



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO : 488

DATA : 27/02/2013

# A P P U N T I

STUDENTE : Randazzo

MATERIA : Dispositivi Sistemi Robotici

Prof. Pastorelli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## INTRODUZIONE

La robotica è un titolo molto ampio, in realtà è un termine giovane, risale nel 1921 grazie a uno sceneggiatore cecoslovacco in un testo teatrale "Rossum's universal robot". Si rappresentavano macchine come sculture di lotta con conformazione umanoida. "Robota" significa lavoro servile in cecoslovacco. Macchine con la stessa funzione risalgono addirittura agli Egizi. Il termine nasce quindi in termini immaginario. Il termine robotica risale ad Asimov nel 1940, sempre come macchina che si sostituisce nelle operazioni produttive e nascono le 3 leggi della robotica. Le macchine di Rossum si ribellarono quindi Asimov le macchine devono preservare l'uomo e poi loro stesse. Fino agli anni '80 con il termine robot si pensa ad un umanoido. In realtà non è solo questo. Attualmente possiamo parlare di 2 ambienti in cui vedere la robotica.

### La ROBOTICA

- \* Studia le macchine che possono sostituire l'uomo nell'esecuzione di un'attività, ma in termini fini ma decisionali.

- \* Studia la commersione intelligente tra percezione ed azione.

Dopo gli anni '60 ha avuto applicazioni pratiche che ha dato avvio ad applicazioni industriali. La ROBOTICA INDUSTRIALE è l'applicazione di robot nell'ambito della produzione per diverse esigenze.

- \* no ore di lavoro umano limitate
- \* l'uomo non può lavorare in ambienti pericolosi (ad esempio centrali nucleari)
- \* operazioni ripetitive ed unificate.

La robotica industriale è oggi matura ed affidabile. Possono lavorare 12-15 anni senza fermarsi con la sola manutenzione ordinaria, con grande precisione. Da qualche anno si parla di ROBOTICA DI SERVIZIO di robot in applicazioni non industriali (domestico assistenza medica, protesi mediche, intrattenimento, agricoltura, education ...). Oppure ambienti ostili (spazi sotterranei, nucleari, militare). Ciò che distingue tra robotica industriale e di servizio è che quella industriale è confinata ad un ambiente strutturato e non c'è interazione con l'uomo. Quella di servizio è ancora in sviluppo anche dal punto di vista normativo. Nella robotica di servizio c'è interazione e per questo è ancora in sviluppo anche dal punto di vista normativo.

Un ROBOT INDUSTRIALE è un manipolatore multifunzionale riprogrammabile progettato per muovere materiali per mezzo di dispositivi specifici attraverso movimenti programmati variabili, per l'esecuzione di una varietà di compiti [Robot Institute of America - 1980]

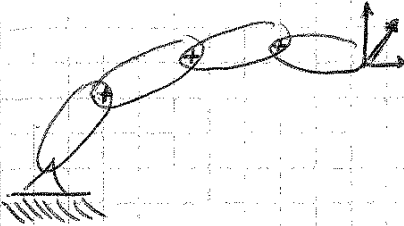
È il livello più alto di automazione. Manipolatore vuol dire che afferra e muove nello spazio un oggetto, che dipende dai compiti. Il robot effettua uno spostamento. È multifunzionale perché avere pinze, ugelli di verniciatura, bisturi etc etc. Un robot non ha sempre funzione se non quella di muovere qualcosa se non si ha un'intenzione finale che ne determina il compito. **END EFFECTOR**.

Questa movimentazione è fatta in modo riprogrammabile e può non essere diversa dal CNC, anche se la riprogrammabilità è più ampia perché ha percezione estesa e deriva dal robot stesso e quindi particolarmente variabile.

Il computer può essere interfacciato, interfaccia esterna oppure in remoto.  
 6) A seconda del tipo di funzione, possono essere utili delle informazioni esterne al braccio meccanico. **ETEROCETTORI**  
 ad esempio un sistema di visione.  
 Sono necessarie quindi competenze molto diverse per realizzare un sistema del genere.

ROBOT - SISTEMA MECCANICO

È un braccio, un manipolatore e si usano termini simili al corpo umano, costituito da una catena meccanica di corpi che ammassiamo rigidi connessi tra di loro tramite giunti (Links & joints).



Funzionalmente mi permettono di andare da un punto all'altro.  
 Ci serve una base, nappato di interfaccia con ad esempio il paziente, una catena di link fino a dove ci sarà una flangia terminale. È ciò che il produttore di robot fornisce. Occorre attaccare l'end effector per svolgere il compito voluto.

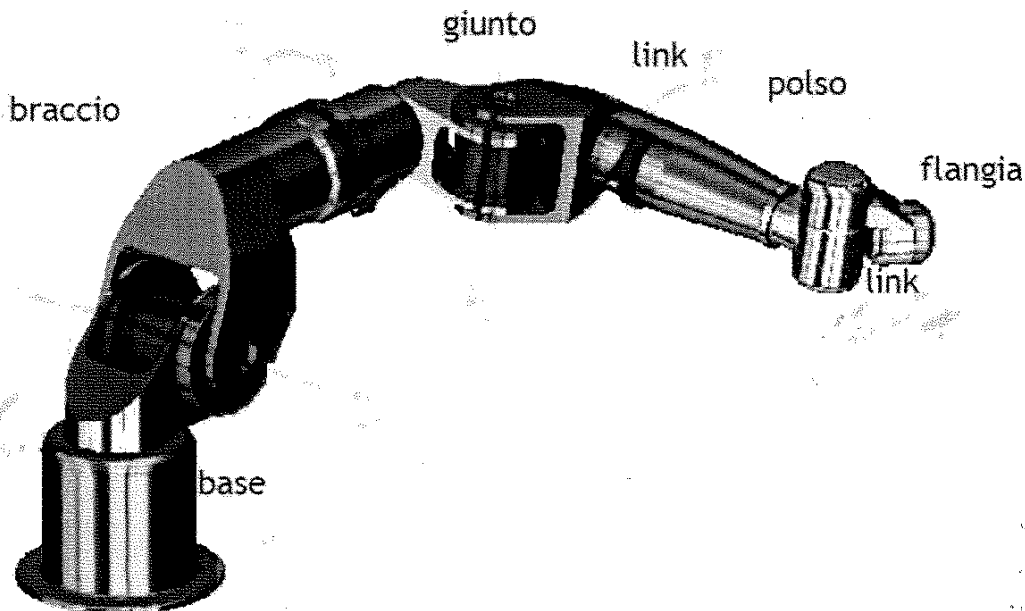
La capacità di muoversi è data dai singoli giunti. I g.d.l. presenti in questi giunti nel loro insieme costituiscono i g.d.l. del mio braccio robotico. Normalmente ogni giunto viene inteso come sistema ad 1 g.d.l. e si fa riferimento a

- \* Rotazione (cerniera) **R**
- \* Traslazione (pistone) **P**

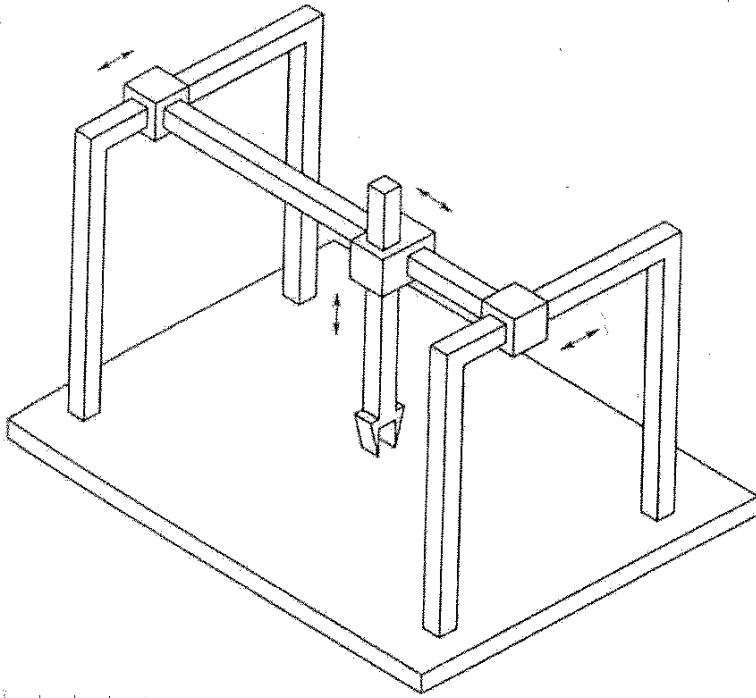
Normalmente contando i giunti si ottengono i g.d.l. del mio sistema meccanico. **⚠ NON VALE PER TUTTE LE TIPOLOGIE DI ROBOT !!**

7 gradi di libertà o mobilità (7 dof)

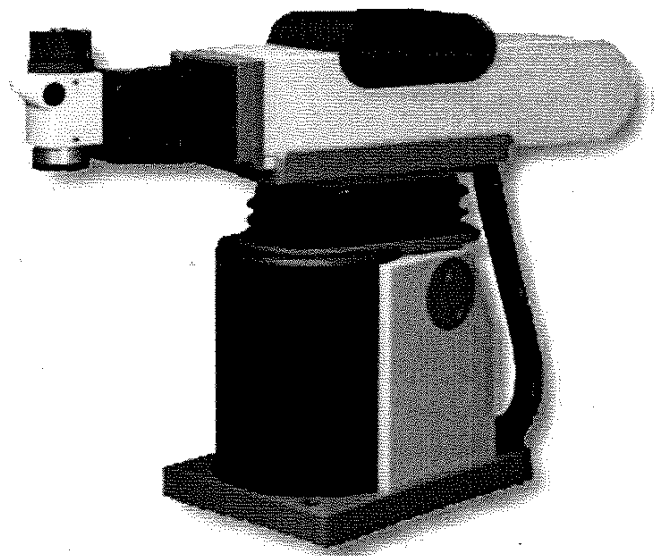
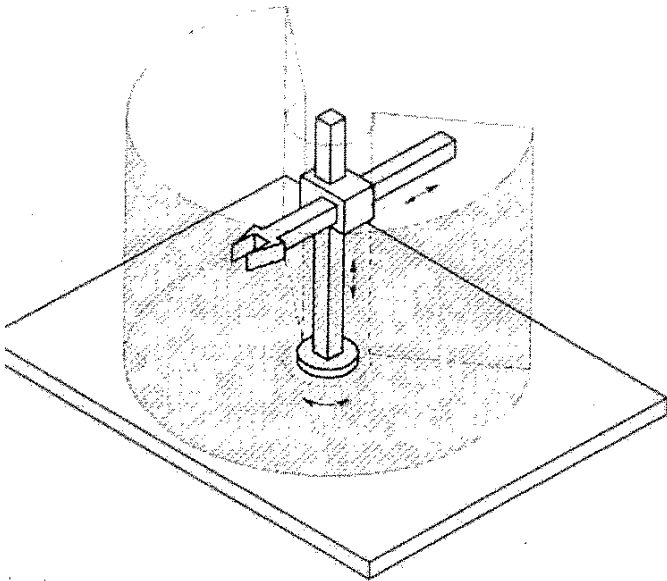
Terminologia essenziale



