

Ci sarà un moto di trascinamento ③  $\rightarrow$  1 rimane come fissato a 2  $\rightarrow$  "inchiodo" l'elemento 1 a 2

Considero come polo  $B_2$ , vel ang di 2  $\omega_2$ .  
 $\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{B_2} + \omega_2 \vec{r}(P_2-B_2)$  polo  $B_2$  opposto  $A_2$   
 Il polo è in pto qualsiasi appartenente a 2  $\rightarrow$  posso scegliere  $A_2$

$\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{A_2} + \omega_2 \vec{r}(P_2-A_2)$   
 $P_2$  punto generico appartenente all'elemento 2

$\rightarrow v$  con cui waggiano tutti i punti  $\in$  2  
 $P_1 \equiv P_2, A_1 \equiv A_2 \rightarrow \omega_2 = \omega_1$

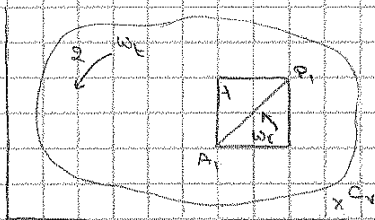
$\vec{v}_P = \vec{v}_{A_1} + \omega_1 \vec{r}(P-A_1)$   
 $\rightarrow$  velocità di trascinamento

la velocità assoluta sarà  $v_{rel} + v_{trasc}$   
 $\vec{v}_P = \vec{v}_{P_1} + \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{A_1,rel} + \omega_{rel} \vec{r}(P-A_1) + \vec{v}_{A_1,trasc} + \omega_1 \vec{r}(P-A_1) =$

$\vec{v}_{A_1,rel} + \vec{v}_{A_1,trasc} = \vec{v}_{A_1}$   
 $\vec{v}_P = \vec{v}_{A_1} + (\omega_{rel} + \omega_1) \vec{r}(P-A_1)$

$\rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{A_1} + (\omega_r + \omega_f) \vec{r}(P-A_1)$  formula fondamentale del moto composto con polo  $A_1$

$A_1$  pto generico  $\in$  1.

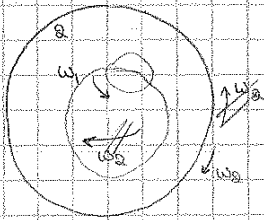


$\omega = \omega_r + \omega_f$   
 $\vec{v}_P = (\omega_r + \omega_f) \vec{r}(P-A_1)$

**Combinazioni:**

- 1 trasla, 2 trasla
- 1 trasla, 2 lo trascina in moto rotatorio
- 1 ruota, 2 " " con  $\omega_f = 0$
- $\omega_r = 0, \omega_f = 0$
- $\omega_r, \omega_f$  concordi o discordi

$\rightarrow v$  assoluta = diff delle due velocità  $\rightarrow$   $\angle$  velocità in gioco



$$\omega_{1/2} = \omega_1 - \omega_2$$

**DINAMICA** studia il moto dei corpi in relazione alle cause che lo producono → conoscere forze e momenti;

- (1) Definizione rigorosa e chiara del modello fisico che agiscono sul corpo in esame
- (2) Definizione diagramma del corpo libero → riportare tutte le forze agenti sul corpo
  - (a) Isolamento del sistema fisico (o elemento) di cui far equilibrio
  - (b) appello e qualificazione delle azioni
- (3) Modello matematico, scrittura eq. o risoluzione grafica → soluzione = moto del sistema  
Confronto con dati sperimentali

**Sistemi meccanici**

GL < 3 IPERSTATICI

GL = 0 STATICI  $a=0 \quad \dot{\omega}=0 \quad v=0 \quad \omega=0$

Dinamico

GL = 1 camma, disco che ruota

GL > 1

(1)  $a=0 \quad \dot{\omega}=0 \quad v=cost \quad \omega=cost$  senza azioni d'inerzia

In un dato istante o a regime

(2)  $a \neq 0 \quad \dot{\omega} \neq 0 \quad v=0 \quad \omega=0$  inizio o fine moto

(3)  $a \neq 0 \quad \dot{\omega} \neq 0 \quad v \neq 0 \quad \omega \neq 0$  con azioni d'inerzia

**Forze e momenti**

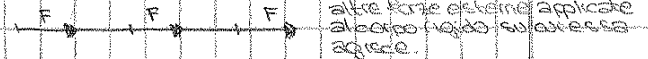
• **FORZA**: azione di un corpo su un altro. Tende a muovere un corpo nella direzione della sua retta d'azione. Modulo, direzione, verso, pto. di applicazione → è un vettore applicato, non libero.

Fig. 2.1

(non è importante)

Per corpi rigidi → non vettori applicati ma sliding vectors → principio di trasmissibilità

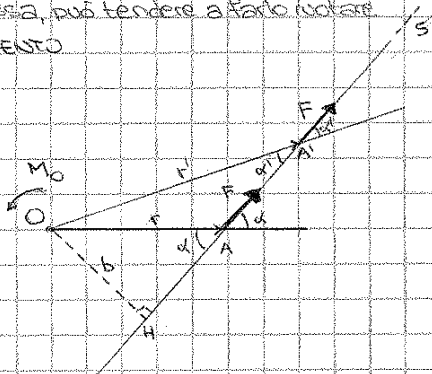
Posso far viaggiare la forza lungo la sua retta d'azione senza alterare gli effetti risultanti delle



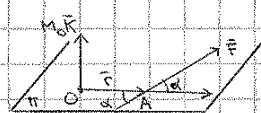
altre forze esterne applicate al corpo rigido sulla stessa azione.

L'applicazione di una forza ad un corpo rigido, oltre che tendere a spostarlo nella direzione della forza stessa, può tendere a farlo ruotare.

• **MOMENTO**



$$\vec{M}_O = (A-O) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



ruoto A-O per sovrapposizione a F

$$M_o = r F \sin \alpha \quad \perp \text{ piano } OAF, \text{ verso } \uparrow$$

Ora applico F in A' e s retta d'azione

$$F \text{ in } A \rightarrow \vec{M}_O = F r \sin \alpha \vec{k}; \quad M_o = F r \sin \alpha = F \cdot b$$

$$F \text{ in } A' \rightarrow \vec{M}_O = F r' \sin \alpha \vec{k}; \quad M_o = F r' \sin \alpha = F \cdot b$$

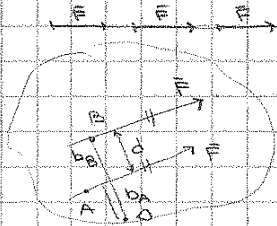
scelto solo la retta d'azione

Non dipende da A' e non varia allo scorrere della F sulla retta d'azione (trasmissibilità). Dipende però dalla retta d'azione della forza.



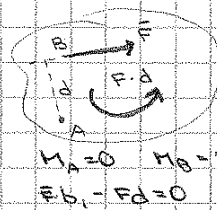
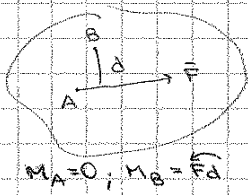
L'effetto di una forza su un corpo può essere duplice: (1) tende sempre a spostarlo nella sua stessa direzione e nel suo stesso verso; (2) può tendere, non sempre, a farlo ruotare. Vediamo in Figura (A) la tendenza alla rotazione. La forza  $\vec{F}$  applicata in A può essere spostata in B (distanza  $d$  dalla retta di  $\vec{F}$ ) aggiungendo il momento di trasposizione  $M = F \cdot d \rightarrow$  l'effetto sul corpo di una forza applicata in A è lo stesso che si ha applicando la stessa forza in B più la coppia  $Fd \rightarrow$  trasposizione di una forza.

Per un corpo rigido posso spostare la forza, ma lungo la propria retta d'azione. Il momento, spostando la forza lungo essa, è 0.



$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{M}_O &= F b_A \\ (2) \quad \vec{M}_O &= F b_B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} b_A < b_B \\ M_O < M'_O \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Deve esserci stesso momento} \\ \vec{M}_O - \vec{M}'_O = F b_A - F b_B = -F d \end{array}$$

Applico al sistema in B una forza uguale e contraria  $\rightarrow F; -F, R=0, M=0$



Due sistemi di vettori applicati si dicono equivalenti se possono essere trasformati o ridotti l'uno nell'altro mediante operazioni di composizione e scomposizione secondo la regola del parallelogramma delle forze e di traslazione dei vettori che li compongono lungo le loro rette d'azione.

Due sistemi si dicono equivalenti se hanno stessa risultante  $\vec{R}_2 = \vec{R}_1$  e stesso momento rispetto allo stesso punto scelto a piacere  $\vec{M}_2 = \vec{M}_1$ .

Es:



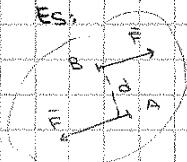
$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M}_O = 0$$



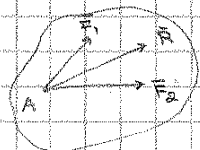
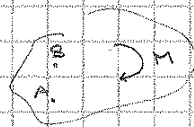
Il sistema equivalente è un punto

Quando su un corpo <sup>si riceve</sup> un sistema di forze, se ne può calcolare la risultante che dovrà essere tale da produrre sul corpo lo stesso effetto del sistema di forze originarie. Nel caso di un corpo rigido soggetto all'azione di 3 forze, la risultante  $\vec{R}$  può essere determinata applicando successivamente la regola del parallelogramma oppure costruendo il poligono corrispondente all'equazione  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ . In questo secondo caso

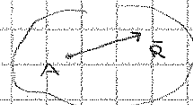
Es:



$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M} = F \cdot d$$



$$\vec{R} \neq 0 \quad \vec{M}_A = 0$$

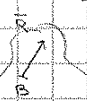


Vedi Fig. 2.18



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_O = R \cdot b = F_1 b_1 + F_2 b_2 - F_3 b_3$$



spostano tutte le 3 forze in O, aggiungendo i rispettivi momenti di trasposizione. L'insieme delle azioni esterne si riconduce alla risultante  $\vec{R}$  delle 3 forze applicata in O e al momento risultante  $M_O$  intorno ad O.

**Equilibrio**  $\sum M_O = M_1 - M_2 + M_3 = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 = 0$

(1) Un sistema meccanico è in equilibrio quando il risultante di tutte le forze è = 0 e il momento rispetto ad un punto qualsiasi = 0.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \text{somma vettoriale}$$



$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

2 eqz nel piano, 3 nello spazio

$$\vec{M}_O = \sum_{n=1}^p \vec{F}_n \wedge \vec{r}_n + \sum_{n=1}^q \vec{c}_n = 0 \quad \vec{M}_O = 0$$

... Gli effetti di  $\vec{R}$  e  $M_O$  possono essere ottenuti ugualmente applicando la sola risultante delle forze in un punto opportunamente scelto. Infatti la forza applicata in O può essere spostata in B distante  $d$  dalla retta d'azione di  $\vec{R}$ , aggiungendo il momento di trasposizione  $M$ . Se  $d = M_O/R \rightarrow M = R \cdot d = R \cdot M_O/R = M_O \rightarrow$  sul corpo agiscono, oltre a  $\vec{R}$ , due momenti uguali e contrari il cui effetto complessivo è nullo. Il sistema di forze originario è ricondotto alla risultante  $\vec{R}$  applicata in B.

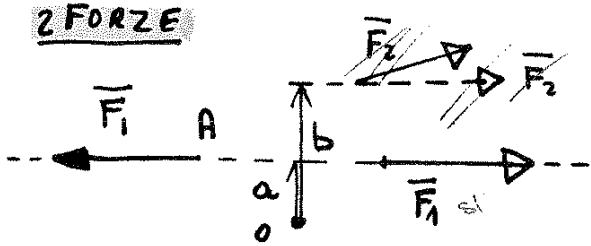
**EQUILIBRIO**

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_n = 0$$

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n + \sum \vec{C}_n = 0$$

Meccanica Applicata  
MA=9-12/13

**2 FORZE**



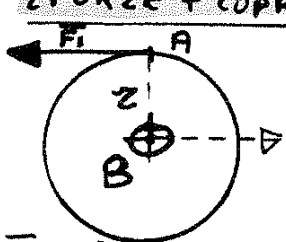
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{R} \neq 0 \quad \vec{R} = 0$$

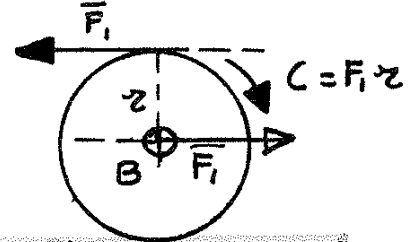
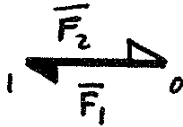
$$M_0 = 0 \quad F_1 a - F_2 b = 0; \quad F_1 = F_2; \quad a = b$$

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ; **STESSO MODULO; VERSO OPPOSTO; STESSA RETTA D'AZIONE**  
non basta dire stessa direzione

**2 FORZE + COPPIA**



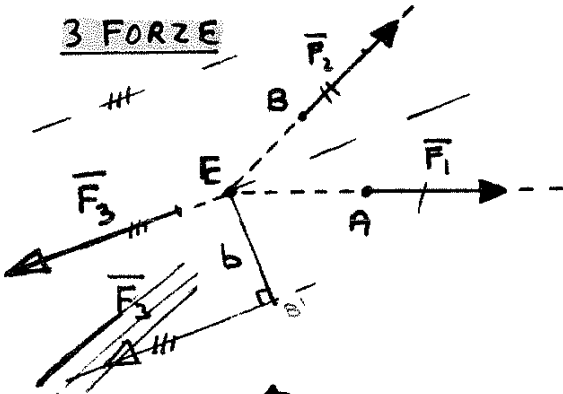
$$\vec{R} = 0$$



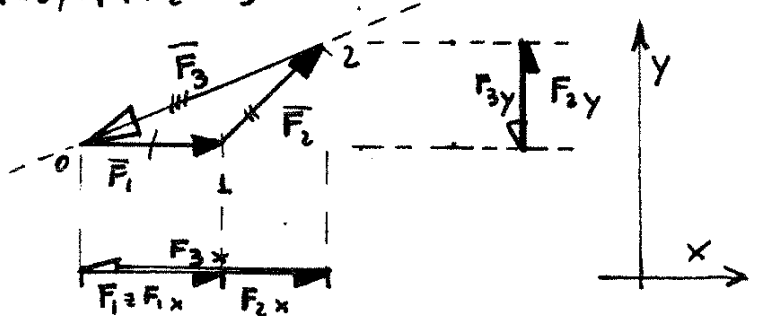
$$M_B = 0 \quad F_1 \cdot z + F_2 \cdot 0 - C = 0$$

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ; **STESSO MODULO; VERSO OPPOSTO; STESSA DIREZIONE; FORMANO COPPIA**  
non stessa retta d'azione

**3 FORZE**



$$\vec{R} = 0; \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

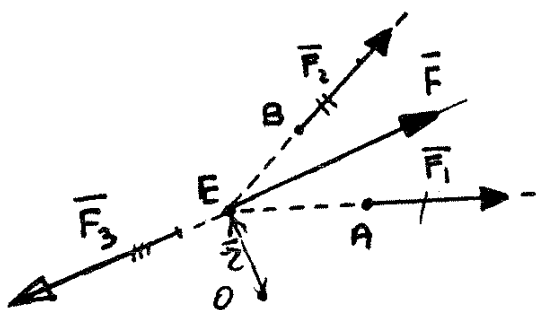


$$M_0 = 0; \quad M_E = 0 \quad F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot b = 0 \text{ ma } F_3 \neq 0 \rightarrow b = 0$$

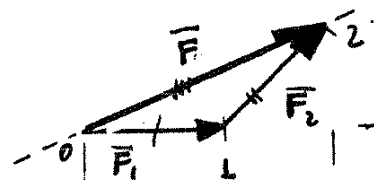
$\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$   
per avere  
di 3 forze.

**EQUILIBRIO**  $\left\{ \begin{array}{l} M = 0 \\ R = 0 \end{array} \right.$

**DEVONO FORMARE STELLA E**  
**CHIUDERE IL TRIANGOLO**  
di equilibrio



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F}; \quad \vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 \quad \times \text{VARIGNON}$$

**MONENTO DI F RISPETTO A O È UGUALE ALLA SOMMA DEI MONENTI DI F1 ED F2 RISPETTO AD O.**

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -\vec{F}$$

$F_3$   $\times$  **STESSO MODULO DI F**  
 $\times$  **STESSA DIREZIONE DI F**  
**VERSO OPPOSTO: MONENTO RISPETTO AD O UGUALE E CONTRARIO**

**Tipi di forze**

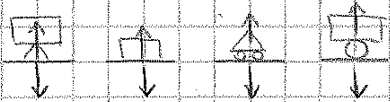
In base alla natura

- Forze concentrate: zona puntiforme (rispetto alle dimensioni del corpo) di applicazione
- Forze distribuite: zona non trascurabile ( $p, p, F_l$ ) come dimensione

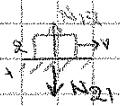
In base all'azione

- Forze esterne: reazioni vincolari;  $F_p \rightarrow$  applicate dall'esterno sul corpo o sul sist. mecc. considerato
- Forze interne: <sup>scambiate</sup> tra gli elementi <sup>costituenti il sist. mecc.</sup>; reazioni vincolari interne
- Forze di contatto tra il corp.
- Forze di massa: coinvolgono la massa  $\rightarrow$  peso; inerzia; elettromagnetico

(1) Supporto o appoggio senza attrito: le reazioni vincolari sono sempre forze prement



(1a) superfici lisce a contatto (senza attrito)



$N_{12} = -N_{21}$

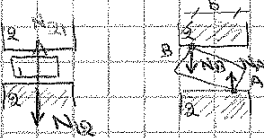
La forza è sempre PREMENTE ed è in direzione normale alla superficie del corpo.

