



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 489

DATA : 27/02/2013

# A P P U N T I

STUDENTE : Insana

MATERIA : Idraulica

Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Politecnico di Torino



a.a 2012-2013

I facoltà di ingegneria  
corso di laurea in Ingegneria Civile

**Corso di Idraulica**

**Prof. Luca Ridolfi**

*Parte I*

a cura di Alessandra Insana





$T = \frac{F}{A}$  (tipo fluido,  $A = 2\pi r \cdot h$ ,  $\frac{1}{\Delta r}$ ,  $\Delta U = \omega_e r_e - \omega_i r_i$ )  
area della sup. a contatto col fluido  
 $r_e = r_i$

$T = \mu \Omega \left( \frac{\Delta U}{\Delta r} \right)$  prop. al gradiente di velocità  
sup. di contatto

$\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{\Delta U}{\Delta r}$

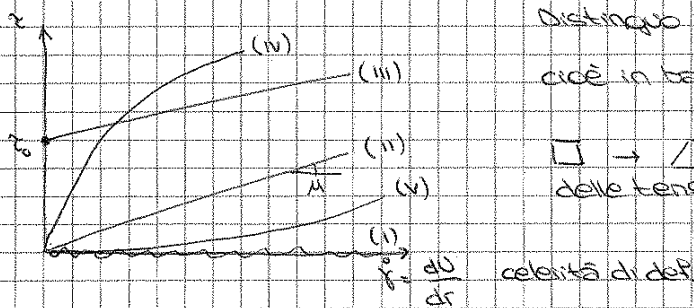
Fluido viscoso  $\rightarrow$  grad. di velocità  $\rightarrow$  reagisce con tensioni tangenziali

$\tau = \mu \frac{dU}{dr}$  legge di Newton per fluidi viscosi (fluidi newtoniani)  
 forma generale per strati di spessore infinitesimo

(disegno  $\rightarrow$  caso semplice di grad. di vel. uniforme  $\rightarrow dU/dr = \text{cost.}$ )

Il tempo è nascosto in  $dU/dr$

Reologia



Distinguo i fluidi con le curve in questo piano, cioè in base a  $\tau = \mu (dU/dr)$

$\square \rightarrow \square$  il fluido si deforma e nascono delle tensioni tangenziali

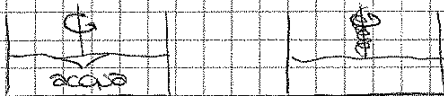
$\dot{\gamma} = \frac{dU}{dr}$  velocità di def.

$\rightarrow$  (I) Asse delle ascisse  $\rightarrow$  FLUIDO PERFETTO (Eulero)  $\rightarrow$  deformato il fluido che non fa nascere tensioni tang.  $\rightarrow \mu = 0$  (elio, idrogeno liquido = superfluidi)

$\rightarrow$  (II) FLUIDI NEWTONIANI  $\rightarrow$  rispondono a velocità di def. in modo lineare. Il coeff. ang. è  $\mu$  (aria, acqua)  
 $\rightarrow$  se non primo non esce, come farebbe l'acqua

(III) FLUIDI DI BINGHAM (dentifricio) vernici, botaccia di cemento --

(IV) Curve a concavità verso il basso  $\rightarrow$  hanno tante viscosità. Deformato tanto e diminuisce la viscosità.

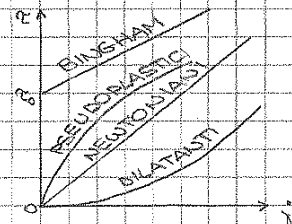


(V) FLUIDI DILATANTI (acqua e particelle solide  $\rightarrow$  colate detritiche) (lava)

(VI) FLUIDI ELASTOVISCONI  $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \tau_0$  (ghiacciai)

proprietà viscoso dei fluidi e elasticità dei solidi  
 $\rightarrow$  modulo di elasticità tang. esponenziale  
 Accessorie del moto,  $\dot{\gamma} = 0$  ma gli sforzi non cessano si estinguono con legge esponenziale  
 Se  $\dot{\gamma} \uparrow$   $\mu \downarrow$  liquidi

$\mu$  è molto sensibile con  $\Theta$ , a diff. di  $p$ , cambia di 20-30%.



- FLUIDI NEWTONIANI  
 $\mu$  costante catan. del fluido  
 retta per l'origine con coeff. ang.  $\mu$
- FLUIDI NON NEWTONIANI  
 non ho più una retta per l'origine
- $\rightarrow$  FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM retta non per l'origine ma per  $\tau_0$ ; per  $\tau < \tau_0$   $\dot{\gamma} = 0$   $\rightarrow$  conservano forma propria, per  $\tau > \tau_0$  diventano fluidi newtoniani
- $\rightarrow$  FLUIDI PSEUDOPLASTICI curva per l'origine concava verso il basso,  $\mu$  diminuisce con  $\dot{\gamma}$
- $\rightarrow$  FLUIDI DILATANTI " " " " " l'alto, " aumenta " "
- $\rightarrow$  FLUIDI TIXOTROPICI e REOPETICI  $\rightarrow$  comportamento dip. da T  $\rightarrow$  FLUIDI ELASTOVISCONI

secondo indice = proiezione sforzi secondo generiche direzioni

primo indice → direzione normale

secondo indice → direzione secondo cui si proietta

$$\begin{cases} \Phi_{nx} = \Phi_{xx} \cos \hat{n}_x + \Phi_{yx} \cos \hat{n}_y + \Phi_{zx} \cos \hat{n}_z \\ \Phi_{ny} = \Phi_{xy} \cos \hat{n}_x + \Phi_{yy} \cos \hat{n}_y + \Phi_{zy} \cos \hat{n}_z \\ \Phi_{nz} = \Phi_{xz} \cos \hat{n}_x + \Phi_{yz} \cos \hat{n}_y + \Phi_{zz} \cos \hat{n}_z \end{cases}$$

→ 9 informazioni → 9 componenti di sforzo

$$\begin{pmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{TENSORE DEGLI SFORZI}$$

Se impongo l'equilibrio alla rotazione la matrice è simmetrica →  $\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$   $\begin{cases} i = x, y, z \\ j = x, y, z \end{cases}$

→ 6 informazioni da dare pto per pto e nel tempo (scalari)  $\begin{cases} 3 \text{ normali} \rightarrow \Phi_{xx}, \Phi_{yy}, \Phi_{zz} \\ 3 \text{ tangenziali} \rightarrow \Phi_{xy} = \Phi_{yx}, \Phi_{yz} = \Phi_{zy}, \Phi_{xz} = \Phi_{zx} \end{cases}$

Invece le forze di massa non danno problemi.

(i)  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \text{cost.}$  INVARIANTE

non nel tempo ma con i vari orientamenti di  $\{x, y, z\}$

(ii) Matrice diagonale → sforzi normali → dico le stesse cose con meno info

↳ se uso un s.r. "furb" → sistema delle direzioni principali

Autorazzi → autovaltori = direzioni principali

Sulla diagonale ci sono gli autorazzi.

(iii) Casi in cui comunque oriento il s.r. la matrice è sempre diagonale → autorazzi tutti =

→ stato di tensione isotropo → 1 info = pressione

$$\Phi_n = p \vec{n}$$

sorta di membrana elastica in stato uniforme di tensione

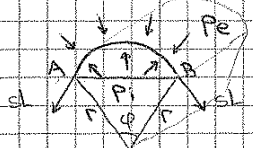
• Interfaccia tra due fluidi non miscibili → tensore superficiale dovuta a forze di coesione  
 Sforzi che devo esercitare tra i due lati del taglio per tenerli a contatto



$$s = \frac{F}{L} \quad \text{N/m} \quad s = s(\text{tipo fluido } \theta) \quad \theta \uparrow \quad s \downarrow$$

forza per unità di lunghezza

Ritaglio un pezzo di sp. libera curva, cilindrica



$p_i > p_e$  per compensare  $s$   
 curvatura → diff. di pressione

$$AB = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{2r \sin \frac{\varphi}{2}}{2} \Delta p = \frac{2s \frac{1}{2}}{2}$$

altro lato del rettangolo di cui un lato è AB

$$\Delta p = s \frac{1}{r} \quad \text{curvature forti} \rightarrow \text{grandi variazioni di pressione}$$

$$\Delta p = s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{legge di Laplace} \quad R_1, R_2 \text{ raggi principali di curvatura}$$

3 ottobre 2019  
 Nei fluidi in quiete le singole particelle non subiscono nel tempo alcuno spostamento relativo sia in condizioni di equilibrio assoluto rispetto ad una terra fissa, sia in cond. di equi-  
 Statica dei fluidi relativo (fluido immobile rispetto ad un riferimento mobile) → no deformazioni della massa fluida → in tutto gli sforzi interni non ammettono componenti tang., ma sono normali all'elemento piano per il pto. Non c'è campo di moto → vettore  $\vec{u} = 0$  fermo rispetto a un s.r. che si muove

Esiste almeno un s.r. in cui  $\vec{u} = 0$  (recipiente d'acqua in moto → paraboloide → fermo rispetto a un s.r. solido)

$$\vec{u} = 0 \rightarrow \text{grad } \vec{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots$$

Per i fluidi viscosi  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  se il fluido ha un gradiente di velocità solo lungo y. Se  $\frac{du}{dy} = 0$  non ci sono tensioni tangenziali

→ no tensioni tangenziali → il fluido si comporta come se fosse perfetto → fluidi viscosi e perfetti coincidono in statica. Esistono solo gli sforzi normali

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\sigma}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\sigma}_z \cos \hat{n}_z$$

(x)  $|\vec{\sigma}_n| \cos \hat{n}_x = \sigma_{xx} \cos \hat{n}_x + \sigma_{yx} \cos \hat{n}_y + \sigma_{zx} \cos \hat{n}_z = \sigma_{xx} \cos \hat{n}_x \rightarrow |\vec{\sigma}_n| = \sigma_{xx}$   
 sforzo normale                      sforzi tangenziali = 0

(y)  $|\vec{\sigma}_n| \cos \hat{n}_y = \sigma_{yy} \cos \hat{n}_y \rightarrow |\vec{\sigma}_n| = \sigma_{yy}$

(z)  $|\vec{\sigma}_n| \cos \hat{n}_z = \sigma_{zz} \cos \hat{n}_z \rightarrow |\vec{\sigma}_n| = \sigma_{zz}$

Lo sforzo in un generico pto del fluido in quiete ha modulo indipendente dall'orientamento passante per il pto stesso. Tale modulo è la pressione p. Nota la distribuzione di p nella massa fluida, conosco lo stato di sforzo del fluido in quiete

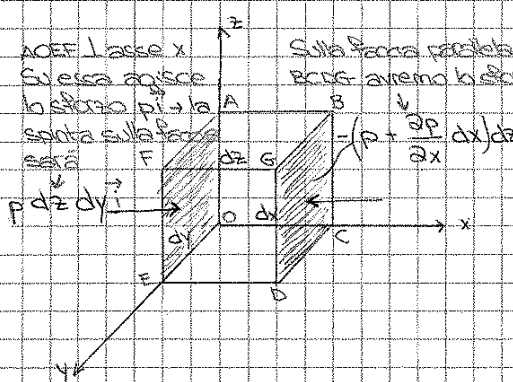
$$p = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = |\vec{\sigma}_n| \quad \text{pressione}$$

Esistono solo sforzi normali indipendenti dalla gravità. Il tensore degenera in uno scalare

Devo dire come la pressione varia da pto a pto →  $p = p(x, y, z)$  ma solo in statica!

→ matrice diagonale e orientazione → unico autovalore con molteplicità 3

Cerco la pressione → devo scrivere eqz di bilancio (conservazione energia, massa, quantità di moto)



in quiete  
 Scelgo un elemento di fluido in parallelepipedo di

Sulla faccia parallela

Però avremo bisogno lati  $dx, dy, dz$  // agli assi  $x, y, z$  con vertice in O

$$= (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dz dy$$

Applico la cons. della quantità di moto  $\vec{F} = m\vec{A} = 0$

perché siamo in statica. Che forze abbiamo? infinite

- (1) di massa, proporzionali alla massa, risultante delle forze esterne agenti sul sistema
- (2) di superficie trasmesse attraverso la superficie di contorno del volume sul fluido contenuto all'interno

(1) La massa è  $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$

$\vec{F}$  intensità della forza peso, forza-peso per unità di massa → accelerazione → in  $m/s^2$

→ la forza-peso è  $\vec{F} \rho dx dy dz = \vec{F} dm$  → forza di massa agente sul volume infinitesimo considerato

(2) Vediamo per ogni faccia le forze al contorno, dovute alle tensioni

Fluido in quiete → forze di superficie ⊥ alla superficie  
 $p(dz dy)$        $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dz dy$  non ce n'è altre lungo x (vedi disegno)

La risultante delle forze sulle due facce // e ⊥ all'asse x è:

(x)  $p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$  (segno meno per la convenzione della normale entrante)

$$\vec{P} + \int_C p \vec{n} dA = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = 0 \text{ eqz. integrale o FORZA ORALE DELL'EQUILIBRIO STATICO}$$

risultante delle forze al contorno, di tutti gli sforzi elementari  $p \vec{n} dA$  agenti sui singoli elementi della superficie di contorno A  $\rightarrow$  spinta esercitata da V sulla sup. di contorno A

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

La risultante delle forze di massa agenti su un generico volume di fluido in quiete  $\vec{F} = 0$  è opposta alla spinta agente (dall'est. verso l'int.) sulla sup. di contorno A che lo delimita. Non cambiano gli sforzi interni a V  $\rightarrow$  l'equil. del fluido dipende solo dai valori di p al contorno.

**Statica dei fluidi pesanti incompressibili**

Per risolverla faccio delle ipotesi:

- (i)  $\vec{F} = \text{grad}(-gz)$   $\leftarrow$  quota geodetica del generico pto. ho a che fare con la forza-peso
- Forza-peso che ammette pot.  $\rightarrow$  verticale rivolto verso il basso

Considero un fluido in quiete soggetto solo all'azione del campo gravitazionale. La forza di massa è conservativa

- (ii) fluido incompressibile  $\rho = \text{cost.}$   $\rightarrow$  hp accettabile per i liquidi se la massa liquida non ha altezze rilevanti, per i gas solo se occupano serbatoi alti pochi metri

$$\rho \text{grad}(-gz) = \text{grad } p \quad \text{I hp}$$

$$\text{grad}(-gz) = \text{grad } p \quad \text{II hp}$$

$$\text{grad}(z + \frac{p}{\rho}) = 0$$

$z + \frac{p}{\rho} = \text{cost.} \rightarrow$  c'è un invariante. FORZA FONDAMENTALE della statica dei fluidi pesanti e incomp. o LEGGE DI STEVIN

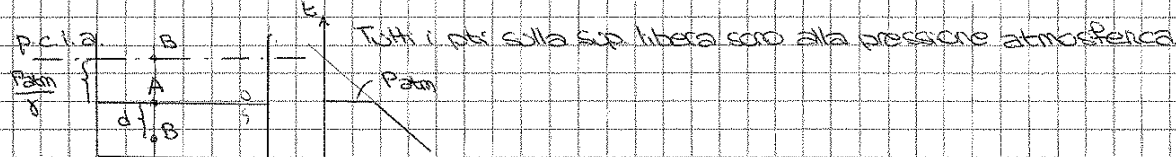
altezza di pressione  $\rightarrow$  metri di fluido, è una lunghezza come z.  $\frac{p}{\rho g}$  ALTEZZA PIEZOMETRICA.  $z + \frac{p}{\rho g}$  QUOTA

A tutti i punti di un fluido pesante incompressibile in quiete compete lo stesso carico piezometrico

$\rightarrow$  CARICO PIEZOMETRICO noto se è nota p in un punto di quota z data

Basta conoscere p in un punto e la so ovunque  $\rightarrow$  conosco la distribuzione di pressione

Esempio:



Se A e B sono due punti qualsiasi giacenti su due piani orizzontali di quota  $z_A$  e  $z_B$ ,  $p_A$  e  $p_B$  sono legati da

$$h_A = z_A + \frac{p_A}{\rho g} = h_B = z_B + \frac{p_B}{\rho g} \rightarrow p_B = p_A + (z_A - z_B) \rho g$$

Le pressioni variano in modo lineare, più o meno a seconda del peso specifico  $\rho$ .

Per dare un risultato generale introduco un piano fittizio dove  $p=0$  detto PIANO DEI CARICHI

IDROSTATICI ASSOLUTI, luogo dei punti in cui  $p=0$ .

$$z_A + \frac{p_{atm}}{\rho g} = z_B + 0 \rightarrow z_B - z_A = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

è l'altezza piezometrica la distanza tra p.c.i.a. e p.c.f., cioè la sup. libera

$\frac{p_{atm}}{\rho g} = \begin{cases} \text{acqua} & 10,3 \text{ m} \\ \text{mercurio} & 0,76 \text{ m} \end{cases}$

$$p(z) = p_{atm} + (z_{atm} - z) \rho g$$

PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI  $\rightarrow$  ASSOLUTI  $\rightarrow p=0$   
 $\rightarrow$  RELATIVI  $\rightarrow p_c = 0$



4 ottobre 2018

Punti Fondamentali statica dei fluidi

(i) eqz di  $\rho \vec{F} = \rho \text{grad} p$

(ii)  $\vec{F} + \vec{F}_g = 0$

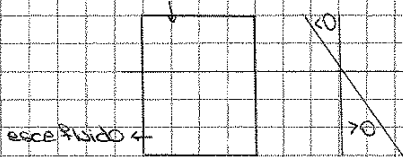
(iii)  $\rho = \text{cost.}$   
 $\vec{F} = -\rho \text{grad}(gz)$  }  $h = z + \frac{p}{\rho} \rightarrow h_A = h_B$

andamento lineare delle pressioni  $p = p(z)$

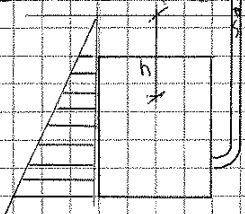
$p_r = p - p_{atm}$  tratteremo solo con  $p_r$  che indicheremo d'ora in poi con  $p$ , e col p.c.i.r. pressioni relative negative corrispondono depressioni

Osservazione:  $p > 0$ ,  $p_r$  può andare in negativo fino a  $-p_{atm}$ , sotto non posso andare entro fluido (aria)

Infatti si mettono sempre pompe che premono, spingono perché sotto la depressione  $-p_{atm}$  non posso andare



... Piezometro costituito da un tubo, verticale o inclinato, aperto in sommità e collegato all'alta estremità col recipiente contenente il liquido che conosco  $p$  in un punto, so dove è il piano dei c.i.r., trovo  $p = \rho h$  sale fino alla quota del p.c.i.



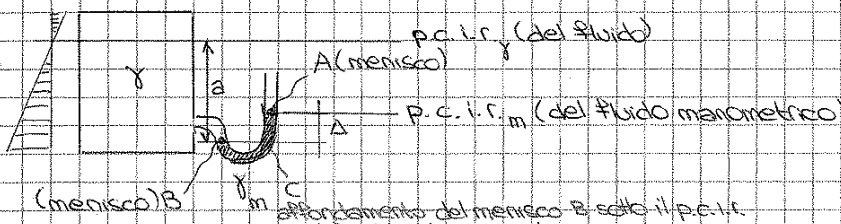
p.c.i.r. negli altri punti  
 $p = \rho h$  legge di Stevino

È sufficiente conoscere  $p$  in un punto per individuare con facilità la distribuzione di  $p$  nell'intera massa fluido. Per misurare  $p$  in un punto o meglio  $h$  in un punto posso usare un...

La pressione ha andamento triangolare

Se le pressioni del liquido sono elevate  $\rightarrow$  p.c.i. molto alto  $\rightarrow$  strumento di difficile attuazione pratica  $\rightarrow$  con strumenti per la misura della pressione: viene usato un manometro semplice

(I) manometro a mercurio (più pesante del fluido nel recipiente)



I manometri semplici sono formati da un tubo a U con un'estremità collegata al recipiente contenente il fluido e l'altra in comunicazione con l'atmosfera. Nella parte inferiore si dispone un fluido con peso specifico  $\gamma_m > \gamma$  fluido nel recipiente. Spesso si usa  $Hg$  che in genere è sempre più pesante del fluido nel recipiente.

$p_B = \gamma_m a = \gamma a \rightarrow a = \frac{\rho_m}{\rho} \Delta$

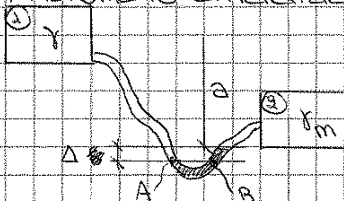
B lo posso vedere e fluido o e al mercurio, ma la pressione è la stessa

Conoscendo p.c.i.r. conosco le pressioni in ogni punto

Riesco a leggere con piccoli  $\Delta$  grandi  $a$ . Se ci fosse un fluido più leggero (alcol) se la pressione relativa in B è negativa, il menisco A si porta ad una quota  $\Delta B$  entrarebbe dentro.

Interessa tenere sotto controllo le differenze di pressioni. Si usa un

(II) manometro differenziale



1 e 2 hanno pressioni diverse 1 ha il p.c.i.r. più alto



$\vec{S} = p_G A \vec{n}$  La spinta su una superficie piana è una forza diretta normalmente alla superficie stessa con modulo pari al prodotto della pressione nel suo baricentro per l'area della superficie.