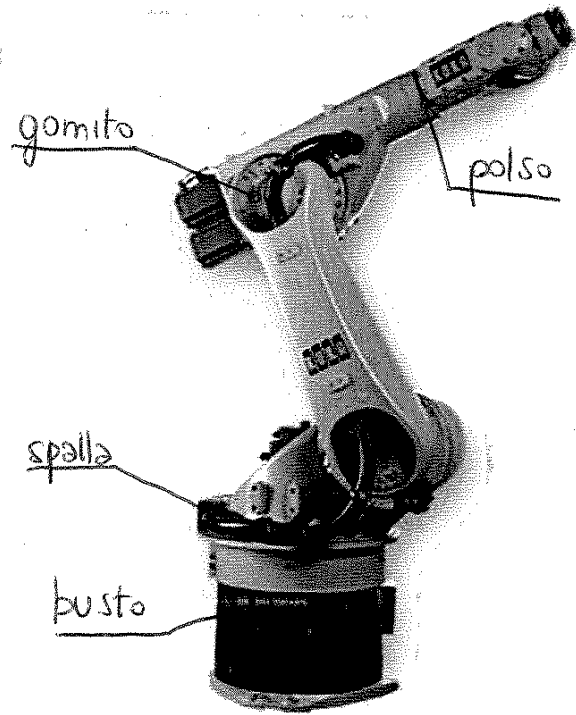
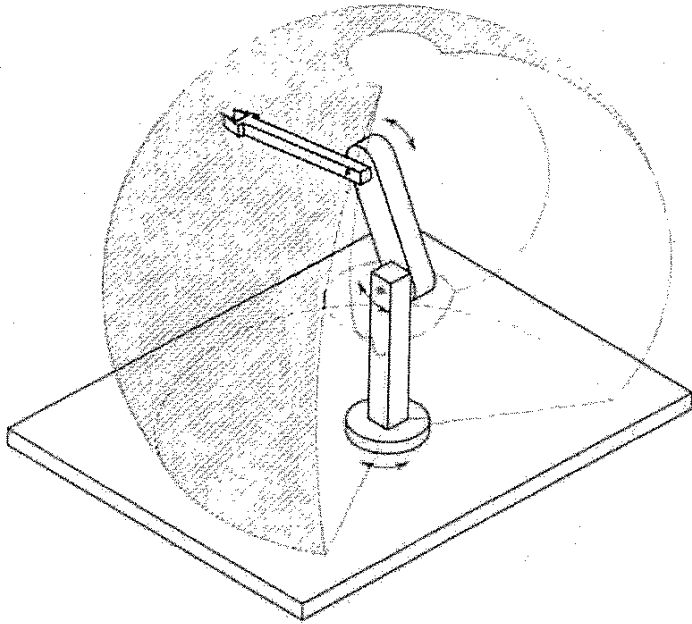
ROBOT CARTESIANO A PORTALE PPP ma il primo grado di libertà è più rigido per merito della struttura a portale. Tipico per avere l'ascensore dell'alto.



ROBOT CILINDRICO partendo dal cartesiano restringo il primo grado con un rotazionale RPP. Lo spazio di lavoro è una porzione di cilindro. Conviene esporsi l'end effector con coordinata cilindrica. È una soluzione ormai in disuso.



- ROBOT ARTICOLATO ANTRPOMORFO. abbiamo tre giunti d'rotazione RRR. La presenza è funzione dello spazio di lavoro. M perche di coprire una sfera più grande rispetto al robot stesso. E il più diffuso, almeno 60% della produzione del mondo. E il più simile al braccio umano.



KUKA KR30 HA

### Applicazioni tipiche

#### File comuni



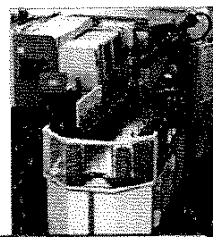
Saldatura a Punti



Saldatura ad arco



Assemblaggio



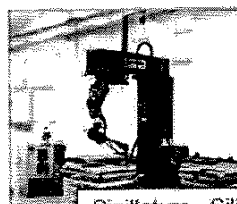
Carico - Scarico Macchine



Movimentazione



Automazione Linee Interpresse



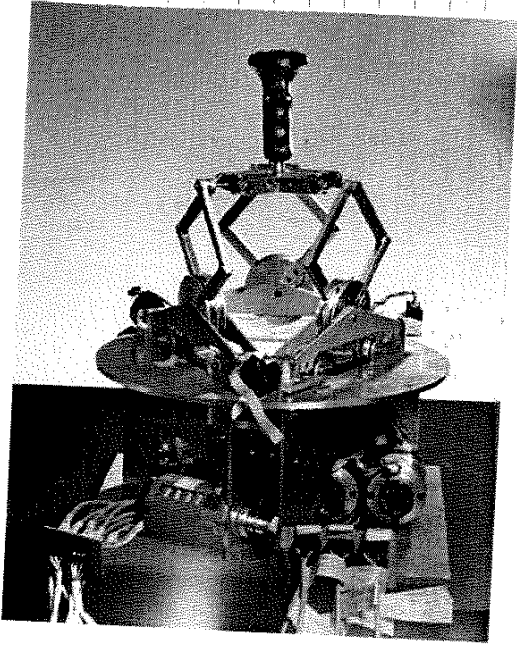
Sigillatura - Siliconatura



Lavorazione

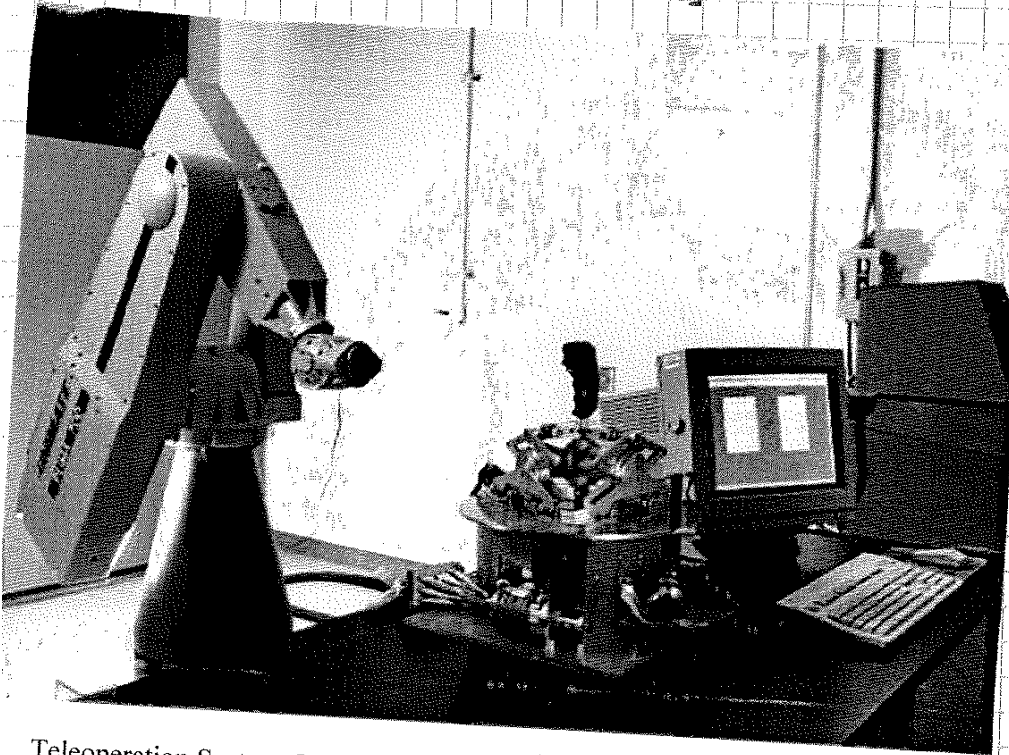


molto veloci.



Questo è per teleoperazioni. Ho una struttura MASTER e dirigo una struttura SLAVE. Ho quindi una duplicazione del robot, si muovono nello stesso modo. Devo anche avere sensazioni di forza dallo slave al master. Master e slave sono usati in modo duale. È utilizzata attualmente in ambito medico. Può essere fatta anche con macchine diverse, lo slave per manipolare corredi con una certa destrezza, il master da sensazioni e comande, ma può anche essere diverse, come joystick. Il joystick in foto è una struttura parallela e lo slave è completamente diversa.

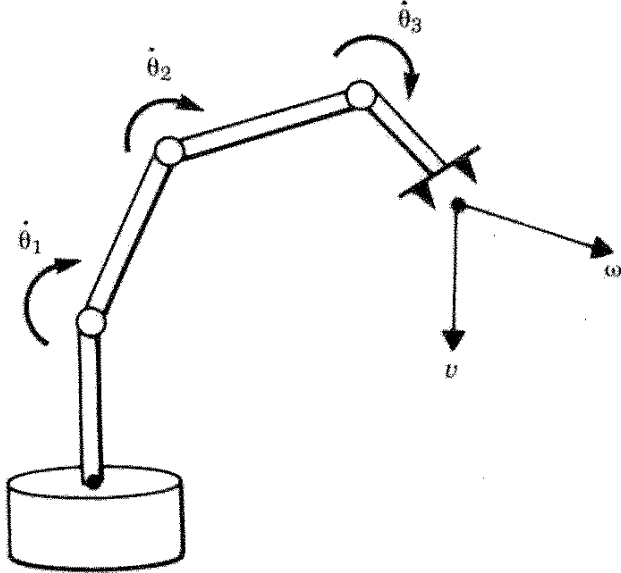
Haptic device: UCI Force Reflecting Hand Controller



Teleoperation System: UCI Hand Controller (master) and PUMA Robot (slave)

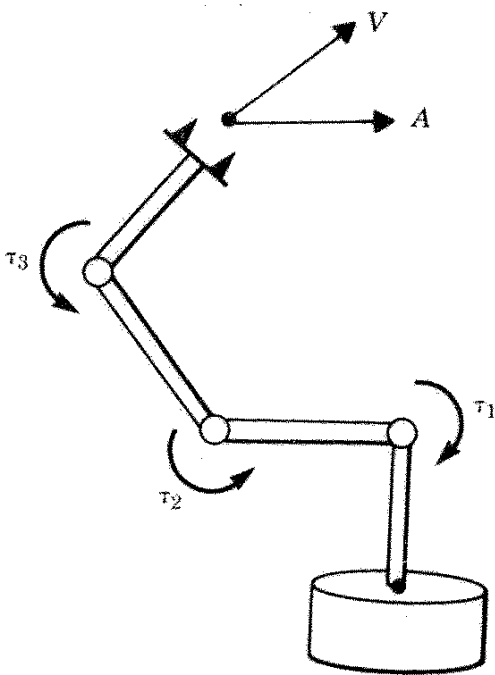
A parità di soluzioni finali ho più configurazioni. Questo è maggiormente presente in cui si risolve ai gradi dello spazio operativo. La ridondanza di giunti aumenta le soluzioni e quindi le configurazioni possibili. Non ha metodologia standard.

CINEMATICA DIFFERENZIALE DIRETTA E INVERSA



Legata al fattore tempo velocità ed accelerazioni nei due spazi appena descritti. Data una certa configurazione o come arrivare, ma se voglio dare una velocità all'end effector devo capire la velocità degli attuatori dei giunti. Il legame tra i due spazi sarà descritto da una matrice Jacobiana (raccolgo le derivate di una funzione di più output/input a seconda se diretta o inversa). Ci sono delle configurazioni che il robot può raggiungere, ma non può muovere come potrei immaginare in base ai giunti attivati.