(1b) superfici ruvide a contatto

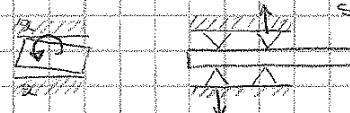


La forza ha una componente normale PREMENTE e una tang. che si oppone al moto del corpo

(2) Accoppiamento prismatico senza attrito: la forza è sempre normale alla superficie del



se  $N_A = N_B$   
 $C_R = N_A \cdot b$



supporto, il verso è da definire. Il vincolo può fornire anche un momento

(3) Cerniera (vincolo doppio)

esterna  $\ominus$

interna  $\oplus$

La forza può avere una direzione qualsiasi (cioè due componenti nel piano). Dal vincolo non può essere fornita nessuna coppia (è libera la rotazione).



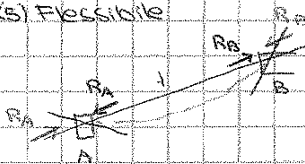
Se non c'è attrito la reazione passa per l'asse della cerniera

(4) Incastro (vincolo triplo)

Blocca i 3 gradi di libertà. Può applicare al corpo una forza di direzione qualunque + un momento



(5) Flessibile



Tira sempre

La forza è sempre traente e in direzione del cavo.

- peso trascurabile
- traente e in direzione cavo

Flessibile sempre da tirare: tira o è tirato. Non è mai un pultor

Diagramma corpo libero: disegno del corpo isolato con la rappresentazione di tutte le azioni agenti su di esso. Quali? Fico le forze: conosco modulo, direzione, verso?

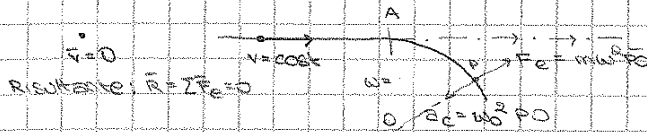
30 ottobre 2019

Foglio ④

DINAMICA

La relazione di causalità tra il moto di un corpo o di un sistema meccanico (EFFETTO) e le azioni che lo determinano (CAUSA) è stata definita da Newton con 3 leggi:

(1) Principio d'inerzia: una particella in quiete (a riposo) e non vincolata tende a rimanere ferma. Se si muove di moto rettilineo uniforme tende a continuare a muoversi di moto rettilineo uniforme. Ciò se la risultante di tutte le forze agenti su di essa è nulla.



(2) Considero una particella  $m$ . La risultante delle azioni su essa non è 0, c'è una forza dall'esterno. Cosa può equilibrare  $F$ ? Nasce una forza d'inerzia  $F_i$  che deve essere = e contraria  $\vec{F}_i = -m\vec{a}$

Equilibrio dinamico:  $\vec{F} - m\vec{a} = 0$



L'accelerazione di una particella è proporzionale alla risultante delle forze agenti su essa ed è in direzione e verso di tale risultante.

Sistema di forze equilibrato, nasce la forza d'inerzia a ristabilire l'equilibrio (dinamico)

$\vec{R} = \sum \vec{F}_e = \vec{F}, \vec{F}_i = -m\vec{a}$

Il prezzo dell'equilibrio è  $\sum \vec{F}_e = m\vec{a}$ . La costante di prop.

$\vec{F} - m\vec{a} = 0$  eq. din.

$m$ , la massa della particella, grandezza

$F = ma \rightarrow a = F/m$  è l'acc. del punto

scalare che misura l'inerzia di un corpo.

$m = \text{cost}$   $a \uparrow$  se  $F \uparrow$ ,  $F = \text{cost}$   $a \downarrow$  se  $m \uparrow$

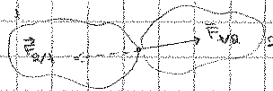
Rappresenta la resistenza del corpo a cambiare la propria velocità.

(3) Le forze di azione e reazione tra corpi che interagiscono hanno stessa retta d'azione, verso opposto e sono uguali in modulo

$\vec{F}_{1/2}$  da 1 su 2

$\vec{F}_{2/1}$  da 2 su 1

$F_{1/2} = F_{2/1}; \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$



Risultante forza d'inerzia

equilibrio

cause del moto

equilibrio dinamico

nell'esempio sul foglio 4

Foglio ⑤

• Particella  $\rightarrow$  corpo esteso  $\rightarrow$  le forze esterne tendono a farlo <sup>tradare</sup> <sub>ruotare</sub>  
 legare causa-effetto per il moto traslatorio  $\rightarrow$  uso  $\vec{a}_G$  al posto di  $\vec{a}$   $\rightarrow \sum \vec{F}_e = m\vec{a}_G$

" " " " rotatorio piano  $\rightarrow \sum \vec{M}_{eG} = I_G \ddot{\theta}$

sommatoria dei momenti di tutte le  $F_e$  calcolati rispetto a G  $\rightarrow$  momento d'inerzia del corpo rispetto a G

• Azioni d'inerzia sul corpo  $\rightarrow \vec{F}_i = -m\vec{a}_G$  forza d'inerzia applicata in G

$\vec{M}_{iG} = -I_G \ddot{\theta}$  coppia d'inerzia baricentrica

Relazioni di causalità diventa  $\rightarrow \sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = 0$  eq. di equilibrio

$\sum \vec{M}_{eG} + \vec{M}_{iG} = 0$

## ASTA OMOGENEA DI LUNGHEZZA $l$ E PESO LINEARE $q$ [N/m] INCERNIERATA IN O E APPOGGIATA IN A

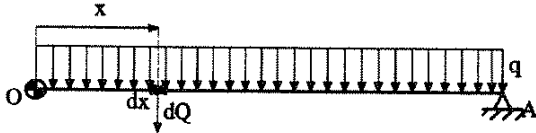
**OMOGENEA:** sezione costante e densità o peso specifico costante.  
 $q$  [N/m]; PESO SPECIFICO LINEARE



Elemento:  $dx$

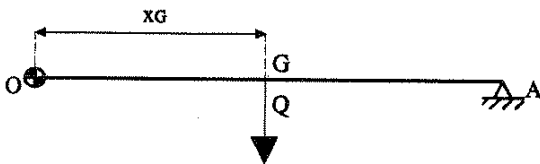
Peso:  $dQ = q \cdot dx$

Risultante:  $\bar{Q} = \Sigma d\bar{Q}$  (tutte forze parallele)



$$Q = \int_0^l dQ = \int_0^l q \cdot dx = q \cdot \int_0^l dx = q \cdot l$$

Invece di lavorare con tutte le forze elementari, lavoro col risultante  $Q$ .

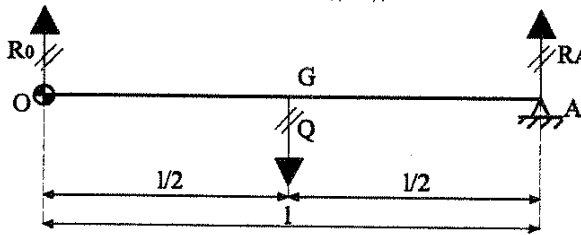


La risultante viene applicata in un punto G tale che il momento  $Q$  rispetto ad O sia uguale alla somma dei momenti dei componenti  $dQ$  rispetto allo stesso punto O.

*del*  
applico quel baricentro di una trave omogenea G

$$Q \cdot x_G = \int_0^l dQ \cdot x = \int_0^l (q \cdot dx) \cdot x = q \cdot \int_0^l x \cdot dx = q \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^l = q \cdot \frac{l^2}{2} = (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = Q \cdot \frac{l}{2}; \quad x_G = \frac{l}{2}$$

Voglio fare l'equilibrio statico: conosco  $Q$ ,  $R_A$  reatt. del vincolo sulla base,  $R_0$  reatt. alla O



**EQUILIBRIO STATICO**

$Q; R_A; R_0$

$Q \parallel R_A \rightarrow R_0 \parallel$

$\uparrow R_0 + R_A - Q = 0$

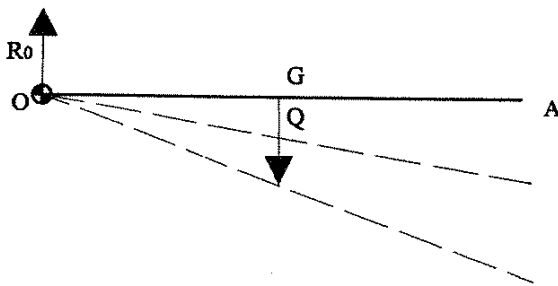
$R_0 = Q - R_A$

$\curvearrowright M_0 = 0 \quad Q \cdot \frac{l}{2} - R_A \cdot l = 0$

$R_A = \frac{Q}{2}$  il carico si ripartisce in modo uguale in O e in A

$R_0 = \frac{Q}{2}$

Perturbo il sistema, tolgo l'appoggio in A



Tolto l'appoggio in A

$R_0 - Q = 0$

**SISTEMA SQUILIBRATO**

c'è una coppia che fa ruotare il corpo attorno ad O.

$\curvearrowright M_0 = 0 \quad Q \cdot \frac{l}{2} \neq 0$

Istante iniziale

$t = 0 \quad \omega = 0$

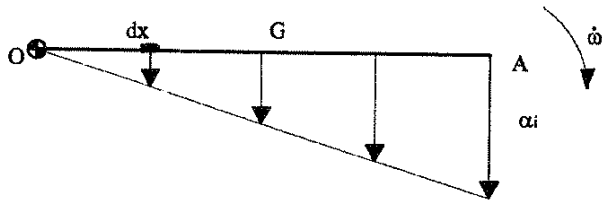
È possibile una variazione di velocità se c'è un'accel. Nasce  $\omega_i \rightarrow t = dt \quad \omega \neq 0 \quad \omega_i = \frac{d\omega}{dt}$  tutti i punti. *Ciò vale in*

$\bar{a} = \dot{\omega}_i \bar{k} \wedge (\bar{P} - O) - \omega_i^2 \cdot (\bar{P} - O)$  moto rotatorio

$a_i = \dot{\omega}_i \cdot x$  acc. iniziale, non c'è la componente centripeta perché non c'è  $\omega$  che nasce subito. **DISTRIBUZIONE TRIANGOLARE DI dopo.**

**ACCELERAZIONE**

$a_0 = 0; \quad a_G = \dot{\omega}_i \cdot \frac{l}{2}; \quad a_A = \dot{\omega}_i \cdot l$  *acc. iniziali di alcuni punti rotoidi*



Su ogni massa elementare  $dm = \left(\frac{q}{g}\right) \cdot d'x$  nasce una forza

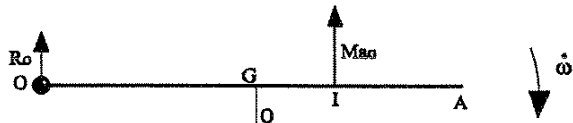
d'inertia  $d\bar{F}_i = -dm \cdot \bar{a}$  e si genera una distribuzione triangolare.

Sposto  $F_i$  nel baricentro  $\rightarrow$  interviene una coppia d'inerzia

Meccanica Applicata

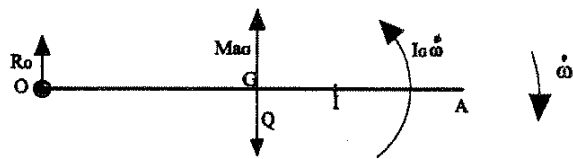
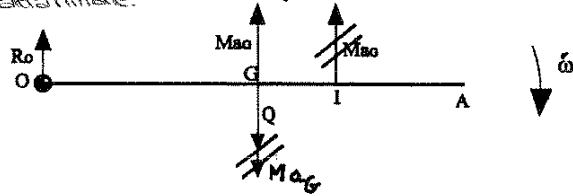
MA = 13 - 12/13

DA I  $\rightarrow$  G TRASPOSIZIONE



Per capire il verso della coppia, metto in G due forze uguali e opposte, una si cancella con quella in I, l'altra rimane.

Il verso della forza e del suo spostamento dicono il verso della coppia



$$\overline{OG} = \frac{l}{2}; \quad \overline{OI} = \frac{2}{3}l;$$

$$\overline{IG} = \frac{l}{6}$$

Trasporto  $Ma_g$  da I a G

Calcolo la coppia che nasce:

$$Ma_g \cdot \overline{GI} = M \cdot \dot{\omega} \overline{OG} \cdot \overline{GI} = \left( M \dot{\omega} \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{6} \right) =$$

$$= \left( M \frac{l^2}{12} \right) \dot{\omega} = I_G \cdot \dot{\omega}$$

momento d'inerzia dell'asta rispetto al baricentro g

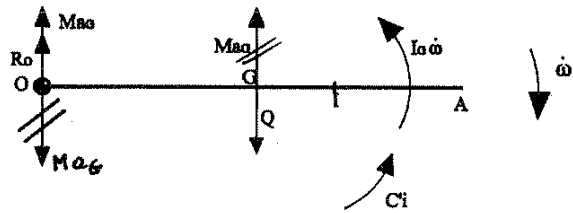
Con  $I_G = M \rho_{IG}^2$  dove  $\rho_{IG} = \frac{l}{\sqrt{12}}$

$C_{IG} = -I_G \dot{\omega}$  se  $F_i$  in G

coppia d'inerzia pari al moto iniziato da una massa m con raggio pari al braccio d'inerzia



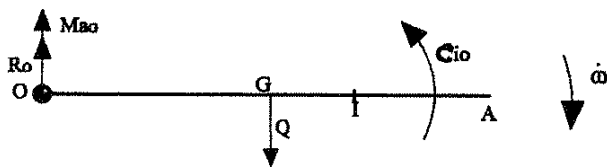
DA G  $\rightarrow$  O



Da G  $\rightarrow$  O

$$C'_i = (Ma_g) \cdot \overline{OG} = M \dot{\omega} \overline{OG} \cdot \overline{OG} =$$

$$= M \dot{\omega} \overline{OG}^2 = M \left( \frac{l}{2} \right)^2 \dot{\omega}$$



$$C_{IO} = C_{IG} + C'_i = M \frac{l^2}{12} \dot{\omega} + M \frac{l^2}{4} \dot{\omega} =$$

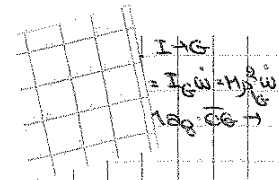
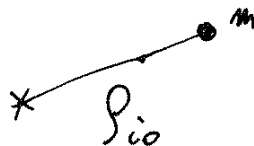
$$= \left( M \frac{l^2}{3} \right) \dot{\omega} = I_O \dot{\omega}$$

momento d'inerzia rispetto a O > di quello rispetto a G

$$I_G \dot{\omega} + M \overline{OG}^2 \dot{\omega} = I_O \dot{\omega}$$

$$I_O = I_G + M \overline{OG}^2$$

$$\begin{cases} I_O = M l^2 / 3 \\ I_O = M \rho_{IO}^2 \\ \rho_{IO} = l / \sqrt{3} \end{cases}$$




IL SISTEMA CONTINUO DELLE FORZE D'INERZIA SI RIDUCE


A:  $\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$  APPLICATA IN  $I$   
 OPPURE


Meccanica Applicata  
 MA = 15-12/13  
 (E)

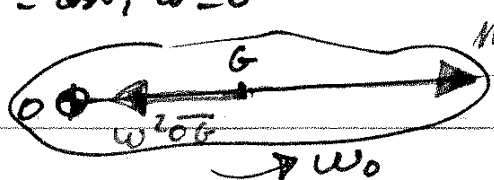
$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$  FORZA RISULTANTE IN  $G$   
 $C_i = -I_G \dot{\omega}$  COPPIA RISULTANTE CON  $I_G$