•  $|\vec{S}| = p_G A$  modulo

Per trovare il centro di spinta considerare due assi cartesiani di cui x coincide con una retta di max pendenza del piano su cui giace A e y con la retta di

Se fisso G non cambia S perché non sto cambiando  $p_G$

• pto di applicazione? È detto CENTRO DI SPINTA, baricentro del diagramma delle pressioni spinta

→ più in basso di G perché il grosso delle pressioni è in basso. Ma dove precisamente? del centro di spinta

Cerco le coordinate  $\xi, \eta$ . Considero un elemento infinitesimo dA con spinta dS e momento

$dM = x dS = \gamma x^2 \sin \alpha dA$ . La risultante dei momenti infinitesimi è

$M = \int_A dM = \gamma \sin \alpha \int_A x^2 dA = \gamma \sin \alpha I_y =$  momento della risultante =  $S \xi = \gamma S \rho_G \times M \xi$

$I_y$  momento d'inerzia della sup. A rispetto alla retta di sponda

→  $\xi = \frac{I_y}{M}$

Trovo  $\xi, \eta$  eguagliando i momenti della risultante con gli integrali dei momenti delle spinte elementari, rispetto a due assi x e y.

Lo stesso per  $\eta$  →  $\eta = \frac{I_{xy}}{M}$

$\int_A xy dA = I_{xy}$  momento centrifugo di A rispetto a x e y

$\xi = \frac{I_y}{M}$       $\eta = \frac{I_{xy}}{M}$

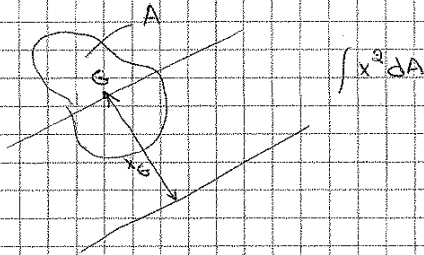
La posizione del centro di spinta è indep. dall'inclinazione  $\alpha$  → non cambia se tutto il piano della sup. Ho trovato le 4 informazioni che volevo intorno alla retta di sponda

(i) Se la sup. ha un asse di simmetria rispetto a una linea di massima pendenza, il centro di spinta è su questa linea. Devo solo calcolare  $\xi$ , non  $\eta$ .  
 →  $\eta = 0$  se x è l'asse di simmetria di A; il centro di spinta si trova cioè sull'asse di simmetria di A se questo coincide con una

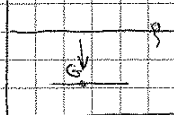
(ii) In alcuni casi particolari non devo fare conti per trovare C. Se un estremo della sup. sta sulla sup. libera e se ho un triangolo C è a  $\frac{1}{3}$  di max pendenza

Quando la sup. tende a diventare // al p.c.i. la linea di sponda è andata all'∞. Allora il centro di spinta si trova in corrispondenza del baricentro G della superficie

$\xi = \frac{I_y}{M}$  Proprietà:  $I_y = I_{oy} + x_G^2 A$  trasposizione dei momenti



$\xi = \frac{I_y}{M} = \frac{I_{oy} + x_G^2 A}{M} = \frac{I_{oy}}{M} + x_G$



$M \rightarrow \infty$  perché è  $x_G A$  ma  $x_G \rightarrow \infty$  perché la linea di sponda è andata a ∞

$\xi \rightarrow x_G$  La forza è applicata in G, infatti il diagramma delle p è orizzontale. La pressione è costante per tutti i punti della sup.

La spinta in statica non dipende da quanta acqua c'è attorno, ma sulla ~~testa~~ testa cioè dall'approfondimento (diga).

**Formula di Mariotte**

fluidi sottoposti a pressione e contenuti in recipienti di piccole dimensioni  
 - es: condotta di diametro piccolo rispetto all'altezza perpendicolare del fluido

Vale se la tubazione è sottile e molto profonda rispetto al p.c.r.c. in esso contenuto.

In questa situazione, molto frequente nella pratica, si può ritenere che su ogni sezione trasversale del tubo la pressione sia costante.

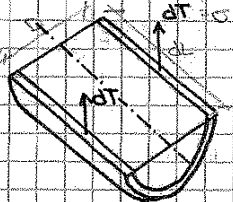
Considero un tubo di diametro  $D$ , spessore  $s$ , costituito da materiale con un carico di sicurezza a trazione  $\sigma$ .

Si consideri una spezzatura di tubo di lunghezza infinitesima  $dl$  e coadiuvato con un qualsiasi piano diametrale  $\rightarrow$  i due semicilindri si trasmettono attraverso le superfici longitudinali  $s \cdot dl$  due forze  $dT$  complessivamente  $\rightarrow$  alla spinta che il liquido con pressione  $p$  esercita



trascuro le variazioni di pressione, la base è grossa e la variazione conta poco meno sul mano che scendo  
 scala per descrivere il fenomeno « scala per cogliere il gradiente  
 Devo andare a scale maggiori»

Questa spinta vale  $p \cdot D \cdot dl$  al piano diametrale  
 $\rightarrow dT$  alle superfici  $s$  sul semicilindro e sono di trazione. Hanno modulo  $dT = \frac{pD}{2} dl$ .



bilancio di forze - trascuro peso, considero liquido fermo,  $s$  piccolo,  $\sigma = p$  su ogni sez. trasversale perché tubo sottile rispetto al p.c.r.c. o recipienti di piccole dimensioni  
 pressione esercitata dall'acqua sulle tubazioni

Equilibrio:  $F_1 + F_2 = 0$   
 $p \cdot D \cdot dl = 2 \cdot dT$

ammettere che la sollecitazione  $dT$  sia uniformemente distribuita sull'intera superficie  $\rightarrow s = pD / 2\sigma \rightarrow$  FORMULA DI MARIOTTE usata per il calcolo dello spessore dei tubi

$p/d = 2\sigma s/k$   $\sigma = \frac{pD}{2s}$  sforzi normali interni al solido ( $s \leq 15 - 20 d$ )  
 $\frac{F}{A}$   
 $\sigma_{sp} = p$  in ogni punto

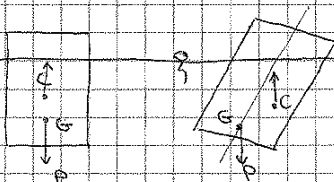
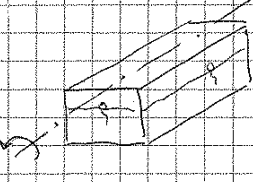
$\sigma$  serve per sostenere le tubazioni e farsi che non si acciano

Se la tubazione è sottile suppongo che  $\sigma$  sia lo stesso  $\sigma$ . Ciò vale per tutte le tubazioni metalliche.

Stabilità al galleggiamento (architettura navale)

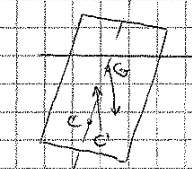
Fenomeno fisico  $\rightarrow$  capito  $\rightarrow$  eqa d'eq  $\rightarrow$  soluzioni  $\rightarrow$  analisi di stabilità  
 Se non le so trovare faccio esperimenti o simulazioni numeriche al computer  
 Devo capire se la siz è stabile o instabile

Perché una bottiglia sull'acqua non sta dritta, ma inclinata?  
 Considero un corpo parzialmente immerso. Stabilità al rollio, beccheggio  
 Piano di carena = sup. libera  $\cap$  corpo  
 Volume di carena = volume immerso



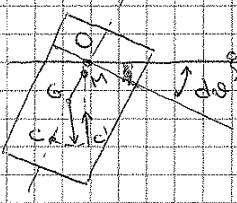
Due casi: primo caso

secondo caso



piccole perturbazioni assorbite (onda)

equilibrio stabile



M metacentro  
 $\overline{CM} > \overline{CG}$  st.  
 $\overline{CM} < \overline{CG}$  inst.  
 GM altezza metacentrica

Il volume di carena cambia.  
 Nasce una coppia  
 G non cambia, C si. In C è applicata la forza di Archimede  
 C = baricentro del volume di carena

2.12. Galleggiamento

L'abbassamento di un galleggiante dalla sua posizione di galleggiamento determina un aumento del volume di liquido spostato, quindi della spinta di sostentamento: perciò esso tende a salire e a riprendere la primitiva posizione. Per un sollevamento, nel caso inverso, prevarrà l'azione del peso. Quindi la posizione di galleggiamento è di *equilibrio stabile* rispetto a spostamenti verticali. E' chiaro che l'equilibrio risulta *indifferente* per spostamenti orizzontali.

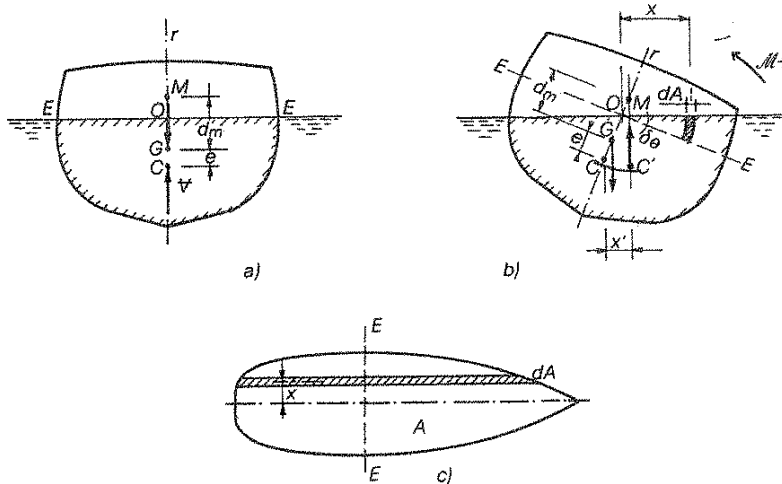


Fig. 2.24

Per l'equilibrio rispetto alla rotazione va esaminato quanto segue, con speciale riferimento agli scafi delle navi.

Sia  $G$  il baricentro,  $C$  il centro di spinta o *centro di carena* (centro del volume  $V$  spostato, detto *volume di carena*) ed entrambi giacciono sull'asse  $r$  di simmetria (*asse di galleggiamento*) in condizione di riposo (Fig. 2.24 a), per cui si ha l'equilibrio delle forze

$$F_c = \gamma V = G$$

Consideriamo la *superficie di galleggiamento* (o di livello dell'acqua), formata dall'intersezione dello scafo con la superficie

libera, ed ossuno degli infamessa la simgitudinale, ac (attorno al qu sale (moto di

Poiché il nunciato per i condizione di

La sezior ni di riposo) la superficie avviene attorri 0.

Nella pos baricentro  $G$  il centro di c vo volume imm

Per le pi mane il medes simmetria è es

Evidentes le, occorre di portare il ga

Da sempl azione della mento in un p deve avvenire al limite, pe tende infatti zione, portan metacentro; i to navale di

Per cala questo modo.

le parti inne cunei equival traccia  $O$  due diverso spaz

Calcolla golo di incli



cie  $A$  di galleggiamento (Fig. 2.24 c)) posto alla distanza generica  $x$  dall'asse, risulta ruotato di un arco pari a

$$x \sin \delta \theta = x \delta \theta$$

Il volume immerso od emerso

$$dV = x \delta \theta dA$$

corrisponde ad una spinta elementare di galleggiamento

$$dF_c = \gamma dV = \gamma x \delta \theta dA$$

esercitando un momento

$$dM = \gamma x^2 \delta \theta dA$$

Il momento totale delle due parti (positivo nel verso di rotazione antiorario) sarà allora:

$$M = \int_A \gamma \delta \theta x^2 dA = \gamma \delta \theta I_0 \quad (2.28)$$

ove  $I_0$  è il momento d'inerzia dell'intera superficie rispetto all'asse longitudinale d'inclinazione. A questo momento deve corrispondere quello determinato dallo spostamento da  $C$  a  $C'$  del centro di spinta della carena, che è pari a  $\gamma V x'$ , essendo  $x'$  la distanza tra le rette d'azione passanti per  $C$  e per  $C'$ . Si ottiene in definitiva:

$$\gamma V x' = \gamma \delta \theta I_0$$

Dalla figura risulta

$$x' = \overline{CM} \sin \delta \theta = \overline{CM} \delta \theta$$

da cui

$$\overline{CM} = \frac{I_0}{V}$$

Viene definito *distanza metacentrica* il segmento orientato  $d_m = \overline{GM}$  avente per estremi il baricentro e il metacentro; risulta allora, posto  $e = \overline{GC}$ :

Se  $d_m$  risulta  $G$ , l'equilibrio è

Quando non è sottomarini) è il centro più basso

Per questa il volume di carisce la determinatro di uno scafo materiali vari non tuali. Va poi at sizione del metz superficie liber

La maggiore o minore comodità di una nave è in relazione alla distanza metacentrica; infatti in una nave inclinata si costituisce una coppia (detta *momento di richiamo*), che tende naturalmente riportarla nella posizione primitiva. La coppia data da due forze uguali e contrarie applicate in  $C'$  e in  $G$  (Fig. 2.25), con un

per cui il momento di ritorno è dato da:

$$M = G d_m \delta \theta \quad (2.30)$$

E' chiaro che tanto maggiore è  $d_m$ , tanto più forte è il momento di richiamo, a parità di inclinazione  $\delta \theta$ , e quindi tanto più rapido il ritorno che succede ad uno sbandamento della nave.

Infatti, trattandosi di un moto di rotazione, l'equilibrio dinamico è rappresentato, in assenza di resistenza, dall'equazione differenziale

$$I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M = - G d_m \theta = - \gamma \psi d_m \theta$$

dove  $I_G$  è il momento d'inerzia baricentrico delle masse rotanti, e  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  è l'accelerazione angolare.

L'equazione scritta è quella di un moto armonico, avente periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G}{\gamma \psi d_m}} \quad (2.31)$$

Per navi che debbano ritornare rapidamente in assetto normale (navi da guerra, imbarcazioni sportive)  $d_m$  deve essere piuttosto grande (0,90 - 1,50 m). Sarà di valore ridotto per la comodità del viaggio e la sicurezza dei carichi per i transatlantici e per le navi mercantili (0,45 - 0,60 m).

La formula ottenuta suggerisce anche la possibilità di ottenere la distanza metacentrica  $d_m$  di una piccola nave per via sperimentale, mettendo in oscillazione la nave con un carico mobile, per esempio coperta, e stabilendo il periodo di oscillazione. Noto il momento d'inerzia delle masse rotanti ed il peso, si ricava  $d_m$ .

Nella valutazione analitica (per angoli compresi tra  $0^\circ$  e  $10^\circ$ )  $d_m$  rimane praticamente invariata al variare di  $\delta \theta$ , ma oltre questo valore non risulta più lecito sostituire a  $\delta \theta$  il suo argomento  $\theta$ . Ciò implica una complicazione considerevole nei conteggi per la determinazione di  $d_m$ . In genere si procede in sede di progetto per valori piccoli dell'angolo  $\delta \theta$  e poi si controllano sperimentalmente i risultati per angoli maggiori, per esempio inclinando la nave mediante riempimento di compartimenti stagni.

In questo modo si conosce il momento che provoca l'inclinazione e lo si eguaglia al momento (2.30)  $M = G d_m \delta \theta$  dovuto alle due forze  $F_c$  e  $G$ .

Si ricava un diagramma dei valori di  $d_m$  in funzione dell'angolo  $\delta \theta$ , che può essere misurato con procedimenti geodetici o ma approssimazione. Il valore di  $d_m$ , ottenuto per via analitica (2.29), dovrebbe coincidere col valore cui tende al limite il grammma sperimentale così trovato, per  $\delta \theta \rightarrow 0$ .

### 2.13. Distribuzione della pressione in un fluido comprimibile

L'integrazione dell'espressione (2.1), relativa alla distribuzione delle pressioni di un fluido in quiete, è stata finora per un fluido incomprimibile utilizzando i risultati.

Sia ora  $\gamma$  non più costante, ma funzione della pressione quindi della quota  $h$ . Il caso risulta interessante per un gas comprimibile, per esempio l'atmosfera, di cui si voglia valutare la distribuzione statica delle pressioni per una rilevante altezza. Per la legge di variazione di  $\gamma$  con la pressione si possono diverse ipotesi: la più semplice è che si tratti di una trasformazione isoterma (§ 1.7)  $p\gamma = \text{cost}$ , cioè:

$$p = \frac{\gamma_0}{\gamma} p_0$$

dove  $p_0$ ,  $\gamma_0$  hanno i seguenti valori al suolo ( $h=0$ ) per la *atmosfera normale*, assunta a scopi aeronautici per poter fare il confronto delle prestazioni degli aeroplani fatte in zioni atmosferiche diverse:

$$p_0 = 10.332 \text{ kp/m}^2, \quad \gamma_0 = 1,226 \text{ kp/m}^3 \quad (\text{per } t_0 = 15^\circ\text{C})$$

Sostituendo nella (2.1) si ottiene:

$$\frac{dp}{p} + \frac{\gamma_0}{p_0} dh = 0$$

e integrando, e definendo con i valori al suolo la costante:

$$\ln p + \frac{\gamma_0}{p_0} h = \ln p_0$$

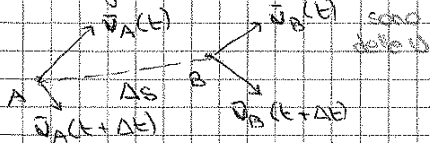
da cui

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} h}$$

Si osserva che, se si fosse ammessa la legge distribuita

Trascorre un tempo  $\Delta t$ ,  $A$  passa in  $B$  e al tempo  $t + \Delta t$  ha velocità  $v_B$ . Ha trascorso

un tragitto  $\Delta s$



$$\vec{A} = \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t}$$

Faccio il limite e trovo  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

Ma Eulero non sta seguendo una particella, ma vede come cambiano le cose in un pto.

$$\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t) + \vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t) = \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} \Delta s + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t} \Delta s$$

come è scritto  $\vec{v}_B(t) \Delta t$  moltiplicare dando per  $\Delta s$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_B(t+\Delta t) - \vec{v}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$$

↳ modulo della velocità  
 con  $\vec{v}$  è cambiata in un pto la velocità della particella che sta sopra che non è sempre la stessa

$\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  → Lagrange → variazione di velocità seguendo la particella  
 $\vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$  → Eulero → " " " in un unico pto a cui devo sommare un pezzo

$$\text{Eulero} \rightarrow \vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}| = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

derivata euleriana

↑  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  variazione di velocità subito dalle particelle che si muovono  
 ↑  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} |\vec{v}|$  incremento della variazione spaziale della velocità  
 acc. locale (come le cose cambiano nel tempo)  
 acc. convettiva (perché tiene conto dello spazio) e nello spazio → tiene conto che nel tempo  $\Delta t$  la particella si è mossa dove esplora un certo spazio che dipende da  $|\vec{v}|$ , velocità con cui si muove

In un s.f. xyz diventa

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

REGOLA DI DERIVAZIONE EULERIANA → calcola il variare nel tempo  $\vec{v}$  grandezza (derivata totale o sostanziale)

Sembra più difficile di Lagrange che considerava solo il primo termine, ma poi si semplifica.

Tale formula vale  $\forall$  grandezza (velocità → accelerazione, pressione, viscosità, densità...)

$$\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + u \frac{\partial \cdot}{\partial x} + v \frac{\partial \cdot}{\partial y} + w \frac{\partial \cdot}{\partial z}$$

↳ esplorazione dello spazio che dipende dalla velocità  
 variazione locale che dice come mi muovo

Il campo di moto di un fluido può essere visualizzato da 3 famiglie di linee che esemplano particolari aspetti del movimento

• Equazione delle traiettorie → linee lungo dei pnti occupati dalle singole particelle fluide in moto  
 spostamento elementare subito dalla particella nel qstante istante

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$

Se voglio visualizzare color il fluido (intervergono processi di

$$\frac{dy}{dt} = v(\cdot)$$

diffusione che diluiscono il colorante poi disperso → non lo

$$\frac{dz}{dt} = w(\cdot)$$

vedo più). Oppure metto delle particelle con p.e. p.f. e scatto foto

Traiettoria di una particella → condiz. iniz. → posizione  $(x, y, z)$  all'istante  $t$

Lascio scorrere il tempo e seguo dei punti. Se cambiano le densità intervergono

come che non ci sarebbero nel fluido, altrimenti le particelle descrivono abbastanza

bene il moto di una particella di fluido → va bene fino a un certo punto.

All'istante generico lo si ritrova in pto del campo fluido a quella velocità.

• Dal p. di v. di Eulero ci sono anche linee di flusso → vettore velocità tangente a (o linea di corrente)

Queste linee in pto. Per il moto passa una sola linea di corrente

$$v_n dA = dQ = \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad \text{portata}$$

Volume di fluido che transita attraverso l'elementino dA

Portata attraverso tutta la superficie A → integrale

$$Q = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad \text{è un volume riferito al tempo}$$

Volume di fluido che transita attraverso A

Volto ⊥ alla linea di flusso per lo stesso

Superficie condata = 1 al vettore velocità  $\vec{v} \rightarrow Q = \int_A v dA \rightarrow$  superficie trasversale al moto

Però il prodotto scalare e semplifico le cose.



$$V = \frac{Q}{A} \quad \text{velocità media della sezione trasversale generica}$$

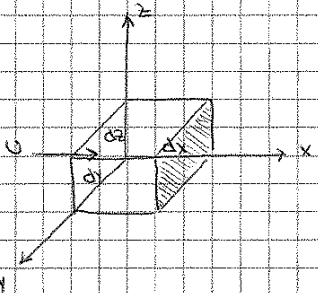
Per risolvere l'integrale devo sapere come variano dA e  $\vec{n}$  wpto. Con V invece trovo la portata come  $Q = VA$ .