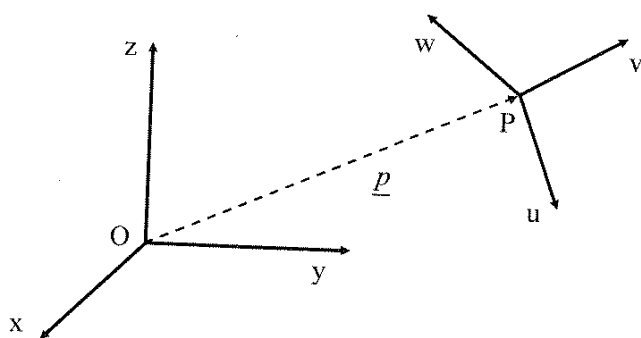
EQUILIBRIO DINAMICO



Rientra anche quello statico in quello dinamico. Il problema statico può essere espresso mediante la Jacobiana. Troviamo con la dinamica il legame tra forze/coppie tra end effector e giunti attivati. Anche qui ho i due spazi e problemi diretti o inversi.



# POSIZIONI E ORIENTAMENTO IN SISTEMI DI COORDINATE



Frame of reference 0 :  
 origin O  
 axes x y z  
 unit vectors  $\underline{i}$   $\underline{j}$   $\underline{k}$

Frame of reference i :  
 origin P  
 axes u v w  
 unit vectors  $\underline{\lambda}$   $\underline{\mu}$   $\underline{\nu}$

Per noi sistemi di riferimento vuol dire corpo e perciò un sistema di riferimento da relazionare con un altro. Abbiamo un sistema di riferimento 0 con un origine O, assi x, y, z per ciascun asse un vettore rispettivamente  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$ . o possiamo immaginare come sistema di riferimento fisso. Poi abbiamo un secondo sistema di riferimento i di origine P, assi u, v, w e vettori  $\underline{\lambda}$ ,  $\underline{\mu}$ ,  $\underline{\nu}$ . Lo possiamo immaginare mosso ed un corpo in movimento. Continuiamo descrivendo la POSIZIONE. Mi basta sapere dove sta P rispetto al sistema 0 ed uso il vettore o<sup>o</sup> chiamato  $\underline{p}$  inteso unicamente come linea nello spazio. Per esprimere questa informazione servono 3 gdl, ovvero le sue tre componenti nel sistema di origine fisso.

$$\underline{p} = p_x \underline{i} + p_y \underline{j} + p_z \underline{k} \quad \text{scrittura vettoriale}$$

al punto di vista di calcolo, le raccoglieremo in un array

sistema di riferimento  $\underline{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$

Non è però così completa come la informazione vettoriale senza la indicazione del sistema di riferimento. Arriviamo all'ORIENTAZIONE. Possiamo avere modalità diverse, partiamo da quella che ci porta alla formulazione matriciale. Su ciascun asse u, v, w abbiamo un vettore ed andiamo a proiettarlo nel sistema di riferimento che ci interessa

$$\underline{\lambda} = c_{ux} \underline{i} + c_{uy} \underline{j} + c_{uz} \underline{k}$$

$$\underline{\mu} = c_{vx} \underline{i} + c_{vy} \underline{j} + c_{vz} \underline{k}$$

$$\underline{\nu} = c_{wx} \underline{i} + c_{wy} \underline{j} + c_{wz} \underline{k}$$

Le componenti sono i COSENI DIRETTORI rispetto al sistema di riferimento x, y, z. Ho quindi 9 coseni direttori, ma l'informazione è data da 3 parametri

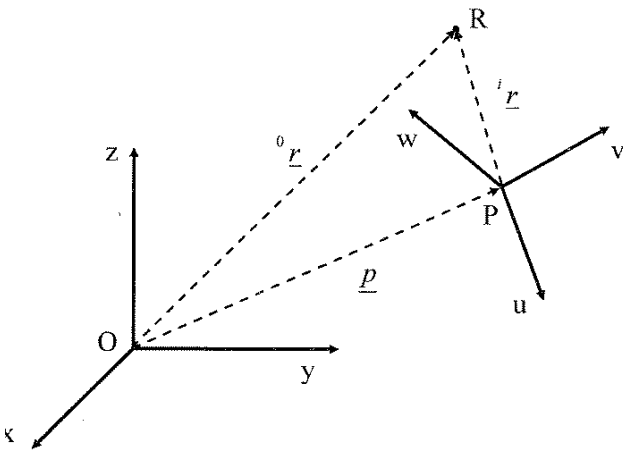
$$|\underline{\lambda}| = |\underline{\mu}| = |\underline{\nu}| = 1$$

Essendo destrorso cartesiano, sono tra loro ortogonali  $\underline{\lambda} \cdot \underline{\mu} = 0$

$$\underline{\lambda} \cdot \underline{\nu} = 0$$

${}^0A_6$  matrice di trasformazione

troviamo ora la FORMA OMOGENEA DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO  
 le aree motrici  $4 \times 4$



La posizione di R è data da due vettori completamente distinti. Siamo nello spazio operativo.

$${}^0r_z = [r_x \ r_y \ r_z]^T$$

$${}^i r_p = [r_u \ r_v \ r_w]^T$$

Sono due temi distinte ma legate tra di loro

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$$

È una somma vettoriale di tre entità definite, ma non ancora imponenti, indipendenti dal sistema di riferimento entro cui vanno ad operare.

vedo punti a rappresentare in uno stesso sistema di riferimento (scelgo lo 0)

$${}^0r_z = {}^0p + {}^0A_6 {}^i r_p$$

per PR devo usare il cambio di coordinate visto in precedenza. In modo esplicito possiamo scrivere

$$\begin{cases} r_x = p_x + c_{ux} r_u + c_{vx} r_v + c_{wx} r_w \\ r_y = p_y + c_{uy} r_u + c_{vy} r_v + c_{wy} r_w \\ r_z = p_z + c_{uz} r_u + c_{vz} r_v + c_{wz} r_w \end{cases}$$

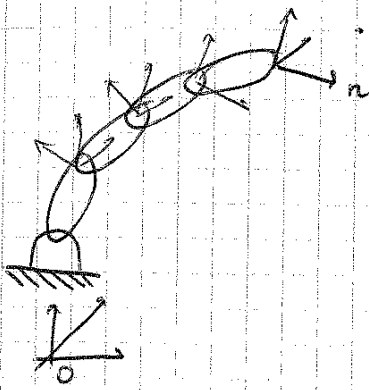
tre righe e 4 addendi. Possiamo aggiungere una riga nulla  $1 = 1 + 0 + 0 + 0$  per avere 4 righe e 4 addendi. Le puoi quindi essere riassunto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ux} & c_{vx} & c_{wx} & p_x \\ c_{uy} & c_{vy} & c_{wy} & p_y \\ c_{uz} & c_{vz} & c_{wz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0A_6 & {}^0p \\ \hline 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

seconda matrice è moldare in 4 sottomatrici. Una coppia le matrici di ~~rotazione~~ rotazione con i coseni direttori, l'ultima colonna di pontino o l'ultima riga anticipato unitario in precedente, siamo quindi sintetizzarla come

$${}^0\hat{r}_z = {}^0\hat{A}_6 {}^i\hat{r}_p$$

ci ricorda che stiamo lavorando in un sistema a forme omogenea.



Possiamo quindi cambiare le coordinate con un prodotto matriciale

$${}^0\hat{z} = {}^0\hat{A}_1 \cdot {}^1\hat{A}_2 \dots {}^{n-1}\hat{A}_n \cdot {}^n\hat{z}$$

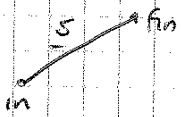
$${}^0\hat{A}_n = \prod_{i=1}^{i=n} {}^{i-1}\hat{A}_i$$

lega i sistemi di riferimento dei vari link.

⚠ Il prodotto tra matrici non è commutativo!

### TRASLAZIONI

Qui abbiamo un sistema di riferimento e gli abbiamo la posizione, mantenendo i coseni direttori invariati. L'informazione di traslazione è legata a un vettore che collega la posizione iniziale con quella finale e lo



chiamo  $\underline{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ . L'apice non è ancora definito, l'operatore sarà una matrice 4x4

$$\hat{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & 0 & s_y \\ 0 & 0 & 1 & s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In toccando l'orientazione, abbiamo la matrice unitaria 3x3. Vremo quindi  ${}^0\hat{A}_i$  4x4 ed  $i$  è il sistema che vogliamo essere e abbiamo cose succede se nuovo

$${}^0\hat{B}_i = \hat{T} \cdot {}^0\hat{A}_i \quad \text{PREMULTIPLICAZIONE}$$

$${}^0\hat{B}_i = {}^0\hat{A}_i \cdot \hat{T} \quad \text{POSTMULTIPLICAZIONE}$$

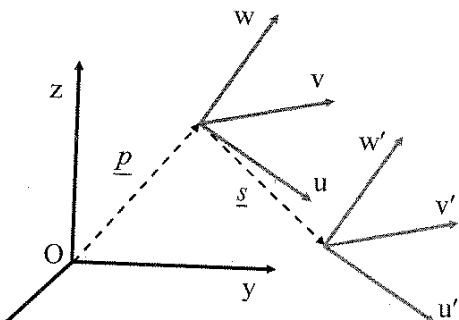
Essendo il prodotto tra matrici non commutativo, i due prodotti danno risultati diversi.

Queste  $B$  indicano cose c'è dopo, sono matrici del sistema che sta traslando ed il risultato è espresso nel sistema base.

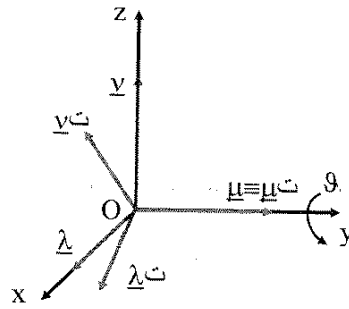
### PREMULTIPLICAZIONE

${}^0\hat{B}_i = \hat{T} \cdot {}^0\hat{A}_i$  moltiplicando ottengo

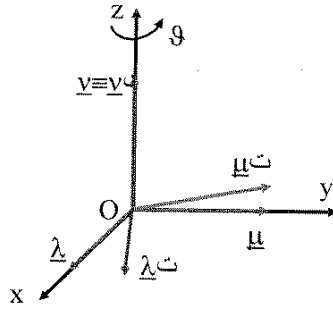
$${}^0\hat{B}_i = \left[ \begin{array}{c|c} U & \underline{s} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^0A_i & P \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^0A_i & P + \underline{s} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right]$$



$$R_{\hat{o}t}(y, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_{\hat{o}t}(z, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



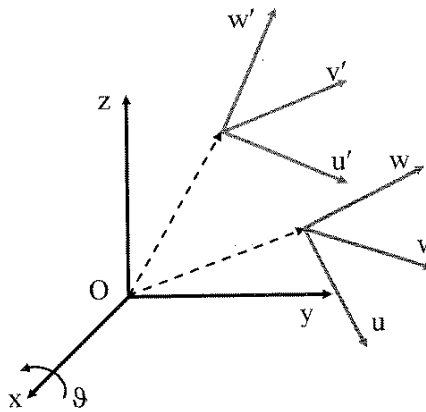
matrice di rotazione intorno ad un'asse prescelta una riga e la rispettiva colonna di 1 e 0. Questa osservazione è utile a procedermi inversi.