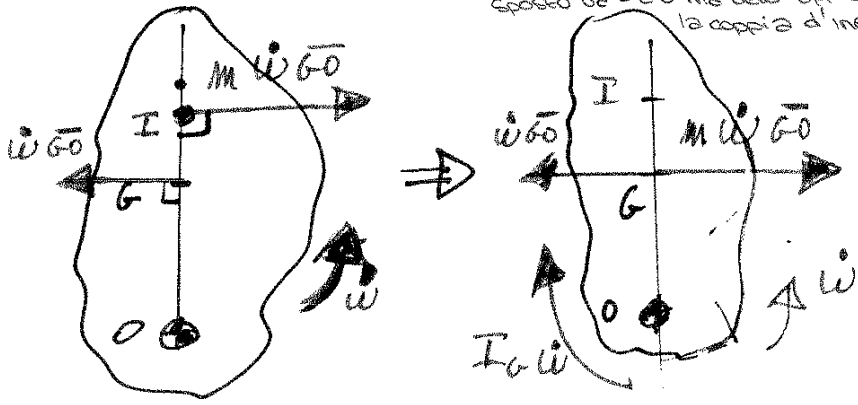
RIDUZIONE FORZE D'INERZIA  $\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$ ;  $C_i = -I_G \dot{\omega}$

a) CORPO TRASLANTE  $\omega = 0$   $\dot{\omega} = 0$   
 $\vec{v}_G = 0$  o  $\vec{v}_G \neq 0$  con  $\vec{a}_G \neq 0$  PURA FORZA   $G \equiv I; O \neq O$

b) ROTANTE INTORNO A  $G$  CON  $\omega = \text{costante}$ ;  $\dot{\omega} = 0$   
 $F_i = 0$   $C_i = 0$  FISSO  $a_G = 0$ ;  $m a_G = 0$   
 L'inerzia non ci dà il risultato. Non c'è altro, ma c'è il effetto locale d'è.  
 $a_c = \omega^2 r \Rightarrow dm \cdot a_c$  CENTRALIZZAZIONE 

c) ROTANTE INTORNO A  $O \neq G$  CON  $\omega \neq 0$   $\dot{\omega} \neq 0$   
 FISSO  $a_G = 0$   $m a_G = 0$   
 $C_i = -I_G \dot{\omega}$  PURA COPPIA D'INERZIA   $G \equiv O; I \neq O$

d) ROTANTE INTORNO A  $O \neq G$   $\omega = \text{cost}$ ;  $\dot{\omega} = 0$   
 $I_G \dot{\omega} = 0$   $a_G = \omega^2 \vec{OG}$   
 $\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$   $m a_G = m \omega^2 \vec{OG}$    $M \omega^2 \vec{OG}$   
 SE  $\vec{OG} = 0$  SI RITORNA IL CASO b) Sposto la forza lungo la retta d'azione -> non compaiono momenti

e) ROTANTE INTORNO A  $O \neq G$   $\omega = 0$ ;  $\dot{\omega} \neq 0$  acc. inziale  
 Sposto da  $I$  a  $G$  ma devo applicare la coppia d'inerzia  $a_G = \dot{\omega} \vec{OG}$   
 $m a_G$  in  $I$   
 OPPURE  $m a_G$  in  $G$   
 $I_G \dot{\omega}$   
  
 $P_G^2 = \vec{OG} \cdot \vec{OG} \cdot I$

SE  $\vec{OG} = 0$  O  $\neq G$  SI RITORNA IL CASO c)

**Lavoro ed energia**

$\vec{F} = m\vec{a}$  <sup>istantanea</sup> relazione tra <sup>agente su una particella</sup> forza e accelerazione della particella stessa  
 Reato  $a \rightarrow v \rightarrow s$  integrando

2 classi generali di problemi con effetti cumulativi di forze equilibrate durante un intervallo di moto

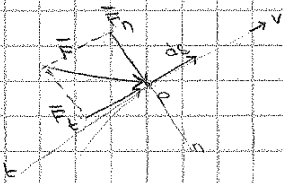
(1) Integrazione delle forze rispetto allo spostamento della particella su cui agiscono  $\rightarrow$  eqz del lavoro e dell'energia

(2) Integrazione delle forze rispetto al tempo in cui esse sono applicate  $\rightarrow$  equazioni dell'impulso, della quantità di moto, del momento della quantità di moto

LAVORO  $\rightarrow$  es. 1 p. 60 (vedi a sx) È una quantità scalare

$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \alpha = F_t ds$  <sup>lavoro fatto da una forza  $\vec{F}$  che sposta il suo punto di applicazione di  $d\vec{s}$  /  $\alpha$  è l'angolo tra  $\vec{F}$  e  $d\vec{s}$ ; la componente  $F_t$  non compie lavoro</sup>  
 $\hookrightarrow$  forza scalare spostamento o coppia scalare angolo

Punto P di massa m su cui agisce F. Descrive una traiettoria da  $S_1$  a  $S_2$



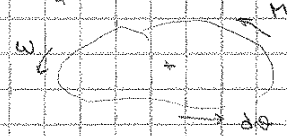
- lavoro > 0 motore se  $F_t$  concorde con  $ds \rightarrow$  favorisce lo spostamento
- lavoro < 0 resistente se  $F_t$  discorde con  $ds \rightarrow F_t$  si oppone allo spostamento

Se  $F \perp ds \rightarrow$  lavoro = 0

$L = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$  <sup>devo conoscere la relazione tra  $\vec{F}$  ed  $s$  (analitico, o data da una curva)</sup> per spostamento finito, oppure  $L = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \times d\vec{s} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$  in coord. cart.

Lo stesso vale per momenti

$dL = \vec{M} \times d\vec{\theta}$  ma  $\vec{M} \parallel d\vec{\theta} \rightarrow dL = M d\theta \rightarrow L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$



lavoro > 0 motore se M concorde con  $d\theta$

lavoro < 0 resistente se M discorde con  $d\theta$

[N · m] = Joule

[Nm · rad] = Joule MA il lavoro non è una coppia! anche se l'unità è =

POTENZE: è una quantità scalare

Capacità di una macchina di compiere lavoro in un certo tempo

potenza sviluppata da una <sup>forza</sup> velocità

$P = \frac{dL}{dt} = \frac{F_t ds}{dt} = F_t \cdot v$

(lavoro di F)  $\downarrow$  non varia nel tempo

o di trasportare energia

$P = \frac{dL}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M \omega$

(lavoro di M)

Se agiscono contemp. sia la forza sia la coppia  $\rightarrow P = F_t v + M \omega$

[N ·  $\frac{m}{s}$ ] = Watt = J/s

potenza > 0 motore se concordi ( $F_t; v$ ) e ( $M; \omega$ )

potenza < 0 resistente se discordi ( $F_t; v$ ) e ( $M; \omega$ )

la sola energia erogata dalla macchina non è indicativa delle prestazioni della stessa, dato che un motore, comunque piccolo, può erogare una qualunque quantità di energia, purché gli si dia il tempo sufficiente per farlo



**TAMBURO - FUNE - CARICO.**

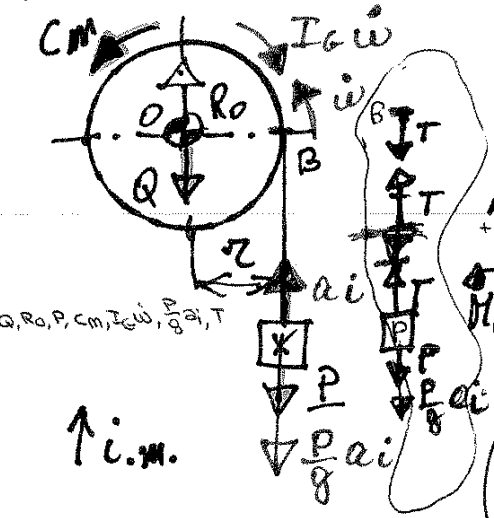
**a** Lavoro con le accelerazioni  
INIZIALMENTE FERMO

Meccanica Applicata MA = 18 - 12/13

$t=0 \quad v=0 \quad \omega=0 \quad C_s = P \cdot r \quad R_o = P + Q$   
VEDI **1** PRECEDENTE. **CON PESO Q**  
è qualcosa in più che fa **TAMBURO**  
iniziare il moto con una certa **acc.**

APPLICO UNA  $C_m > C_s$  INIZIA A MUOVERSI  
IN SALITA, RICAVARE  $a_i$ ;  $R_o$   $\neq 0$

$a_i = \dot{\omega} \cdot r$ ;  $\dot{\omega} = a_i / r$



$Q, R_o, P, C_m, I_G, \dot{\omega}, \frac{P}{g}, a_i, T$

$R_o - Q - P - \frac{P}{g} a_i = 0 \quad R_o = P + Q + \frac{P}{g} a_i$

$C_m - I_G \dot{\omega} - P \cdot r - \frac{P}{g} a_i r = 0$

$C_m - I_G \frac{a_i}{r} - P r - \frac{P}{g} a_i r = 0$

$(\frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r}) a_i = C_m - P r$

$\uparrow i.m.$

$a_i = \frac{C_m - P \cdot r}{\frac{P r}{g} + \frac{I_G}{r}}$

Le reazioni in O non danno momento  
coppia d'inerzia che nasce perché c'è  $\dot{\omega}$   
Se applico  $C_m > C_s$  con quale  $a_i$  si muove il sistema? Oppure quale  $c$  devo applicare per avere una certa  $a_i$ ?

DISCO SOTTILE  
 $I_G = \frac{Q r^2}{g}$

Se  $a = 0 \quad R_o = P + Q$ ; se  $a \uparrow \quad R_o \uparrow$

$T = P$  se  $a = 0$ ; se  $a \neq 0 \quad T = P + \frac{P}{g} a$

$\dot{\omega} = \frac{a_i}{r}$

**b** Lavoro con le velocità  $\rightarrow$  teor. dell'energia all'istante  
Coppia motrice  $C_m$  iniziale  
fermo  $\rightarrow$  si muove  
è una var. di velocità

$t=0 \quad v=0$  APPLICANDO UNA  $C_m > C_s$   
CON QUALE ACCELERAZIONE  $a_i$  INIZIA IL MOTO DI SALITA  $\uparrow v$

Coppia motrice  $\rightarrow$  se di salita penso che sia  $\omega$   $\neq 0$  con  $v$   
Potenza in gioco?  $C_m \cdot \omega > 0$  perché motrice, non c'è attrito  $\rightarrow$  rimane  $Pv$  tra loro il e discorsi  $\rightarrow -Pv$   
Esprimo  $E$  in funzione di  $\omega$  o di  $v \rightarrow$  scelgo  $v$   
Ora demo, semplifico, metto in evidenza  $a_i$ , moltiplico e divido per  $r$ .  
Maggiore è la coppia motrice maggiore sarà  $a_i$  a parità di condizioni iniziali.

$v = \omega r$ ;  $\omega = v / r$

$E = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$ ;  $\Pi = C_m \cdot \omega - P \cdot v$

$\frac{dE}{dt} = \Pi$

$E = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{v^2}{r^2}$ ;  $\Pi = C_m \frac{v}{r} - P \cdot v$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} 2v \dot{v} + \frac{1}{2} I_G \frac{2v}{r^2} \dot{v} = \Pi = C_m \frac{v}{r} - P v$

$\frac{P}{g} a_i + \frac{I_G}{r^2} a_i = \frac{C_m}{r} - P$ ;  $a_i = \frac{(C_m/r - P) \cdot r^2}{(\frac{P}{g} + \frac{I_G}{r^2}) \cdot r} = \frac{C_m - P r}{\frac{P r}{g} + \frac{I_G}{r}}$

tiene conto dell'inerzia della fune ... e del tamburo

$C_m = P \cdot r + (\frac{P}{g} a_i + \frac{I_G}{r^2} a_i) r = P \cdot r + \frac{P}{g} a_i \cdot r + I_G \cdot \frac{a_i}{r} = P \cdot r + (\frac{P}{g} a_i) r + I_G \dot{\omega}$

21

IN SALITA VIENE A RIANCHARE C.m.  $MA = 19-12/13$

(3E)

**(a) ACCELERAZIONE**

Meccanica Appl

$t=0 \quad V \uparrow \quad \omega \uparrow \Rightarrow C_m = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{1}{2} \frac{P}{g} 2Va + \frac{1}{2} I_G 2Va \right) =$$

$$= -P \cdot V + C_m \omega$$

$$a = \frac{-P}{\frac{P}{g} + \frac{I_G}{r^2}} = - \frac{P r}{\left( \frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r} \right)}$$

Il termine inerziale si cambia

Mentre sale a  $v=const$  manca  $C_m$  quindi è l'accel. che nasce sul sistema?  
 $\frac{dE}{dt}$  = potenza ingresso

$Q, R, P$

È un termine negativo si tratta di

$Q < 0$  (NEGATIVA)

Nasce una  $\omega$  contraria a  $\omega$  il sistema decelera con quella accelerazione fino a fermarsi.

**DECELERAZIONE**

VARIA LA VELOCITÀ FINO A FERMARSI.  $t = t_f$

**(b) SPAZIO PERCORSO PRIMA DI FERMARSI**

(1)  $t=0 \quad V = V_s \quad \omega = \omega_s \quad S=0 \quad \theta = \frac{S}{r} = 0$   
 $C_m = 0$

(2)  $t = t_f \quad V=0 \quad \omega=0 \quad S_f \quad \theta_f$

La velocità non deve avere discontinuità  
 → appena manca  $C_m$ , rallenta, si annulla e poi riammenta

$Q, R, P$

$S=0 \quad V_s$

$$E_f - E_i = L$$

$$0 - \left( \frac{1}{2} \frac{P}{g} V_s^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_s^2 \right) = -P S$$

$$S_f = \frac{1}{2} V_s^2 \left( \frac{P}{g} + \frac{I_G}{r^2} \right) \frac{1}{P}$$

spazio di frenata  
 Dipende solo dalla velocità iniziale in cui viene a mancare la coppia motrice

Procedo col LAVORO (oppure potrei usare alcune situazioni note in cui conosco  $v$  e metto un'incognita)  
 si passa per l'asse di rotazione, ma non c'è attrito al perno + lavoro solo P

$$\omega = \frac{V}{r}$$

**SI FERMA E POI INIZIA LA DISCESA DEL CARICO E LO SVOLGIMENTO DELLA FUNE CON ROTAZIONE DEL TAMBURO.**

**(c) RIDISCESA  $t=0 \quad V=0 \quad \omega=0$**

$t \rightarrow dt \rightarrow V \downarrow$  con  $a$ ??

$$\frac{dE}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{P}{g} 2V a + \frac{1}{2} I_G 2Va \right) =$$

$$= P \cdot V$$

$$a = \frac{P r}{\frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r}}$$

$a > 0$  (POSITIVA)  
**ACCELERAZIONE**  
 $a \downarrow \quad \omega = \frac{a}{r}$

L'inerzia del tamburo fa sì che l'accel. con cui il carico scende è minore rispetto a  $g$  perché deve vincere l'inerzia.

**SOLO PESO P  $a = g$**

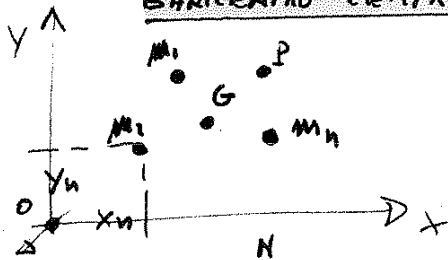
Per avere  $a=0 \quad v=const$  devo applicare una coppia  $C_f = Pr$  perché non posso intervenire sui termini inerziali  
 $a = \omega t$  DISCESA SENZA COPPIA FRENANTE ( $C_f = Pr$ )  
 DA ADDIRIBIRE X DIVIDERE 0... 1/16 = 1/16

**CENNI GEOMETRIA DELLE MASSE**

Mecchanica Applicata

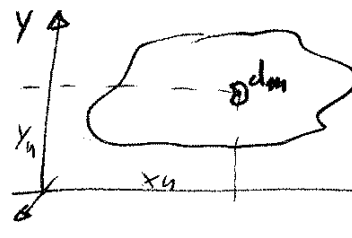
HA = 21 - 12/13

BARICENTRO CENTRO DI MASSA



$$M = \sum_{i=1}^N M_{h_i}$$

masse CONCENTRATE



$$M = \int dm$$

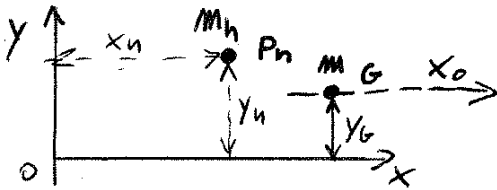
masse DISTRIBUITE

$$M(G-O) = \sum_{i=1}^N M_{h_i} (P_i-O)$$

$$x_G = \frac{\sum M_{h_i} x_{h_i}}{M}; y_G = \frac{\sum M_{h_i} y_{h_i}}{M}; z_G = \frac{\sum M_{h_i} z_{h_i}}{M}$$

$$x_G = \frac{\int dm \cdot x}{M}; y_G = \frac{\int dm \cdot y}{M}; z_G = \frac{\int dm \cdot z}{M}$$

SISTEMI PLANI DI MASSE  $M_{h_i}$  ( $h=1 \rightarrow N$ ) CONCENTRATE NEI PUNTI  $P_h$  DI COORDINATE  $x_h, y_h$  RISPETTO AD UN RIFERIMENTO CARTESIANO  $OXY$ .



MOMENTO STATICO DEL SISTEMA DI MASSE

$M_{h_i}$  RISPETTO AD UN ASSE È LA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER LE RISPETTIVE DISTANZE DEI PUNTI  $P_h$  DALL'ASSE STESSO.