**Equazione di continuità**

Vogliamo scrivere delle eqz diff. In statica è  $\vec{\rho F} = \text{grad } p$ . Vogliamo trovarla per la dinamica

In cinematica usiamo il principio di conservazione della massa. Comunque il fluido si muove, pto per pto la massa deve conservarsi.

densità del fluido  
u, v, w conservanti della velocità



Scelgo un generico elemento in finitesimo della massa fluida, per comodità un parallelepipedo con piani ⊥ agli assi coordinati,

di lati dx dy dz. Entra o esce massa perché c'è del fluido che si sposta; nel tempo dt la massa che esce è  $\rho u dt dy dz$

Lungo x entra (o esce) altra massa dall'altra faccia e vale  $(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx) dt dy dz \rightarrow$  massa di fluido che la componente u fa entrare o uscire attraverso questa superficie

La differenza tra quello che entra e quello che esce vale  $-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$

Analogamente per y e z  $\rightarrow -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dz dx dt$  e  $-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy dt$

Se non cambiasse  $\rho$  e non ci fossero gradienti di velocità questi sarebbero 0.

La massa all'interno del volume è  $\rho dx dy dz$  (ecco perché ho scelto un parallelepipedo)

Può variare nel tempo ma solo se cambia  $\rho$ , il volume rimane uguale  $\rightarrow \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$

Uguagliando: esce massa + diminuisce la massa all'interno

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{eqz di continuità delle ancore (vanno in valigie in vista del campo di moto)}$$

divergenza

La massa uscente nel tempo dt attraverso l'intera sup. di contorno del volume considerato deve = la diminuzione in ab della massa contenuta nel volume (esattamente della variazione di  $\rho$ )

Caso particolare: fluido incompressibile  $\rightarrow \rho = \text{cost}$  nello spazio e nel tempo  $\rightarrow \text{div} \vec{v} = 0$

Il campo di moto è solenoidale.

Caso intermedio:  $\rho = \text{cost}$  nel tempo, ma cambia nello spazio  $\rightarrow \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$   
 $\rho = \rho(t)$   $\rho = \rho(x, y, z)$

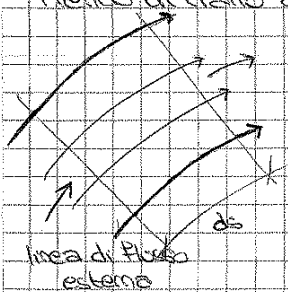
Si parla di fluidi stratificati (orizzontali), per esempio l'oceano, l'atmosfera

$\rho$  cambia per  $\rho$ , p, salinità

Scriviamo le eqz delle correnti. Invece di usare grandezze come campo di moto, pressione, densità, che sono intensive cioè dipendenti da pto a pto, e che non conosco, uso la portata, l'area, la velocità media, frutto di un'integrazione che elimina delle informazioni dei particolari. Non è il caso di sapere  $v$  in un punto, troppe informazioni che poi non uso.

Per un problema di base sono sufficienti le variabili  $Q, A, v$ , che uso per le correnti.

Prendo un tratto  $ds$  di corrente. Entra una massa nel tempo  $dt$  pari a



Attraverso la sezione iniziale  $\rho Q dt$

Dalla sezione finale  $\rho Q dt + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt$

Esce la massa  $(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds) dt$

$$\rightarrow \rho Q dt - (\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds) dt = \frac{\partial (\rho A v)}{\partial t} ds dt$$

$\rho A ds \rightarrow \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} ds dt$

considero un tratto di corrente compreso fra due sezioni a distanza infinitesima  $ds$ .

eccesso di massa uscente rispetto a quella entrante  $\rightarrow$  avremo una diminuzione della massa  $\rho A ds$  racchiusa nel tratto considerato.

$\rightarrow \frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$  eqz di continuità delle correnti

• Se  $\rho = \text{cost}$   $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$  se c'è una variazione di portata nello spazio, l'area è

variabile nel tempo

$Q$  non dipende dal tempo  $\rightarrow$  derivate totali

• Se il moto è permanente le  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow dQ = 0 \rightarrow Q = \text{cost} \rightarrow Av = \text{cost}$   
portata costante lungo tutta la corrente oltre che nel tempo

Si possono scrivere le correnti con grandezze integrali, globali per trovare eqz più semplici



10 incognite → servono 10 eqz diff. per risolvere, anche per le derivate parziali.

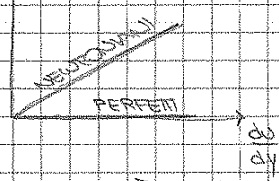
Oltre alle 3 eqz del moto scritte ora, posso scrivere

- l'eqz di continuità, scalare →  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$  che riflette il principio di cons. della massa

- $p = p(\phi_{xx}, \phi_{yy}, \dots, \phi_{yz})$  eqz di stato,  $p$  è funzione dello stato di tensione, è scalare (e dipende anche da  $\rho$ , ma consideriamo processi isoteromici → con  $\rho$  costante come variabile)

Ne mancano 5; ho 5 eqz scalari nelle 10 incognite; le altre 5 sono stabilite in base alle modalità di deformazione del fluido (proprietà reologiche del fluido)

La resistenza di un fluido è funzione della velocità con cui lo deformiamo. Devo sapere il tipo di fluido per scrivere tutti gli



sforzi in funzione di  $u$ , legame tra  $p$  e campo di moto  
relazione tra sforzi e deformazioni

Non si può risolvere il problema di fluido. Noi trattiamo i fluidi perfetti e viscosi (newtoniani)

Escludo lami, ghiacciai, colate detritiche

(1) FLUIDO PERFETTO stato di sforzo identico a quello dei fluidi in quiete: componenti tang. degli sforzi nulle, componenti normali uguali tra loro...

Comunque il deformo, non danno mai luogo a tensioni tangenziali

era così anche in statica ma non perché il fluido è perfetto, ma perché non ho velocità di de<sup>o</sup>

$\phi_{xy} = \phi_{xz} = \phi_{yz} = 0$  sempre → matrice diagonale → autovalori tutti uguali

...  $\phi_{yy} = \phi_{xx} = \phi_{zz} = p$  uguale formalmente alla statica. Queste condizioni sono le 5 relazioni necessarie per rendere definito il problema dinamico, infatti uso solo  $p$  anziché le 6 componenti del tensore degli sforzi

Quindi tutto:

$$\begin{cases} \rho (F_x - Dv/Dt) = \partial p / \partial x \\ \rho (F_y - Dv/Dt) = \partial p / \partial y \\ \rho (F_z - Dv/Dt) = \partial p / \partial z \end{cases} \rightarrow \rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p \quad \begin{array}{l} \text{eqz di Eulero} \\ \text{eqz indefinita del fluido perfetto} \end{array}$$

Osservazioni

- Eqz che regola moti di fluidi che non vedo mai, ma lo studio per ragionamento ingegneri: a rigore non esistono, ma ci sono tipi di flusso in cui la viscosità di un fluido newtoniano non fa sentire effetti. In tali casi applico tale eqz.

- È un'eqz facile o difficile? Posso risolverla? Distinguiamo eqz lineari o non lineari. Un operatore è lineare se  $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$  e se  $\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$ , altrimenti è non lineare.

L'operatore che mi interessa è la derivata:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \text{è lineare e non conta il grado} \rightarrow \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

Anche per l'integrale:  $\int u+v = \int u + \int v$

Nell'eqz generale  $\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$  la non linearità è in  $\vec{A} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u$

$$(u+v) \frac{\partial(u+v)}{\partial s} = u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial s}}_{\text{prodotti misti}} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial s^2} \text{ NON LINEARE}$$

Non esiste una meccanica dei fluidi non lineare. Il mondo lineare è più semplice perché vale il principio di sovrapposizione → problema complicato → lo divido in problemi semplici → sommo le soluzioni.

Se il fluido va così piano che  $\vec{A}$  conta poco, ricado in un'eqz lineare.

Ora considero

② Green (teorema che lega integrali di volume  $\Delta$  a superficie  $\Delta$ )

$$\int_V \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) dV = - \int_A (\Phi_x \cos \hat{n}_x + \Phi_y \cos \hat{n}_y + \Phi_z \cos \hat{n}_z) dA = - \int_A \vec{\Phi}_n \cdot d\vec{A}$$

la normale  $\hat{n}$  è entrante, ma il tri-ax Green la vede uscente

$\vec{\Phi}_n$  sforzo che agisce sulla superficie con normale  $\hat{n}$  per il tetraedro di Cauchy

$$-\int_V \rho \vec{F} dV + \int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA + \int_A \vec{\Phi}_n dA = 0$$

Eqz globale dell'equilibrio dinamico, deve essere soddisfatta Volume  $V$  del fluido in moto e per il quale verificata l'eqz di continuità

Devono equilibrarsi sull'intera massa fluido  $\vec{F}_c$  in ogni istante.

① Prendo un generico elementino  $dV$  del volume, per  $\rho$  ho la massa, per  $\vec{F}$  ho la forza di massa applicata sull'elementino; con l'integrale lo sommo tutto  $\rightarrow$  forza-peso  $\vec{P}$  risultante forze di massa agenti sulle particelle in  $V$ . Se il fluido è sottoposto solo al campo gravitazionale è la forza-peso.

④ L'ultimo mi dice di prendere  $dA$  sul contorno, per  $\vec{\Phi}_n$  ho sforzo per area = forza di superficie; con l'integrale lo sommo  $\rightarrow$  risultante delle forze al contorno  $\rightarrow \vec{F}_c \rightarrow$  spinta che  $A$  trasmette al fluido

In statica le altre due sono 0, qui abbiamo le forze d'inerzia che sono  $\neq 0$  perché l'acc. è locale e convettiva. Il secondo termine è  $\vec{I}$  ed esiste se le derivate nel tempo sono  $\neq 0$ .

③ L'altro pezzo è sempre una forza d'inerzia che derivano dall'acc. convettiva. Se leggo l'integrale vedo che

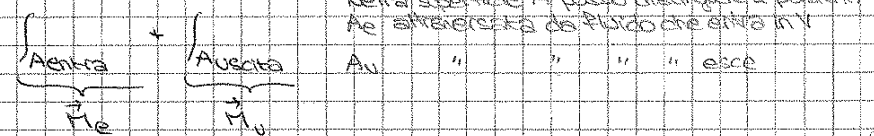
$\int_A \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA$   $\rightarrow$  Flusso di quantità di moto  $M$  attraverso tutta la sup. di contorno  
 $\rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA$   $\rightarrow$  velocità normale alla sup.  $\times$  sup. stessa  $\rightarrow$  portata di infinitesima che passa attraverso  $dA$   
 $\rho dQ$   $\rightarrow$  portata in massa, massa che entra nell'unità di tempo attraverso  $dA$   
 $\rho \vec{u} dQ$   $\rightarrow$  quantità di moto posseduta dalla massa, vettore diretto in ogni pt. come la velocità

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{F}_c = 0$$

(dimensione di una forza)  
 Relazione vettoriale fra quantità con dimensione di una forza

Osservazioni

A volte trovo  $\vec{M}$  scisso in  $\vec{M}_e - \vec{M}_u$ . Quando integro su  $A$  ci saranno zone dove la quantità di moto entra e altre da cui esce. È come scindere l'integrale in



$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

Sono partita da un'eqz diff complicata  $\rightarrow$  Rilto  $\rightarrow$  integrale  $\rightarrow$  trovo questa eqz.  $\vec{P}$  non dà problemi, comunque si muova la massa fluida il peso non cambia, le forze di massa non dipendono dal moto.

$\vec{F}_c$  risponde ai problemi ing., per contenere il fluido, qui dentro c'è l'incognita, la trovo come  $-\vec{P} - \vec{I} - \vec{M}_e + \vec{M}_u$ . Comprende già le integrazioni delle spinte che servono.

$\vec{I}$  sono scritte come  $\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV$  per calcolarle devo sapere come varia la velocità in tutti i pt. del volume (problema che c'era già nell'eqz. diff)  $\rightarrow$  varia nel tempo di  $\vec{u}$  nel singolo pt. di  $V$  e il fluido è incomp.

Moto vario  $\rightarrow$  le devo calcolare MA se il moto è permanente  $\vec{I} = 0 \rightarrow$  non trattare mai problemi di moto vario. Questa eqz è utile "sco" per moti perm., quando non devo considerare le variazioni temporali.

$\vec{M}$  ha il vantaggio di essere calcolato sul contorno, lo battuto via molte informazioni, non interessa cosa succede all'interno. Ma devo sapere la velocità sul contorno! In molti

L'eqz di Eulero è stata studiata per tirarne fuori informazioni senza risolverla

eqz  $\left\{ \begin{array}{l} \text{lineari} \rightarrow \text{le so risolvere} \\ \text{non lineari} \rightarrow \text{calcolatore} \end{array} \right.$

$\downarrow$  cerco informazioni senza risolverla...

uno di questi metodi è dovuto a Bernoulli (Daniel)

Su ha a che fare con un sistema chiuso, cioè non suscettibile di scambi di energia con l'esterno

Hp che limitano le applicazioni:

$\rightarrow$  fluidi perfetti  $\rho(F-A) = \text{grad } p$  (sforzi tang. = 0, solo sforzi normali)

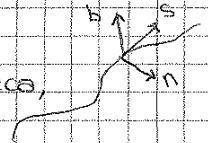
$\rightarrow$  il campo di forze è quello della gravità  $\vec{F} = -\rho g \text{grad } z$   $\uparrow z$   $\left\{ \begin{array}{l} -\rho g \text{grad } z = -\rho \vec{A} = \text{grad } p \\ \text{asse } z \text{ verticale verso l'alto} \end{array} \right.$

$\rightarrow$  fluido incompressibile  $\rho = \text{cost}$   $\text{divido per } \rho g \rightarrow \text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\vec{A}}{g}$

In statica ritiro  $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$ . Ma ora  $z + \frac{p}{\gamma} \neq \text{cost}$  e dipende dal secondo membro

$\text{grad } h = -\frac{\vec{A}}{g}$   $\text{grad } h = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{fluidi in quiete} \\ \text{" " " moto uniforme} \end{array} \right.$

Immagino di muovermi sulla traiettoria e di volerla proiettare sulla terna intrinseca, cioè lungo s, n, b



Lungo s vedo l'accelerazione del moto  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v}{g} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) \left( -\frac{1}{g} \right)$  acc. tangenziale

Lungo n  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{v^2}{rg}$  acc. normale  $\left\{ \begin{array}{l} \text{componenti di } \vec{A} \\ \text{" " " } \\ \text{" " " } \end{array} \right.$

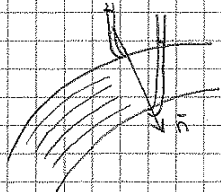
Lungo b  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial b} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$

C'è sempre la direzione della binormale lungo cui il carico piezometrico si conserva come in statica. Lungo n se mi muovo su una traiettoria rettilinea il raggio di curvatura è 0  $\rightarrow$  ci sono due direzioni, un intero piano su cui  $h = \text{cost}$  come in statica.



Il piano formato da b e n è quello normale. Su quel piano  $h = \text{cost}$ , ma su altri piani può essere diverso. Allora conosco la distr. della pressione su quel piano, p non è più incognita.

Se invece le traiettorie hanno delle curvature,  $h \neq \text{cost}$ . La variazione lungo n non è più 0



La normale punta sempre verso il centro del cerchio osculatore. Se mi muovo lungo n il carico piezometrico scende. Ho un'idea di come va la pressione.

$\uparrow v$  /  $\uparrow 1/r$   $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{ variazione} \end{array} \right.$

Il cuore del teorema è dato dalla prima lungo s

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

derivata della somma di 3 logaritmi

Interviene la quarta hp

$\rightarrow$  moto permanente  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0 \quad H = \text{cost lungo una traiettoria generica}$$

$H = h + \frac{v^2}{2g}$  carico totale (teorema di Bernoulli)



reazione, quella della binormale, lungo la quale è in ogni caso nulla (in prossimità della traiettoria) la variazione della quota piezometrica e la pressione risulta quindi distribuita secondo la legge idrostatica. Per contro la quota piezometrica varia in generale lungo la normale principale e precisamente, come si deduce dalla seconda delle (5.3), essa diminuisce nel verso del versore  $n$ , cioè nel verso che porta al centro di curvatura della traiettoria: tanto maggiore è la variazione quanto maggiori sono la velocità  $v$  e la curvatura  $1/r$ .

Anche lungo la normale principale la quota piezometrica è costante quando la curvatura è nulla, cioè quando la traiettoria è rettilinea; nell'intorno del punto  $O$  (fig. 5.1), la quota piezometrica, costante lungo due direzioni contenute nel piano normale, è conseguentemente costante anche in tutte le altre direzioni del piano stesso. È il caso tipico, illustrato in fig. 5.2, della corrente fluida che si muove entro un condotto cilindrico, car-

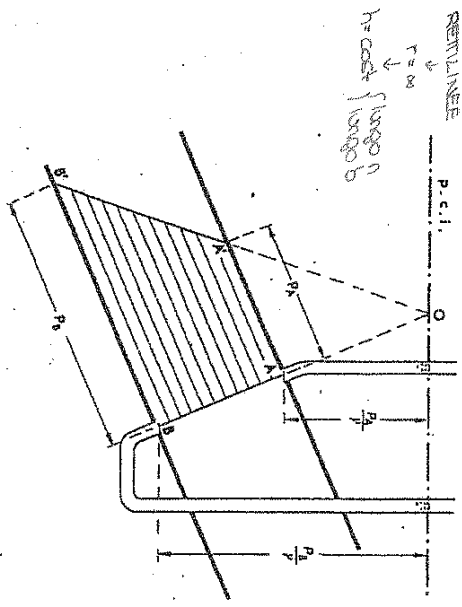


Fig. 5.2

terizzata da traiettorie tutte rettilinee e parallele; si può anzi osservare che in questo caso la quota piezometrica è costante nell'intera sezione trasversale. Se quindi in due punti  $A$  e  $B$  qualsiasi del perimetro della sezione trasversale attraversiamo due piezometri, i menischi si portano in essi al medesimo livello. Il piano orizzontale passante per i menischi è il piano dei carichi idrostatici relativo alla sezione considerata (nella quale la pressione è distribuita secondo la legge idrostatica) e contiene la retta di sponda (di traccia  $O$ ); la retta  $OA'B'$  rappresenta il diagramma delle pressioni. Quando invece la curvatura delle traiettorie è notevole, come nella

curva di una condotta, nella sezione trasversale la pressione non varia idrostaticamente. Si possono avere le due situazioni qualitativamente indicate nelle figg. 5.3 e 5.4, a seconda che la concavità delle traiettorie cade nelle figg. 5.3 o verso l'alto. In ogni caso, se si considera, in una sezione trasversale, un diametro  $AB$  contenuto nel piano di attacco situato passante per il baricentro, il piezometro che ha il punto d'attacco di quella parete concava indica una quota piezometrica maggiore di quella sulla parete dal piezometro verso il basso lungo il diametro  $AB$  incontriamo pressioni crescenti meno di quel che comporterebbe la legge idrostatica (in  $B$  la pressione è  $BB'$  anziché  $BB''$ ) o addirittura decrescenti, se la velocità e le curvature sono forti; il contrario succede nel caso della fig. 5.4. I piezometri indicati nelle due figure forniscono pertanto solamente le quote piezometriche esistenti in corrispondenza dei loro punti di attacco; si

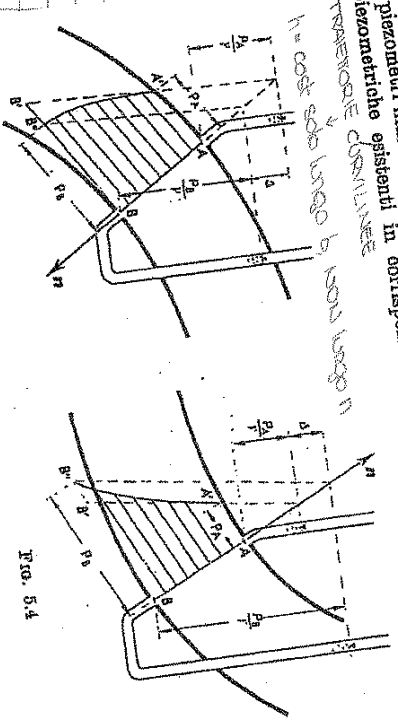


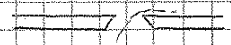
Fig. 5.3

Fig. 5.4

comprende quindi come essi siano di scarsa utilità e di sconsigliabile impiego; Notiamo per contro incidentalmente che i dislivelli  $\Delta$  fra i menischi nei due piezometri di ciascuna figura sono tanto più elevati quanto maggiori sono le velocità e quindi la portata della corrente. Ciò risulta evidente a norma della seconda delle (5.3); si ha infatti:

$$\Delta = \left( z_B + \frac{v_B^2}{\gamma} \right) - \left( z_A + \frac{v_A^2}{\gamma} \right) = - \int_A^B \frac{v^2}{g r} dr,$$

e tale espressione, per un condotto assegnato, risulta appunto crescente in modulo al crescere delle  $v$ . È nota di qui l'idea di impiegare il dispositivo come misuratore di portata per le correnti in pressione, riservando eventualmente la funzione  $Q(\Delta)$  mediante tarature; ma le esperienze effettuate in

In natura non esistono mai spigoli ( $r=0 \rightarrow$  acc. normale  $\infty \rightarrow$  assurdo)  $\rightarrow$  

La particella segue una traiettoria fino al punto B della sezione contratta. A quella traiett.

applico Bernoulli. Il th ci dà:

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$h_A = h$

$z_A, z_B$  quote di A, B sopra un generico piano di rif.  $z=0$   
 $p_A/\gamma$  altezza piezometrica nel punto A, pari al suo affond. perché entro il recipiente es. un vincolo alla lore,  $p$  è distribuito idrostaticamente

carico piezometrico (è come se foss. in statica)

$$U_B^2 = z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B = h + \delta$$

en. cin. originata dalla  $\delta$  -- dim. di energia potenziale

$$z_B = -(0,5 \pm 1)d \rightarrow \text{è noto}$$

$p_B$ ? Sezione contratta  $\rightarrow$  traiett. rett. e  $\parallel \rightarrow$  caso delle correnti  $\rightarrow p$  cost. sulla sez. trasv. ma conosco  $p$  sul bordo  $\rightarrow p_B = 0$