Andiamo ora ad utilizzarli moltiplicandoli per la matrice di un sistema di riferimento, analogamente a prima in pre- e post-moltiplicazione.

EMULTIPLICAZIONE

$${}^0\hat{B}_i = R_{\hat{o}t}(x, \vartheta) \cdot {}^0\hat{A}_i$$

$${}^0\hat{B}_i = \begin{bmatrix} Rot(x, \vartheta) & 0 \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0A_i & {}^0p \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rot(x, \vartheta) \cdot {}^0A_i & Rot(x, \vartheta) \cdot {}^0p \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$



È tutto dal lato o mi aspetto di muovere il sistema (o) verso il punto o di una quantità  $\vartheta$ . Leggo l'angolo di rotazione con  $\vartheta$  ed applico una rotazione  $\vartheta$ . Mentre cambio la rotazione dell'origine, trascino anche gli assi che cambiano orientazione visto al moto rigido.

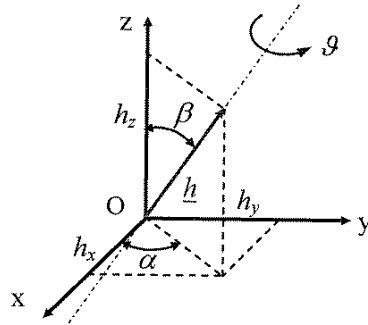
$\vartheta$  indica che la posizione dell'origine è cambiata a causa della rotazione (l'asse di rotazione è esterno al corpo). È dimostrabile che è come un cambio di variabile.

Quando ho un sistema e premoltiplico applico il momento a tutto un corpo o a un singolo vettore. Nella postmultiplicazione l'operatore è da interpretarsi in un sistema  $i$ , si applica solo ai sistemi di riferimento.

ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE GENERICO

$\underline{h} = [h_x \ h_y \ h_z]^T$  by angle  $\vartheta$ :

$$Rot(\underline{h}, \vartheta) = \begin{bmatrix} h_x^2(1-\cos\vartheta) + \cos\vartheta & h_x h_y(1-\cos\vartheta) - h_z \sin\vartheta & h_x h_z(1-\cos\vartheta) + h_y \sin\vartheta & 0 \\ h_x h_y(1-\cos\vartheta) + h_z \sin\vartheta & h_y^2(1-\cos\vartheta) + \cos\vartheta & h_y h_z(1-\cos\vartheta) - h_x \sin\vartheta & 0 \\ h_x h_z(1-\cos\vartheta) - h_y \sin\vartheta & h_y h_z(1-\cos\vartheta) + h_x \sin\vartheta & h_z^2(1-\cos\vartheta) + \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

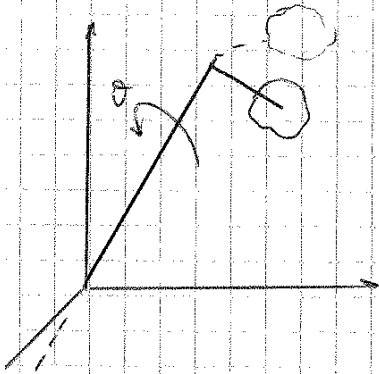


o un sistema di riferimento, un corpo al polo può essere ondata in un sistema di riferimento e lo voglio per ruotare attorno ad una generica retta passante per l'origine del sistema assoluto.  $\vartheta$  positiva uscente verso l'estro ed applico la legge della mano destra.

$Rot(\underline{h}, \vartheta)$

$\underline{h}$  è un vettore che rappresenta una retta in direzione e verso.

Tengo rigido corpo-braccio retto in modo da riportarmi da coincidere con z. Applico  $\vartheta$ , ho il momento intorno a z e poi riporto h nella sua posizione originaria.



o il sistema di riferimento  $\hat{A}_i$  e voglio ottenere  $\hat{B}_i$  e devo mettere un operatore di rotazione a me noto. Porto h a coincidere con z. applico la rotazione z con angolo  $\vartheta$  e quindi invento i momenti precedenti. La produttoria delle tre matrici è  $R(\underline{h}, \vartheta)$  che andiamo cercando.

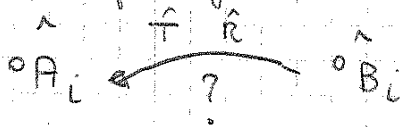
$$\hat{Rot}(\underline{h}, \vartheta) = \hat{Rot}(z, \alpha) \cdot \hat{Rot}(y, \beta) \cdot \hat{Rot}(z, \vartheta) \cdot \hat{Rot}(y, -\beta) \cdot \hat{Rot}(z, -\alpha)$$

$$\alpha \begin{cases} \sin \alpha = \frac{h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \\ \cos \alpha = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \end{cases} \quad \beta \begin{cases} \sin \beta = \frac{h_z}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} \\ \cos \beta = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_z^2}} \end{cases}$$

Non mi limito il quadrante, come farebbe invece una arctg.

### RAZIONAMENTO INVERSO

Serve per pianificare la traiettoria dell'end effector



#### Exercise 1

A robotised work station has been set up with a manipulator and with an external video camera as drawn in the figure. The video camera shoots the working plane, on which is installed the fixed base of the manipulator, and a working piece on it.

Attached to the working plane is a global reference system  $0$  with origin  $O$  and axes  $xyz$ , while a reference frame  $1$  with origin  $O_1$  and axes  $x_1y_1z_1$  is associated with the rigid body working piece.

Defined as reference frame  $2$  a coordinate system attached to the video camera with origin  $O_2$  and axes  $x_2y_2z_2$ , the following transformation matrixes are provided by video images:

$${}^2\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

corpo rigido rispetto alla telecamera

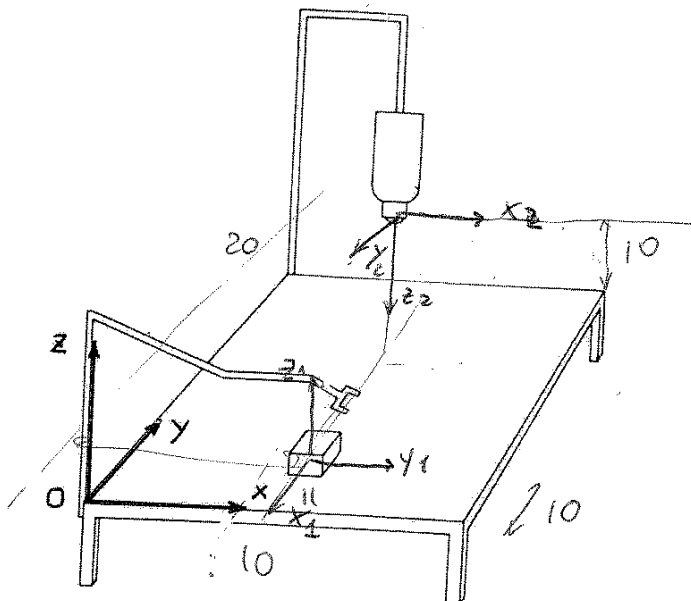
$${}^2\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sistema fisso rispetto alla telecamera

Questions:

- Draw the reference frames  $1$  and  $2$  in the global frame  $0$ .
- Find the transformation matrix  ${}^0\hat{B}_2$  of the camera with respect to the global frame when the camera is rotated about its axis  $z_2$  by  $90^\circ$ .
- The robot moves the piece with a rotation about the body-attached  $x_1$ -axis by  $90^\circ$  and then with a translation along body-attached  $y_1$ -axis by 4 units.
- Find the resulting transformation matrix  ${}^0\hat{B}_1$  of the piece with respect to the global frame, and the transformation matrix  ${}^2\hat{B}_1$  of the body with respect to the camera frame.

⇒ Check graphically the numerical results.





**Exercise 2**

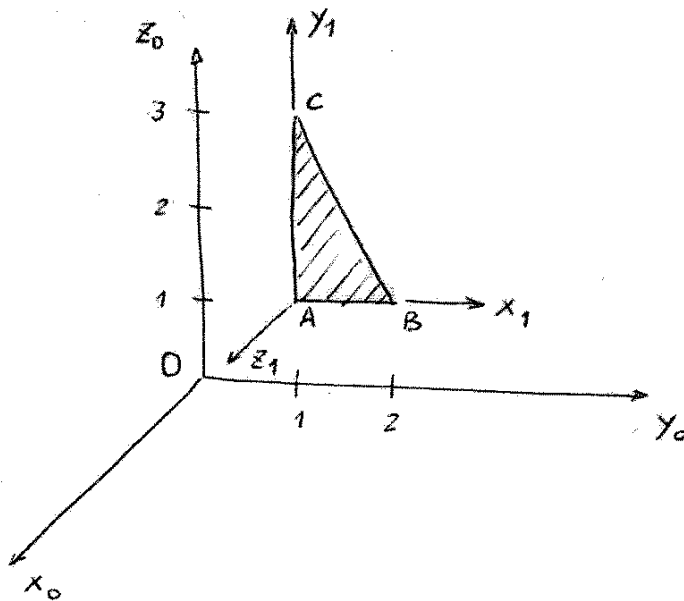
A triangular shaped body, with associated reference frame  $I$  made up of axes  $x_1y_1z_1$  and origin  $A$ , is located in the global coordinate system with axes  $x_0y_0z_0$  and origin  $O$  as figure shows.

Questions:

- Find the transformation matrix  ${}^0\hat{A}_1$  of the body with respect to the global frame and the position vectors  ${}^1\hat{p}_A, {}^1\hat{p}_B, {}^1\hat{p}_C$  of the body points A, B, C with respect to the body frame.
- Given a sequence of two displacements of the body:
  1. rotation  $\mathcal{G} = \pi$  of the body about the body axis with unit vector  $\underline{h} = [0 \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$  ( ${}^0\hat{A}_1 \rightarrow {}^0\hat{B}_1$ );
  2. translation of the body by vector  $\underline{s} = [0 \quad -2 \quad 0]^T$  in the fixed frame ( ${}^0\hat{B}_1 \rightarrow {}^0\hat{C}_1$ );
 find the following results:
  - transformation matrixes  ${}^0\hat{B}_1, {}^0\hat{C}_1$ ;
  - final position vectors of body points A, B, C:  ${}^0\hat{p}_A'', {}^0\hat{p}_B'', {}^0\hat{p}_C''$ .

$\Rightarrow$  Check graphically the numerical results.