MOMENTO STATICO RISPETTO ASSE X:

$$S_x = \sum_{i=1}^N M_{h_i} \cdot y_{h_i} = M \frac{\sum M_{h_i} \cdot y_{h_i}}{M} = M \cdot y_G$$

$$S_y = \sum_{i=1}^N M_{h_i} x_{h_i} = M x_G$$

DISTANZA DI G DALLA RETTA y  $x_G$

Se  $M.S. = 0$  la distribuzione a dx e a dy è uguale  
 M.S. È UGUALE AL MOMENTO STATICO DELLA MASSA TOTALE M CONCENTRATA IN G.

$$S_x = \int dm \cdot y$$

→ IL MOMENTO STATICO RISPETTO A QUALUNQUE RETTA PASSANTE PER IL BARICENTRO VALE 0.  $S_{x_0} = 0; S_{y_0} = 0$

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD UN ASSE

È LA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER I QUADRATI DELLE DISTANZE DEI PUNTI  $P_h$  DALL'ASSE STESSO

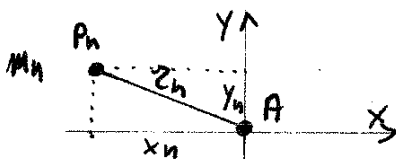
MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ASSE X:

$$I_x = \sum_{i=1}^N M_{h_i} \cdot y_{h_i}^2$$

$$I_x = \int dm \cdot y^2$$

$$I_x = M P_x^2$$

$P_x$  RAGGIO D'INERZIA: DISTANZA DALL'ASSE X IN CUI CONCENTRARE LA MASSA PER AVERE LO STESSO MOMENTO D'INERZIA  
 Per un rettangolo varia da un min a un max e se non bisogna per le due braccia, uso l'ellisse di KUNST.



MOMENTO D'INERZIA POLARE (RISPETTO AD UN PUNTO A)

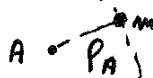
È LA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER I QUADRATI DELLE DISTANZE  $r_{h_i}$  DAL PUNTO A

MOMENTO D'INERZIA POLARE

$$I_A = \sum_{i=1}^N M_{h_i} \cdot r_{h_i}^2$$

$$I_A = \int dm \cdot r^2$$

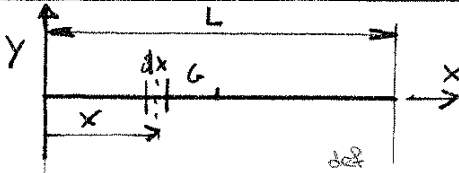
$$I_A = M P_A^2$$



MOMENTI D'INERZIA

Meccanica Applicata MA=23-12/13

ASTA OMOGENEA

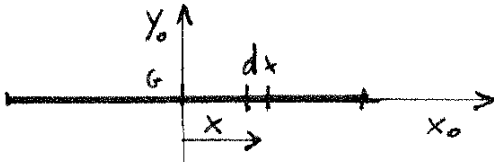


$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \int \left[\frac{K \rho_0}{m}\right]$  COSTANTE

$dm = \rho dx$  ;  $m = \rho \cdot L$

MOMENTO STATICO  $S_y = \int_0^L dm \cdot x = \int_0^L \rho dx \cdot x = \rho \int_0^L \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \rho \frac{L^2}{2} = \rho \cdot L \cdot \frac{L}{2} = m \frac{L}{2} = m x_G$

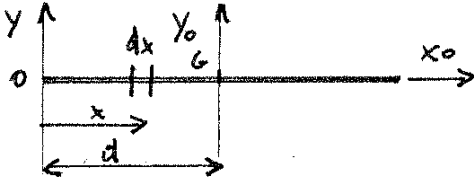
MOMENTO D'INERZIA POLARE: RISPETTO A G.



$I_G = \int_{-L/2}^{L/2} dm \cdot x^2 = \int_{-L/2}^{L/2} \rho dx \cdot x^2 = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx =$

$= \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \rho \frac{1}{3} \left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right] = \rho \cdot \frac{1}{3} \frac{L^3}{4} = (\rho \cdot L) \frac{L^2}{12} = m \frac{L^2}{12} = m \rho_{IG}^2$  ;  $\rho_{IG} = \frac{L}{\sqrt{12}}$

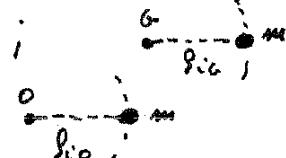
MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD O



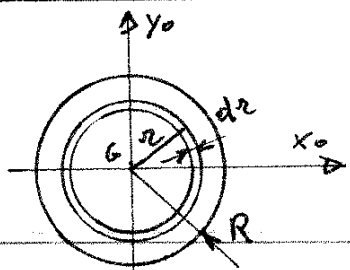
$I_O = \int_0^L dm x^2 = \int_0^L \rho dx \cdot x^2 = \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \rho \cdot \frac{L^3}{3} =$

$= (\rho \cdot L) \frac{L^2}{3} = m \frac{L^2}{3} = m \rho_{IO}^2$  ;  $\rho_{IO} = \frac{L}{\sqrt{3}}$

$I_O = I_G + m d^2 = I_G + m \frac{L^2}{4} = m \frac{L^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = m \left[\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4}\right] = m \frac{L^2}{3}$  ;  $\rho_{IO}^2 = \rho_{IG}^2 + d^2$



DISCO SOTTILE OMOGENEO



$\rho_s = \text{cost}$  ;  $\rho_s \left[\frac{Kg}{m^2}\right]$

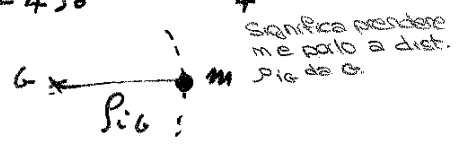
$M = \rho_s \cdot \pi R^2$

$dA = 2\pi r dr$  ;  $dm = \rho_s \cdot 2\pi r \cdot dr$  ;  $m = \int_0^R dm$   
 $A = \pi R^2$

MOMENTO D'INERZIA POLARE RISPETTO A G

$I_G = \int dm \cdot r^2 = \int_0^R \rho_s \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = \rho_s \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho_s \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi \rho_s \cdot \frac{R^4}{4} =$

$= 2 \left(\pi \rho_s \frac{R^2}{2}\right) \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} = m \rho_{IG}^2$  ;  $\rho_{IG} = \frac{R}{\sqrt{2}}$



$I_G = I_{x_0} + I_{y_0}$  ;  $I_{x_0} = I_{y_0}$  ;  $I_G = 2 I_{y_0}$  ;  $I_{y_0} = \frac{I_G}{2}$

$S_G = \int dA \cdot r^2 = \int_0^R 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{R^4}{2} =$   
 $= (\pi R^2) \cdot \frac{R^2}{2} = A \cdot \frac{R^2}{2}$  ... l'espressione è analoga, il raggio di inerzia è lo stesso

MOMENTO D'INERZIA DELLE SUPERFICI

1° PRINCIPIO TERMODINAMICA

lavoro  $\leftarrow dL + dQ = dU + dE \rightarrow$  energia cinetica macroscopica  
 quantità di calore  $\leftarrow \rightarrow$  energia interna U (moti microscopici)

DISACCOPPIAMENTO

$dL = dE$   $dQ = dU$

Integrale primo: bilancio integrato di energia

$E_f - E_i = L$  tutto il lavoro fatto nell'intervallo di tempo  $\Delta t$

$t_f; t_i; \Delta t = t_f - t_i$

$L = E_f - E_i$

$L_m$  lavoro motore  $> 0$

$L_r$  lavoro resistente  $< 0$

$L_m > L_r \quad E_f > E_i \quad \uparrow v$

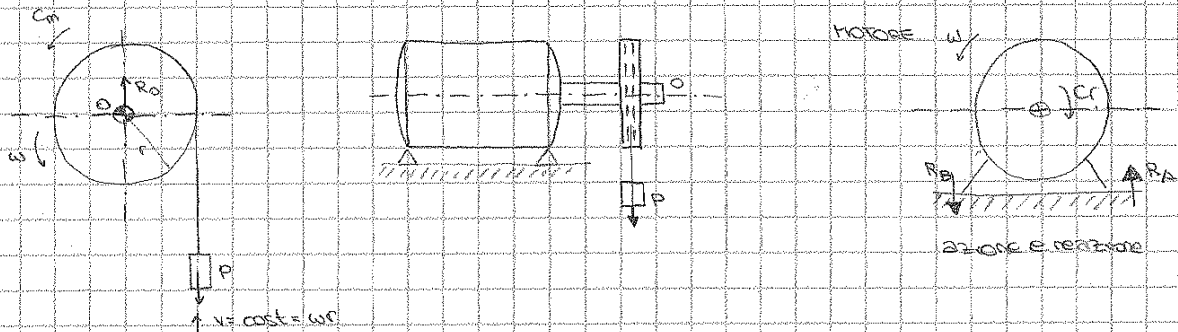
$L_r > L_m \quad E_f < E_i \quad \downarrow v$

$L_m = L_r \quad E_f = E_i \quad v = \text{cost}$

tra due stati dinamici di un sistema agli estremi di un intervallo di tempo finito

foglio ②

8 novembre 2019



Potenza entrante che fornisce al sistema  $\rightarrow \pi_e = C_m \cdot \omega \rightarrow$  serve a sollevare il carico P  $\rightarrow$  la potenza utile è  $\pi_u = P \cdot v$

RENDIMENTO  $\eta = \frac{\pi_u}{\pi_e}$   $\pi_e = \pi_u + \pi_d$  potenza dissipata  
 $\pi_u = \pi_e - \pi_d$

$\eta$  è il rapporto tra la potenza utile che si ottiene da una macchina e la potenza fornita alla macchina (detta anche potenza entrante)

$\eta = \frac{\pi_e - \pi_d}{\pi_e} = 1 - \frac{\pi_d}{\pi_e}$  se  $\pi_e = \pi_d \rightarrow \eta = 0$

$\eta < 1$  ogni sistema opera sempre con qualche perdita di energia (nei sistemi meccanici questa è dovuta alla presenza delle forze d'attrito che compiono lavoro negativo, convertito in calore dissipato nell'ambiente)

Nell'esempio  $\eta = \frac{P \cdot v}{C_m \cdot \omega} = \frac{P \cdot \omega r}{P \cdot r \cdot \omega} = 1$  senza attrito al perno; senza rigidità f.r.e...

foglio ③

\* La reazione complessiva del piano non sarà più verticale, ma inclinata di un angolo  $\beta$ .  
 Tale inclinazione della reazione è resa possibile dalla presenza di asperità sulle superfici a contatto. Quando si raggiunge un valore limite di  $F$ , tale da determinare la rotura delle asperità, il corpo mette in movimento. La condizione limite è  $F_{lim} = T_{lim} = N \cdot \tan \beta_{lim} = \mu_s \cdot N$   
 cioè l'inclinazione di  $R$  rispetto alla normale raggiunge il valore limite  $\beta_{lim} = \arctan(\mu_s) = \phi_s$   
 $\phi_s$  ANGOLO DI ASPERENZA,  $\mu_s$  COEFFICIENTE DI ATRITO STATICO O COEFF. DI ADERENZA

Lubrificazione: non conta la natura delle superfici a contatto

1) Considero un corpo rigido a base piana appoggiato su un piano orizzontale e soggetto inizialmente solo al proprio peso e alla reazione verticale di appoggio ( $N = P = mg$ ). Suppongo di applicare al corpo una forza orizzontale  $F$  di valore gradualmente crescente a partire da 0.

1) in quiete  $v=0$  Al crescere di  $F$ , cresce in egual misura una reaz. tang. di attrito  $T$  - successione  
 forza-peso  $\vec{P}$  su  $Q \rightarrow Q$  sostiene  $\vec{P}$  con  $\vec{N}$  di situazioni di equilibrio statico  
 $\vec{N} - \vec{P} = 0$      $\vec{N} = \vec{P}$      $R = 0$      $M = 0$



$N =$  somma delle aree elementari  $= \int dN = \int p dA \rightarrow$  distribuzione costante di pressione  $\rightarrow$  rettangolo con base  $l$  e altezza

Applico una  $F$  passante per  $G \rightarrow$  perturbo il sistema

2) senza attrito radente

Nasce una forza d'inerzia uguale e contraria a  $F$

per il riequilibrio dinamico

$\rightarrow$  inizia a muoversi

Rimane una distribuzione costante di  $p$

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G = -\frac{P}{g} \vec{a}_G$$

$$N = P ; F - \frac{P}{g} a_G = 0 \rightarrow a_G = \frac{F}{P} g$$

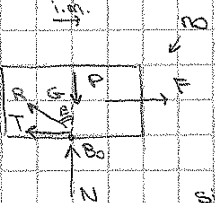


$\rightarrow$  inizia a muoversi trascinando su  $Q$  e mantenendo il contatto

Il corpo inizia a muoversi con  $a: = \frac{F}{P} g$

Se lascio agire  $F = \text{cost}$  il corpo continua a muoversi con  $a = \text{cost}$ , moto unif. accelerato

3) con attrito



Nasce una forza che si oppone all'inizio del moto  $\rightarrow T$

$M = 0 \rightarrow$  le forze devono fare stella,  $R$  deve passare per  $G$

$T h = 0 \rightarrow$  assurdo

Devo spostare  $R$  verso destra in modo che passi per  $G$

$$T h - N b = 0$$

$P$  non è più costante ma c'è un aggravo nella parte anteriore,  $p >$  nella parte iniziale ma il sistema rimane fermo

Quindi:

inizialmente Fermo  $v=0$

applico  $F$  e  $Q$  resta Fermo

$$N = P \quad F_1 - T_1 = 0 \rightarrow F_1 = T_1$$

$$M_G = 0 \quad N_1 b_1 - T_1 h = 0 \rightarrow b_1 = \frac{T_1}{N_1} h$$

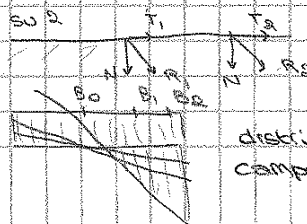
$$b_1 = \tan \beta_1 \cdot h$$

Applico  $F_2 > F_1$ : resta Fermo

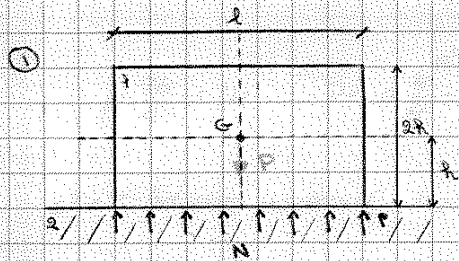
$$N = P \quad F_2 = T_2$$

$$M_G = 0 \quad N_2 b_2 - T_2 h = 0 \quad b_2 = \frac{T_2}{N_2} h$$

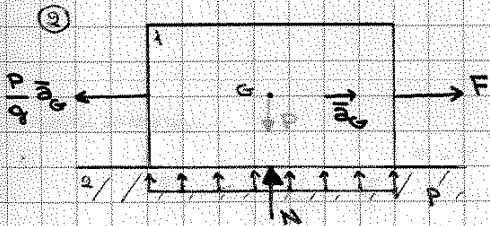
$$b_2 = \tan \beta_2 \cdot h$$



distribuzione di  $p$   
 campo di aderenza

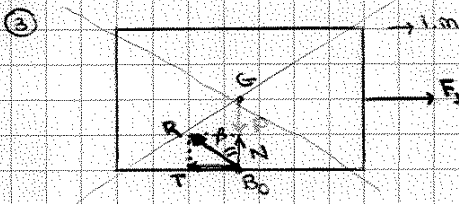


$R=0 \quad N=P$   
 $F=0$   
 in quiete  $\rightarrow v=0$



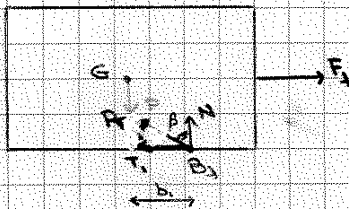
$F_1 = -m\ddot{a}_G = -\frac{P}{g}\ddot{a}_G$   
 $p = \cos\alpha$   
 $U = P$   
 $F - \frac{P}{g}\ddot{a}_G = 0 \rightarrow \ddot{a}_G = \frac{F}{P}g$

senza attrito radente



Nasce T opposta a i.m.  
 $M=0 \rightarrow T h = 0$  assurdo...

con attrito

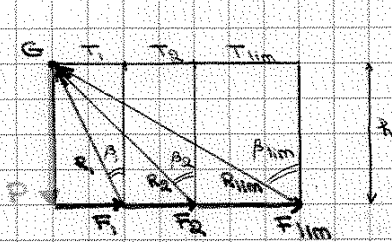


... R applicata in B1, non  
 in B0  
 $T h - N b = 0$   
 $p \neq \cos\alpha$   
 il corpo resta fermo

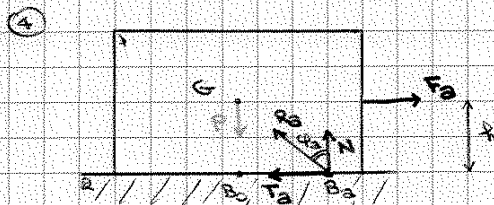
Applico  $F_2$ ?  $F_3$  e resta ancora fermo.