Rimane l'incognita  $U_B$

luc. lontana dal pelo libero  $\rightarrow$  trascuro  $\delta$

vale la traiettoria che raggiunge un pt. della sez. contratta

$$U_B = \sqrt{2g[h + (0,5 \pm 1)d]}$$

ma se  $h \gg d \rightarrow U_B = \sqrt{2gh}$  velocità torricelliana (alveo di Galileo)

Dagli esperimenti vedo che  $U_B^{vera} = c_v U_B \rightarrow U_B^{vera} = c_v \sqrt{2gh} \rightarrow$  errore ridicolo  $\rightarrow$  le hp erano velocità di efflusso effettiva (in po.) <  $c_v$  coeff. correttivo determinato sperimentalmente  
 rapporto di (abbiamo trascurato le dissipazioni)  $0,97 \approx 0,99$  coeff. di riduzione delle velocità =  $\frac{U_B^{vera}}{U_B}$  per l'ora a spigolo vivo

Tutti i pt. sulla sezione contratta hanno la stessa velocità  $U_B \rightarrow$  la velocità

media è  $U_B \rightarrow$  portata =  $U_B \cdot$  sezione  $Q = \Omega_c \cdot c_v \sqrt{2gh} = c_c \Omega_c \cdot c_v \sqrt{2gh}$   
 $\frac{A_c}{A} =$  coeff. di contrazione  $\leftarrow \frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{A}$

$$Q = \pi c_c c_v \sqrt{2gh}$$

per raddoppiare  $Q$  devo quadruplicare il carico

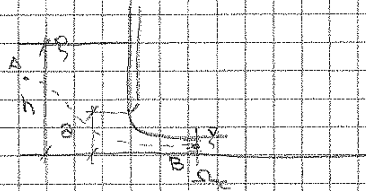
$m = 0,60 \pm 0,61$  coeff. di efflusso, prodotto dei primi due coeff. (per l'ora a spigolo vivo)

Conosco  $c_c$  solo nel caso di Peritole, sezioni infinitamente lunghe  $\rightarrow c_c = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0,61$

Il coeff. di contrazione è stato determinato teoricamente da Kirchoff nel caso del moto piano verso una fessura rettangolare di lunghezza infinita

**B) Paratoia che chiude un lago, un canale**

Considero ora un altro tipo di luc. quella rettangolare sovrapposta ad una paratoia piana parzialmente aperta (dispositivo per regolare la portata immessa in un canale)



$$Q = ?$$

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$h$   $\approx 0$  per ipotesi relativa  $h_B$

altezza metrica in B = dislivello tra peli d'acqua nel serbatoio e nella sezione contratta

Assumo  $a \ll h \rightarrow$  la velocità nel fluido è trascurabile (a monte)

Sulla sezione contratta è come se fossimo in statica  $\rightarrow h_B = c_c a$

$$U_B = \sqrt{2g(h - c_c a)}$$

$0,6 = 0,61$   $\rightarrow$  ciò vale la traiettoria  $\rightarrow$  pt. della sezione contratta  $\rightarrow$  qui la velocità è uniformemente distribuita come in (A)

$$Q = \Omega c_c c_v \sqrt{2g(h - c_c a)}$$

**(La)**  $\rightarrow$  lunghezza paratoia (e quindi della luc.)

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$h$   $\approx 0$

Il problema è sulle pressioni. Tutti i punti sulla sezione contratta

hanno lo stesso carico piezometrico, ma cambiano le  $z \rightarrow$  cambiano le pressioni. Sul punto f esterno in alto  $\rightarrow p=0$   
 " " basso  $\rightarrow p=0$

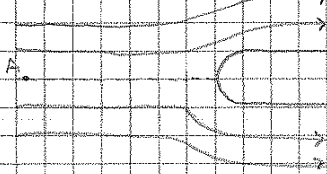
C'è qualcosa che non va  $z_B + \frac{p_B}{\gamma} = \text{cost}$

## Tubo di Pitot

È usato per misurare le velocità e sfrutta il teorema di Bernoulli.

Consideriamo una corrente che investe un ostacolo (corpo di rivoluzione a testa tondeggiante)

Supponiamo di avere una corrente e un corpo cilindrico che va a battere contro corrente a una distanza a monte dell'ostacolo abbia traiettorie rettilinee e // e l'asse di simmetria dell'ostacolo abbia la loro direzione. Avvicinandosi all'ostacolo le traiettorie divergono per poterlo aggirare... ①



$$\textcircled{2} H_A = z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = z_B + \frac{p_B}{\rho} \rightarrow v_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

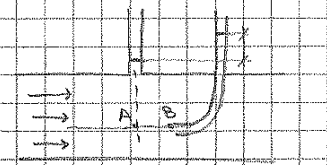
nota la diff. di quota piezometrica tra i due pt.

Misuro due carichi piezometrici e trovo la v a monte.

Come lo misuro ③

③ Un particolare la traiettoria AB, dopo aver investito in B il corpo si divide in 2 traiettorie che ne lambiscono le pareti. Nel punto B si ha una brusca deviazione ad angolo retto → si dimostra che in simili circostanze il modulo della velocità va a 0 → B pt. di ARRESTO o di RISTAGNO

Se A è suff. lontano da considerare la corrente inalterata, posso applicare Bernoulli alla traiettoria AB ②



③ La  $h_A$  può essere individuata a mezzo di un comune piezometro;  $h_B$  avendo un forellino, collegato pure con un piezometro; entro di questo il fluido è in quiete e la presenza del foro non impedisce la brusca deviazione delle traiettorie e quindi l'annullamento delle velocità.

$$\Delta = \text{dislivello fra i menischi nei piezometri} \rightarrow v_A = \sqrt{2g\Delta} \textcircled{4}$$

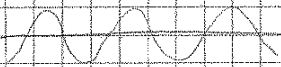
• Un altro modo è quello dei mulinelli. Le particelle vanno contro e l'elica ruota. C'è una relazione sperimentale tra  $v_{particella}$  e  $v_{mulinello}$ .

• Oppure piccolo filo investito dalla corrente che agli uglioglie calore. A seconda dell'energia elettrica da fornire per rimanere a  $T = \text{cost}$ , trovo  $v_{particella}$ . Funziona molto bene in aria, mentre l'acqua deposita le impurità sul filo.

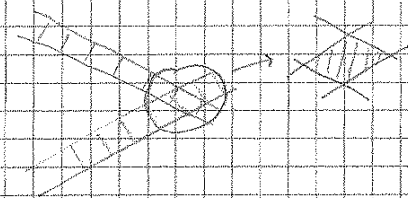
Tutti però hanno un difetto: sono intrusivi → la  $v$  misurata è quella che ci sarebbe stata senza lo strumento? A riprova. Allora riusciamo a misurare  $v_{fluid}$  senza entrarci dentro? → ANEMOMETRIA LASER.

4 raggio monocromatico, con un'unica frequenza

Segno i max della frequenza, ad una certa  $d$  tra lo. Li sovrappongo → frange di interferenza. È come un'alternanza di acceso-spegn.

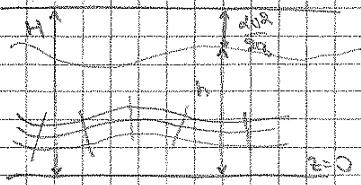


2 fasci laser che generano max e min, interferenza → faccio passare una particella che riflette questa interferenza → andrà piano o veloce → in base alla frequenza trovo la  $v$ .



Preferiamo usare, invece della luce, onde sonore più difficili da direzionare, ma funzionano anche in fluidi non trasparenti.

④ In pratica i due tubi piezometrici possono essere incorporati in un unico apparecchio → Tubo di Pitot piezometrico. La presa di pressione è realizzata con una fessura A. Il corpo è cavo e al suo interno corrono i due tubicini che fanno capo alle camere piezometriche o alle 2 camere di un manometro differenziale.



$\alpha$  dà il grado di disuniformità spaziale del profilo di velocità

In un condotto circolare con correnti in moto laminare  $\alpha = 2 \Rightarrow D$

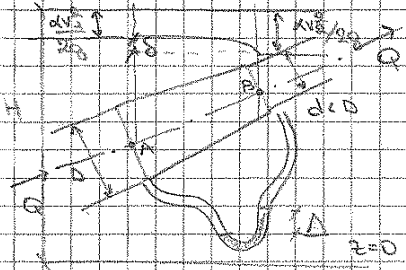
Se il moto è turbolento  $\alpha \approx 1.05 - 1.03 \Rightarrow D$  vasta zona centrale molto appiattita, mentre  $v \rightarrow 0$  rapidamente in prossimità della parete

Relazione fra i coefficienti di regresso  $\alpha$  per le potenze cinetiche  $\beta$  riferiti alle correnti gradualmente variate  
 $(\alpha - 1) = \beta(\beta - 1)$

I risultati sperimentali hanno ormai indicato con sicurezza che nel moto:

- turbolento  $\rightarrow \alpha \approx 1 \rightarrow \beta \approx 1$   
 ↳ supera l'unità di pochi percento (6%-7%)
- laminare  $\rightarrow \alpha \approx 2 \rightarrow \beta \approx 4/3$

• Strumento per misurare la portata di una corrente  $\rightarrow$  VENTURIMETRO



Tubo di diametro D seguito da un breve tronco convergente e poi da un altro tubo di diametro minore d. Trascuro le dissipazioni di energia nel convergente, data la sua brevità e anche per il fatto che nelle correnti accelerate esse sono sempre modeste. Ammetto che la corrente possa considerarsi lineare  $\rightarrow$  quota piez. costante su ogni sezione trasversale  $\rightarrow$  come unica linea piez. considero quella che corrisponde alla traiettoria assiale. Considero anche un'unica linea dei carichi totali, caratterizzata la piezometrica di  $U^2/2g$  con  $U = v_{media}$  nella sez. trasv.  
 Linea dei CARICHI TOTALI  $\rightarrow$  orizzontale  $\times$  Bernoulli. Linea PIEZOMETRICA  $\rightarrow$  orizz. nei due tronchi cilindrici dove  $v = cost \rightarrow$  alt. cinetica = cost. Nel convergente...

Non ci sono perdite né ingressi  $\rightarrow$  rimane  $Q$ . Posso trascurare le dissipazioni nel convergente

Tratto il fluido come perfetto;  $q_i = p = cost$ , moto permanente  $\rightarrow$   $h_p$  del th. di Bernoulli  $\rightarrow H = cost$

1  $\rightarrow$  v minore    2  $\rightarrow$  v maggiore perché è diminuita la sezione    invece, dove la corrente accelera, la linea piez. si abbassa, allontanandosi progress. dalla linea dei carichi totali.

$h_1 > h_2$  perché  $\frac{\alpha v_1^2}{2g} < \frac{\alpha v_2^2}{2g}$  perde  $D > d$

Applico Bernoulli tra le sezioni estreme A e B del convergente  $\rightarrow$  tratto  $\delta = d$  di livello tra le quote piezometriche

$H_1 = H_2 \rightarrow h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} \rightarrow h_1 - h_2 = \frac{\alpha}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$

$Q = cost \rightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 \rightarrow U_1 = \frac{Q}{A_1}, U_2 = \frac{Q}{A_2}$  per l'eq. di continuità  
 aree sezioni estreme del convergente

$h_1 - h_2 = \frac{\alpha}{2g} \left( \frac{Q^2}{A_2^2} - \frac{Q^2}{A_1^2} \right)$  Conosco  $\alpha, g, A_1, A_2$ ; calcolo  $h_1 - h_2$  col manometro differenziale

e misuro la portata  $Q$  attraverso una misura statica.

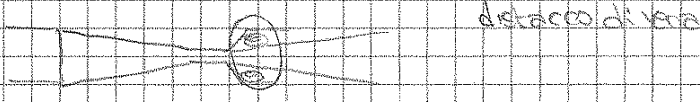
Lo stesso  $\delta$  può essere dedotto dall'indicazione di un manometro differenziale:  
 $\delta = h_1 - h_2 = \frac{\Delta h_m - \delta}{r}$  dove  $\Delta =$  dislivello tra i menischi del manometro  $\rightarrow \frac{\Delta h_m - \delta}{r} = \frac{\alpha}{2g} Q^2 \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)$

Trovo delle Formole:  $Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}} \sqrt{\frac{2g \Delta h_m - \delta}{\alpha r}}$

$\rightarrow$  consente la misura di  $Q$  di una corrente in pressione a mezzo di una semplice lettura manometrica

Difetto del Venturimetro: molto esteso in lunghezza. Non lo metto dopo curve perché non ho una corrente, ma dei moti rotatori. Devo ridurre la sezione, per poi ricordarlo di nuovo:

Il fluido ruota  $\rightarrow$  dissipazioni  $\rightarrow$  anche l'uscita dev'essere molto lunga





17 ottobre 2018

Fluidi viscosi

Eqz di Eulero  $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad } p$   $\rightarrow$  grad(uell) per fluidi perfetti

Per fluidi viscosi:  $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$   $\rightarrow$  grad(uell) **EQZ DI NAVIER-STOKES**

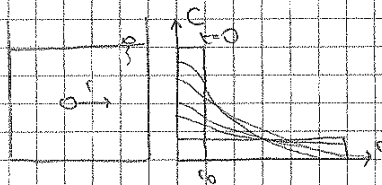
\* fluido incomprimibile, hp di piccole velocità di deformazione, conferma (seconda metà dell'800)

Analizzo il secondo termine: sperimentale per i processi di movimento in regime regolare, non turbolento  
L'influenza della viscosità è espressa dal termine  $-\mu \nabla^2 \vec{u}$  = risultante per unità di volume delle forze originate dalla viscosità in ogni punto della massa fluida

Osservazioni:

- È un operatore lineare, somma di derivate seconde  $\rightarrow \nabla^2(\vec{u} + \vec{v}) = \nabla^2 \vec{u} + \nabla^2 \vec{v}$ . È complessa come l'eqz di Eulero per la non linearità di  $\vec{A}$   $\rightarrow$  non complica matematicamente ma...
- Fisicamente: il laplaciano è un operatore diffusivo  $\rightarrow$  trasporto proporzionale al gradiente della stessa variabile.

Es:  $t=0$   $\rightarrow$  goccia d'inchiostro in un recipiente. Il trasporto è dovuto al fatto che c'è un gradiente di ciò che viene trasportato.



( $t \rightarrow \infty$  ottengo "uniformità")

Questi processi di trasporto sono descritti dal laplaciano

$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c$  eqz di trasporto  $\rightarrow$  eqz di Fourier del calore, (trasporto nei fluidi a causa della diffusione, migrazioni umane in economia, propagazione epidemie a causa del contagio)

Noi lo applichiamo alla quantità di moto dell'unità di massa.

Appena creo due moti  $\neq$ , la viscosità cerca di ricordarli, di smussare i gradienti di campo di moto.  $\mu$  impedisce dei gradienti troppo forti, riduce le variazioni.

È un'eqz ancora sbudata. Abbiamo le eqz integrali.

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad \text{in generale}$$

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_A \rho \vec{u} v_n dA + \int_A \vec{F}_c dA = 0$$

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad } p$$

$$\vec{B} + \vec{I} + \vec{M} + \int_A p \vec{n} dA = 0$$

$\vec{M} = \vec{M}_0$   
per fluidi perfetti

Ora invece:

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

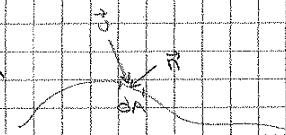
per fluidi viscosi

$$\vec{B} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{T} + \mu \int_V \nabla^2 \vec{u} dV = 0$$

ci mettiamo nel caso in cui  $\mu$  sia assegnata, per non complicare le cose  $\rightarrow$  dato che  $\mu = \frac{2}{3}(\theta) \rightarrow$  significa che studio processi isotermi  
l'entrante, ma il teorema lo vede uscente

$$\int_V \nabla^2 \vec{u} dV = -\mu \int_A \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cos \hat{n}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cos \hat{n}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cos \hat{n}_z \right) dA = -\mu \int_A \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA$$

teorema di Green  
 $\downarrow$   
sup. di contorno



Viscosità  $\rightarrow$  gradienti di velocità  $\rightarrow$  meccan. tensioni tang.  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow$  dissipazioni

La parete è trascinata dal fluido, il fluido è frenato dalla parete.

Quando nuoto, attorno è tutto fermo  $\rightarrow$  gradienti di velocità  $\rightarrow$  tens. tang. che devo vincere o con i muscoli o perché la forma del corpo è tale da ridurre le tens. tang.

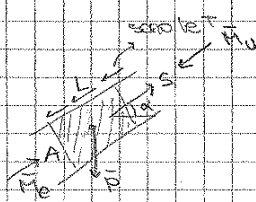
In una condotta la parete esercita tens. tang. sul fluido che tendono a rallentarlo

C'è da luogo ad una resistenza o ad un trascinamento della parete  
 corridoio, persone per mano  
 Sono due facce della stessa medaglia

Uso l'eqz globale:

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{\pi} - \vec{T} = 0$$

Pendo un volume di corrente di area A lungo L.



È un'eqz vettoriale che proietto lungo s.

$$\vec{P} \rightarrow +AL\gamma \sin \alpha$$

$\vec{I} \rightarrow 0$  non ci sono variazioni nel tempo

$\vec{M}_e, \vec{M}_u \rightarrow$  esce ed entra dalla stessa <sup>sezione A</sup> ~~parte~~, non cambia in modulo, ma inverso  $\rightarrow 0$

$\vec{\pi} \rightarrow$  risultante forze normali  $\perp$  a s sulle pareti  $\rightarrow$  restano le sezioni trasversali

$$\vec{T} = -A\gamma \left( z_2 - z_1 \right) + p_1 A - p_2 A = \gamma A \left[ \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \gamma A l = \gamma V l$$

\* facilmente calcolabili nota la posizione della linea piezometrica  
 diff. dei carichi piezometrici

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{\pi} = \vec{P} + \vec{\pi}$$

\* volume di fluido nel tronco considerato

\* Fluidi reali  $\rightarrow$  viscosità  $\rightarrow$  componenti tangenziali degli sforzi che agiscono sulla parete del condotto in cui si muove una corrente  $\rightarrow$  AZIONE DI TRASCINAMENTO della corrente sull'involucro = risultante di queste componenti tangenziali; la forza ad essa opposta è la RESISTENZA dell'involucro.

azione di trascinamento  $T = \mu \int_{A_p} \frac{\partial u}{\partial y} dA$  n normale interna, diretta verso il fluido, per singoli punti della parete  
 $A_p$  sup. dell'involucro

Calcolo T nel caso di moto uniforme in un condotto cilindrico. Considero un tronco di corrente con sezione trasversale di area A e lunghezza L e ad esso applico l'eqz globale dell'equilibrio dinamico, proiettata nella direzione del moto. Detto  $\alpha$  l'angolo che tale direzione fa con l'orizzonte

La (6.12) ha validità del tutto generale, per il moto uniforme in un condotto; vogliamo dire che essa vale qualunque siano le modalità del movimento stesso (in presenza o meno di turbolenza); ciò è un'ovvia conseguenza del fatto che essa è stata dedotta a mezzo dell'equazione globale, che prescinde completamente dalla considerazione di quel che avviene all'interno della massa fluida in esame. La (6.12) stessa dice che l'azione di trascinamento esercitata da un tronco di corrente sull'involucro che lo contiene è uguale al prodotto della cadente per il peso del fluido occupante il tronco stesso. Ne emerge anche un ulteriore significato, dinamico, della cadente: essa può essere considerata come l'azione di trascinamento mediamente esercitata dall'unità di peso del fluido.

In un condotto cilindrico circolari esse sono uniformemente distribuite, per la simmetria assiale, non è così per un condotto di sezione qualsiasi, ma è sempre possibile calcolarne il valore medio = azione di trascinamento complessiva / area della superficie laterale del condotto; detto P il perimetro della sezione trasversale, detto contorno bagnato, e  $\tau$  lo sforzo tangenziale alla parete, trovo dove compare  $\tau = \frac{M_e}{A}$  rapporto tra l'area della sezione trasversale della corrente e il suo perimetro

Tensioni tangenziali  $\tau = \frac{T}{PL} = \frac{\gamma A}{P}$  \*  $\uparrow R \uparrow \tau$   
 perimetro = contorno bagnato

Il rapporto  $\frac{A}{P}$  è chiamato **raggio idraulico R** che sintetizza l'efficienza idraulica di una sezione. A indica la portata che passa, P della superficie su cui agiscono le tensioni tangenziali. La superficie che a pari A ha il minor P è il cerchio  $\rightarrow$  sezione che ha la maggiore efficienza idraulica  $\rightarrow$  maggior R, perché minimizza le tensioni tangenziali.

Proietto l'eqz su  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho h) = -\rho \frac{Dv}{Dt} + \mu \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(p + \rho h) = -\rho \frac{Dv}{Dt} + \mu \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho h) = -\rho \frac{Dw}{Dt} + \mu \nabla^2 w$$

$$\rho \vec{F} - \rho \vec{A} = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$-\rho \text{grad}(gh) - \rho \vec{A} = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$-\rho \vec{A} + \mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \text{grad}(gh) + \text{grad } p$$

$$-\rho \vec{A} + \mu \nabla^2 \vec{u} = \text{grad}(p + \rho h)$$

sono sempre tutti importanti questi termini che devono farsi equilibrio? Come li confronto? Prima di conoscere la stz  $\rightarrow$  adimensionalizzaz. rispetto alle scale tipiche.