- Given the transformation matrixes  ${}^0\hat{A}_1$  and  ${}^0\hat{C}_1$  of the body with respect to the global frame, solve the inverse problem to evaluate the parameters  $\underline{h}$ ,  $\mathcal{G}$  and  $\underline{s}$  associated to the rotation plus translation movement.



$$* \quad {}^0 \underline{p}_A'' = {}^0 \underline{p}_A + \underline{s} \quad \Rightarrow \quad \underline{s} = {}^0 \underline{p}_A'' - {}^0 \underline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$* \quad {}^0 C_1 = {}^0 A_1 \cdot Rot(h, \vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$Rot(h, \vartheta) = {}^0 A_1^{-1} \cdot {}^0 C_1 = {}^0 A_1^T \cdot {}^0 C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Given a generic notation of the rotation matrix  $Rot(h, \vartheta) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$ ,

it follows:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left( \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} \right) = \pm \pi \text{ rad};$$

$$\underline{h} = [h_x \quad h_y \quad h_z]^T$$

$$h_x = \pm \sqrt{\frac{R_{11} + 1}{2}} = 0$$

$$h_y = \pm \sqrt{\frac{R_{22} + 1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_z = \pm \sqrt{\frac{R_{33} + 1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

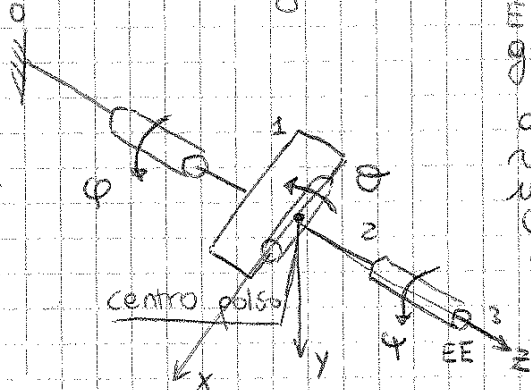
$$\text{sgn}(h_y, h_z) = \text{sgn}(R_{32}) = 1 \Rightarrow \text{sgn}(h_y) = \text{sgn}(h_z)$$

$$\text{solutions: } \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T; \quad \vartheta = \pm \pi \text{ rad}$$

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T; \quad \vartheta = \pm \pi \text{ rad}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 90^\circ & a > 0, b > 0 \\ 90 \leq \alpha \leq 180^\circ & a > 0, b \leq 0 \\ 180 \leq \alpha \leq 270^\circ & a < 0, b \leq 0 \\ 270 \leq \alpha \leq 360^\circ & a < 0, b > 0 \end{cases}$$

e b intervengono nel loro rapporto,  $a \propto \sin \theta$ ,  $b \propto \cos \theta$  purché i sia lo stesso coefficiente di proporzionalità. Divido per  $\sin \theta$  per non sfalsare il quadrante. Ottengo due  $\varphi$  che sono differenti di  $180^\circ$ . Ragionamento analogo per  $\psi$  isolando gli elementi nella terza riga. Non fare tutto ciò solo nel caso in cui  $\sin \theta \neq 0$ . La situazione singolare si risolve guardando caso per caso come succede al minore  $2 \times 2$  si ottengono combinazioni in  $\varphi$  e  $\psi$  e si trova la somma dei due angoli. Il caso di singolarità ha una molteplicità più elevata, ha un valore per  $\theta$ , ma infinite coppie di angoli  $\varphi$  e  $\psi$ . La prima e la terza rotazione sono soppresse. Noi possiamo redurre un polso secondo la logica delle coordinate angolari.



È una sequenza di tre corpi con tre giunti rotoidali. 0 è fissa, 1 è una forearm che può ruotare rispetto a terzo giunto al quinto. Il secondo giunto mi dà la rotazione di due rispetto a 2 ed infine un giunto che ruota l'end effector 3. Questa struttura è un POLSO che può muovere l'end effector muovendolo intorno ad un punto fisso. Ha un moto sferico intorno ad un punto fisso.

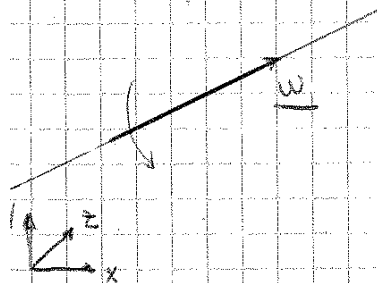
Il centro polso rimane sempre fisso. La condizione di singolarità vuol dire perdere un grado di libertà. Nel caso  $\theta = 180^\circ$  le rotazioni hanno il verso opposto, il che implica la presenza della rotazione.

possiamo anche esprimere con questa formulazione la VELOCITÀ ANGOLARE

$${}^0 \underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}_0 + \dot{\theta} \underline{i}_1 + \dot{\psi} \underline{k}_2$$

con  $\underline{\omega}$  esprimiamo la velocità angolare assoluta del corpo rispetto a un sistema di riferimento fisso  $xyz$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



possiamo anche esprimere le due formulazioni

${}^0 \underline{k}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$  vettore dell'asse  $z_0$ , rotazione  $\varphi$

${}^0 \underline{i}_1 = [c\varphi \ s\varphi \ 0]^T$  vettore dell'asse  $x_1$ , rotazione  $\theta$

${}^0 \underline{k}_2 = [s\varphi s\theta \ -c\varphi s\theta \ c\theta]^T$  vettore dell'asse  $z_2$ , rotazione  $\psi$

$${}^0R_{body} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } c\theta \neq 0 \ (R_{33} \neq \pm 1) \\ \theta = \sin^{-1}(-R_{31}) \\ \psi = \text{Atan2}(R_{32}/c\theta, R_{33}/c\theta) \\ \varphi = \text{Atan2}(R_{21}/c\theta, R_{11}/c\theta) \end{cases}$$

$$\text{if } c\theta = 0 \ \begin{cases} \theta = 90^\circ \ (R_{33} = -1) & \psi - \varphi = \text{Atan2}(R_{21}, R_{22}) \\ \theta = 270^\circ \ (R_{33} = +1) & \psi + \varphi = \text{Atan2}(-R_{21}, R_{22}) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \theta_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \theta_2 = 180^\circ - \theta_1 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ \\ \psi_2 = \psi_1 + 180^\circ \end{matrix}$$

che in questo caso può essere utile risolvere il problema inverso, in lo stesso ragionamento fatto per il caso precedente. Noto  $\theta$ , alla terza riga ricavo  $\psi$ . Per  $\varphi$  ricavo dalle prime colonne. In che  $c\theta \neq 0$  abbiamo molteplicità 2, nel caso angolare avremo anche una molteplicità infinita di  $\psi$  e  $\varphi$ . Possiamo fare la stessa operazione usata in precedente per la velocità angolare del corpo

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{i}_0 + \dot{\theta} \underline{j}_0 + \dot{\varphi} \underline{k}_0$$

$$\underline{i}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\underline{j}_0 = [0 \ 1 \ 0]^T$$

$$\underline{k}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

l'inversa della matrice coincide, che si spiega perché spesso si utilizza questa convenzione, e inoltre nel sistema corpo è più completa, ma la logica alla base è la stessa della convenzione usata in precedente

$${}^{body} \underline{i}_0 = {}^0R_{body}^T [1 \ 0 \ 0]^T$$

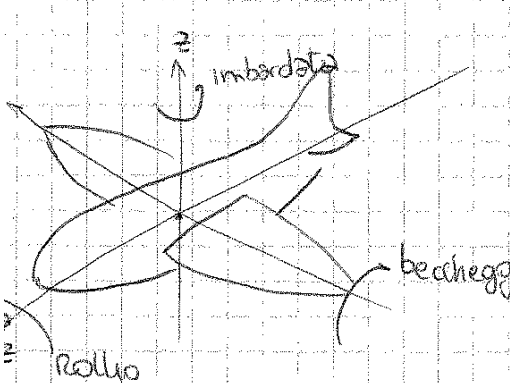
$${}^{body} \underline{j}_0 = {}^0R_{body}^T [0 \ 1 \ 0]^T$$

$${}^{body} \underline{k}_0 = {}^0R_{body}^T [0 \ 0 \ 1]^T$$

Successione 123 con fine coincide con risultato con la convenzione body 321

$${}^0R_{body}(\psi, \theta, \varphi)_{HPY} = \text{Rot}(z, \varphi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi)$$

$${}^0R_{body}(\varphi, \psi, \theta)_{body \neq X} = \text{Rot}(z, \varphi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi)$$



È lo stesso che la legge con un sistema fissa o uno corpo, ma ciò non vale per i termini di velocità

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{i}_0 + \dot{\theta} \underline{j}_0 + \dot{\varphi} \underline{k}_0$$

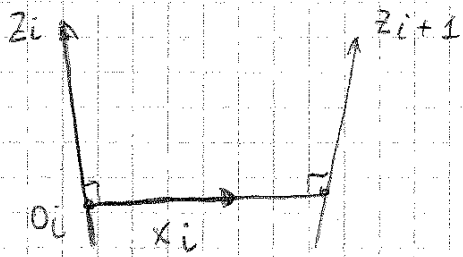
$$\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{RPP}$$

$${}^{body} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = {}^0R_{body}^T \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{k}_0 + \dot{\theta} \underline{j}_1 + \dot{\psi} \underline{i}_2$$

$$\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & -s\varphi \\ s\varphi c\theta & c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

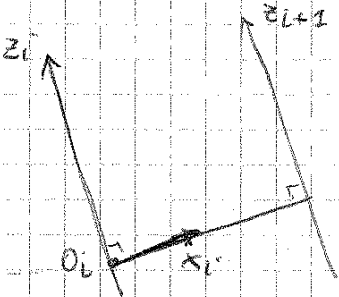
Occorre ora scegliere  $O_i$  ed  $X_i$ .



In generale sono due assi sghembi nello spazio. Ci sarà un segmento perpendicolare comune ad entrambi. Questo individuerà un punto unico sull'asse  $z_i$  ed individuerà il punto  $O_i$ . Lungo questo segmento distanza ci sarà l'asse  $x_i$  e sarà orientato da  $i$  a  $i+1$ .  $O_i$  appare esterno al corpo, la

parte del corpo non entra in gioco.

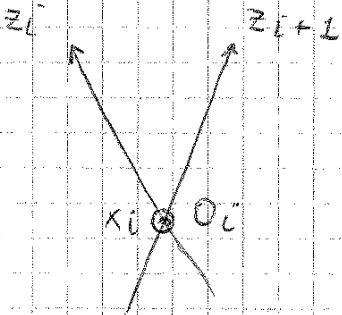
Vale anche in situazioni particolari, comunque indusse.



Il primo caso è che siano paralleli e quindi complanari. Abbiamo infinite possibili scelte del segmento distanza e quindi l'origine  $O_i$  sarà posizionata arbitrariamente.

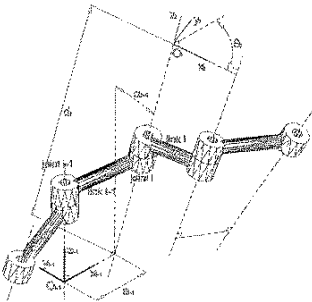
L'altro caso particolare è quello in cui i due assi sono incidenti.

Il segmento distanza degenera, inizia e finisce nel punto di intersezione e da quel punto parte  $x_i$  che può essere uscente o entrante perpendicolarmente sul piano giacimento.



Infine completiamo la terna di assi scegliendo  $y_i$  in modo da costituire una terna destrorsa.

Per il sistema di riferimento  $O$  e quello  $n$  vengono dati dei suggerimenti affinché essi siano convenevoli.



I 4 parametri per descriverlo sono le 4 ruote desunte nel disegno.