$\uparrow N = P$   
 $\rightarrow F_2 = T_2$   
 $\sum M(G) = N b_2 - T_2 h = 0 \rightarrow b_2 = \frac{T_2}{N} h = \tan\beta_2 \cdot h$



$F_{lim} = T_{lim} = N \tan\beta_{lim} = \frac{P}{2} N$  COEFF. DI ADERENZA  
 $\beta_{lim} = \arctan\frac{P}{2} = \varphi_0$  ANGOLO DI ADERENZA



limite di aderenza  $\rightarrow \frac{T_2}{N} = \frac{P}{2}$   
 $\uparrow N - P = 0$   
 $\rightarrow F_2 - T_2 = 0$   
 $\sum M(G) = N b_2 - T_2 h = 0 \rightarrow b_2 = \frac{T_2}{N} h = \tan\varphi_0 h = \frac{P}{2} h$

Fino a questo punto i due corpi non si muovono uno rispetto all'altro

$T_2$  si oppone a  $v_{rel}$   
 $T = \mu \cdot N$

POTENZA DISSIPATA: l'elemento arriva a velocità  $v$ ,  $T = \mu \cdot N$ ,  $N = P$ ,  $F = T$

$\pi_d = T \cdot v = \mu \cdot N \cdot v = \mu \cdot P \cdot v$  quando trascino con vel.  $v$  il sistema

Non c'è  $\pi_d$ , tutto ciò che fornisce va in attrito

$\eta = \frac{\pi_u}{\pi_e} = \frac{P \cdot v}{F \cdot v} = \frac{0}{F \cdot v} = 0$  caso particolare ( $P \perp v$ )

$\eta = 1 - \frac{\pi_d}{\pi_e} = 1 - \frac{T \cdot v}{F \cdot v} = 1 - 1 = 0$

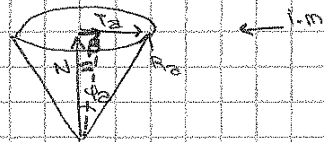
**COEFFICIENTE DI ADERENZA**

L'attrito si manifesta sempre in verso opposto a  $v_r$  e all'inizio del moto

$\mu_a = \frac{T_a}{N} = \tan \varphi_a$

$\varphi_a$  angolo di aderenza

$T_a$  si oppone all'inizio del moto relativo

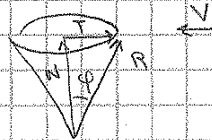


**COEFFICIENTE DI ATRITO**

$\mu = \frac{T}{N} = \tan \varphi$

$\varphi$  angolo di attrito

$T$  si oppone al moto relativo



$\varphi < \varphi_a$

Se l'angolo  $\theta$  compreso tra  $R$  e  $N$  rimane inferiore al valore limite  $\varphi_a$  (cioè  $R$  rimane interna al cono di ADERENZA di semiapertura angolare  $\varphi_a$ ) il corpo rimane fermo → non c'è moto relativo fra le due superfici → si è in condizioni di aderenza.

Il verso della reazione tangenziale  $T$  (esercitata dalla superficie di scorrimento sul corpo) è sempre opposto al verso della velocità del corpo relativa alla sup. di scorrimento.

$\mu$  dipende, come  $\mu_a$ , da   
 { materiali dei due corpi a contatto   
 rugosità delle superfici   
 velocità relativa dei due corpi }   
 influenti in prima approssimazione →  $\mu$  è assunto costante

PROBLEMI CON ATRITO → 3 casi tipici, rappresentati da precise relazioni analitiche

(a) Aderenza → i due corpi non hanno velocità relativa nella zona di contatto e la reazione tang. è inferiore al valore limite  $v_R = 0$   $T < \mu_a N$

(b) Aderenza limite → i due corpi non hanno velocità relativa nella zona di contatto e la reaz. tang. ha il max. valore possibile → oltre → strisciamento  $v_R = 0$   $T = \mu_a N$

(c) Strisciamento → i due corpi a contatto hanno una velocità tang. relativa (strisciano) e la reaz. tang. è prop. a quella normale secondo il coeff. d'attrito  $v_R \neq 0$   $T = \mu N$

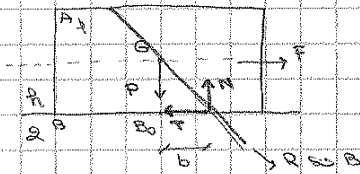


15 novembre 2019

Conclusioni:  
 se la forza  $F = T$  in aderenza non si muove il moto  
 $F = T$  in moto per mantenerlo

Lo stesso valore di forza può generare situazioni 7 a seconda che sono nel caso (a), (b) o (c)

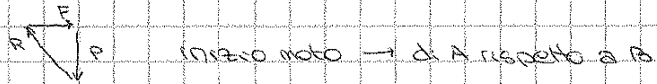
Esempio numerico



$v = 0$   
 $f_a = 0,6; f = 0,3$   
 $P = 1000 \text{ N}$

Se il sistema è fermo si sviluppa  $T_a = f_a N = 600 \text{ N} = f_a P$ , se è in moto  $T = f N = 300 \text{ N}$

$$\begin{cases} N - P = 0 & \rightarrow N = P = 1000 \text{ N} \\ F - T = 0 & T = F \\ M_C = 0 & \frac{T}{N} = \frac{b}{h} = \tan \alpha \end{cases}$$



inizio moto  $\rightarrow$  di A rispetto a B

All limite  $\frac{T_a}{N} = \frac{b_a}{h} = f_a; T_a = f_a N = f_a P = 600 \text{ N}$

Applico  $F_1 = 300 \text{ N}$  in aderenza

$\frac{T_1}{N} = \frac{F_1}{P} = \frac{300}{1000} = 0,3 < f_a \rightarrow$  il corpo fermo è e fermo rimane

Applico  $F_2 = 500 \text{ N}$

$\frac{T_2}{N} = \frac{F_2}{P} = \frac{500}{1000} = 0,5 < f_a \rightarrow$  il corpo fermo è e fermo rimane

E' la verifica dell'aderenza

Se applico  $F = 600 \text{ N}$

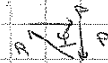
$\frac{T}{N} = \frac{F}{P} = 0,6 = f_a \rightarrow$  LIMITE ADERENZA resta fermo



Se applico  $F = 601 \text{ N}$

$\frac{T}{N} = \frac{F}{P} = 0,601 > f_a \rightarrow$  inizia il moto relativo di A rispetto a B da dx verso sx

$a = \frac{F - T_a}{P} = \frac{601 - 600}{1000} = \frac{1}{1000} = \frac{9,81}{1000} \text{ m/s}^2 = 0,00981 \text{ m/s}^2$



Iniziatò il moto per mantenerlo a v costante devo applicare una F

$F = T = f N = f P = 0,3 \cdot 1000 = 300 \text{ N}$

La stessa forza di 300N applicata col sistema fermo, non lo muove, ma una volta iniziato il moto, è sufficiente a mantenerlo a v cost.

$T_d = T = f_0 = f N_0 = 300 \text{ N}$ , mentre negli altri casi  $T_d = 0$  perché  $v = 0$

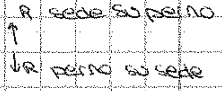
Inizia lo strisciamento  $\rightarrow$  c'è  $M_d = T \cdot v_r = T \cdot \omega r_p = R \sin \varphi_p \cdot \omega r_p = R_p \omega$

$r_p$  raggio di attrito al perno

$R_p$  coppia che si oppone alla rot. angolare  $\omega$

Senza attrito al perno  $\rightarrow$   $N=R$  e  $R$  per l'asse della cerniera.

Con attrito c'è sempre una forza scambiata  $R$  tra perno e sede ma ora forma un angolo  $\varphi$ , non passa per l'asse di cerniera.



Devo vedere il braccio  $p$ , di quanto  $R$  si sposta rispetto a G.

$\rightarrow$  reazione vincolare di cerniera non passa per il centro ma diventa tangente ad un cerchio di attrito al perno di raggio  $p = r_p \sin \varphi_p < r_p$  e opposto alla  $\omega$ .

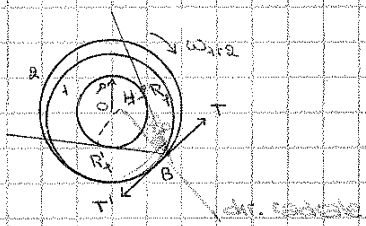
Traccio cerchio di raggio  $p$ , da B la tangente  $R$  in H, ma ho 2 tangenti. Quale scelgo? ...

Suppongo il verso di  $\omega_{1/2}$  dato

$\rightarrow R_p \uparrow$   $\downarrow \omega_{1/2}$   $\rightarrow$  devono avere versi opposti  $\rightarrow R_p$  e non  $R_p$  che non si oppone al moto come fa l'attrito, anzi lo favorisce

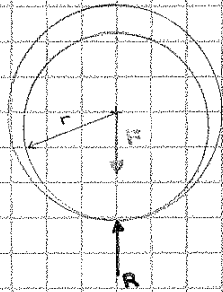
Triangolo OAB  $\sin \varphi_p = \frac{OB}{OA} = \frac{p}{r_p}$

$R_p$  forma l'angolo  $\varphi_p$  rispetto  $r_p$  alla normale



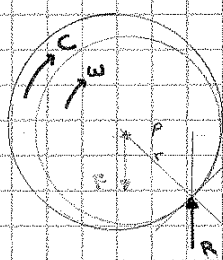
L'accoppiamento tra un perno e una boccia è usato per realizzare una coppia rotolante ed ha innumerevoli applicazioni. Se l'attrito tra i due elementi in moto relativo non è trascurabile  $\rightarrow$  trattazione per valutare efficacemente gli effetti dell'attrito sul sistema complessivo.

Si consideri un perno posto all'interno di un foro cilindrico e soggetto ad una forza radiale  $F$  (che può essere il peso  $P$ ). Tra perno e foro vi è un piccolo gioco, per consentire il moto relativo.



$\leftarrow$  sistema quando non vi è moto relativo tra perno e foro. La reazione  $R$  del foro fa equilibrio da sola alla forza  $F$  applicata applicata al perno  $\rightarrow R$  e  $F$  hanno la stessa retta d'azione.

Suppongo ora di voler far ruotare il perno a velocità costante  $\rightarrow$  per la presenza dell'attrito richiederà l'applicazione al perno di una coppia costante  $C$ .



$\leftarrow$  per l'equilibrio dei momenti agenti sul perno la reazione  $R$  della boccia non potrà più essere la stessa retta d'azione di  $F$ , ma dovrà formare coppia con questa, spostandosi verso dx di una certa quantità  $p$  per equilibrare la coppia  $C$ .

L'equilibrio dei momenti sul perno sarà espresso da:  $C = F \cdot p = R \cdot r$

Tale equilibrio varrà per tutte le possibili direzioni della forza  $F$ .

# Politecnico di Torino



a.a 2012-2013

I facoltà di ingegneria  
corso di laurea in Ingegneria Civile

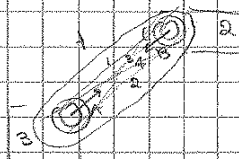
**Corso di Meccanica applicata**

**Prof. Nicolò D'Alfio**

a cura di Alessandra Insana



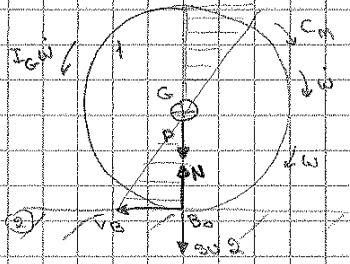
$R_1$  da l opposta a  $\omega_1$   
 $R_2$  da l " " "



Asta scarica → 4 tangenti ai cerchi di attrito  $\mu_1$  e  $\mu_2$  (con attrito). Dipendono dalla  $\omega$  relativa ( $\omega_{1/2}$ ,  $\omega_{1/2}$ ) per definire le azioni sul  
 Senza attrito direzione AB

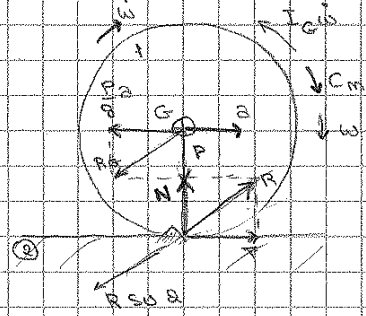
**DINAMICA DI UN VEICOLO: RUOTE  $P_2, P_1$**

• Ruota motrice senza attrito nel contatto ruota-terreno



$P$  peso e  $R$  da ce in terra  
 $t=0$   $\omega=0$   $v=0$   $N=P$   
 Applico  $C_m$  → la ruota inizia a ruotare attorno a  $G$  nasce coppia d'inerzia  $I_G \omega$   
 Ma ruota attorno a  $G$  restando ferma, scivola in B non avanza. È ciò che capita sul ghiaccio o sulle superfici in mano bagnato

Per non scivolare ma rotolare serve un appoggio → serve una  $T$  (come i blocchi di partenza). Minore è questo effetto, minori saranno le cond. iniziali di partenza. Entra in gioco l'attrito radente tra ruota-terra  $\mu$ ??



$F_a, F_i$   $N \rightarrow T$

- 1)  $\uparrow N - P = 0$
- 2)  $\rightarrow T - \frac{P}{g} a = 0$
- 3)  $\curvearrowright M(G) = C_m - I_G \omega - T r = 0$

4 incognite in 3 eqz

Devo dire se sono in aderenza, limite aderenza, strisciamento. Faccio un'ipotesi e verifico se sono in quell'hp → hp del ROTOLAMENTO PURO  
 $\dot{v}_B = 0$   
 2)  $v_B = \omega r \rightarrow a = \omega r$

Posso risolvere il problema. Trovo  $N, T$ ... Vedo se sono nel campo di aderenza.

- 1)  $N = P$
- 2)  $T = \frac{P}{g} a$
- 3)  $C_m - I_G \frac{a}{r} - \frac{P}{g} a r = 0$  in cui ho sostituito mettendo 1, 2, 4

Voglio sapere quanto vale  $a$ . Arrivo allo stesso punto con l'eqz dell'energia

$$a = \frac{C_m}{\frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r}}$$

$\omega = \frac{a}{r}$  se  $C_m \uparrow$   $a \uparrow$   $\omega \uparrow$   $T \uparrow$

Verifico che  $\frac{T}{N} \leq \mu_a$  }  $\left\{ \begin{array}{l} < \text{aderenza} \rightarrow \text{rotol. puro} \\ = \text{limite aderenza} \end{array} \right.$

Bisogna verificare l'aderenza perché aumenta anche  $T$

$$T = \frac{P}{g} a = \frac{P}{g} \frac{C_m}{\frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r}}$$

$$\frac{T}{N} = \frac{P}{g} \frac{a}{P} = \frac{a}{g} = \frac{C_m}{g r + \frac{I_G}{r}} < \mu_a \text{ allora rotola}$$

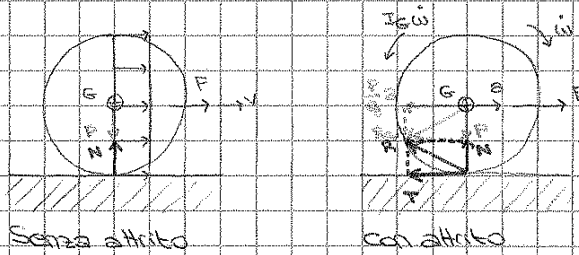
Quindi:

$$\frac{T}{N} = \frac{1}{g} \frac{C_m}{\frac{P}{g} r + \frac{I_G}{r}} \left\{ \begin{array}{l} < \mu_a \rightarrow \text{aderenza (rotol. puro)} \\ = \mu_a \rightarrow \text{lim. aderenza} \end{array} \right.$$

(c)  $C_p > C_f \text{ max} \rightarrow a \approx \pm a \text{ max}$ ;  $\dot{\omega} \uparrow$  decelerazione maggiore  $\rightarrow$  tendenza al bloccaggio

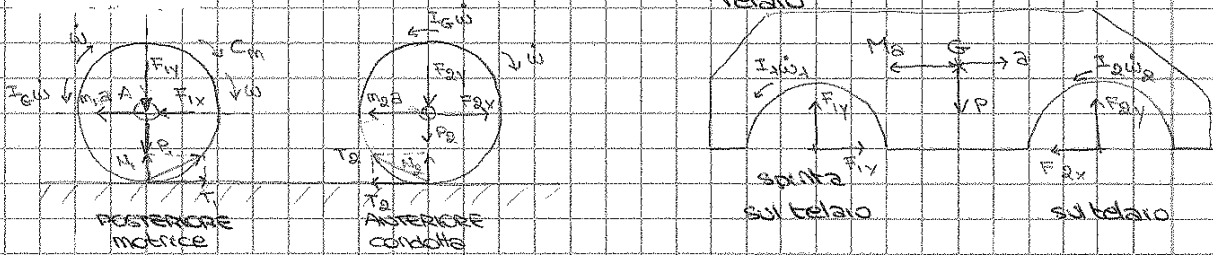
3) Rivolta condotta

P peso o R da camera. Applico F. Senza attrito la ruota scivola: inizia moto di traslazione



22 novembre 2012

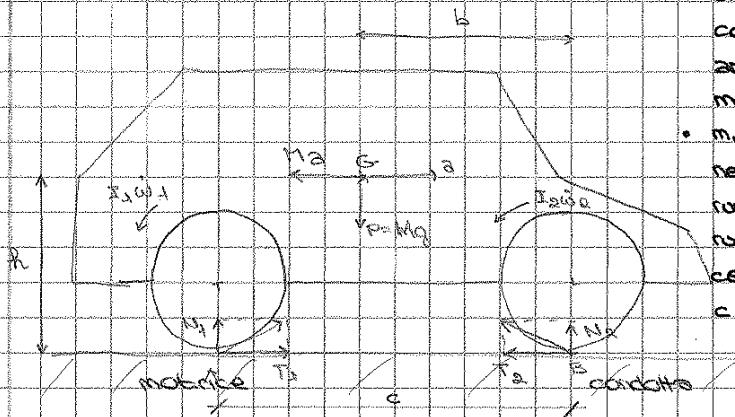
Veicolo con ruote motrici posteriori



Trasmissione le coppie d'inerzia (freno  $\rightarrow$  il muso si abbassa, accelero, il muso si alza). Dall'esterno vedo  $T_1$  e  $T_2$  opposta al moto

- $F_{1y}$  peso da telario
- $F_{2y}$  peso da telario
- $F_{1x}$  opposizione telario
- $F_{2x}$  spinta da telario
- $C_m$  } interne
- $C_f$  }

- Veicolo in moto rettilineo su strada orizzontale  $\rightarrow$  modello semplificato  $\rightarrow$  3 corpi rigidi: ruota posteriore, ruota anteriore, telario.  $M_p$ : ruota post  $\rightarrow$  motrice, anteriore  $\rightarrow$  condotta (trascinata)
- $m_1, m_2$  masse ruote;  $I_1, I_2$  momenti d'inerzia baricentrici delle ruote;  $r$  raggio ruote;  $\mu, \mu_0$  coeff. d'attrito e di aderenza ruote/stada;  $M$  massa veicolo con baricentro in G;  $h, b$  quote di posizione di G;  $c$  passo del veicolo.