Var. indep.:  $x, y, z, t$  Var. dip.:  $u, v, w, p$ . Devo capire la scala spaziale del fenomeno  $\rightarrow l$ . Ci sarà anche una scala delle velocità  $u_0$ .

Definisco  $t$  e  $u_0 \rightarrow$  introduco una scala tipica del tempo  $l/u_0$ .

Devo poi introdurre una scala tipica delle pressioni  $\rightarrow \rho u_0^2$

Adimensionalizzo le grandezze:  $x' = x/l, y' = y/l, z' = z/l$ . Tutte le grandezze adimensionali variano tra 0 e 1. Così per le velocità:  $u' = u/u_0, v' = v/u_0, w' = w/u_0$ .

$$p' = \frac{p}{\rho u_0^2} \quad t' = t / (l/u_0)$$

Metto nell'eqz le variabili adimensionate

$$\frac{\rho u_0^2}{l} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho \frac{\partial h'}{\partial x'} = \rho \frac{u_0 Dv'}{l dt'} + \mu \frac{u_0 \nabla'^2 v'}{l^2}$$

divido per  $\rho \frac{u_0^2}{l}$

$$\rightarrow \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\rho}{\rho u_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = \frac{Dv'}{dt'} + \frac{\mu}{\rho u_0 l} \nabla'^2 v'$$

$$\rightarrow \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = \frac{Dv'}{dt'} + \frac{1}{Re} \nabla'^2 v'$$

tutte le variabili cambiano in un range tra 0 e 1 ( $\sim$ )  
 $\rightarrow$  sono confrontabili

$$Fr^2 = \frac{u_0^2}{g l} \quad Re = \frac{\rho u_0 l}{\mu}$$

Ma due termini sono moltiplicati per dei numeri  $\rightarrow$  basta guardare i coeff. per capire se qualche termine è trascurabile.

$Re$  numero di Reynolds =  $\frac{\rho u_0 l}{\mu}$  è un indice del grado di turbolenza cui è assoggettato il fluido

• Se  $Re \rightarrow 0, \frac{1}{Re} \rightarrow \infty$ , diventa importantissimo  $\nabla'^2 v'$  rispetto a ciò che crea la non linearità  $\frac{Dv'}{dt'}$

Quindi se  $Re \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} = \frac{1}{Re} \nabla'^2 v' \rightarrow \rho(F) = \text{grad } p - \mu \nabla'^2 \vec{u} \text{ eqz di Stokes}$$

$Re$  = forze d'inerzia / forze viscosi. Ho un bilancio tra le due. se prevalgono le forze viscosi, posso togliere la non linearità e l'eqz si semplifica molto.

valori piccoli di  $Re \rightarrow$  moto viscoso

Il flusso in tal caso è detto creeping flows (ghiaccai)

• Se  $Re$  è molto alto prevalgono le forze d'inerzia, la viscosità non riesce a far sentire il suo effetto  $\rightarrow$  ritorna l'eqz di Eulero ( $\mu \nabla'^2 \vec{u} = 0$ )

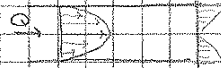
valori elevati di  $Re \rightarrow$  moto puramente turbolento  
valori intermedi di  $Re \rightarrow$  zona di transizione

$Re \rightarrow \infty \Rightarrow$  eqz di Eulero

$Fr$  numero di Froude =  $\frac{u_0}{\sqrt{g l}}$  è il rapporto tra energia cinetica e energia potenziale

Appena la sezione non è più assai simmetrica, le cose si complicano

- Sezione circolare
- rett. infinita  $\rightarrow$  il profilo è sempre parabolico



Quando ci sono degli spigoli non c'è un'espressione semplice del profilo di velocità in moto laminare. Gli spigoli vanno attenuandosi e nella parte centrale il profilo diventa circolare. Non ci sono staz. in forma chiusa, cioè che si possono scrivere tramite funzioni note (e<sup>-x</sup>, ln..., sin...).



Le scrivo tramite sviluppi in serie che cercano di descriverle in modo infinitamente precisa con  $\infty$  termini. Danno un risultato approssimato, non esatto come in forma chiusa. Le eqz. diff. risolte in modo esatto sono poche perché devo risolvere  $\int$

in realtà anche le funzioni note, come ln..., sono sommatorie, ma sono molto note.

### Turbolenza (E)

Le traiettorie sono molto complicate. In un punto di un tubo misuro la velocità  $\rightarrow$  trovo un segnale complicatissimo. Il valore medio dice che l'acqua va nella direzione. Non ho molto lungo  $v$ , ma avrà comunque un segnale. Per descrivere tale segnale con le serie di Fourier servono  $\infty$  termini. Spettro = contenuto in frequenza del segnale  $\rightarrow \omega$ , la sua forma dice chi conta di più

I segnali turbolenti sono molto complicati perché ci sono tante scale

La non linearità delle forze d'inerzia crea la turbolenza.

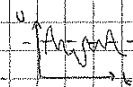
Ragioni per studiare la turbolenza:

- $\rightarrow$  tipica di molti problemi ingegneristici: capire che si muovono interazione tra fluidi e strutture, motori, ...
- $\rightarrow$  problemi ambientali (inquinanti, clima, come si muovono aria e acqua)
- $\rightarrow$  effetti speculativi (mercati economici, comportamenti sociali, propagazione mode)

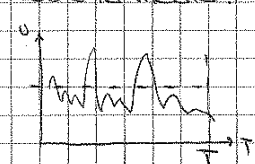
- È un processo NON LINEARE, infatti comparano delle soglie. Se fosse graduale  $\rightarrow$  lineare
- Apparentemente CASUALE: le traiettorie sembrano dominate dal caso
- Fortemente DISSIPATIVO: se devo spingere una pallina nel condotto e le particelle mediamente vanno in quella direzione, ma si muovono anche trasv.
- Incrementa molto i processi di TRASPORTO naturali (cucchiano che mescola il caffè e in 1s scioglie lo zucchero, scambio di calore tra terra e atm incrementato dal vento)
- Forte VORTICITÀ: ci sono fenomeni rotatori che creano vortici attorno ad un'asse.

(volute di fumo  $\rightarrow$  sono l'inciso della turbolenza) su tante scale

Non mi interessa descrivere tutte le oscillazioni, ma mi basta il valore medio.



Cos'è la media?



$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} u(t) dt \quad \text{media temporale}$$



24 ottobre 2012

Per non studiare ogni dettaglio della turbolenza  $\rightarrow$  media temporale  $\rightarrow \bar{v} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v dt$  ma nasconde delle insidie. Limitiamo lo studio a problemi stazionari, che non variano nel tempo. Sto cercando le eqz che descrivono le grandezze medie.

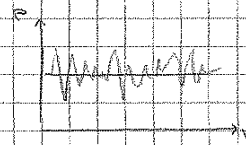
Convenzioni

1) Convenzione degli indici ripetuti di Einstein.  $\delta_{ii}$  c'è un indice ripetuto due volte  $\rightarrow$  sto sottintendendo una sommatoria  $\delta_{ii} = \delta_{22} + \delta_{33}$ , cioè  $\sum_{i=1}^3 \delta_{ii}$ .

$\text{div } \vec{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ . Ciò vale se l'indice ripetuto è latino.

2) Voglio scomporre le generiche variabili, per es.  $p$ , nella media temporale + tutte le oscillazioni

$p = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p dt + \tilde{p}$   
 ↳ componente di agitazione turbolenta



Per la variabile istantanea metto il tilde  $\rightarrow \check{p} = P + p$

Per la velocità  $\vec{u} = \bar{u} + u$  velocità istantanea = velocità media + scostamento da essa. Questo scostamento gode della proprietà che il suo valore medio nel tempo è nullo  $\rightarrow \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u) dt = \bar{u} + \bar{u} = 0$

3) Uso  $x_1, x_2, x_3$  e  $u_1, u_2, u_3$  per poter scrivere le sommatorie invece di  $x, y, z$  e  $u, v, w$ . Nel complesso le componenti di agitazione non danno alcun contributo al movimento di trasporto di massa.

• Le eqz che descrivono il moto turbolento sono le eqz di Navier-Stokes che descrive tutti i moti

$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \rho \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{u}$  (fluido newtoniano incomprimibile)  
 $\text{div } \vec{u} = 0$  eqz di continuità (caso  $\rho = \text{cost}$ )  
 ↳ eqz del moto medio

Voglio trovare delle eqz in cui vedo solo le variabili maiuscole  $\rightarrow$  valori medi  $U, P$ ...

(cioè sostituire ai valori istantanei i valori medi)

Scrivo  $\text{div } \vec{u} = 0$  come:  
 $\frac{\partial \check{u}_i}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_i} = 0$

A questa applico la media temporale  $\rightarrow \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 = \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_i} = 0$   
 ↳ media degli scarti = 0  
 $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \check{u}_i dt = U_i \rightarrow \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i dt = 0$   
 ↳ derivata della media della somma di  $\vec{u}$

Quindi  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$  dove non ho più la turbolenza

$\frac{\partial \check{u}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$  (sottraggo membro a membro)

$\frac{\partial (\check{u}_i - U_i)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow$  ritiro  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$

↳ divergenza delle componenti di agitazione turbolenta

• Divido per  $\rho$  e porto  $\vec{A}$  a secondo membro

$\frac{\partial \check{u}_i}{\partial t} + \check{u}_j \frac{\partial \check{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \check{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_j \delta_{ij}$   
 ↳ (1) acc. locale, (2) acc. convettiva, (3) viscosità cinematica, (4) gravità  
 se ho scelto  $x_3$   $\rightarrow$   $x$  (la quantità non c'è su  $x_1$  e  $x_2$ )

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$  delta di Kronecker

NB: Per studiare un fluido viscoso interessa non  $\mu$ , ma  $\frac{\mu}{\rho}$

Gradienti spaziali degli sforzi: ci sono 3 elementi che cambiano gli sforzi

- la pressione legata agli sforzi normali ( $\sigma_{ii} \rightarrow 11, 22, 33$ )
- viscosità che origina le tensioni tangenziali che rispondono a delle deformazioni
- poi c'è la turbolenza: tutte le oscillazioni turbolente sono correlate

} sotto queste per moto laminare

La turbolenza è un miscuglio tra caso (che renderebbe  $\overline{u_i u_j} = 0$ ) e determinismo. Essa fa comparire le tensioni di Reynolds  $-\rho \overline{u_i u_j}$  che è un tensore, una matrice

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix} \text{ TENSORE DI REYNOLDS}$$

Questo termine porta delle incognite in più, non ho abbastanza eqz. Potrei aggiungere eqz del tipo  $\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = f(u_i, \overline{u_i u_j})$  da mettere a sistema con l'eqz di partenza e avere almeno un numero di eqz = al numero di incognite. Questo è il modo di procedere degli ingegneri.

Ma non riesco a scrivere questa eqz, compariscono nuove incognite, le correlazioni triple  $\overline{u_i u_j u_k}$ .

La turbolenza è un problema che non si chiude. Devo scrivere  $\infty$  eqz, tutti i singoli moti influenzano anche il moto più generale, il moto medio.

Allora forzo il problema, invento una  $f$  che chiuda il problema con risultati soddisfacenti.  $n$  eqz  $n$  incognite  $\rightarrow$  serve una  $f$   $\rightarrow$  ma introduco  $\overline{u_i u_j u_k}$   $\rightarrow$  serve un'altra  $f$   $\rightarrow$  ma introduco  $\overline{u_i u_j u_k u_l}$ , le correlazioni quaduple  $\rightarrow$  il problema non si chiude.

Punto di vista energetico: voglio sapere come cambia il contenuto di energia cinetica quando seguo una partecella  $\rightarrow$  eqz del bilancio di energia cinetica del moto medio:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) = \text{trasporto} - 2\nu \overbrace{\left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2}^{E_{ij} E_{ij}} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho \overline{g_i \epsilon_i} \quad ? \text{ È quella di prima per } u_i$$

Come cambia l'energia del moto medio? Ogni termine sposta energia, ma ne la creano né la dissipano. C'è un termine legato alle tensioni viscosi ( $-2\nu \dots$ ) che fa perdere energia  $\rightarrow$  la viscosità la dissipa in calore. Poi termine legato all'en. potenziale  $\rho \overline{g_i \epsilon_i}$ ; infine quello legato alle tensioni di Reynolds, termine con cui la turbolenza ruba energia al moto medio per alimentare il moto turbolento ( $\overline{u_i u_j} \neq 0$ )

Perdo energia / in calore per la viscosità / ma soprattutto va in turbolenza

$-2\nu E_{ij} E_{ij}$  è un pezzo di energia, termine  $< 0$  perché la viscosità porta via energia. Nel moto medio tutto energia soprattutto per le tensioni di Reynolds di natura turbolenta (quindi anche per un fluido non viscoso). Nel bilancio di energia potrei trascurare la viscosità.

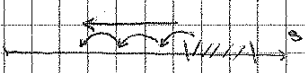
Moto laminare  $\rightarrow$  viscosità dissipa energia in calore

" turbolento  $\rightarrow$  viscosità quasi trascurabile, è la turbolenza che ruba energia

Termine che fornisce energia al moto turbolento  $\rightarrow \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \rightarrow$  dissipata in calore

La turbolenza esiste se: profilo di velocità media e correlazione spaziale  $\rightarrow \overline{u_i u_j}$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Dentro i vortici più grandi ci sono vortici più piccoli che rubano da essi energia



moto medio  $\rightarrow$  vortici grandi  $\rightarrow$  vortici più piccoli  
FLUSSO DI ENERGIA

Non trattengono l'energia, ma la cedono  $\rightarrow$  cascata di vortici ma via più piccoli uno dentro l'altro

- $\rightarrow$  v. più grandi
- $\rightarrow$  rubano en. dal moto medio
- $\rightarrow$  passano a vort. più piccoli
- $\rightarrow$  non sono viscosi? perché per spiegarlo non introduco  $\mu$ , esiste anche nei fluidi perfetti
- $\rightarrow$  processo non lineare

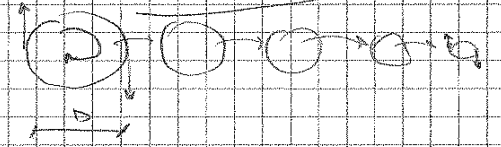
I vortici grandi sentono le cond. al contorno  $\rightarrow$  come sono fatti? Ognuno è  $\neq$  perché risentono delle cond. al cont.

$\rightarrow$  non universalità, i vortici grossi vanno studiati caso per caso.

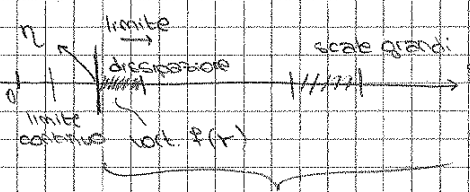
Sono i più importanti per gli ingegneri, quelli che danno il grosso del moto turbolento. Studio prima le scale grandi, che sono le più energetiche.

Vado fino ai vortici più piccoli, ma non arrivo fino alle molecole che non voglio studiare. Il vortice più grande ruota con una certa vel. periferica  $\rightarrow$  scale dei gradienti di velocità sono  $\frac{U_{ort}}{D_{ort}}$ . Più il vortice diventa piccolo più il gradiente cresce perché

$U$  diminuisce, ma diminuisce ancor di più  $D \rightarrow$  prima o poi si accendono i termini viscosi, di cui prima non mi accorgo. Così questo termine crea una barriera ai vortici più piccoli, li smorza.



Il limite è  $\eta =$  MICROSCALA DI KOLMOGOROV  
Di che ordine di grandezza è? Lo vedremo



La viscosità evita di arrivare fino alle molecole  $\rightarrow$  c'è nell'eqz di Navier-Stokes ( $\mu \nabla^2 u$ )  
non ma c'è nell'eqz di Eulero, quindi chi la studia ha questo problema.

Sono i vortici piccoli che dissipano perché compare la viscosità  $\rightarrow$  la dissipazione avviene sulle scale più piccole.

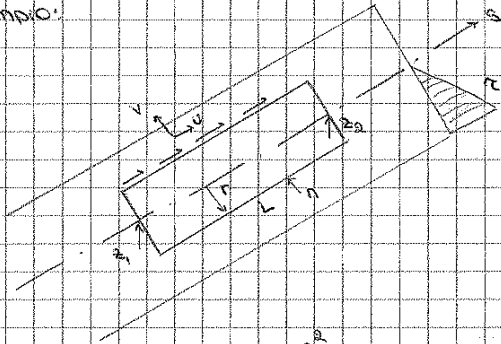
Vortici grandi  $\rightarrow$  dipendono dalle cond. al cont.

" piccoli  $\rightarrow$  " da  $r$

Vortici intermedi  $\rightarrow$  " sotto dall'energia che li sta attraversando  $\rightarrow$  sono

universali? Li studio Kolmogorov chiamandoli ZONA INERZIALE: sopra piccoli da non

Esempio:



$$\tau_0 = \gamma R$$

Se c'è la turbolenza<sup>9</sup> applico l'eqz globale proiettandola lungo la direzione s.

$$-\gamma \pi R^2 L \frac{z_2 - z_1}{L} + (p_1 - p_2) A \dots$$

$$-\vec{T} \cdot \vec{s} = -\mu \int_A \frac{\partial u}{\partial n} dA = -\mu \frac{du}{dn} 2\pi R L \quad \text{ma } \vec{n} \text{ è interno} \rightarrow +\mu \frac{du}{dn} 2\pi R L$$

↓  
u dipende solo da n

tolgo il vettore e prendo la componente u

$$\vec{M} = \rho \int_A \vec{u} v_n dA = 0 \quad \text{il flusso entrante } \vec{e} = \text{a quello uscente, come nel moto laminare}$$

$$\vec{M}' = \rho \int_A \vec{u} v_n dA = \rho \int_A \overline{u v_n} dA \quad \text{u componente di } \vec{u} \text{ lungo } s, v_n \text{ non è un vettore e lo chiamo } v$$

$$= \rho \int_A \overline{u v} dA \quad \text{ma axis scelto } v_n \text{ entrante} \rightarrow -\rho \int_A \overline{u v} dA = -\rho \overline{u v} 2\pi R L$$

↑  
simil. assiale

... Quindi

$$-\gamma \pi R^2 L \frac{z_2 - z_1}{L} + (p_1 - p_2) \pi R^2 = -\mu \frac{du}{dn} 2\pi R L + \rho \overline{u v} 2\pi R L = 2\pi R L \left( -\mu \frac{du}{dn} + \rho \overline{u v} \right)$$

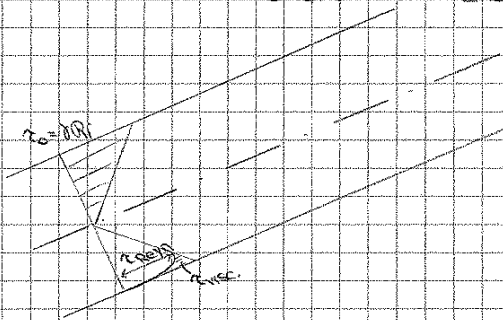
non so quanto vale, c'è la turbolenza

termine già trovato nel moto laminare  $\gamma \pi R^2 L$

$$\gamma \pi R^2 L = 2\pi R L (\tau_{visc} + \tau_{Reyn})$$

$$\tau = \frac{\gamma R^2 L}{2\pi R L} = \gamma R$$

Formalmente ha la stessa struttura del moto laminare ma nel m. turb. i  $\tau$  e le tensioni sono anche di origine turbolenta



La viscosità non conta quasi ovunque eccetto vicino alle pareti, perché le componenti turbol. devono per forza andare a 0, perché<sup>9</sup>

Non riesco a scrivere  $Q_1$  in funzione di  $Q_2, Q_3 \rightarrow$  lascio  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Invece  $Q_4, \dots, Q_n$  si

$\Pi = q_1(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, \Pi_n)$  Ma posso scrivere  $\frac{Q_1}{H^2} = f(\dots)$  perché sono grandezze adimensionali

raggruppamento adim = funzione di raggr. adim. e di grandezze con una dim. Se cambio l'unità di misura di  $Q_1 \rightarrow$  non posso avere le grandezze dimensionate a ranno via.

Ho perso 3 dimensioni  $\rightarrow$  da  $(n+1)$  a  $(n+1-3)$  dim. Il fenomeno non cambia, ma si semplifica

Esempio: portata che passa in un canale. Uso uno stramazzo. Ho un fluido in movimento.