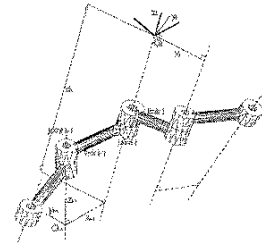
Possono essere viste nel senso fisico delle ruote o come spartimenti. Consideriamo due sistemi di riferimento portati secondo la procedura appena descritta.

I 4 parametri sono due lunghezze e due rotazioni rispetto ad un asse, indicate dai pedici.

$\alpha_{i-1}$  angolo tra l'asse  $z_{i-1}$  e  $z_i$  ed è l'angolo di cui il rotore  $z_{i+1}$  per renderlo parallelo a  $z_i$  ruotando intorno a  $x_i$ . È un parametro con segno, si chiama anche TWIST.

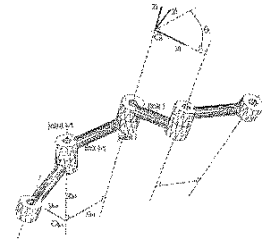
3) Traslo il sistema ausiliario lungo l'asse  $z_1$  di una distanza  $d_i$

$${}^{i-1}\hat{A}_{AVX}^3 = {}^{i-1}\hat{A}^2 \hat{T}_{r5}(z, d_i)$$



4) Rotazione del sistema ausiliario intorno all'asse  $z_1$  di una quantità  $\theta_i$  in modo da allineare il suo asse  $x_1$  con l'asse  $x_i$

$${}^{i-1}\hat{A}_{AVX}^4 = {}^{i-1}\hat{A}^3 \hat{R}_{ot}(z, \theta_i)$$



quindi otteniamo

$${}^{i-1}\hat{A} = \hat{R}_{ot}(x, \alpha_{i-1}) \hat{T}_{r5}(x, d_{i-1}) \hat{T}_{r5}(z, d_i) \hat{R}_{ot}(z, \theta_i)$$

e finiamo ora i centri di riferimento 0 ed n.

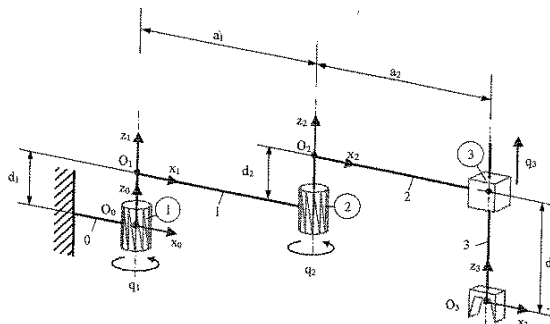
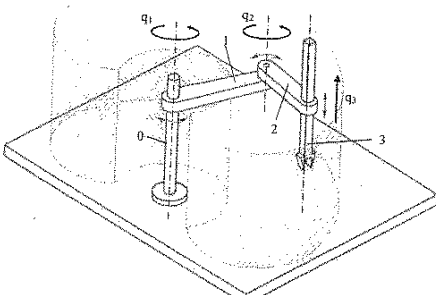
$$0 \quad 1 \quad \dots \quad (n-1) \quad n$$

in 0 conviene scegliere  $z_0$  allineato con l'asse  $z_1$  ed addirittura sovrapposto. Conviene scegliere  $x_0$  parallelo con  $x_1$  quando il  $d$  del primo giunto è nullo (cioè  $\theta = \cos^{-1} 0$ , nel caso rotazionale  $\theta = 90^\circ$ )

in n conviene scegliere  $z_n$  allineato con l'asse del giunto n per convenienza  $x_n$  parallelo a  $x_{n-1}$  quando il  $d$  del giunto n è nullo.

### SEMPIO ROBOT SCARA

SCARA Robot



configuration with null joints d.o.f.



Partiamo ora al problema di cinematica inversa. Le incognite sono dentro a funzioni trigonometriche non lineari.

$${}^0\hat{A}_3 = [A_{ij}]$$

$$A_{11} = \cos(q_1 + q_2)$$

$$A_{12} = -\sin(q_1 + q_2)$$

...

Potrebbe essere un sistema di 12 equazioni nell'incognita q.d.l. dei giunti. Le n incognite dipendono dalle strutture del robot.

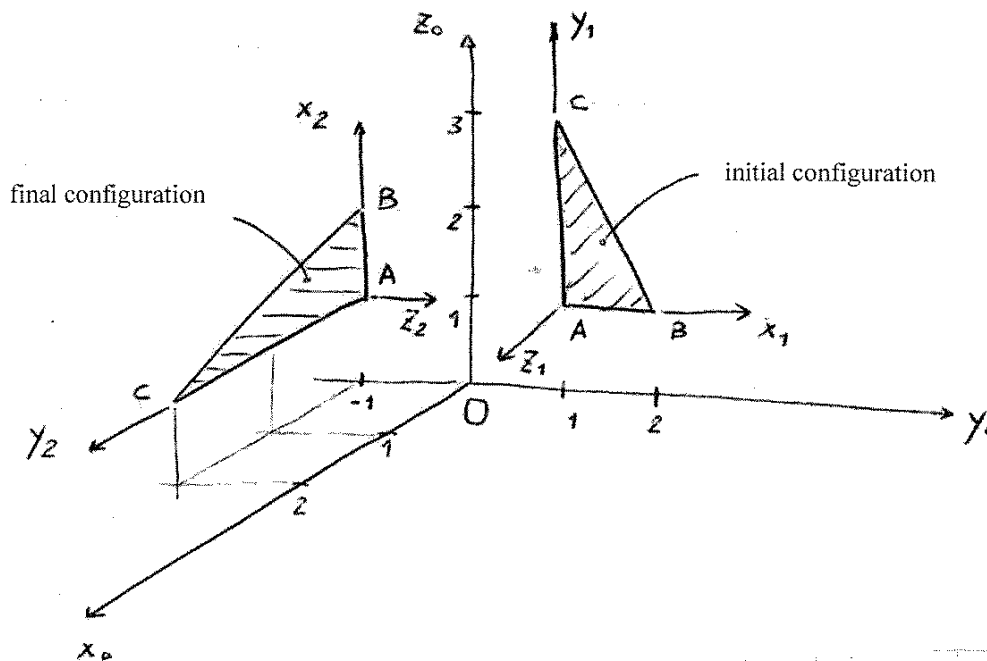
### Exercise 3

A triangular shaped body with vertexes  $A, B, C$  is moved within the space associated with the global axes  $x_0y_0z_0$  and origin  $O$  from an initial location to a final location, associated respectively to the reference frames  $Ax_1y_1z_1$  and  $Ax_2y_2z_2$ , as shown in the figure.

Questions:

- Find the transformation matrixes  ${}^0\hat{A}_1$  and  ${}^0\hat{A}_2$  of the body with respect to the global fixed frame.
- Find the parameters  $\underline{h}$ ,  $\underline{\vartheta}$  and  $\underline{s}$  of the displacements from the initial configuration to the final configuration for the two following sequences:
  1. rotation  $\vartheta$  of the body about body axis with unit vector  $\underline{h}$  followed by translation by vector  $\underline{s}$  in the fixed reference frame.
  2. rotation  $\vartheta$  of the body about fixed axis with unit vector  $\underline{h}$  followed by translation by vector  $\underline{s}$  in the fixed reference frame.

⇒ Check graphically the numerical results.



- sequence #2:

$${}^0\hat{A}_2 = \text{Trâs}(s) \cdot \text{Rot}(h, \vartheta) \cdot {}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \text{Rot} \cdot {}^0A_1 & \text{Rot} \cdot \underline{p}_1 + \underline{s} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Evaluation of the movement parameters:

$$* \text{Rot}(h, \vartheta) = {}^0A_2 \cdot {}^0A_1^{-1} = {}^0A_2 \cdot {}^0A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Given a generic notation of the rotation matrix  $\text{Rot}(h, \vartheta) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$ ,

it follows:

$$\cos \vartheta = \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta = \pm 120^\circ;$$

$$\underline{h} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{solutions: } \underline{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]^T; \quad \vartheta = +120^\circ;$$

$$\underline{h} = -\frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]^T; \quad \vartheta = -120^\circ$$

$$* \underline{s} = \underline{p}_2 - \text{Rot} \cdot \underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl (2)

Parametri di Denavit - Hartenberg:

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	0	0	$\vartheta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\vartheta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\vartheta_3$
4	$90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\vartheta_5$
5	$90^\circ$	0	0	$\vartheta_5$
6	$-90^\circ$	0	$d_6$	$\vartheta_6$

Matrici di posizione/orientazione dei sistemi di riferimento:

$${}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 \\ \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_2 & -\cos \vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_3 & -\sin \vartheta_3 & 0 & a_2 \\ \sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\hat{A}_4 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_4 & -\sin \vartheta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ \sin \vartheta_4 & \cos \vartheta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4\hat{A}_5 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_5 & -\sin \vartheta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \vartheta_5 & \cos \vartheta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5\hat{A}_6 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_6 & -\sin \vartheta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ -\sin \vartheta_6 & -\cos \vartheta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

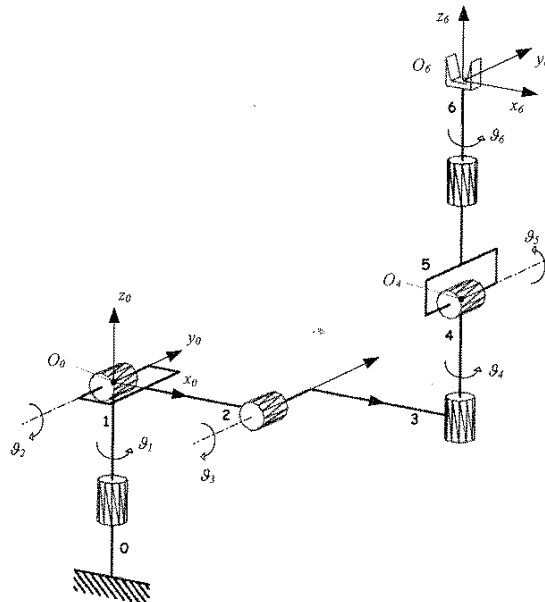
### Problema di CINEMATICA INVERSA (1)

Quesito:

Assegnato il vettore posizione dell'end effector  ${}^0P_6$ , determinare il vettore dei gradi di libertà nei giunti  $\underline{q}$ .

Soluzione:

1. determinazione della matrice di posizione/orientazione dell'end effector  ${}^0\hat{A}_6$ .
2. calcolo della posizione del centro polso  ${}^0P_4$ .
3. soluzione del problema di cinematica inversa del braccio articolato con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 1, 2, 3  $[\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]$ .
4. calcolo della matrice di posizione/orientazione del sistema di riferimento  ${}^3\hat{A}_3$ .
5. calcolo della matrice di posizione/orientazione dell'end effector rispetto al link 3 del braccio articolato  ${}^3\hat{A}_6$ .
6. soluzione del problema di cinematica inversa del polso con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 4, 5, 6  $[\vartheta_4 \ \vartheta_5 \ \vartheta_6]$ .



## Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

### Problema di CINEMATICA INVERSA (3)

3. soluzione del problema di cinematica inversa del braccio articolato con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 1, 2, 3 [ $\mathcal{G}_1$   $\mathcal{G}_2$   $\mathcal{G}_3$ ].