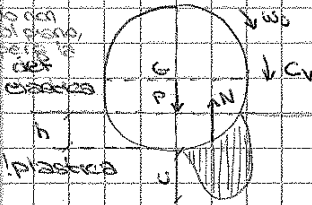


- (1) motrice  $C_m - I_1 \dot{\omega}_1 - T_1 r = 0$
  - (2) condotta  $I_2 \dot{\omega}_2 - T_2 r = 0$
  - (3)  $\rightarrow T_1 - T_2 - M a = 0$
  - (4)  $\uparrow N_1 + N_2 - M g = 0$
  - (5)  $\rightarrow M b = 0$   $N_1 r - M a h - M g \cdot b - I_1 \dot{\omega}_1 - I_2 \dot{\omega}_2 = 0$
- (  $a; \dot{\omega}_1; \dot{\omega}_2; T_1; N_1; T_2; N_2$  )  
 + 2 eq risultante  
 - 2 eq "

Piano più deformabile

$N = P = 0$   $N = P$   $N = \int \rho dN$   
 $C_v = N \cdot u$  per iniziare il rotolamento  
 In ogni caso  $N \cdot u$  si oppone a  $w$

quando il rullo del  
 passa più sul piano,  
 questo reagisce in  
 forma...



... qui no! plastica

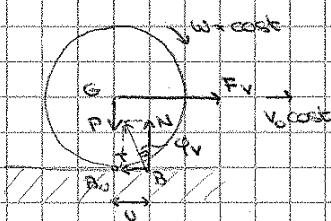
Ruota motrice e condotta

Il punto A si sposta più avanti a causa dell'attrito volvente → a causa di spostamento da  $B_0$  a B il punto di applicazione della reazione sul terreno

Potenza dissipata per attrito volvente

Se non c'è strisciamento, vale  $\pi_d = N \cdot u \cdot w$  con  $w = \text{cost}$ ,  $v = \text{cost}$ , nel campo di aderenza o al limite di aderenza. Per cui viene chiamato in causa l'attrito volvente

Ruota condotta



$u$  si sposta. A dx o a sx? Deve opporsi a  $w$  o a  $v$   
 3 forze → devono fare stella in G → R deve passare per G  
 → deve nascere T → interviene l'attrito radente, oltre  
 all'attrito volvente che sposta  $u$  di  $v$  da  $B_0$  a B



$N - P = 0$   
 $F_v - T = 0$

$M_G = 0$   $Nu - Tr = 0$   $T = \frac{u}{r} N \rightarrow \frac{T}{N} = \frac{u}{r} = f_v = \tan \phi_v$  COEFF. DI ATTRITO VOLVENTE

Se applico una  $F_v$  maggiore, nasce una forza d'inerzia  $F > F_v$  accelerazione  
 $F_v$  per vincere l'attrito volvente

Valori	$f_a$	$f$
pneumatici su asfalto	0,75	0,6
ruote acciaio su rotaie	0,24	0,07
acciaio su acciaio (sup. lucide)	$0,005 \pm 0,002$	
pneumatici su strada asciutta	$0,012 \pm 0,015$	se $r = 1m \rightarrow u = 12 \pm 15mm$

Attenzione:  $\pi_d = N \cdot u \cdot w$  se  $T/N \leq f_a$  in rotolamento puro, in aderenza  
 Se c'è strisciamento si aggiunge  $\pi_d = T \cdot v_s$

$f_v = \frac{u}{r} = \alpha^3 \sqrt{\frac{N}{br^2}}$   $f_v = \frac{u}{r}$  coefficiente di attrito volvente (adimensionato)

pneumatici su strada asfaltata →  $f_v = f_{v0} + k_v w^2$  con  $k_v = 1,5 \cdot 10^{-6}$   
 Più è sgonfia la ruota, ↑ deformazione, ↑ usura → controllare la pressione dei pneumatici → ruote gonfie al punto giusto in poi di più costi ↓ def. ↓ usura  
 ↑ durata ruota

Nota  $f_v$  e il peso  $P$  del rullo, la forza da applicare per avanzare a  $v = \text{cost}$  è  $F = f_v \cdot P$

27 novembre 2019

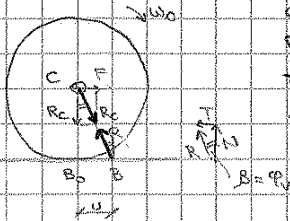
**RUOTA PASSIVA (COCONDOTTA) → senza coppie applicate**

ci è attrito volente →  $u \neq 0$  → si sposta il punto di applicazione della forza in modo da opporsi a  $\omega_0$ .

Rotazione crana → si sposta a dx. È inversa

$\pi_d = N \cdot u \cdot \omega_0$  se in aderenza o limite aderenza → se  $\frac{T}{N} = \mu$   
 $= \mu g \beta = \frac{u}{r} = \mu \cdot \frac{F}{F_0}$

$F = T = F_0 N$

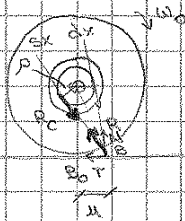


**Aggiungo l'attrito al perno →  $F_0 \neq 0$**

Qual è quella giusta, a dx o a sx? Per l'attrito al perno è quella di sx che crea un momento discorde con  $\omega_0$ , non può essere motore, ma è sempre resistente

$\pi_d = N \cdot u \cdot \omega_0 + R_0 \cdot \rho \cdot \omega_0$   
attrito volente      attrito al perno

$\frac{T}{N} \leq \mu_0$ ;  $\mu g \beta = \frac{\rho + u}{r}$  aumenta  $\beta$  per l'attrito al perno



**RUOTA ATTIVA → se cui agisce o la coppia motrice C -  $v = cost$**

$u = 0$     $\rho = 0$     $F_0 = 0$

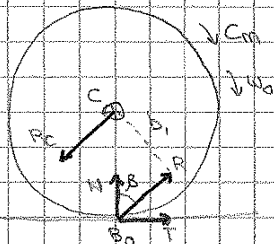
$R_c$  e  $R$  devono formare coppia per equilibrare la coppia esterna.

$C_m = T \cdot r = R \cdot b_1$

$C_m$  è possibile perché ho una forza tangenziale

$b_1 = r \sin \beta$

$\frac{T}{N} \leq \mu_0$     $\beta \leq \varphi_0$  →  $\pi_d = 0$  perché sono in aderenza o limite aderenza



**Introduco l'attrito volente**

$u \neq 0$     $\rho = 0$

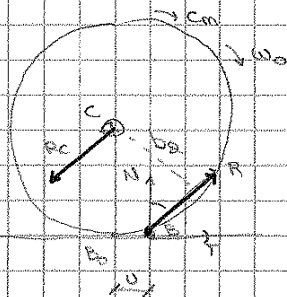
$R_c$  non cambia, non c'è attrito al perno. Cambia la posizione di R.

$C_m = T \cdot r + N \cdot u = R \cdot b_2$

A pari  $C_m$ , prima andava tutto in T, in seguito. Ora ciò che rimane come motore è diviso e consumato in attrito volente

$b_2 = r \sin \beta + u \cos \beta$

Se  $\frac{T}{N} \leq \mu_0$ ,  $\beta \leq \varphi_0$  →  $\pi_d = N \cdot u \cdot \omega$  anche se sono in aderenza o lim. ad.



**Introduco l'attrito al perno**

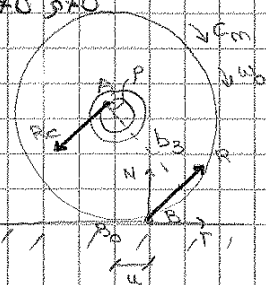
$u \neq 0$     $\rho \neq 0$

$\rho = r_0 \sin \varphi_0$

$C_m = T \cdot r + N \cdot u + R_0 \cdot \rho = R \cdot b_3$

$b_3 = r \sin \beta + u \cos \beta + \rho$

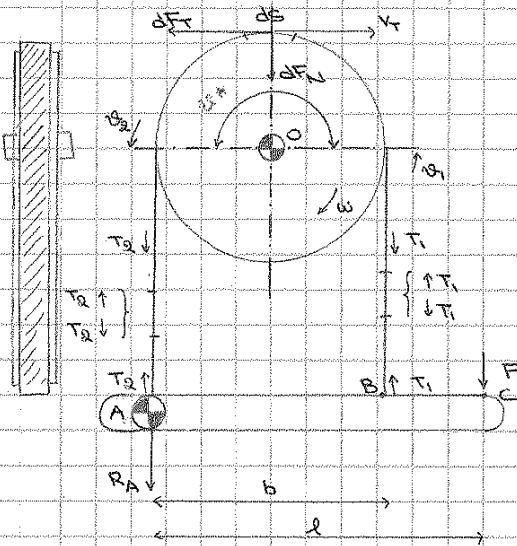
Se  $\frac{T}{N} \leq \mu_0$ ,  $\beta \leq \varphi_0$  →  $\pi_d = N \cdot u \cdot \omega + R_0 \cdot \rho \cdot \omega$  se sono in aderenza o al limite aderenza



Trasmissioni

FREMA A NASTRO

- Nei freni a nastro l'elemento frenato ha la forma di un tamburo, sul quale viene fatto strisciare un nastro, normalmente costituito da una lamina <sup>prodotto da materiale</sup> metallica ad alto coefficiente di attrito. Il nastro durante l'azione frenante, viene premuto sulla superficie cilindrica del tamburo per mezzo di un opportuno leveraggio. Le estremità del nastro sono collegate ad una leva incernierata in A ad un telaio fisso. Applicando all'estremo libero C della leva una forza F il nastro viene serrato sul tamburo e, a causa delle forze di attrito che si generano tra nastro e tamburo, nasce un momento frenante  $M_f$ .



tamburo di raggio r con cerniera fissa  
 Ha un certo spessore su cui va a premere il nastro  
 Accoppiamento materiali nastro-tamburo → alto coeff. di attrito, senza aere forte riscaldamento.

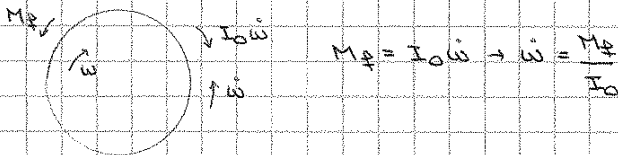
$t=0; \omega \neq 0; v_r \neq 0$   
 $v_r = \omega r; v_n = 0$

$t=t_f; \omega = 0; v_r = 0$

Sul tamburo:

- $dF_n$  radiali
- $dF_t = \mu dF_n$  che nasce per l'attrito, opposta a  $\omega$
- $M_f = \sum dF_t \cdot r$

↳ le forze elementari creano un momento frenante sul tamburo → nasce  $I_0 \dot{\omega}$   
 → nasce  $\dot{\omega}$  opposta a  $\omega$  → decelerazione



$$M_f = I_0 \dot{\omega} \rightarrow \dot{\omega} = \frac{M_f}{I_0}$$

- Si vuole determinare il legame tra F e  $M_f$ . A tal fine si indica con  $\varphi^*$  l'angolo che sottende l'arco lungo il quale c'è accoppiamento tra nastro e tamburo, detto arco di avvolgimento

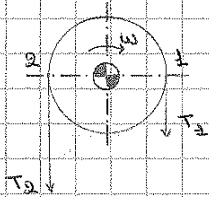
$$\varphi^* = \varphi_2 - \varphi_1$$

punto in cui termina l'arco di avvolg. ← punto in cui inizia l'arco di avvolg.

In un punto generico dell'arco di avvolgimento si può considerare un tratto di nastro di lunghezza infinitesima ds, sotteso da un angolo dφ. Su tale tratto di nastro agiscono le seguenti forze:

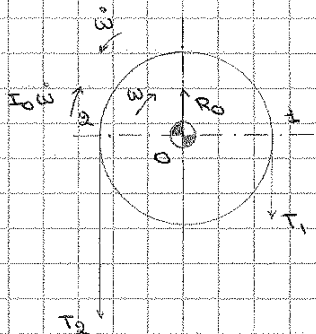
- T forza trasmessa dalla porzione di nastro che si trova a destra
- $T + dT$  " " " " " " " " sinistra
- $dF_n$  forza normale trasmessa dal tamburo
- $dF_t$  forza tangenziale trasmessa dal tamburo, il cui verso è concorde con la velocità tangenziale del tamburo stesso





con  $T_2 > T_1$

Sul tamburo, con  $T_2 > T_1$ :



$$\uparrow R_0 - T_1 - T_2 = 0$$

$$\odot M(O) = r T_2 - r T_1 - I_0 \dot{\omega} = 0$$

$$R_0 = T_1 + T_2$$

$$\dot{\omega} = \frac{(T_2 - T_1)r}{I_0} = \frac{M_f}{I_0}$$

$$M_f = (T_2 - T_1)r = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) r = T_1 (e^{\theta^*} - 1) r$$

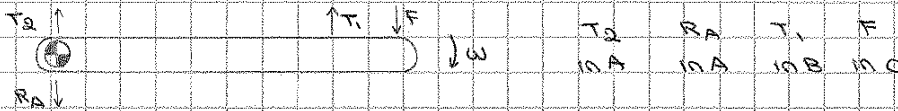
L'effetto frenante è dovuto alla variazione di tensione. Per poter realizzare un momento frenante ho bisogno di  $T_1$ .

Occorre creare  $T_1 \rightarrow$  nasce  $T_2 \rightarrow$  nasce  $M_f$ .

$$M_f = T_1 (e^{\theta^*} - 1) r$$

Equilibrio asta (leva)

$T_2 \parallel T_1$ , non ci sono componenti orizzontali



$$\uparrow -R_A + T_1 + T_2 - F = 0$$

$$\odot M(A) = T_1 \cdot b - F \cdot b = 0$$

$$R_A = T_1 + T_2 - F$$

$$T_1 = \frac{F \cdot b}{b} \text{ realizzo la tensione minima } (T_1)$$

Da  $T_1$  trovo  $T_2$ :

$$T_2 = T_1 e^{\theta^*} = \frac{F \cdot b}{b} e^{\theta^*}$$

$$\odot M_f = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) r = \frac{F \cdot b}{b} (e^{\theta^*} - 1) r$$

**FLESSIBILI**

- Sono elementi che non hanno forma propria, che si adattano; possono essere ad alta o bassa rigidità flessionale. Trasmettono un moto rotatorio tra alberi paralleli.