Posso usare l'eqn di Navier-Stokes, ma è un problema a frontiera libera, non conosco il dominio. Allora l'ingegnere risolve il problema per via sperimentale

$$Q = f(H, q, L)$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 l'acqua cade              stramazzo  
 per la gravità

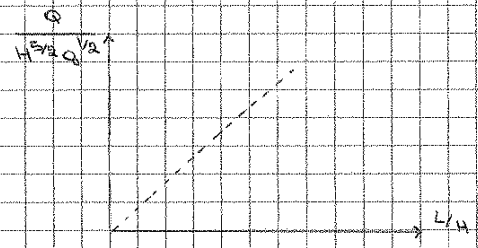
Metto la viscosità? No! (il getto quando cade non tocca le pareti e il numero di Reynolds è molto grande). Quindi ho uno spazio in 4 dimensioni. Posso trovare con gli esperimenti la dipendenza di  $Q$  da  $H$  e  $L$  ma non da  $q$ ! Devo cambiare grand. fond.: scelgo  $H$  (carico sullo stramazzo) e  $q$ .

$$\frac{Q}{H^2 q^{1/2}} = f\left(\frac{L}{H}\right)$$

$\frac{m^3/s}{m^2 \cdot m^{1/2} \cdot m^{-1/2}} = \frac{m^2/s}{m^2 \cdot m^{-1/2} \cdot m^{1/2}} = \frac{m^2/s}{m^2}$

$\alpha = 5/2$   
 $\beta = 1/2$

Ora devo trovare  $q$ , più semplice di  $f$ :  $n=2 \rightarrow$  posso disegnarla



retta per l'origine  $\rightarrow \frac{Q}{H^2 q^{1/2}} = a \frac{L}{H}$

$$\rightarrow Q = a^2 q^{1/2} H^3 L$$

Cerco i raggruppamenti adimensionali che dominano il sistema



Esempio: quanto vale  $\eta$ ? Kolmogorov applica il teorema Pigeon, non risolve Navier-Stokes

$$\eta = \eta(r, \epsilon)$$

$\eta$  dipende dalla viscosità cinematica e dal flusso di energia dai vortici più grandi ai più piccoli

Applico il teorema e al posto di  $L, T$  scelgo un'altra coppia  $\rightarrow r, \epsilon$

$$\frac{\eta}{r^2 \epsilon^3} = A \rightarrow \eta = A^2 \sqrt{r^3 / \epsilon}$$

Raddoppio  $r \rightarrow$  raddoppio  $\eta$  quasi linearmente  $\rightarrow$  a parità di energia che metto dentro mi aspetto vortici più fini nell' perché l'olio è più viscoso.  $\rightarrow$  vortici più fini all'aumentare di  $r$

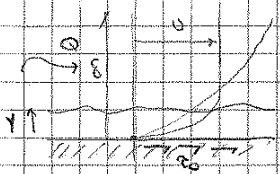
Se voglio vortici della metà  $\rightarrow$  16 volte l'energia  $\rightarrow$  forte non linearità.

Per trovare il valore di  $A$  faccio esperimenti  $\rightarrow A \approx 1$ .

Applicazione: profilo di velocità

C'è una parete che ha due caratteristiche: è piana e liscia (non ha asperità). C'è una corrente turbolenta, la velocità della particella a contatto con la parete è quella della parete  $\rightarrow 0$ .

Per il moto laminare il profilo è parabolico, ma per il moto turbolento? Si porta dietro  $U, \delta$



La teoria fu elaborata da Millikan (anni '30): immagino che ci sia una zona vicino alla parete (zona di parete, strato interno o inner layer)

suff. piccolo che ciò che accade in questo strato non si accorge della dimensione globale della corrente  $\rightarrow$  AUTOSIMILITUDINE COMPLETA in questa variabile, quel parametro non conta più. Il problema nell'inner layer è diventato autosimile nel diametro. Allora

$$U = U(\rho, r, y, \mu, \tau_0)$$

$\downarrow$  motore del fluido  
scala globale, sono così vicini alla parete che non la vedo più

Il fluido fatica a procedere perché ci sono delle tensioni tangenziali.

Si coinvolge la massa, come  $\tau_0$ . Allora si devono combinare per ecludere la massa e avere una grand. adimensionale  $\rightarrow \left[ \frac{\tau_0}{\rho} \right], \left[ L^2 \frac{\tau_0^2}{\rho^2} \right] \rightarrow u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \rightarrow U = U(r, y, u_*)$  che coinvolge solo velocità d'attrito

grandezze cinematiche, non c'è più  $\rho$ . Applico il teorema. Scelgo due grandezze  $\rho$  ed  $y$  e  $u_*$  che rispettano il vincolo  $\det \neq 0$ .

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

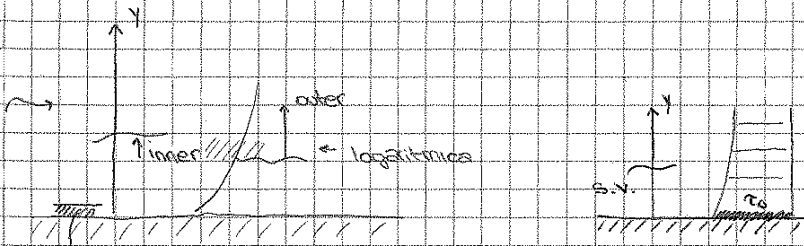
$\frac{y}{\delta} \sim u_* \delta$   
Coesistenza dei fattori

Nella zona di parete il profilo di velocità  $U/u_*$  è  $f$ . ma  $Re = \frac{U \delta}{\nu}$

Scala tipica di  $\begin{cases} U \rightarrow u_* & \text{scala delle velocità vicino alla parete} \\ U/u_* = f(Re) & \text{dove } Re \rightarrow y \text{ e } u_* \end{cases}$

Devo trovare  $f$ . Guardo la parte lontana dalla parete (zona esterna, OUTER LAYER)

5 novembre 2012



substrato viscoso → posizione dello strato interno molto attaccata alla parete. Ci permetterà di ricavare info sul profilo di velocità in tale zona.

Le  $\tau$  sono quasi ovunque dovute alle tensioni di Reynolds, eccetto in una zona vicino alla parete dove  $\tau_{\text{rem}}$  devono essere e compaiono le  $\tau_{\text{visc}}$ . Quindi ci mettiamo in una zona dove le  $\tau$  sono solo viscose → nel s.v.  $\tau = \mu \frac{dU}{dy}$ . Non mi accorgo più di un gradiente delle  $\tau$  →  $\tau = \tau_0$  e sono costanti, pari al valore di  $\tau$  sulla parete.

Integro: 
$$U = \frac{\tau_0}{\rho \mu} y + \text{const} \rightarrow U = \frac{\tau_0}{\mu} y = \frac{\tau_0}{\rho \mu} \rho y = \frac{u_*^2}{\nu} y \rightarrow U = \frac{u_*}{\nu} y = y_+$$
  
 vale 0 per la cond. al contorno ( $y=0 \rightarrow U=0$ )

Nel s.v. il profilo di velocità va come una retta di pendenza  $\tau_0/\mu$ , varia linearmente

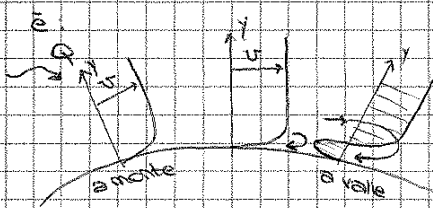
Moltiplico e divido per  $\rho$ : 
$$\frac{U}{u_*} = \frac{y u_*}{\nu} = y_+ \quad \text{Esiste per } y_+ \leq 5$$

Per  $y_+ \leq 5$  vale tale legge. Al di sopra non vale perché non è più vero che le  $\tau$  sono solo le  $\tau_{\text{visc}}$ , ma compare la turbolenza.

$y_+ \leq 5$  non è una condizione geometrica, ma dipende da  $\left( \begin{matrix} \text{caratt. del fluido } (\nu) \\ \text{moto del fluido } (u_*) \end{matrix} \right) \rightarrow \text{condizione fluidodinamica}$   
 ↑ velocità fluido, più il s.v. diventa sottile perché prevale la turbolenza (batteri che nuotano nel s.v.)

**Parete piana e liscia:**

- piana → se ho delle curvature e arriva un fluido con una certa portata, il profilo di velocità



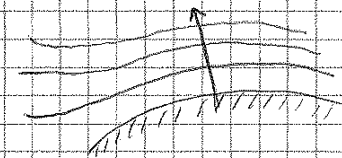
A valle ho un tappeto di vortici via via più grandi  
 Curvature o spigoli → si formano vortici.

Si cerca di smussare gli spigoli (es: platea in dis a spigoli vivi che via via si frattura perché nascono de

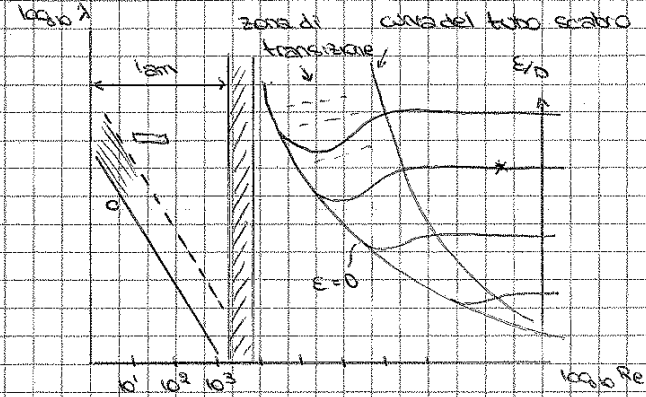
pressioni e il dis lascia male a depressione). (oppure alghe → vortici a valle → diverse pressioni a monte e a valle → moti di filtrazione). Quindi le curvature alterano molto.

Tale tappeto di vortici è l'innescò della scia. Una curvatura schiaccia le linee di flusso → aumenta la velocità → sarà sceso qualcosa altro per Bernoulli, tipicamente la pressione.

È il principio delle ali → forza di portanza (trascurando le dissipazioni), nasce un grad. di pressione



$\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$  }  $\lambda$  valore di portata  $\rightarrow$   $\lambda$  valore di  $Re_{media}$   $\rightarrow$   $\lambda$  valore di  $Re$   $\rightarrow$  misura delle cadenti!  
 $\rightarrow$  si risaliva al valore di  $\lambda$   $\rightarrow$  come  $\lambda(Re)$  costruite per interpolazione  
 per evidenziare il campo dei valori di  $Re$  per cui si hanno i  
 Il primo a fare gli esperimenti fu il tedesco Nikuradse Usa un piano logaritmico Non c'è 0 fenomeni più interessanti



che è a  $-\infty$  Fino a circa 2000 il mondo è semilicco  $\rightarrow$  moto laminare  
 era la formula di  $Re_{media}$  p. 22b  
 $U = \frac{Q}{A} = \frac{1}{32} \frac{\gamma_i D^2}{\mu} \rightarrow r = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$   
 $\lambda = \frac{2g D_i}{U^2} = \frac{2g B}{U^2} \frac{32 \mu U^2}{\gamma D^2} = \frac{64}{Re}$   $\rightarrow$  retta  
 Non compare  $E$ .  
 $\ln \lambda = \ln 64 - \ln Re \rightarrow$  retta con pendenza  $-1$

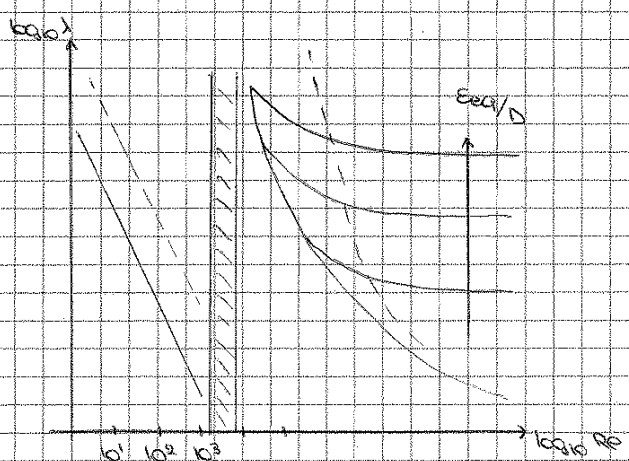
Per una sezione rettangolare larga  $\rightarrow \lambda = \frac{96}{Re}$  ...  
 Tutte le altre sezioni sono comprese tra 0 e  $\infty$

- (2) Zona di transizione  $\rightarrow$  il m. lam. si trasforma in m. turb., tra 2000 e 4000. Cerco di evitarla. C'è un improvviso brusco aumento di  $\lambda$  per l'intervento degli sforzi turbolenti!
- (3) Sopra 4000 il moto diventa turbolento. Nikuradse mette sulla parete interna del tubo sabbia ben setacciata, formata da sferette di ugual diametro, così ha una stessa scala  $E$  di scabrezza.

Ci sono diverse curve:  
 - curva del tubo liscio  $\rightarrow$  la scabrezza non ha effetti, è immersa nel sott. viscoso, come se  $E=0$   
 - via via ho le altre curve: per un po' mi muovo su quella di prima  $\rightarrow$  aumenta la velocità dal s.v.  
 $\rightarrow$  la scabrezza esce fuori  $\rightarrow \mu$  perde via via importanza  $\rightarrow \log_{10} \lambda$  rimane cost., perde la dipendenza da  $Re$  in cui è nascosta la viscosità. E scomparso il s.v.  
 Se la scabrezza <sup>relativa</sup> cresce, mi allontanano prima dalla curva del tubo liscio.  
 \* È intuitivo che una certa scabrezza debba opporre maggiore resistenza alla corrente in un tubo di piccolo diametro che non in un tubo di diametro più grande.  
 Tale diagramma è detto ARDA di NIKURADSE per la sua forma

Curva del tubo scabro e zona di transizione (da non confondere con la zona di transizione da m. lam. a m. turb.)  
 Tubi commerciali scabrezza di diverso tipo  
 MA  $\rightarrow$  difetto  $\rightarrow E = cost \rightarrow$  nella realtà non avrà mai tubi così  $\rightarrow$  Moody.

Come sintetizzo  $E$ ? Sceglio come  $E$  una  $E_{eq}$  che è la scabrezza alla Nikuradse che darebbe lo stesso  $\lambda$  alle stesse resistenze.



Come cambia il diagramma: le curve a dx sono più dolci, sono a questa tangenti, con primo tratto discendente e poi, all'aumentare di  $Re$ , orizzontale (tipico del tubo).  
 La curva che separa la zona in cui  $\lambda$  dipende solo da  $E_{eq}/D$  ha eq:  
 $Re_* = \frac{U_* D}{\nu} = 70$   
 A partire da  $Re_*$  per i tubi scabri si ha  $\lambda = cost \rightarrow$  moto puramente turbolento, non più influenzato dalla viscosità  
 $\uparrow$  scabrezza relativa  $E_{eq}/D \downarrow Re_*$



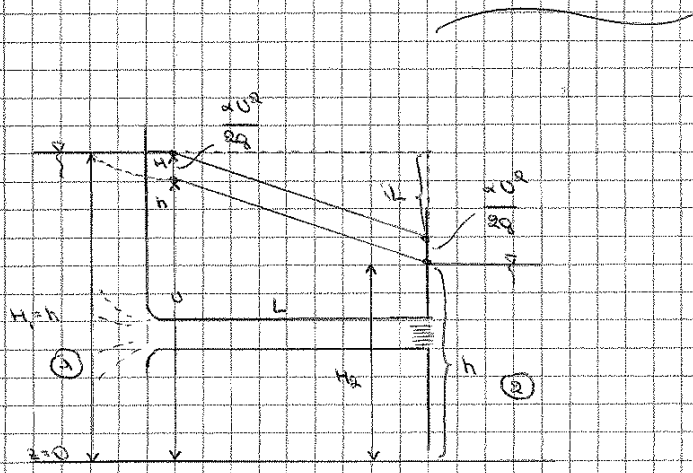
$x = \frac{87}{1 + \frac{v}{\sqrt{R}}}$  Bazin  $x$  e  $m$  sono dei valori sperimentali, come  $c$

$x = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$  Kutter

$x = c R^{1/6}$  Gauckler-Strickler (molto usata perché espressione monomia)

$x = \frac{1}{n} R^{1/6}$  Manning (usata in America)

$i = \beta \frac{Q^2}{D^5}$  Darcy moto turb. di parete scabra  
 caratt. del tubo  
 $n = 5 \quad \beta = \beta(D)$   
 $n = 533 \quad \beta = \beta(D)$



Traccio l.c.p. h  
 l.c.t. H  
 L'imbocco è raccordato, non c'è uno spigolo  
 Il fluido passa da 0-0 a v medio nel raccordo  
 Traghetto piccolo + il fluido accelera → non ha  
 decelerazioni → l.c.t. non cambia perché non ho  
 perso energia, ma le particelle hanno accelerato  
 nel traghetto perso energia  
 All'uscita → traiettorie ret. e // → il carico piez. è  
 quello del serbatoio, ma c'è ancora en. cinetica  
 La condotta è cilindrica → caratt. uniformi →  
 $i = cost \rightarrow$  retta → 2 rette parallele  
 L'energia persa è  $iL$

Bilancio energetico:  $H_1 - \left( H_2 + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = iL \rightarrow \Delta H = iL + \frac{\alpha v^2}{2g}$

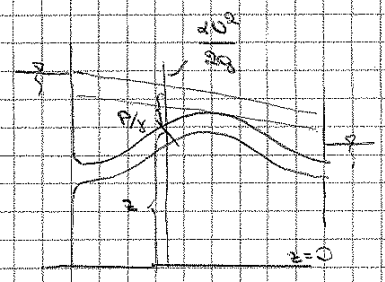
$i = \beta \frac{Q^2}{D^5} \rightarrow \Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} L + \frac{\alpha v^2}{2g}$  con  $\alpha \approx 1$  perché il moto è turbolento

Abbasso la scabrezza → portata maggiore, cresce il termine cinetico  
 ↑ resistenze ↑ inclinazione curve ↓ termine cinetico e le curve si avvicinano

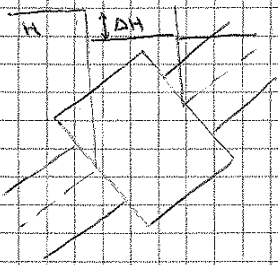
Se il condotto è curvo, L cresce, ma non cambiano le rette  
 ma aumenta  $iL$ , l'energia dissipata. Per ridurla devo ridurre la portata

$\Delta H$  non cambia globalmente → deve diminuire  $\beta \frac{Q^2}{D^5}$  ma non ho cambiato né D né la scabrezza  
 Diminuisce Q → diminuisce il termine cinetico → le rette si avvicinano

Cambia se la faccio verso l'alto e verso il basso?



Più il condotto è in basso più è soggetto a forti pressioni  
 Non condiziona la portata, ma lo stato di pressione

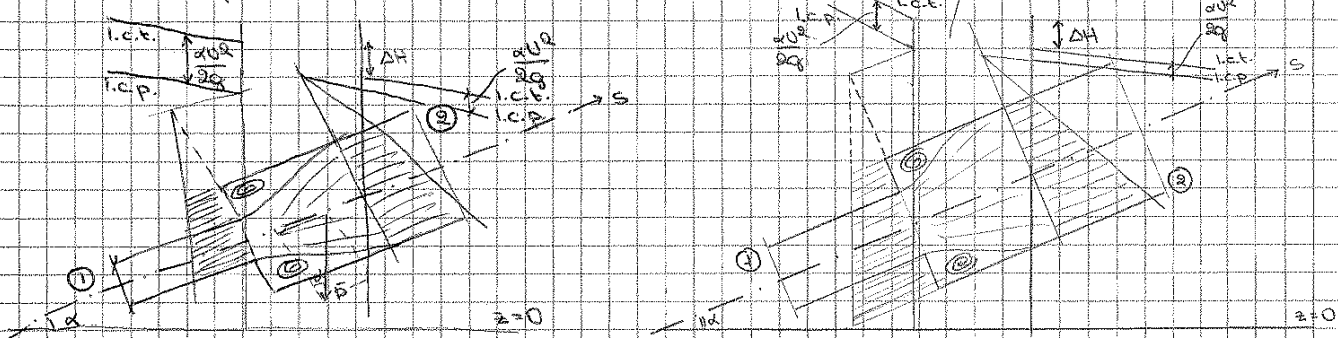


Cerco di scrivere le dissipazioni come un numero per il termine cinetico di valle.

$$\Delta H = \alpha \frac{U^2}{2g}$$

Velocità al quadrato → accende l'idea che ci sia la turbolenza. Mi aspetto che le dissipazioni abbiano tale forma.

n° Faccio esperimenti → è tabulato in base a diametro e raggio di curvatura della curva.



I.c.t. pendenti per le p.d.c. distribuite, a dx la pendenza è più bassa perché la v è minore

Forma → forti approssimazioni:

(a) sulle sezioni 1 e 2 ci sia una distribuzione idrostatica. Per 2 è plausibile perché le traiettorie sono rettilinee e //.

Così posso usare l'eq. globale della dinamica dei fluidi:  $\bar{P} + \bar{F}_x + \bar{I} + M_0 - \bar{F}_y = 0$

La applico a tutto il volume in cui ho la dissipazione. La proietto.

Nelle  $\bar{F}_x$  ho  $\bar{F} + \bar{\pi}$ , Forze tang. + Forze normali.

Risultante forze normali lungo s → mi serve conoscere p → ecco perché ho fatto l'hp (a)

(b) Non so calcolare  $\bar{F}$  → lo trascuro perché sono piccole dato che il tratto è corto.

→  $\bar{F} \cdot \bar{s} = 0$  → le forze normali hanno come unico contributo p

(c) In un moto turbolento devo aggiungere  $\bar{F}'$ , ma non so quanto valgono → lo trascuro.