1° espressione del centro polso rispetto al sistema di riferimento 1:

$${}^1\hat{p}_4 = {}^1\hat{A}_2 \cdot {}^2\hat{A}_3 \cdot {}^3\hat{p}_4 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} + a_2 \cdot c_2 \\ d_3 \\ -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} - a_2 \cdot s_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

essendo  ${}^3\hat{p}_4 = a_3 \cdot {}^3\hat{i}_3 - d_4 \cdot {}^3\hat{j}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ -d_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2° espressione del centro polso rispetto al sistema di riferimento 1:

$${}^1\hat{p}_4 = {}^0\hat{A}_1^{-1} \cdot {}^0\hat{p}_4 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4 \\ -s_1 \cdot x_4 + c_1 \cdot y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uguagliando le due espressioni del centro polso  ${}^1\hat{p}_4$  rispetto al sistema di riferimento 1:

$$\begin{cases} c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4 = a_3 \cdot c_{23} + d_4 \cdot s_{23} + a_2 \cdot c_2 & (1) \\ -s_1 \cdot x_4 + c_1 \cdot y_4 = d_3 & (2) \\ z_4 = -a_3 \cdot s_{23} + d_4 \cdot c_{23} - a_2 \cdot s_2 & (3) \end{cases}$$

## Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

### Problema di CINEMATICA INVERSA (5)

- Calcolo del grado di libertà  $\mathcal{G}_3$  del giunto 3.

Elevando al quadrato le equazioni (1), (2) e (3) e sommandole membro a membro si ottiene:

$$a_3 \cdot c_3 + d_4 \cdot s_3 = \frac{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2 \cdot a_2}$$

ovvero, chiamando con  $b$  il termine noto a secondo membro:

$$a_3 \cdot c_3 + d_4 \cdot s_3 = b \quad (4)$$

Si consideri il vettore posizione  ${}^3\hat{p}_4$  del centro polso rispetto al riferimento 3.

${}^3\hat{p}_4$  è un vettore costante dipendente solo dalla geometria del braccio articolato.

Indicando con:  $h =$  modulo del vettore  ${}^3\hat{p}_4$

$\xi =$  angolo tra il vettore  ${}^3\hat{p}_4$  e l'asse  $x_3$

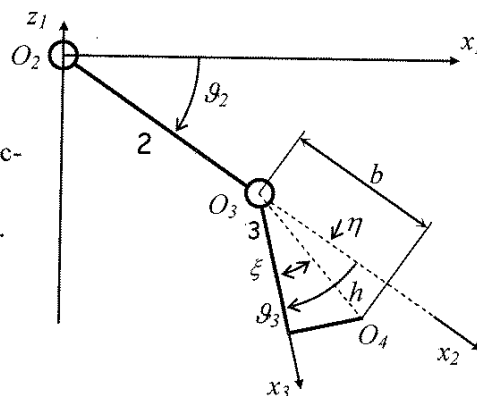
risulta: 
$$\begin{cases} h = \sqrt{a_3^2 + d_4^2} \\ \xi = \text{atan2}(d_4, a_3) \end{cases}$$

Dall'equazione (4) e dalla geometria del braccio articolato si evince che  $b$  è la lunghezza della proiezione del vettore  ${}^3\hat{p}_4$  sull'asse  $x_2$ .

Quindi, indicando con:

$\eta =$  angolo tra il vettore  ${}^3\hat{p}_4$  e l'asse  $x_2$

risulta: 
$$h \cdot \cos \eta = b$$





## Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

### Problema di CINEMATICA INVERSA (7)

Prospetto riassuntivo delle soluzioni del problema di cinematica inversa del braccio articolato:

$$\text{vettore posizione del centro polso } {}^0 \underline{p}_4 = [x_4 \quad y_4 \quad z_4]^T$$

↓

$$\vartheta_1 = \text{atan2}(y_4, x_4) - \text{atan2}\left(d_3, \pm \sqrt{x_4^2 + y_4^2 - d_3^2}\right) \quad (6)$$

$$\vartheta_3 = \text{atan2}(d_4, a_3) + \text{atan2}\left(\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - b^2}, b\right) \quad (7)$$

$$\vartheta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \quad (8)$$

essendo:

$$b = \frac{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2 \cdot a_2}$$

$$s_2 = \frac{(c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4)(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) - (b + a_2) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b + a_2)^2}$$

$$c_2 = \frac{(b + a_2) \cdot (c_1 \cdot x_4 + s_1 \cdot y_4) + (d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3) \cdot z_4}{(d_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot s_3)^2 + (b + a_2)^2}$$

- In conclusione esistono 4 terne di soluzione:
- $$\begin{bmatrix} \vartheta_1^I & \vartheta_2^I & \vartheta_3^I \\ \vartheta_1^{II} & \vartheta_2^{III} & \vartheta_3^I \\ \vartheta_1^{II} & \vartheta_2^{IV} & \vartheta_3^{II} \end{bmatrix}$$

*Nota:* Configurazioni singolari:

Per particolari valori dei parametri geometrici caratteristici del braccio articolato, esistono posizioni del centro polso per le quali le espressioni di soluzione della cinematica inversa (6), (7), (8) sopra indicate non sono applicabili. Tali configurazioni devono essere studiate singolarmente.

Ad esempio, assumendo  $d_3 = 0$ , un posizionamento del centro polso su un punto dell'asse  $z_0$  richiede  $x_4 = y_4 = 0$  e la soluzione (6) per  $\vartheta_1$  è indeterminata. In tale caso, da considerazioni grafiche segue:

$$\begin{cases} d_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1 = \text{qualsiasi} \\ \vartheta_3 = \text{atan2}(d_4, a_3) + \text{atan2}\left(\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - b^2}, b\right) \\ \vartheta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \end{cases}$$

## Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl

### Problema di CINEMATICA INVERSA (9)

6. soluzione del problema di cinematica inversa del polso con determinazione dei gradi di libertà nei giunti 4, 5, 6  $[\vartheta_4 \ \vartheta_5 \ \vartheta_6]$ .

I termini della matrice  ${}^3\hat{A}_6$  sono funzione dei gradi di libertà incogniti del polso secondo le espressioni:

$${}^3\hat{A}_6 = {}^3\hat{A}_4 \cdot {}^4\hat{A}_5 \cdot {}^5\hat{A}_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & -d_6 c_4 s_5 + a_3 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & -c_5 & -d_6 c_5 - d_4 \\ s_4 s_5 s_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & -s_4 s_5 & -d_6 s_4 s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si conclude che le soluzioni per i gradi di libertà dei giunti 4, 5, 6 sono:

$$\vartheta_4 = \operatorname{atan} 2(-A_{33}, -A_{13}) + n\pi \quad n = 0, 1 \quad (9)$$

$$\vartheta_5 = \operatorname{atan} 2(-A_{13}c_4 - A_{33}s_4, -A_{23}) \quad (10)$$

$$\vartheta_6 = \operatorname{atan} 2(A_{22}/s_5, -A_{21}/s_5) \quad (11)$$

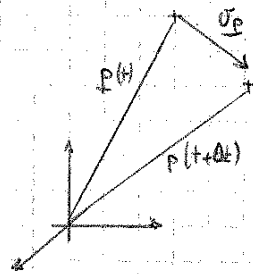
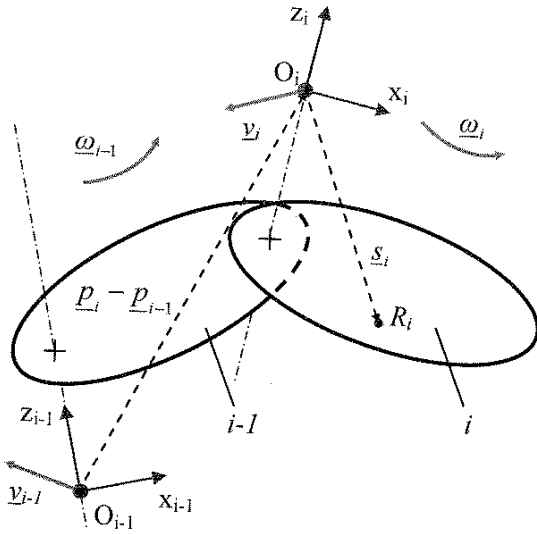
con configurazione singolare:

$$s_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vartheta_5 &= 0; & \vartheta_4 + \vartheta_6 &= \operatorname{atan} 2(-A_{12}, A_{32}) \\ \vartheta_5 &= \pi; & \vartheta_4 - \vartheta_6 &= \operatorname{atan} 2(-A_{12}, A_{32}) \end{aligned}$$

da cui risulta che in generale esistono due possibili soluzioni  $[\vartheta_4^I \ \vartheta_5^I \ \vartheta_6^I]$  e  $[\vartheta_4^{II} \ \vartheta_5^{II} \ \vartheta_6^{II}]$ , ottenute al variare di  $n$  nell'espressione (9), per i gradi di libertà dei giunti del polso per ogni matrice di posizione/orientazione dell'end effector rispetto al link 3 del braccio articolato  ${}^3\hat{A}_6$ .

VETTORI VELOCITÀ IN UNA CATENA CINEMATICA APERTA IN SISTEMA MULTIBODY

Si parla di CINEMATICA DIFFERENZIALE, introducendo a quanto noto fino ad ora la grandezza tempo.



$$\underline{v}_P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

Il moto del punto è rappresentato da una freccia che è la variazione di posizione nel tempo.

Dobbiamo fare delle premesse sul sistema di riferimento. Se è fuso,  $\underline{v}_P$  sarà la VELOCITÀ ASSOLUTA del punto. Possiamo quindi esprimere

$$\underline{v}_P = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

Potremo quindi proiettarla nel sistema i-esimo  ${}^i \underline{v}_P$  se esso è fuso. Il legame tra le varie terme dipende dall'orientazione del sistema di riferimento, non dalla posizione. Possiamo quindi scrivere

$${}^0 \underline{v}_P = {}^0 A_i {}^i \underline{v}_P$$

Non chiamiamo in cause la fame omogenea non interomando la posizione.

In modo del tutto analogo possiamo trattare le derivate dei vettori velocità, velocità angolare e sua derivata.

Assumeremo una struttura con giunti o rotoidali o prismatici, che legano tre di loro corpo rigidi ed introduciamo un PARAMETRO DI GIUNTO  $\delta$  che sarà pari a 1 per i prismatici e 0 per i rotoidali.

I sistemi di riferimento sono definiti con la convenzione di Denavit - Hartenberg.