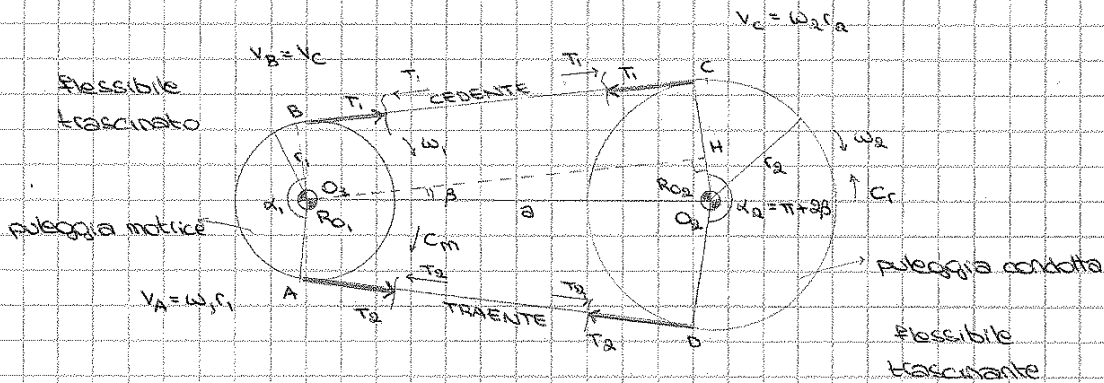
Distinguo:

- attrito scambiato } coesistono, ma uno prevale sull'altro
- rigidità flessionale

Regio della trasmissione:

- si attenuano le vibrazioni
- non si hanno strizioni
- non si entra in strisciamento

**Aderenza tra pulegge e flessibile (flessibile ideale inestensibile)**



$$r_2 - r_1 = a \sin \beta = O_2 H \quad \sin \beta = \frac{r_2 - r_1}{a}$$

Fornisco  $C_m$ , equilibrata dalla reazione della puleggia motrice → contatto → tensioni → applico  $C_r$  alla puleggia condotta, contraria a  $\omega_2$  per l'equilibrio del sistema.  $C_r$  è una coppia resistente che equilibra  $T_1$  e  $T_2$  che rimangono costanti rispettivamente fino a C e fino a D.  $\omega_2$  sarà concorde con  $\omega_1$  se la massa della cinghia è trascurabile.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{O1} &= \vec{T}_1 + \vec{T}_2 & \vec{R}_{O2} &= \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \\ C_m &= (T_2 - T_1) r_1 & C_r &= (T_2 - T_1) r_2 \end{aligned}$$

Le forze e coppie presenti sono:  $C_m, C_r, R_{O1}, R_{O2}$ . Se taglio vedo  $T_1$  e  $T_2$ .

In base a quanto trovato nella trattazione delle cinghie:

$T_2 \max = T_1 e^{\mu \alpha}$  se  $\frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu \alpha}$  aderenza o limite aderenza

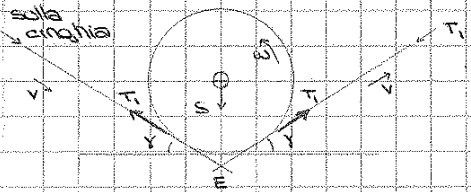
$v_c = v_d = \omega_2 r_2 = v_b = v_a = \omega_1 r_1$  " " " " ( $v_{flessibile} = v_{perif. puleggia}$ )

→  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$  → in aderenza il rapporto di trasmissione  $i$  è cost.

Qual è la  $C_{max}$  che posso applicare al sistema?

Come creo  $T_1$  per salire a  $T_2$  e trasmettere coppia? L'aderenza tra cinghia e puleggia è garantita da un appropriato forzamento per realizzarlo si può ricorrere all'uso di opportuni dispositivi:

- GALOPPINO o TENDITORE SUL RAMO CEDENTE, usato nelle auto. Sfrutta il ramo cedente su cui la tensione è minore.



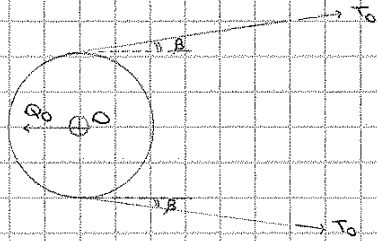
Spingo il tamburo sulla cinghia con forza  $S$ . La cinghia reagisce con  $T_1$ .

$$S = T_1 \sin \delta + T_2 \sin \delta = 2T_1 \sin \delta$$

$$T_1 = \frac{S}{2 \sin \delta}$$

- FORZAMENTO INIZIALE, ho una puleggia con un certo raggio.

Se il sistema è fermo avrà  $T_0$  sul ramo superiore e inferiore e  $Q_0$ . Creo la tensione trascinando da dx a sx  $\rightarrow$  aumenta la lunghezza della cinghia di  $\Delta l_0 \rightarrow$  nasce la tensione  $\Delta T$ .



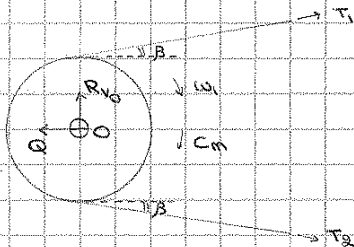
$$\omega = 0 \quad c_m = 0 \quad R_{V_0} = 0$$

$$Q_0 = 2T_0 \cos \beta$$

$$T_0 = \frac{Q_0}{2 \cos \beta}$$

$$\left. \begin{array}{l} l_0 \\ l_0 + \Delta l_0 \end{array} \right\} \rightarrow \Delta T$$

Se applico  $c_m$ , per avere l'equilibrio dev'essere una  $\Delta T$  nella cinghia. Nella  $P_0$  interviene una  $Q$  orizzontale e una componente verticale.



$$\omega \neq 0 \quad c_m \neq 0 \quad R_{V_0} \neq 0$$

$$c_m = (T_2 - T_1) r$$

$$Q = (T_1 + T_2) \cos \beta$$

$$R_V = (T_2 - T_1) \sin \beta$$

$$\uparrow T_1 \sin \beta \quad \downarrow T_2 \sin \beta \quad \uparrow R_V$$

$$\text{Se } r_1 = r_2 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sistema fermo} & Q_0 = 2T_0 \\ \text{sistema in moto} & Q = T_1 + T_2 \quad R_V = 0 \rightarrow \vec{R}_{O_1} = \vec{Q} \end{cases}$$

A  $i_A = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_{A2}}{R_{A1}} > 1 \rightarrow R_{A2} > R_{A1} \rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{i} < \omega_1$  RIDUTTORE ( $C_2 > C_1$ )  
 ↳ basse v, ma C elevate

B  $i_B = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_{B2}}{R_{B1}} < 1 \rightarrow R_{B2} < R_{B1} \rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{i} > \omega_1$  MOLTIPLICATORE ( $C_2 < C_1$ )

Lato negativo delle cinghie: se ho una puleggia con 3 cinghie con la stessa lunghezza e lo stesso raggio, il pretensionamento si ripartisce tra le 3. Ma le cinghie hanno una loro tolleranza, ci sono cinghie standardizzate → le 3 cinghie non saranno mai uguali → rimane un campo libero → le tensioni sono diverse, il carico non è diviso in parti uguali. Per arrivare a potenze superiori, allora, si usano le cinghie poly-V.

• Cinghie poly-V

Ciò che cambia è che la cinghia, sempre in gomma con inserti di <sup>tracce di materiale plastico</sup> fili di nylon, si presenta con lunghezza b e con un numero multiplo di incavi e denti longitudinali a forma di V (in genere da 3 a 7, ma si arriva fino a 12).

Devo pretendere le due pulegge in modo che la cinghia si appoggi bene e nascano le dF<sub>u</sub> e le dF.

Pro: tutta la cinghia lavora alla stessa maniera → l'usura è ripartita su ogni elemento. Ho un coppia 3 volte superiore perché aumenta l'area di contatto. Inoltre se c'è un incidente a valle o a monte, la cinghia inizia a strisciare, fuge da frizione di sicurezza → l'incidente non si propaga, ma si ripercuote solo sulla cinghia. Sono molto flessibili, ma oltre il limite dell'aderenza c'è strisciamento.

• Cinghie dentate con denti trapezoidali

Le cinghie dentate si impegnano in apposite ruote dentate. Con esse la trasmissione del moto non è affidata all'attrito, ma all'ingranamento tra i denti della cinghia e della ruota.

Denti trapezoidali in gomma, superficie ricoperta in nylon per <sup>e resistere all'usura</sup> minimizzare l'attrito. Per accoppiarsi alla puleggia, questa deve avere una forma particolare, con delle cave a trapezio.

A differenza dei casi precedenti, in cui la tensione si crea per l'attrito, qui conta solo il contatto tra dente e sede → la variazione di tensione non segue la legge esponenziale.

Le coppie che si ottengono sono circa quelle delle cinghie piane. Non possono nascerne grochi, anche se dev'esserci un po' di gioco affinché il dente, ruotando, possa adattarsi alla cave.

• Cinghie dentate HTD

Per trasmettere di più si usano denti a sezione circolare, in neoprene, con rivestimento esterno in neoprene, rivestimento interno in nylon e cam in fibre di vetro o metallo.

Pro: la distribuzione delle forze scambiate è più graduale; la cave ha meno gioco di prima, può essere fatta come il dente.

Ci sono anche cinghie con denti a sezione parabolica.

## Flessibili

Li suddividiamo in due famiglie con due fenomeni che coesistono, ma uno prevale:

- **Attrito**, per esempio nella trasmissione a cinghia piana, dove si trascura la flessibilità, ma la rigidità elastica va vinta tirando la cinghia.
- **Rigidità elastica o anelastica**, per esempio nelle funi metalliche.

Se avvolgo una fune attorno ad una puleggia di raggio  $R$ , devo fornire un momento

Flettente  $M = E_a \frac{\Delta l}{2R}$ . Posso prendere qualsiasi fune? Devo tener conto della  $\sigma_{amm}$  e della  $\sigma_{max}$  sibile massima:  $R$  è il momento d'inerzia geometrico della fune, non del materiale. È la somma dei momenti d'inerzia di tutti i singoli fili. È minore di quello dell'elemento pieno in acciaio.

A pari materiale e diametro gioca il raggio d'inerzia.

Le funi sono costituite da fili opportunamente avvolti. I fili sono realizzati con fibre tessili vegetali o artificiali, oppure sono metallici. Si possono avere, a seconda della conformazione:

- **Funi a trefoli** o **befoli** costituite da uno o più strati di fili avvolti ad elica attorno ad un nucleo centrale. Sono dette normali quando sono formate solo con fili tondi, chiuse quando sono formate con fili tondi nella parte centrale e sagomati nella parte esterna per migliorare il contatto con la camicia con cui la fune si accoppia. Posso aumentare la dimensione della fune e la  $\sigma_{amm}$  con le
- **Funi a befole** formate avvolgendo ad elica, attorno ad un nucleo centrale, uno o più strati di befole. Il nucleo centrale, detto anima, può essere metallico o di fibra tessile. Sono funi usate per ponti sospesi, trasmissioni, impianti: telefoniche dove sono avvolti a elica e non ci sono risalti, la superficie è liscia. Conta più la rigidità, in base a cui ci sarà una certa usura, ma l'attrito è

## Rigidità dei flessibili

Abbiamo trattato i flessibili come ideali e perfettamente flessibili. In realtà, quando i flessibili si avvolgono o si svolgono dalle rispettive pulegge (o ruote), essi manifestano una certa resistenza a cambiare la propria forma, segno di una rigidità non nulla. In base al tipo di fenomeno che interviene, si parla di rigidità elastica o anelastica.

La **rigidità elastica**  $E$  (modulo elastico della fune che è  $<$  di quello del materiale) è dovuta alla incompleta flessibilità e si manifesta in cinghie e funi.

La **rigidità anelastica** è dovuta agli attriti interni e si manifesta, oltre che in cinghie e funi, anche nelle catene. Guarda il verso della velocità. Riguarda l'attrito di strisciamento tra i vari trefoli perché i fili passano da dritti a curvi, quindi strisciano uno sull'altro. Non c'entra l'attrito del materiale. Le fibre esterne aumentano la loro lunghezza, ma all'uscita dalla puleggia devono diventare di nuovo dritti  $\rightarrow$  devono strisciare al contrario.

Come rappresento la rigidità della fune quando la avvolgo sul tamburo? Introduco (1) **RIGIDEZZA ELASTICA** (Fig. 5.60 a)

La fune si dispone sulla puleggia discostandosi di una quantità  $e$  dalla situazione ideale, sia in ingresso sia in uscita. Trascuro l'attrito al perno, ciò è dovuto al fatto che la fune, avendo una rigidità elastica non nulla, richiede l'applicazione di un momento flettente per assumere la curvatura della puleggia. Tale momento vale circa  $T \cdot e = Q \cdot e$  e poiché  $T = Q$ .

La rigidità elastica non produce perdite di energia in quanto l'energia poten-

### • Paranchi

Sono apparecchi utilizzati per sollevare carichi elevati con velocità e forze di ridotta entità. Sono costituiti da un insieme di pulegge fisse e mobili su cui si avvolge in modo opportuno una fune.

Ci sono 4 tratti portanti che reggono il carico. Le due pulegge mobili sono collegate da una traversa cui è appeso il carico con un gancio.

Come si distribuisce il carico? Taglio le funi:  $T$  si mantiene costante.  $P$  si ripartisce in 4 rami: 2 della puleggia mobile di  $s_x$  e 2 di quella di  $s_x \rightarrow T = \frac{P}{4}$ .

Tutte le  $T$  sono  $\frac{P}{4}$ , anche la  $T$  in uscita. Aumentando i tratti portanti, posso sollevare il carico con  $T$  minore (esempio: 8 rami  $\rightarrow \frac{P}{8}$ )

È importante determinare la relazione tra lo spostamento dell'estremo  $A$  della fune e lo spostamento del bozzello mobile  $A$  e la relazione tra la forza  $F$  e il carico da sollevare  $P$ .

Si può notare che durante il sollevamento del carico, in uno stesso tempo  $dt$  l'estremo  $A$  si porta in  $A'$ , compiendo uno spostamento  $ds_A$ , mentre il bozzello mobile, a cui è appeso il carico, compie uno spostamento verticale  $ds_A$ .

Per l'inescandibilità della fune, la lunghezza della stessa all'istante  $t$  è uguale alla lunghezza all'istante  $t+dt$ , pertanto risulta:

$$A'A = D'D + EE + HH + I'I \rightarrow ds_A = 4ds_A$$

quindi:

$$v_A = \frac{ds_A}{dt} = 4 \frac{ds_A}{dt} = 4v_A$$

Con  $n$  tratti portanti, detta  $v_c$  la velocità del gancio, si ha:

$$v_A = n v_c$$

Il rendimento  $\eta$  può essere espresso come:

$$\eta = \frac{P v_c}{F v_A} = \frac{P v_c}{F n v_c} = \frac{P}{F n}$$

ovvero la forza necessaria a sollevare il carico  $P$  a velocità costante è:

$$F = \frac{P}{\eta n}$$

#### (1) SENZA RIGIDITÀ E ATRITO

$$T_0 = T_1 = T$$

$$P = 4T; \quad T = \frac{P}{4} = 0,25P$$

$$F = \frac{P}{4} = \frac{P}{n}$$

$$\eta = \frac{P \cdot v_s}{F \cdot v} = \frac{P \cdot v_s}{\frac{P}{4} \cdot 4v_s} = 1$$

#### (2) CON RIGIDITÀ E ATRITO AL DERNO

Considero il rendimento uguale per tutte le pulegge che hanno le stesse perdite

$$\rightarrow \eta = \eta_1$$

Parto da  $T_5$ , bassa e man mano le tensioni aumentano fino alla fine per il rendimento.

$$T_5 = F \quad \text{ma ricordo che } T_1 = \eta T_0, \text{ allora:}$$

$$T_4 = \eta_1 T_5$$

$$T_3 = \eta_1 T_4 = \eta_1^2 T_5$$

$$T_2 = \eta_1 T_3 = \eta_1^3 T_5$$

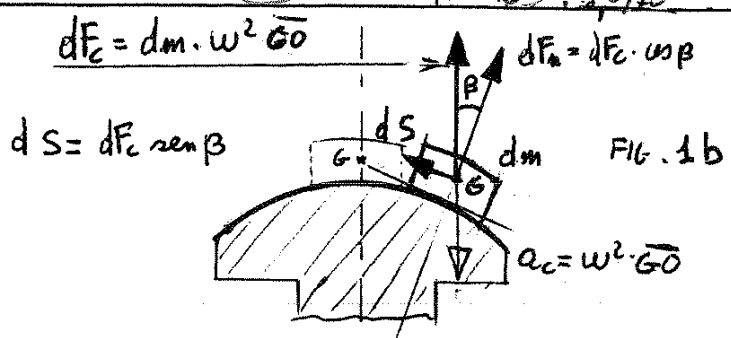
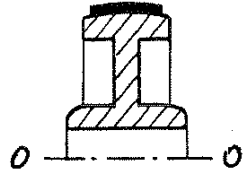
$$T_1 = \eta_1 T_2 = \eta_1^4 T_5 = \eta_1^4 F \quad (\text{forza che devo applicare per sollevare il carico})$$

8

$MA = 25 - 12/13$

CINGHIE PIANE

FIG. 1a



CINGHIE A V (TRAPEZIODALI)

FIG. 2a

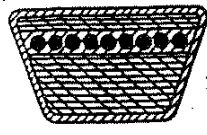
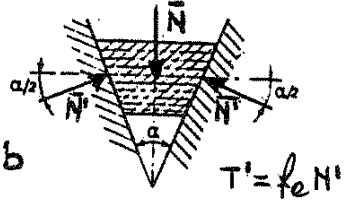


FIG. 2b



TIPO Z      TIPO L

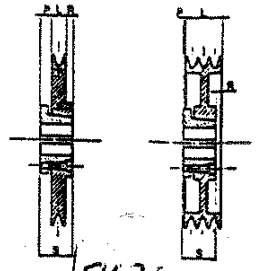
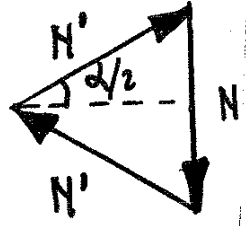