Calcolo ciò che rimane:

$$-\frac{\rho}{\gamma} L y \sin \alpha + \rho Q U_1^2 - \rho Q U_2^2 + P_1 \Omega - P_2 \Omega = 0$$

$$-\Omega (z_2 - z_1) + \frac{\rho Q U_1^2}{\gamma} - \frac{\rho Q U_2^2}{\gamma} + \Omega \left( \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \right) = 0$$

$$\frac{\rho}{\gamma} (U_2^2 - U_1^2) = \Omega \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right]$$

$U_2 < U_1 \rightarrow < 0$        $< 0 \rightarrow h_1 < h_2 \rightarrow$  recupero di carico piezometrico

Perdo energia totale, ma non perdo en. di posizione né di pressione, ma solo en. cinetica

Tale problema è dovuto allo spigolo vivo e basta far andare l'acqua un po' veloce

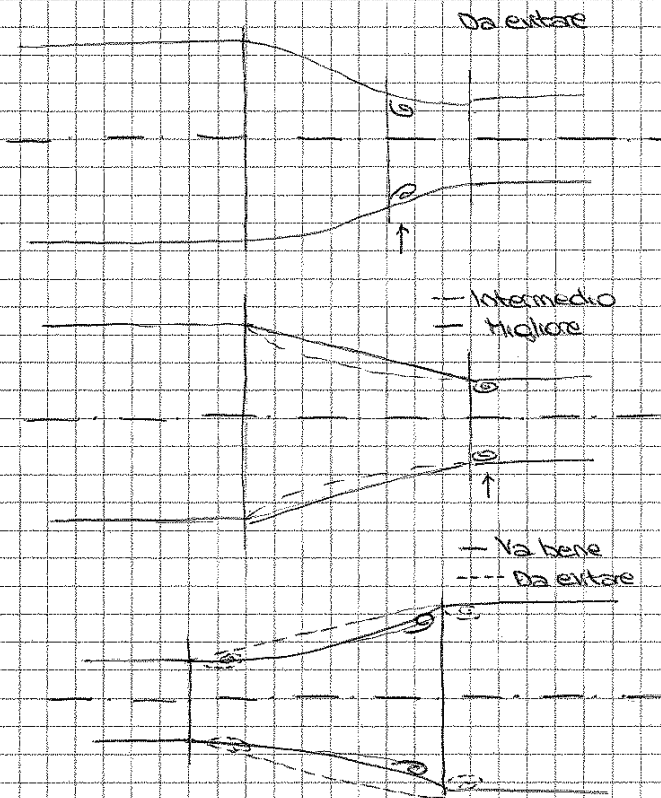
Altro esempio: alberi, tubicini che si chiudono quando non piove

Per far andare l'acqua più veloce, abbasso il serbatoio a valle ma oltre un certo limite

la portata non cambia più perché la depressione max è  $P_{atm}$  Cominciano a uscire

bollicine perché il liquido da qualche parte sta bollendo.

### Convergenti e divergenti



Come collego due condotte di diverso diametro? Posso accompagnare la

corrente ma nella zona di flesso

si innescia un distacco di vena

Allora faccio un tronco di cono + ho

il distacco di vena nel diametro

più piccolo e verso velocità più alte

↑ v più i vortici sono schiacciati

verso la parete → minore dissipazione

Verosimile: prima D piccolo poi grande

il tronco di cono non va bene perché

si ribalta il pregio di prima.

Quindi:

- localizzo le p.d.c.l. dove ho discontinuità geometriche
- ragiono sulle dissipazioni e traccio le l.c.t. e l.c.p. Ho sempre delle rette pendenti verso il basso. Di quanto? Pendenza incerta.
- vedo dove devo arrivare: la l.c.p. dove ho il pb. libero, la l.c.t. un po' più in alto. La pendenza dipende da come sono fatte le dissipazioni. La portata non cambia.

Eqz di BILANCIO ENERGETICO (a scala di corrente)

$$z_1 - \left( z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) = 0,5 \frac{v_1^2}{2g} + \lambda L_1 + \frac{(v_1 v_2)^2}{2g} + \lambda_2 L_2$$

Suppongo di non conoscere la portata  $Q$ .  $z_1$  e  $z_2$  li conosco. Scrivo  $v_2 = f(Q)$  e  $v_1 = f(Q)$

$$v_2 = \frac{Q}{\Omega_2} \quad v_1 = \frac{Q}{\Omega_1}$$

Per  $\lambda$  ipotizzo il tipo di moto: moto turbolento in tubo scabro  $\rightarrow$  formula di Darcy

$$\lambda_1 = \beta_1 \frac{Q^2}{D_1^5} \quad \lambda_2 = \beta_2 \frac{Q^2}{D_2^5}$$

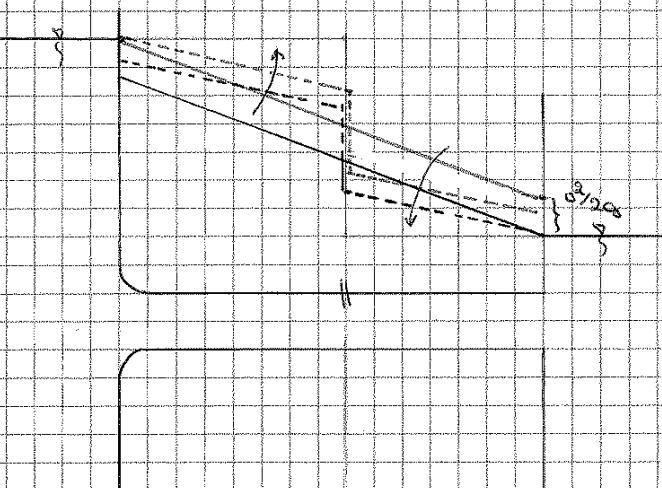
Formula che vale solo quando l'indice di resistenza non dipende più da  $Re$  (linee orizzontali)  $\rightarrow$  attenzione a usare la formula giusta

Sostituisco e trovo  $Q$

Per la regola dei segni di Cartesio trovo sempre 2 radici reali e distinte, una positiva e una negativa  $\rightarrow$  non ci sono dubbi

Attenzione: tipo di moto  $\rightarrow$  formule di dissipazione coerenti. Es. moto laminare  $\rightarrow$  i termini cinetici sono moltiplicati per  $\alpha \leq 2$ , oltre a cambiare  $\lambda$ .

Altro esempio: diametro costante, saracinesca aperta. Poi la chiudo. C'è una dissipazione localizzata oltre a quella distribuita. Più chiudo più  $Q$  diminuisce  $\rightarrow$  diminuisce il termine cinetico.



--- saracinesca chiusa  
— saracinesca aperta

Più chiudo ~~più~~ meno la l.c.t. diventa pendente e l.c.p. si avvicina. Al limite non vedo più distinzione tra l.c.t. e l.c.p.



Sottoraso: **LUNGHE CONDOTTE**. Fuori mare  $\rightarrow$  brevi condotte! <sup>per le quali</sup> Contribuiscono a dissipare energia le p.d.c. distribuite e concentrate, variamente combinate.

Generalità

Nelle lunghe condotte  $L = 0 (10^2 \div 10^3 \text{ m})$  ma i dislivelli sono  $\Delta = 0 (10^0 \div 10^1 \text{ m}) \rightarrow$  grandi lunghezze

rispetto ai dislivelli. A rigore ho le perdite, ma  $n \frac{U^2}{2g} \ll 1L$ . È il caso di considerare le p.d.c. <sup>esche</sup> localizzate, piccole rispetto a quelle distribuite? No, soprattutto per reti di condotte, come un acquedotto

Seconda conseguenza:  $\bar{e} = \frac{U^2}{2g}$ , non n che  $\bar{e}$  piccolo  $\rightarrow H^2 h$

Quindi:

(I) Trascuro le p.d.c. localizzate

(II) C'è solo una linea:  $H^2 h$

Il risultato dipende dalla precisione che si richiede dai calcoli: ammetteremo una approssimazione del 4%, giustificata dalle incertezze nella valutazione delle perdite continue.

Quanto dev'essere  $L$  per trascurare le p.d.c. localizzate? Suppongo  $\frac{U^2}{2g} = 0,04 1L \rightarrow$  condizione scelta. Ma  $\lambda = \frac{3gD^5}{U^2}$  e scrivo  $L = nD$ , esprimo la lunghezza in numero di diametri.

$\frac{U^2}{2g} = 0,04 \frac{U^2 \lambda}{2gD} nD$

$\frac{U^2}{2g} = 0,04 \frac{U^2 \lambda}{2gD} nD$

Un valore tipico di  $\lambda$  per una condotta è 0,025.

Trovo  $n = 1000 \rightarrow$  se  $L \geq 1000 D$  posso trascurare il termine cinetico.

Quindi sono nel caso delle lunghe condotte se:

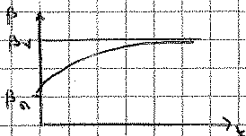
(1)  $L \geq 1000 D$

(2)  $1 = f Q^2 D^5$  Formula di Darcy  $\rightarrow$  suppongo di essere in un moto turb. di parete scabra

Osservazioni:

(a) Le pareti invecchiano, si deteriorano nel tempo. Se vedo la sezione ci sono delle incrostazioni così spesse che hanno cambiato il diametro (dentri di carne in gergo); anche da 150 mm a

130 = 120 mm  $\rightarrow$  è cambiata la scabrezza.  $\beta_{\text{tubi nuovi}} < \beta_{\text{tubi vecchi}}$  di molto



Quindi passano portate più basse di quelle previste  $\rightarrow$  tenerne conto nel progetto dell'impianto.  $\rightarrow$  aumento delle perdite di carico

$\rightarrow$  LA SCABREZZA VARIA NEL TEMPO

per tubi di ghisa o di acciaio la graduazione è di 25 mm per diametri tra 100 e 250 mm (e di 50 mm per diam.

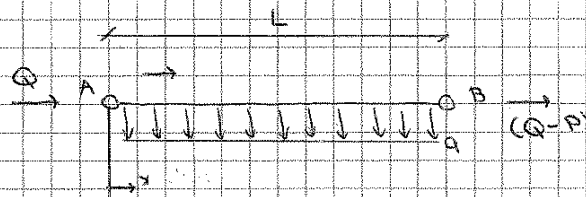
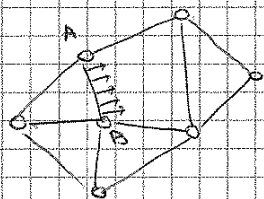
(A) Ci sono diametri commerciali  $\rightarrow D_{\text{comm}}$  non li posso scegliere, ma devo adeguarmi a quelli (maggiori)

su mercato

Condotta a diametro costante con erogazione uniforme lungo il percorso

Suppongo di avere una maglia di condotte: disegno le dorsali principali, poi ci saranno dei tubi

Reti di condotte  $\rightarrow$  reti di distribuzione  $\rightarrow$  lungo le lunghe condotte si hanno frequenti erogazioni  $\rightarrow$  moto non uniforme, ma a portata variabile lungo il percorso. Perdite localizzate non trascurabili, ma per la pratica ci si accontenta di una minore precisione nei calcoli  $\rightarrow$  le trascuro



ed esce  $Q - P$

Alle sezione iniziale A arriva la portata  $Q = P$  cui compete il carico  $h_0$ . Voglio determinare l'andamento della pressione  $h$  lungo  $AB$  e in particolare  $h_B$ , il carico all'estremo di valle.

Considero i prelievi uniformemente distribuiti

portata per unità di lunghezza della condotta

$P = qL$  portata complessiva = a quella delle erogazioni  $q$  (esche)

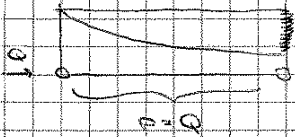
$Q(x) = Q - qx$  con  $x$  = distanza di una generica sezione  $C$  da quella iniziale  $A$



$$H_A - H_B = \beta D^{-n} L \left[ \frac{Q^2 + P^2}{3} - QP \right] \quad (1)$$

Osservazione

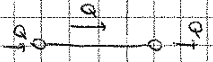
• Caso in cui la portata che entra è tutta erogata →  $P=Q$  la condotta è cieca



In tal caso la perdita lungo AB è  $\frac{1}{3}$  di quella che si verificerebbe nella stessa condotta percorsa per tutta la sua lunghezza dalla portata iniziale Q.

Sostituisco  $P=Q \rightarrow H_A - H_B = \beta D^{-n} L \frac{Q^2}{3}$

La dissipazione complessiva è  $\frac{1}{3}$  di quella che avrei avuto se entra Q ed esce Q, cioè se Q avesse percorso tutta la condotta senza distribuire nulla.



Volevamo trovare  $\alpha$  in modo che la portata dia luogo alla stessa dissipazione del prelevato distr.

$$H_A - H_B = \beta (Q - \alpha P)^2 D^{-n} L \quad \text{che dev'essere} = a \quad (1)$$

Trova la ripartizione ai nodi in modo che

$$\rightarrow \frac{Q^2 + P^2}{3} - QP = \frac{(Q - \alpha P)^2}{3}$$

l'incognita è solo  $\alpha$  che per la regola dei segni avrà un valore

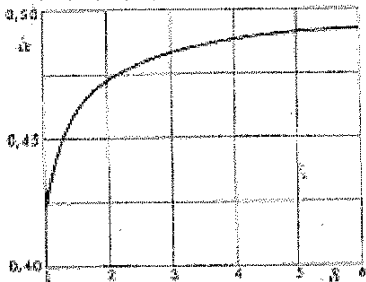
positivo e uno negativo → non ho dubbi

$$\frac{Q^2 + P^2}{3} - QP = \frac{Q^2 + \alpha^2 P^2 - 2QP\alpha}{3} \rightarrow \alpha^2 - \frac{2Q}{P}\alpha - \frac{1}{3} + \frac{Q}{P} = 0$$

$$\rightarrow \alpha^2 - 2S\alpha - \frac{1}{3} + S = 0$$

$$\alpha_{1,2} = S \pm \sqrt{S^2 + \frac{1}{3} - S}$$

$$\alpha = S + \sqrt{S^2 + \frac{1}{3} - S} \quad S = \frac{Q}{P}$$



Per  $S=5$ ,  $\alpha = \text{cost} = 0.5$

Quindi: concentro l'erogazione ai nodi con 2 vincoli  
 a quella } eqz di continuità  
 stessa perdita di carico complessiva della condotta equivalente

Ho trovato la rete equivalente di partenza che mi permette di scrivere in modo semplice le eqz

Trovare la topologia della rete, noti i punti di prelievo non è semplice. Ne esistono diverse, ma non tutte sono idraulicamente equivalenti, alcune più care o più idoneabili, se manca un nodo non perdo tempo (complex network) (rete di Facebook, dei neuroni, small worlds)

Sintomo di aere già la rete che riceve acqua da serbatoi esterni. Cosa conosco della rete?

Verifica del funzionamento dei sistemi di controllo

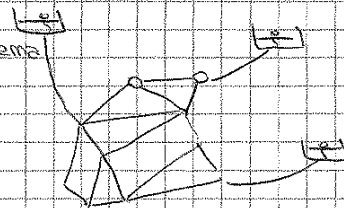
Noti:

- quote (costanti) dei sell liberi nei serbatoi che alimentano il sistema
- Inelli nei serbatoi per la formula di Darcy
- $L_i, D_i, \beta_i, n_i \quad i=1, \dots, m \rightarrow$  geometria della rete
- $L_{lati} \quad j=1, \dots, n$  nodi
- $Q_{erj}$  portate erogate nei nodi

Incogniti:

- $Q_i$  portate che corrono nei singoli rami
- $H_j$  <sup>carichi ai nodi</sup>  $(m+n)$

Devo scrivere  $m+n$  eqz



nono = punto ove confluiscono più di 2 condotte

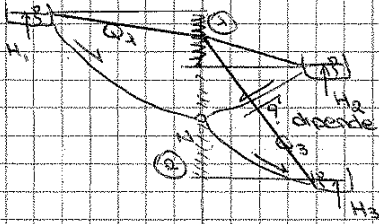
LATO = tronco di condotta a diametro costante, percorso da una portata costante. Si esclude la presenza di tronchi con distribuzione lungo il percorso poiché si presuppone di averli sostituiti con equivalenti tronchi equivalenti

14 novembre 2012

Problemi di verifica

Esempio: (A)

incognite: portate  $Q_i$  nelle 3 condotte



dipende dal carico nel nodo N che dev'essere compreso fra due livelli

- 1) 2 riceve acqua perché la piezometrica è così
- 2) 2 fornisce acqua " " " " " "

Posso scrivere 3 eqz:

$$\rightarrow H_1 - H_2 = \beta_1 Q_1^2 D_1^{-5} L_1$$

Suppongo che 2 riceva acqua

$$\rightarrow H_2 - H_3 = \beta_2 Q_2^2 D_2^{-5} L_2$$

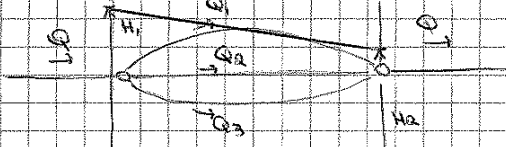
$$\rightarrow H_1 - H_3 = \beta_3 Q_3^2 D_3^{-5} L_3$$

$$\rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_3$$

È non lineare, ma in questo caso ricavo  $Q_1, Q_2, Q_3$  e li metto in  $Q_1 = Q_2 + Q_3 \rightarrow$  trovo  $H_2$  e lo metto nella prima

4 incognite  $\rightarrow Q_1, Q_2, Q_3, H_2 \rightarrow 4^a$  eqz  $\rightarrow$  eqz di continuità al nodo

Esempio: condotte in parallelo (B)



Se conosco i carichi agli estremi delle condotte:

$$H_1 - H_2 = \beta_i Q_i^2 D_i^{-5} L_i \rightarrow \text{trovo } Q_i$$

Altrimenti: i nodi si comportano nello stesso modo perché impongono l'eqz di cont.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$\beta_1 Q_1^2 D_1^{-5} L_1 = \beta_2 Q_2^2 D_2^{-5} L_2 \quad \text{per } 1, 2$$

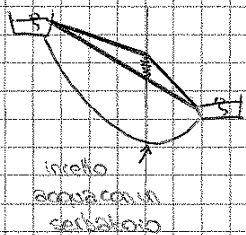
$$\beta_1 Q_1^2 D_1^{-5} L_1 = \beta_3 Q_3^2 D_3^{-5} L_3 \quad \text{per } 1, 3$$

} 3 eqz e 3 incognite, trovo e trovo  $Q_1, Q_2, Q_3$

(non scrivo 2, 3 perché combinazione lineare delle ultime due)

La piezometrica è uguale per tutte e 3 le condotte.

? Esempio: a valle ho bisogno di più acqua (incendio). Normalmente passavo 100 L/s, ma



ne voglio 120 L/s. La piezometrica sarà più pendente, a monte meno.

↑ portata ↑ dissipazioni ↑ pendenza a valle → devo collegarlo con monte

Eqz di bilancio energetico

$$H_j - H_{j-1} = \beta_i L_i Q_i^2 D_i^{-5} \quad n$$

Eqz di continuità

$$\sum Q_{entr} = \sum Q_{usc} \quad n$$

↳ i nodi i preferiti ricapitolati ai nodi

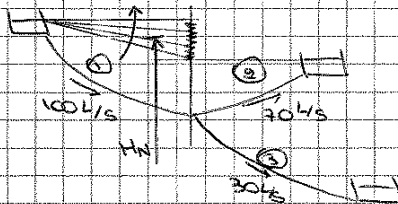
} sistema di verifica

Mancano 5 eqz → scopro che il sistema è indeterminato → 10 slz che verificano il sistema.

Il problema di verifica era invece determinato. Ho 5 EOL → IRRAZIONICAMENTE UNDET. Tutte le slz sono equivalenti → <sup>idraulic</sup>impongo 10 dei vincoli → convenienza economica (D che costano poco), velocità acqua, temperatura → questioni non legate all'idraulica.

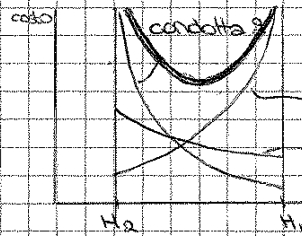
Scelgo il vincolo del minimo costo, se non ci sono altri vincoli particolari. Devo scrivere 5 eqz.

Torno al problema dei 3 serbatoi: suppongo che sto progettando un impianto, ho scelto le p



Il carico nel nodo dev'essere in m cosicché  $Q_1$  sia ripartito, come voluto, tra  $Q_2 = 30 \text{ L/s}$  e  $Q_3 = 30 \text{ L/s}$   
 $H_2 \leq H_M \leq H_1$

Cosa succede al diametro al variare di  $H_M$  in m?



- Condotta 1
- per  $H_M = H_2$  → max dissipazione → acqua veloce → D piccolo → basso costo
- Condotta 2
- per  $H_M = H_1$  → dissipazioni nulle → acqua va piano → D grande → alto costo
- Condotta 3

Non cambio materiale,  $Q, L$  → per avere minori dissipazioni serve D più grande perché le dissip

sono  $\beta Q^2 D^{-5} L$  → la velocità scende → dissipa meno se l'acqua va piano. Ma D è costoso di più → i costi saranno una curva monotona crescente con asintoto verticale. ~~Stando a meno per  $D > H_1$~~ , ma lo stesso problema al contrario vale per la condotta 2. Il costo della condotta 3 cresce al diminuire di  $H_M$  ma non va mai a  $\infty$ .

Resultante → parabola → c'è un minimo costo (costo  $\infty$ , minimo,  $\infty$ ) Ragiono così per tutti i nodi della rete. Come trovo questa condizione?

Costo condotta  $C = \text{costo fisso } w_0 + w_1 \cdot D^E$  quota che dipende da D in modo non lineare

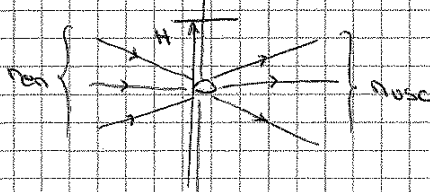
$E \neq 1$  → non linearità, perché se aumenta D lo spessore del materiale non cresce linearmente <sup>tra D e massa</sup> → no linearità, lo spessore va incrementandosi col diametro →  $E > 1$

Aumento D, aumenta lo spessore → la massa di materiale cresce più di quanto cresce il diametro perché aumenta lo spessore

$$C = w_0 + w_1 D^E$$

Minimo costo → eqz → solo i singoli nodi → certo numero di condotte entranti e uscenti

suppongo  $n_{ent}$  e  $n_{usc}$



$$H_i - H = \beta_i Q_i^2 D_i^{-5} L_i \quad i = 1, \dots, n_{ent}$$

Il carico nel nodo non è col nodo, ma è più su per  $P/g$

$$H - H_j = \beta_j Q_j^2 D_j^{-5} L_j \quad j = 1, \dots, n_{usc}$$

(E)

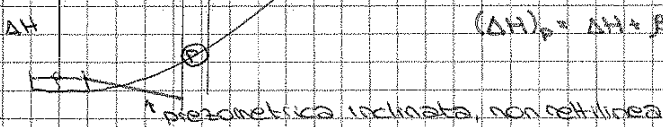
Più il carico nel nodo tende a valori bassi, più sale il costo della seconda condotta.