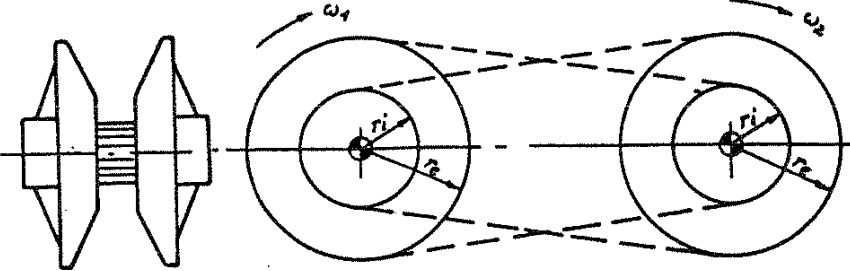
FIG. 2c



$N = 2 N' \text{sen} \alpha/2$  ;  $N' = \frac{N}{2 \text{sen} \alpha/2}$

$T = 2 T' = 2 f_e N'$

$T = 2 f_e \frac{N}{2 \text{sen} \alpha/2} = \left( \frac{f_e}{\text{sen} \alpha/2} \right) N$  (AL LIMITE DI ADERENZA)



VARIATORE CONTINUO DI VELOCITA'

FIG. 3

CINGHIE POLY-V

FIG. 4a

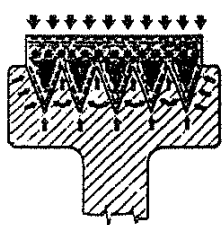
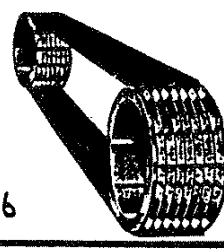
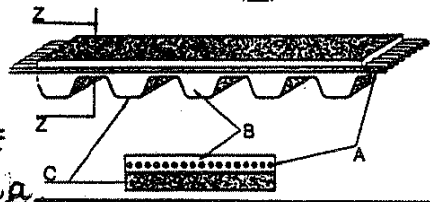


FIG. 4b



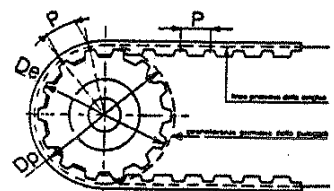
CINGHIE DENTATE  
DENTE TRAPEZIODALE

FIG. 5a

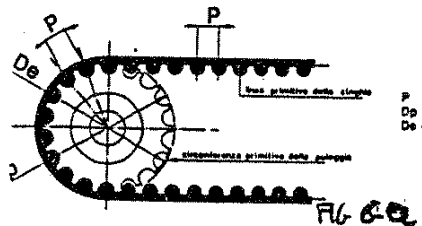


- SIMBOLOGIA
- $l_p$  = Lunghezza primitiva
  - $P$  = Passo
  - $L_p$  = Larghezza cinghia
  - $L_p$  = Larghezza puleggia
  - $Z$  = Numero dei denti
  - $D_p$  = Diametro primitivo puleggia
  - $D_e$  = Diametro esterno puleggia

FIG. 5b



CINGHIE DENT. HTD



- $P$  = Passo  
 $D_p$  = Diametro primitivo  
 $D_e$  = Diametro esterno

FIG. 6a

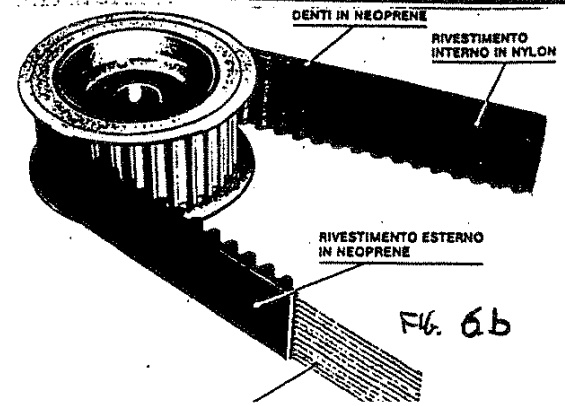


FIG. 6b

FUNI

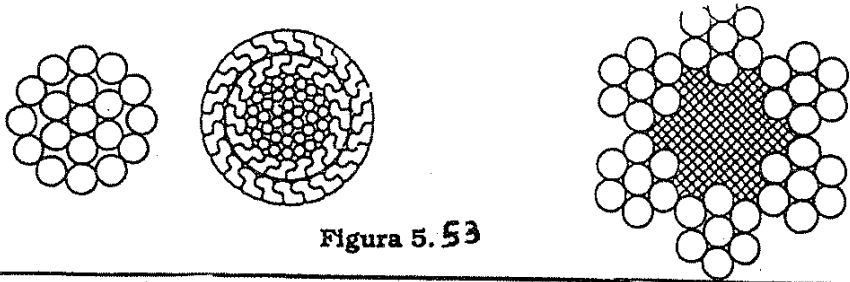
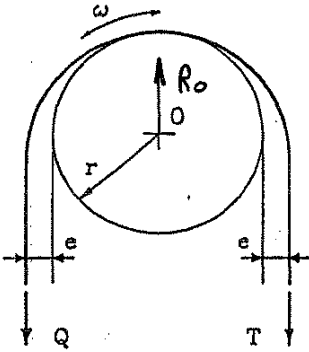


Figura 5.53

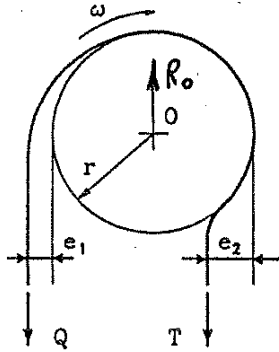
MA=22-12/13

Figura 5.54

RIG. ELASTICA -



RIG. ANELASTICA



RIG. ELASTICA + ANELASTICA

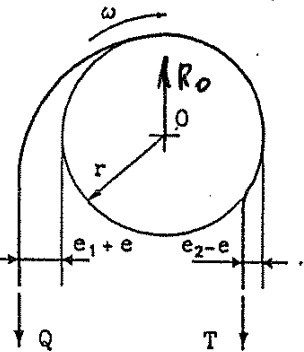


FIG. 5.60 a

$$R_0 = Q + T$$

$$T(z+e) = Q(z+e)$$

$$T = Q$$

$$\eta = \frac{QV}{TV} = 1$$

b

$$R_0 = Q + T$$

$$T(z-l_2) = Q(z+l_1)$$

$$T = Q \frac{z+l_1}{z-l_2}$$

$$\eta = \frac{QV}{TV} = \frac{z-l_2}{z+l_1} < 1$$

c

$$R_0 = Q + T$$

$$T[z-(l_2-l)] = Q[z+(l_1+l)]$$

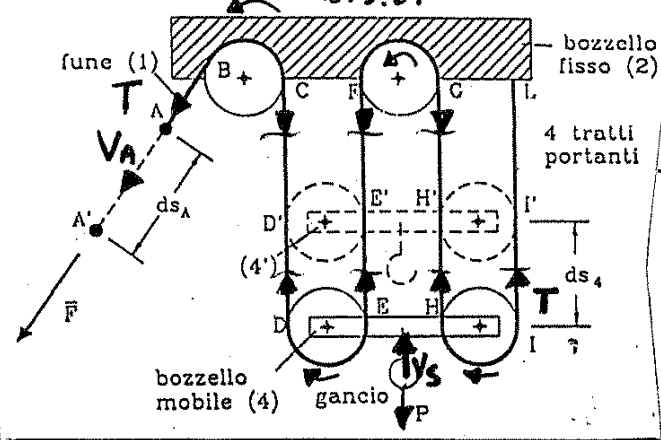
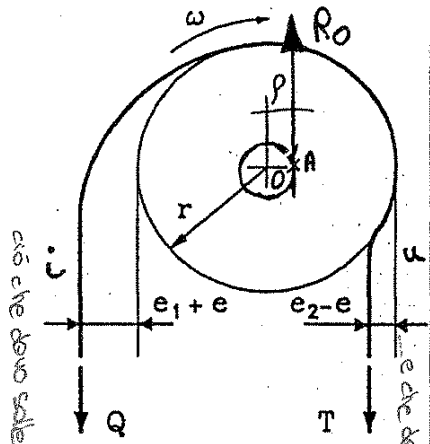
$$T = \frac{Q(z+l_1+l)}{z-l_2+l}$$

$$\eta = \frac{QV}{TV} = \frac{z-l_2+l}{z+l_1+l} < 1$$

RIGIDENZE + ATTRITO AL PERNO

PARANCHI

FIG. 5.61



$$A/A = DD + E'E + H'H + I'I$$

$$ds_A = 4 ds$$

$$V_A = 4 V_S$$

SENZA RIGIDENZE E ATTRITO

$$T_u = T_c = T$$

$$P = 4T ; T = \frac{P}{4} = 0,25P$$

$$F = \frac{P}{4} = \frac{P}{M}$$

$$\eta = \frac{P \cdot V_S}{F \cdot V} = \frac{P \cdot V_S}{\frac{P}{4} \cdot 4V} = 1$$

ROSSIARO RICAVARE F

$$R_0 = Q + T ; M_A = 0$$

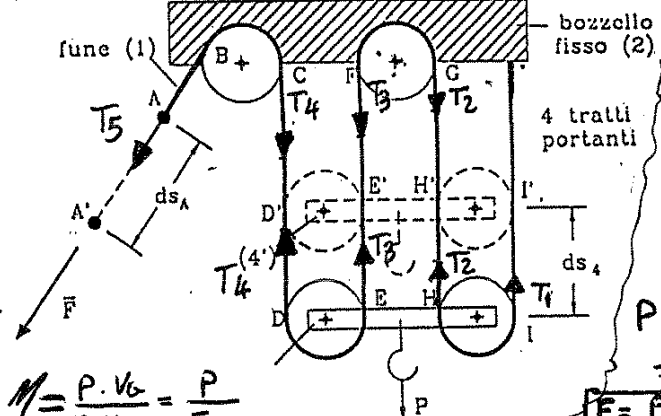
$$T[z-(l_2-l)-P] = Q[z+(l_1+l)+P]$$

$$T = \frac{Q[z+l_1+l+P]}{z-l_2+l-P}$$

$$\eta = \frac{z-l_2+l-P}{z+l_1+l+P} < 1$$

$$T = \frac{Q}{\eta} ; T_u = \frac{T_c}{\eta}$$

CON RIGIDENZE ED ATTRITO AL PERNO



CONSIDERANDO PULLEGGI CON STESSO  $\eta = \eta_1$

$$T_5 = F ; T_c = \eta T_u$$

$$T_4 = \eta_1 T_5$$

$$T_3 = \eta_1 T_4 = \eta_1^2 T_5$$

$$T_2 = \eta_1 T_3 = \eta_1^3 T_5$$

$$T_1 = \eta_1 T_2 = \eta_1^4 T_5$$

$$P = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T_5 (\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1^3 + \eta_1^4)$$

$$F = \frac{P}{\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1^3 + \eta_1^4}$$

$$\eta = \frac{P \cdot V_0}{F \cdot V_A} = \frac{P}{F \cdot M}$$

$$\eta = \frac{P}{\frac{P}{\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1^3 + \eta_1^4} \cdot 4} = \frac{\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1^3 + \eta_1^4}{4}$$

con  $\eta_1 = 0,9 \Rightarrow \eta = 0,27$



### Campo aderente

La ruota 2 fissa 1 ruota attorno a  $O_1$  con velocità angolare  $\omega_1$  → distribuzione triangolare di velocità attorno a  $O_1$

$\bar{v}_{2r1} = 0$  perché non c'è strisciamento, ma rotolamento puro →  $\bar{v}_{2r1} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = 0 \rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1$

Nasce una distribuzione triangolare di velocità attorno a  $O_2$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \omega_1 r_1 \\ v_2 &= \omega_2 r_2 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned} \right\} \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow \text{in aderenza } i = \text{cost. e dipende da } r_2 \text{ e } r_1 \text{ come nelle cinghie.}$$

$$\bar{\omega}_{2r1} = ? = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$$

Per capire il valore applico  $\omega_1$  autorotaria a tutto il sistema, così 1 si ferma, mentre 2 vede sommarsi  $\omega_1$  e  $\omega_2$

→  $\bar{\omega}_{2r1} = \omega_2 + \omega_1$  → 2 rotola su 1

### Strisciamento

$$T = \#N$$

Non ho più  $v_r = 0$ , perché ora  $v_1 \neq v_2$

Posso trasmettere coppie più basse, ma con strisciamento:

$$C_1 = \#N r_1 \quad C_2 = \#N r_2 \quad \text{se } \omega = \text{cost}$$

Andiamo a lavorare al limite aderente

$$C_{1\text{max}} = \#N r_1 \rightarrow C_{1\text{max}} - \#N r_1 = 0 \quad \text{con } \omega_1 = \text{cost}$$

$$C_{2\text{max}} = \#N r_2 \rightarrow C_{2\text{max}} - \#N r_2 = 0 \quad \text{con } \omega_2 = \text{cost}$$

Se applico  $C_r > C_{2\text{max}}$  → richiederà una  $T > T_{\text{aderente}}$  → avrò strisciamento →  $T = \#N$  e  $v_1 \neq v_2$

Dunque:

$$C_{1\text{max}} - \#N r_1 - I_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

$$\downarrow \#N r_1 \quad \uparrow C_{1\text{max}} - \#N r_1$$

Nasce la coppia d'inerzia  $I_1 \dot{\omega}_1$  a riequilibrare il sistema

$$C_r - \#N r_2 - I_2 \dot{\omega}_2 = 0$$

$$\uparrow C_r \quad \downarrow \#N r_2 \quad \uparrow C_r - \#N r_2$$

Nasce la coppia d'inerzia  $I_2 \dot{\omega}_2$  a riequilibrare il sistema.

Ricavo:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{C_{1\text{max}} - \#N r_1}{I_1}$$

concorde con  $C_{1\text{max}}$  che è discorde da  $I_1 \dot{\omega}_1$  →  $\dot{\omega}_1$  è discorde da  $I_1 \dot{\omega}_1$  e concorde con  $\omega_1$  → accelera

$$\dot{\omega}_2 = \frac{C_r - \#N r_2}{I_2}$$

concorde con  $C_r$  che è discorde da  $I_2 \dot{\omega}_2$  →  $\dot{\omega}_2$  è discorde da  $I_2 \dot{\omega}_2$  e da  $\dot{\omega}_2$  → decelera

→ c'è STRISCIAMENTO →  $i \neq \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$  e non è più costante

Posso trasmettere coppie medio-basse tra assi vicini. Idanno a monte o valle non si trasferisce perché non c'è contatto meccanico, allora si avrà solo usura perché inizierà lo strisciamento.

Dispositivi con ruote di frizione sono spesso usati nei variatori continui di velocità.

Fig. 5.23: sono riportati i cerchi di base delle due ruote di un ingranaggio e le tracce di due evolventi, ciascuna solidale ad una delle ruote, in posizioni successive durante il funzionamento dell'ingranaggio.

Ruota 1 → evolventi in verde

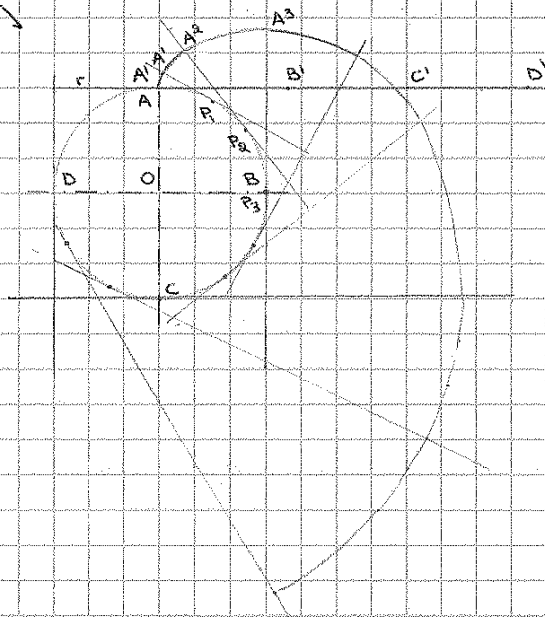
Ruota 2 → " " rosso

Con P si indica il punto di contatto tra le due evolventi in vari istanti successivi. Tale punto durante il funzionamento si mantiene sempre sulla retta r, tangente ai due cerchi di base e normale alle due evolventi.

r forma l'angolo  $\alpha$ , detto angolo di pressione, con la direzione verticale lungo cui sono scambiate le forze normali al contatto.

Affinché il contatto tra le evolventi, cioè tra i denti delle ruote, sia corretto, è necessario che questo avvenga all'interno del segmento  $H_1, H_2$ , dove le evolventi hanno le stesse normali. Al di fuori di tale segmento i denti hanno normali diverse. Il segmento  $H_1, H_2$  è detto perciò luogo dei contatti.

Evolvente



$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \overline{AB} = r_1 \alpha \\ \overline{A'C'} &= \overline{AC} = r_1 \alpha \\ \overline{A'D'} &= \overline{AD} = 3r_1 \alpha \end{aligned}$$