La seconda eqz blocca, tra le n solz possibili idraulicamente, quella del minimo costo (suppongo che sia min).

**Tipi di pompaggio**

vuoglio dire il fluido arriva nel serbatoio a dir che però è più in alto

Nel caso contrario il fluido non scende da solo, ma devo fornire energia. Suppongo di mettere un impianto di pompaggio che dia energia al fluido. Quanto? Pari a  $\Delta H$ , cioè al dislivello geodetico, + l'energia dissipata lungo la condotta.



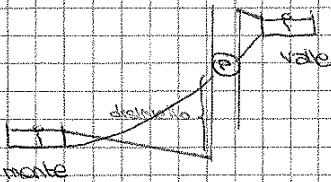
$$(\Delta H)_p = \Delta H + \beta Q^2 D^{-5} L$$

Tanto più sotto P a valle (non è indifferente dove mette la pompa), più cresce il dislivello,

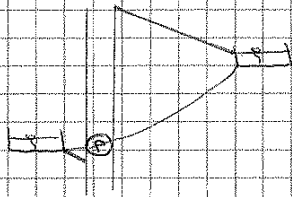
la depressione che la pompa vede all'ingresso.

Se la pompa lavora in forti depressioni, lavora male perché

l'acqua bolle a  $T_{amb}$  → liquido + gas.



Conviene metterla più vicino a monte



Alta condotta di un impianto di pompatura che deve sollevare una determinata portata da un serbatoio ad un altro più elevato può essere assegnato qualunque valore del diametro purché la pompa venga adeguatamente mente dimensionata

Dipende → bassa pascuità di impianto, ma elevata pascuità in esercizio per le forti perdite di carico nella condotta

Dipende → bassa spesa di esercizio, elevata spesa di impianto

**Tracciati altimetrici**

Caso semplice. posso collegare i due serbatoi come voglio? Posso mettere qualunque tracciato

altimetrico? Ci sono dei vincoli? Tracciamo:

- l'orizzontale per il carico di monte

- la piezometrica che congiunge i due serbatoi

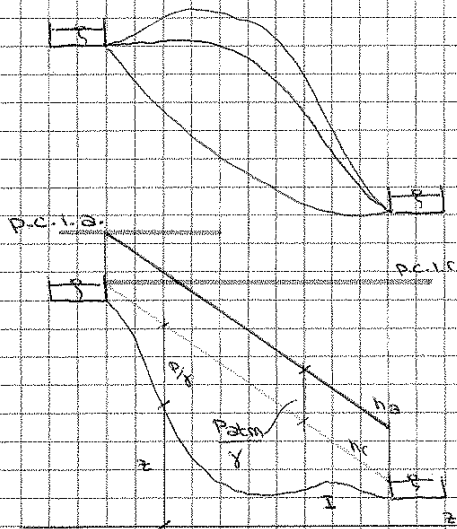
ma si riferisce a  $p_r$ . Per avere quella riferita a  $p_{atm}$

la traslo verso l'alto di  $p_{atm}$

$$h_p = z + p_r \text{ ma sono } p_r = p_{atm} - p_{atm}$$

energie che muovono il fluido, non conta l'energetica

$$\text{Allora } h_{p_{atm}} = z + \frac{p_{atm}}{\rho} = z + \frac{p_r}{\rho} + \frac{p_{atm}}{\rho}$$



Quindi ho:  $h_p, h_a, p.c.i.a., p.c.i.r.$

Tipi di tracciato altimetrico:

(I) Passa ovunque sotto la piezometrica relativa (ce ne sono  $\infty$ ). Man mano che la tiro su, cresce z, riduco p → scarico la condotta in termini di pressione

Ma tutte le condotte tipo I hanno un termine di p positivo (buco → esce acqua) La p.c. è sempre > 0. Il funzionamento è del tutto regolare. L'avviamento del moto è automatico all'apertura di una scharinestra ovunque disposta, anche se inizialmente la condotta non è piena di liquido. È il profilo migliore



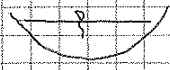
Si tratta delle correnti idriche che percorrono i corsi d'acqua naturali

**CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA** (Fiumi, torrenti) o i canali artificiali → **IMBOTTITE** capitolo

Studio correnti → fluido che si muove sostanzialmente in una sola direzione

Sinca → correnti in pressione → geometria della corrente imposta da un tubo

Ora → corrente a contatto con l'atm → in parte vincolata da una geometria solida, in parte a contatto con l'atm



Queste correnti sono caratterizzate dall'avere la superficie superiore a contatto non con una parete solida, ma con un gas, in genere l'atmosfera → superficie libera o pelo libero dove  $p = \text{cost} = 0$

Caratteristiche:

→ Fenomeno tipico dei **LIQUIDI** (acqua)

Faremo riferimento a correnti libere → curvatura trascurabile delle singole traiettorie → distr. idrost.  $\Delta p$  in ogni sezione trasv.

→ c'è una sup. libera isobara →  $p$  non può fare quello che vuole come nei casi di correnti in pressione, ma ha una  $p$  imposta. Nei tubi posso avere grandi gradienti di pressione, con la sup. libera non posso, altrimenti le onde frangono

sezione trasversale  $\Delta p$  sup. libera = retta orizzontale

Tubi: sopportano grandi  $\Delta p$  in spazi limitati

Sup. libera: non " e tendono a spalmare  $\Delta p$  su un lungo tratto (l'onda si diffonde)...

→ no forti grad  $p$

Correnti in pressione: cilindriche tratti di moto uniforme

(in caso di curve, raccordi, convergenze, divergenze, bruschi cambi di sezione)

intervallati da tratti di moto permanente che non ho studiato

bruschi cambi di sezione

Ma vale prima e dopo. Abbiamo studiato moti uniformi.

quindi non ho mai moto uniforme, la corrente reagisce con un moto permanente o vario.

Le c. a sup. l. sono complesse perché non ho mai moto uniforme

→ grad  $p$  → moto unif. (?)

Fenomeno del colpo d'ariete: innesco nella corrente un moto vario quando chiudo il rubinetto

→ Sovrapressioni  $\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{cV_0}{g}$  subito dietro la condotta che ho chiuso

$c$  celerità del suono

Es. nell'acqua:  $\frac{1400 \cdot 1}{10} = 140$  m di sovrappressione → è come se di colpo sotto il serbatoio a 140 m sotto il mare

Questi sovralzi di pressione si propagano su tutta la rete → bisogna controllarli, limitarli.

Il cuore è un continuo apri e chiudi → per controllare le sovrappressioni: artoni deformabili...

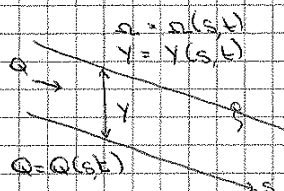
I farmaci riducono l'effetto del moto vario.

Questo problema delle sovrappressioni non c'è nelle c. a sup. libera

Come le descrivo? Vale il teorema di Stokes NA

(1) non le so risolvere

(2) vorremmo trovare un'eqz non con le variabili locali, ma con  $\rho, \eta, \gamma$  → variabili globali

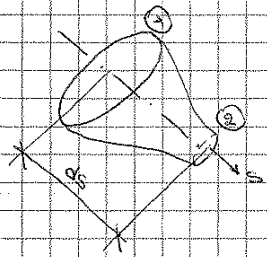


Voglio sapere come variano portata, sezione, profondità nello spazio e nel tempo



### Equazione di "de Saint-Venant"

Prendo un generico tratto  $ds$  di corrente. Scrivo l'eqz di Newton:  $\sum \vec{F} = dm \vec{A}$



Proietto lungo  $s$

$$A_s = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{dove } u \text{ velocità media}$$

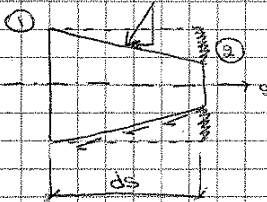
$$dm = \rho \Omega ds$$

Forze:

$$\text{- gravità} \rightarrow \rho g \Omega ds \sin \theta = -\rho \Omega ds \frac{dz}{ds}$$

$$\text{- Forze al contorno: risultante di } p \text{ su } 1 \text{ e } 2 \rightarrow p \Omega - \left( p \Omega + \frac{\partial(p \Omega)}{\partial s} ds \right)$$

Poi c'è la sp. di contorno



$$\frac{\partial p \Omega}{\partial s} ds \quad \text{risultante lungo } s \text{ delle forze di sp. normale}$$

quanto cambia la sezione per un salto  $ds$  mm

Proietto la sezione, invece di proiettare la forza

cont bagnato



... ma ci sono anche quelle tangenziali  $\rightarrow -\tau_0 P ds$

Quindi:

$$-\rho \Omega ds \frac{dz}{ds} - p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - \rho \frac{\partial p}{\partial s} \Omega ds + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds - \tau_0 P ds = \rho \Omega ds \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) \quad \text{eqz di bilancio della quantità di moto}$$

Divido per  $\rho \Omega$  e porto a II membro:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\tau_0 P}{\rho \Omega} + \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right] = 0$$

$$\frac{\tau_0 P}{\rho \Omega} = \frac{\tau_0}{\rho R} \quad \text{ma } \tau_0 = \gamma R i \rightarrow \text{è } j \text{ dissipazione energetica per unità di lunghezza}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + j + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad ?$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + j + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = -j \quad \text{è Bernoulli (fluido perfetto} \rightarrow j=0)$$

$$\text{ma } h = z + y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} + j + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = i - j$$

diff. tra pendenza del fondo e dissipazione

Var. dip. =  $y, u$   $\rightarrow$  servono 2 eqz  $\rightarrow$  eqz di continuità (in  $Q$  e  $Q$  sono nascoste  $y$  e  $u$ )

Var. indep. =  $s, t$

l'eqz  $\rightarrow$  x1 e x2 sono e incompi.

$$\text{La coppia a } \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

21 novembre 2012

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = \tau - j \\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

**Eqz di De Saint Venant**

Le onde del mare non sono descritte perché non è una massa che si sposta, ma sono forme che si spostano. Nelle onde di piena si sposta una massa d'acqua.

Descrivono un'evoluzione in  $s$  e  $t \rightarrow$  moto vario

Noi studiamo i sottoinsiemi: moto uniforme e moto permanente (no  $t$ )

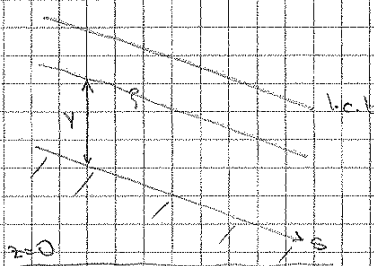
**MOTO UNIFORME**

si può verificare solo negli alberi cilindrici

A righe non esiste  $\rightarrow$  discontinuità  $\rightarrow$  la corrente reagisce con variazione di area, prof,  $v$  molto estese  $\rightarrow$  lunghi tratti di  $m$  permanente ricordati  $\rightarrow$  no  $m$ . unif  $\rightarrow$  ma ci sono casi in cui il  $m$ . perm. assomiglia a  $m$ . unif. Si

$M$ . uniforme  $\rightarrow$  no variazione nel tempo, né lungo la direzione  $s \rightarrow v = \text{cost}$ , sup. libera resta

$\parallel$  al fondo  $\rightarrow v = \text{cost}$  (corrente cilindrica)  $\rightarrow H \parallel$  sup. libera  $\parallel$  fondo



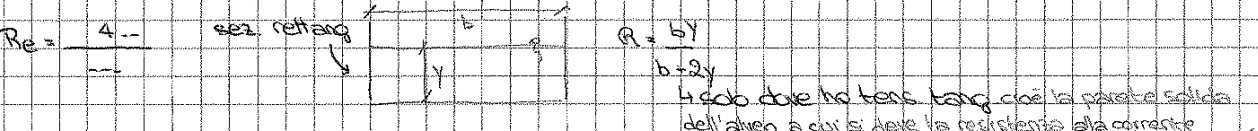
$i\tau = i = j$   
 $\frac{\partial}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{grad spaziali e temporali} = 0$

Eqz di S.V. degenera in  $i\tau = j$

Osservazioni

• Voglio un legame tra caratteristiche della corrente e dissipazioni (come  $M$  body) <sup>medie</sup>

Moody  $\rightarrow \lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$  non c'era l'ip che la corrente fosse in pressione o no, ma solo cilindrica in moto uniforme  $\rightarrow$  uso lo stesso strumento. Ma ora non ho un diametro  $\rightarrow$  la estendo con  $D = 4R$  al caso attuale  $\rightarrow Re = \frac{4\theta v}{r}$ ,  $\frac{\epsilon}{4R}$ ,  $\lambda = \frac{2g\tau}{4R v^2}$   $\rightarrow$  così uso i risultati del diagramma di Moody, ma nei casi reali  $Re$  è molto alto. Calcolo:



Generalmente ho sempre un  $y \ll b$  (fiumi...)  $\rightarrow$  sono delle sezioni LARGHE

$\rightarrow R \approx y$  è dell'ordine della profondità della corrente

Allora  $Re \approx \frac{4yU}{\nu} = \frac{4 \cdot 10^0 \cdot 10^0}{10^{-6}} \rightarrow$  ordine di grandezza (fiume più profondo  $\rightarrow 50m \rightarrow$  Mississippi)

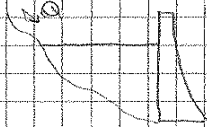
Caso correnti a sup. libera  $\rightarrow Re$  altissimi  $\rightarrow$  sul diagramma di Moody sono nella zona

dove  $\lambda \neq \lambda(Re)$  (in cui ho  $Re$  alto e alte  $\epsilon/s$ )  $\rightarrow$  uso le formule empiriche (Chezy, Darcy)

$U = \lambda \sqrt{R}$  Chezy

Posso mettere  $i, i\tau$  o  $j$  perché sono in moto uniforme

- Ci sono casi in cui si fa correre la corrente a sup. libera in qualcosa che è chiuso super (rete fognarie). Esempio: diga con serbatoio a monte. Ci sono vari carichi come di superficie dove è scaricata la portata, di mezzofondo e di fondo. Questi sono così:



La sezione va chiudendosi  
Altri esempi → (reticoli carsici, ghiacciai)

Caso semplice di sezione circolare: se vale Chezy  $\rightarrow U = \alpha \sqrt{Ri} = c R^{2/3} i^{1/2}$ . Al variare del livello cambia  $R$ . Non è vero che  $R$  è una funzione monotona crescente al crescere del livello della corrente. Perché?

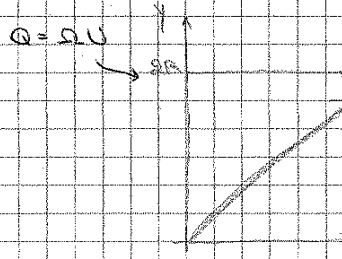
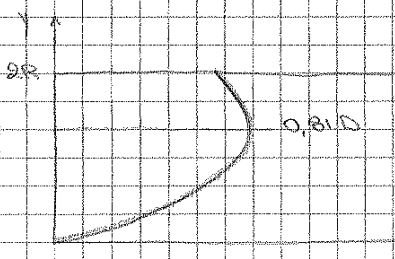
$$R = \frac{\Omega}{P}$$

Livello alto  $\rightarrow$  incremento di profondità  $\rightarrow$  crescono  $P$  e  $\Omega$ , ma cresce più  $P$

A certe profondità  $\downarrow R \downarrow$  velocità  $\downarrow Q$

Ecco perché una sezione con livello  $\uparrow$  porta una  $Q$   $\downarrow$  di una sezione con livello  $\uparrow$

Verifico:  $P = R\varphi$ ,  $\Omega = \frac{\varphi}{2\pi} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin\varphi = \frac{R^2}{2} (\varphi - \sin\varphi)$ ,  $R = \frac{\Omega}{P} = \frac{R}{2} (1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi})$   
 È max per  $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$  minimo



0,915 ovunque il max della portata

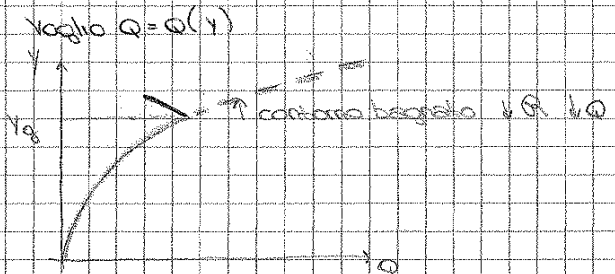
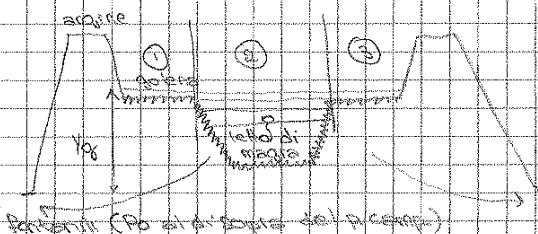
Esempio: torrenti intubati per sovraccarico edilizia

Non può più passare acqua  $\rightarrow$  passa altrove

Esempio: strato di ghiaccio sulla sup. del canale  $\rightarrow$  crea un contorno bagnato  $>$  di

prima  $\rightarrow$  piccole esondazioni

- Gole (naturali o artificiali) ②



**Assurdo:** non è giusto applicare Chezy perché si innescano grossi mt. trasversali di comunicazione tra gola e alveo principale  $\rightarrow$  non ho più corrente grad. variata

$\rightarrow$  non vale Chezy  $\rightarrow$  divido zona 1, 2, 3

$$Q_{complessiva} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Applico Chezy separatamente  $\rightarrow$  scelgo  $\Omega$  e  $P$  giusti. Così vedo che la curva continua

a crescere

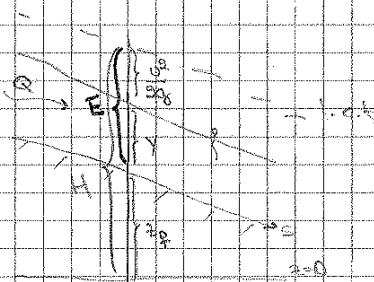
$\rightarrow$  nei contorni bagnati con terzo occhio della lunghezza delle linee di separazione perché lungo esse la resistenza è nulla

26 novembre 2012

**Moto permanente delle correnti a sup. libera**

Corrett.:  
 → corrente veloce / lenta (1)  
 → pendenza critica (2)  
 → integrali generali del moto permanente (3)

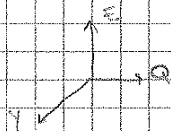
(1) Energia specifica: differente da H perché riferita al fondo più basso della corrente stessa



E' riferita al fondo dell'altra sezione per sezione  
 dove l'energia può scorrere dal basso verso l'alto  
 A differenza delle correnti in pressione, l'acqua scorre dall'alto verso il basso perché c'è una pendenza → l'acqua perde energia potenziale → interessano gli scambi tra energia cinetica e  $\gamma$ , perché tanto  $z_p$  è comunque persa, lo so già.  
 E' interessante vedere dove l'energia fa giochi stanti,

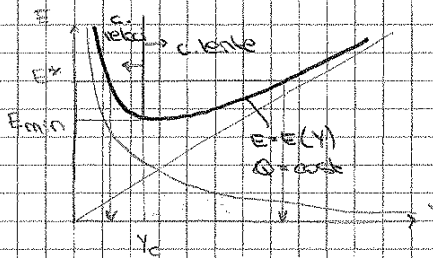
scambi tra  $\gamma$  e  $\frac{v^2}{2g}$   

$$E = \gamma + \frac{v^2}{2g} = \gamma + \frac{Q^2}{2g\gamma^3}$$



L'energia specifica ci dice che c'è un legame  $F(E, Q, \gamma) = 0$  tra energia portata e profondità. E' una superficie nello spazio  $E, Q, \gamma$ . Per disegnarla fissa una grandezza alla volta.

(a)  $Q = \text{cost}$  → alveo di una certa sezione in cui transita una certa  $Q$  → legame  $E, \gamma$



(1) Primo addendo:  $\uparrow \gamma \uparrow E$  (bomba fisicamente)

$\uparrow \gamma \uparrow \eta \downarrow$  secondo addendo → andamento di tipo

iperbolico

$\uparrow \gamma \uparrow$  termine legato al termine piezometrico

$\downarrow$  termine cinetico ( $Q = \text{cost} \uparrow \eta \rightarrow Q = vA \rightarrow \downarrow v$ )

Somma le due curve

Asintoto verticale per  $\gamma \rightarrow 0$ , obliquo per  $\gamma \rightarrow \infty$ , minimo in mezzo

**Considerazioni**

• C'è un'energia minima sotto cui non ho più la curva → per far passare quella corrente portata, deve avere almeno quell'energia minima, se no non passa

In corrispondenza di  $E_{min}$  c'è  $\gamma_c$  profondità critica. (2)

Non è l'unica opzione per far passare  $Q \rightarrow E^* > E_{min} \rightarrow$  la corrente può passare con due profondità. A sx gran parte del contributo è legato all'energia cinetica e meno al termine piezometrico. Viceversa a dx (vedi dalle due curve singole) (3)

$\uparrow E \uparrow$  differenza tra le due correnti che possono passare

Divido in due parti: ramo dx più profondo e più lento, ramo sx più veloci a seconda che  $\gamma$  sia  $>$  o  $<$  di  $\gamma_c$

$\gamma > \gamma_c$  correnti lente

$\gamma < \gamma_c$  correnti veloci