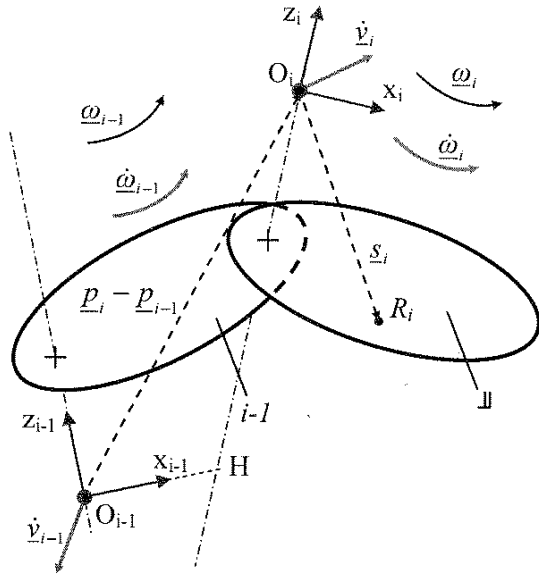
Essendo rigido il link, descrivendo il moto del sistema di riferimento si è in grado di esprimere il moto di ogni punto del link.

$$\omega_i = \omega_{i-1,D} + \omega_{i-1,R}$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{q}_i (1 - \delta_i) k_i$$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i [\dot{q}_j (1 - \delta_j) k_j]$$

# VETTORI DI ACCELERAZIONE IN CATENA CINEMATICA APERTA DI SISTEMI MULTIBODI



Le grandette  $\dot{\omega}_i$  e  $\dot{v}_i$  sono accelerazioni angolari.

Derivando le espressioni precedenti otteniamo quindi le accelerazioni

Angular acceleration of the link  $i$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \dot{q}_i (1-\delta_i) \underline{k}_i + \dot{q}_i (1-\delta_i) \frac{d\underline{k}_i}{dt}$$

$\frac{d\underline{k}_i}{dt} = \omega_i \times \underline{k}_i$  per definizione di versore

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i (1-\delta_i) \underline{k}_i + \dot{q}_i (1-\delta_i) \omega_{i-1} \times \underline{k}_i$$

ma il moto nel punto avviene intorno a  $\underline{k}_i$

$$\dot{\omega}_i = \sum_{j=1}^i \left[ \dot{q}_j (1-\delta_j) \underline{k}_j + \dot{q}_j (1-\delta_j) \omega_{j-1} \times \underline{k}_j \right]$$

giunto  $i$  è spostato dal punto  $i-1$  (7) e quindi si adatta nella forma  $\omega_{i-1} \times \underline{k}_i$

Acceleration of the origin  $O_i$  of the reference frame of the link  $i$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) + \omega_{i-1} \times \frac{d(\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})}{dt} + \dot{q}_i \delta_i \underline{k}_i + \dot{q}_i \delta_i \frac{d\underline{k}_i}{dt}$$

$$\frac{d(\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})}{dt} = \frac{d}{dt} (a_{i-1} i_{i-1} + d_i \underline{k}_i) = a_{i-1} \omega_{i-1} \times i_{i-1} + d_i \omega_{i-1} \times \underline{k}_i \quad \delta_i = 0$$

$$= a_{i-1} \omega_{i-1} \times i_{i-1} + d_i \underline{k}_i + d_i \omega_{i-1} \times \underline{k}_i \quad \delta_i = 1$$

$$\frac{d(\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})}{dt} = \dot{q}_i \delta_i \underline{k}_i + \omega_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})$$

$$\dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1}) + \omega_{i-1} \times [\omega_{i-1} \times (\underline{p}_i - \underline{p}_{i-1})] + \dot{q}_i \delta_i \underline{k}_i + 2 \dot{q}_i \delta_i \omega_{i-1} \times \underline{k}_i \quad (9)$$

Acceleration of the point  $R_i$  embedded in the link  $i$

$$\dot{v}_{R_i} = \dot{v}_i + \dot{\omega}_i \times \underline{s}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \underline{s}_i) \quad (10)$$

Note: the reference frames are attached to the links according to the Denavit-Hartenberg's convention

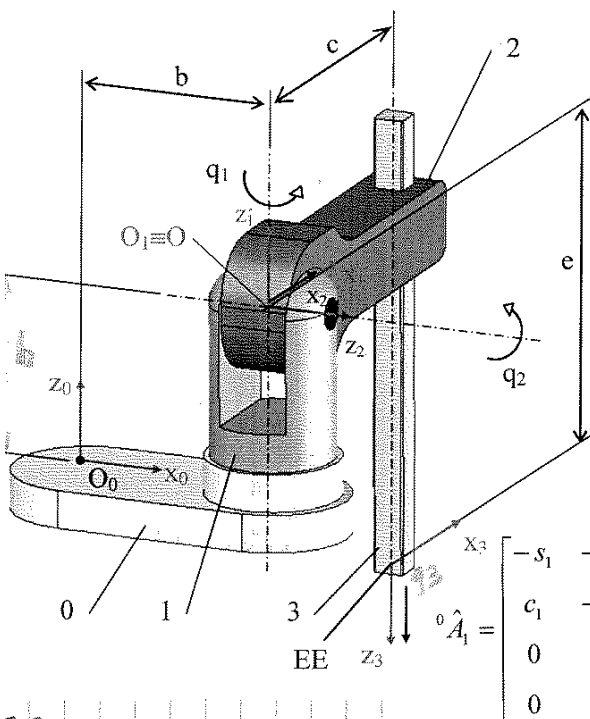
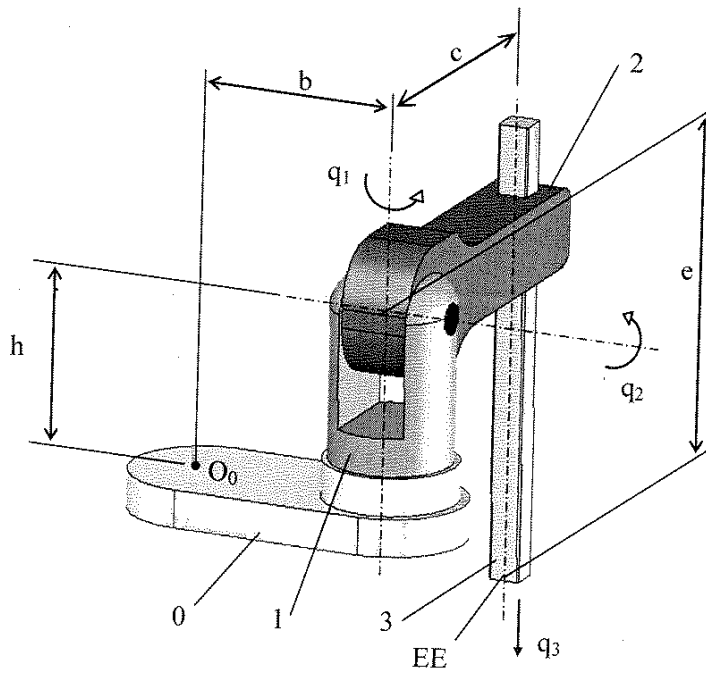
L'ultima relazione è utile per calcolare le reazioni di inerzia, facendo coincidere  $R_i$  con il baricentro del corpo.

**Exercise 5**

The multibody system shown in the figure consists of a fixed base 0 and of three moveable body 1, 2, 3 constrained each others by means of revolute and prismatic joints. For each joints are assumed the degrees of freedom with positive directions as shown in the figure and with null values in the drawn configuration.

Questions:

- Define the reference frames attached to the base and to the bodies in accordance with the Denavit-Hartenberg's convention.  
The origin of the global frame is to be located in the point  $O_0$ , while the origin of the reference frame of the body 3 is to be located in the point EE.
- Evaluate the DH parameters to express the transformation matrixes of the links as function of the d.o.f.  $q_1, q_2, q_3$ , in an arbitrary configuration.

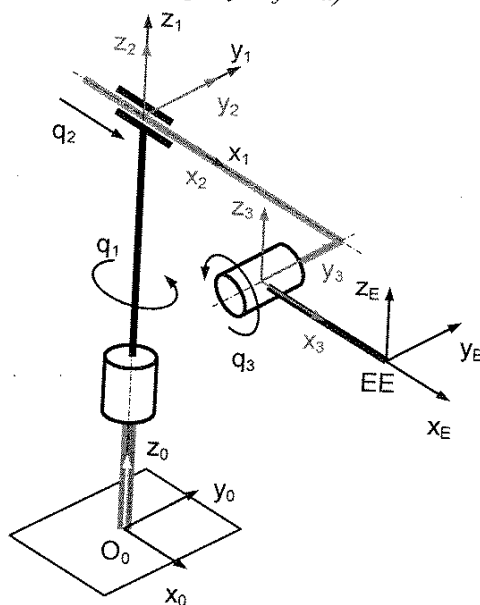


	$\alpha$	$a$	$d$	$\theta$
1	$0^\circ$	$b$	$h$	$90^\circ + q_1$
2	$90^\circ$	$0$	$0$	$q_2$
3	$90^\circ$	$c$	$e + q_3$	$0$

$${}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & b \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercise 6 – solution**

(example of solution; the solution is not uniquely defined)



r.f. 0 → r.f. 1

$${}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_1 = \cos(q_1); \quad s_1 = \sin(q_1)$$

r.f. 1 → r.f. 2

$${}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r.f. 2 → r.f. 3

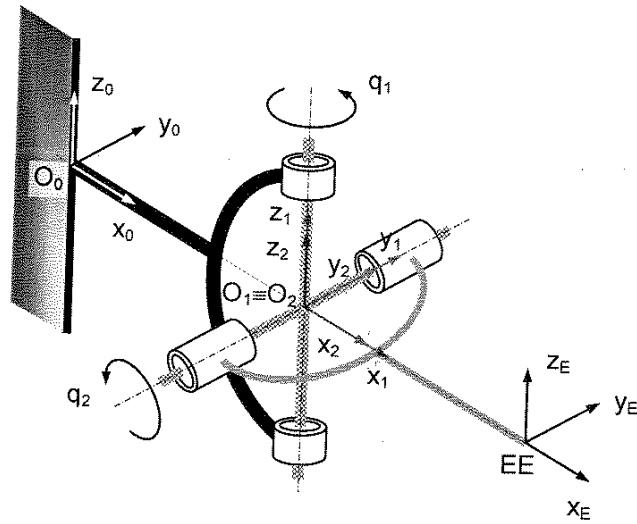
$${}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & a \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_3 = \cos(q_3); \quad s_3 = \sin(q_3)$$

r.f. 3 → r.f. EE

$${}^3\hat{A}_{EE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercise 7 – solution**

(example of solution; the solution is not uniquely defined)



transf. matrix:  ${}^0\hat{A}_E = {}^0\hat{A}_1 {}^1\hat{A}_2 {}^2\hat{A}_E =$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & -c_1 s_2 & a + b c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & -s_1 s_2 & b s_1 c_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & b s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unit vectors of the joints axes:  ${}^0\hat{k}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$ ;  ${}^0\hat{j}_2 = {}^0\hat{j}_1 = [-s_1 \ c_1 \ 0]^T$

angular velocity:  ${}^0\vec{\omega}_E = \dot{q}_1 {}^0\hat{k}_1 - \dot{q}_2 {}^0\hat{j}_2 =$

$$\begin{bmatrix} s_1 \dot{q}_2 \\ -c_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

linear velocity:

$${}^0\vec{v}_E = {}^0\vec{\omega}_E \times ({}^0\hat{p}_E - {}^0\hat{p}_1) = \begin{bmatrix} s_1 \dot{q}_2 \\ -c_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} a + b c_1 c_2 \\ b s_1 c_2 \\ b s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 \dot{q}_2 b - s_1 c_2 \dot{q}_1 b \\ -s_1 s_2 \dot{q}_2 b + c_1 c_2 \dot{q}_1 b \\ c_2 \dot{q}_2 b \end{bmatrix}$$

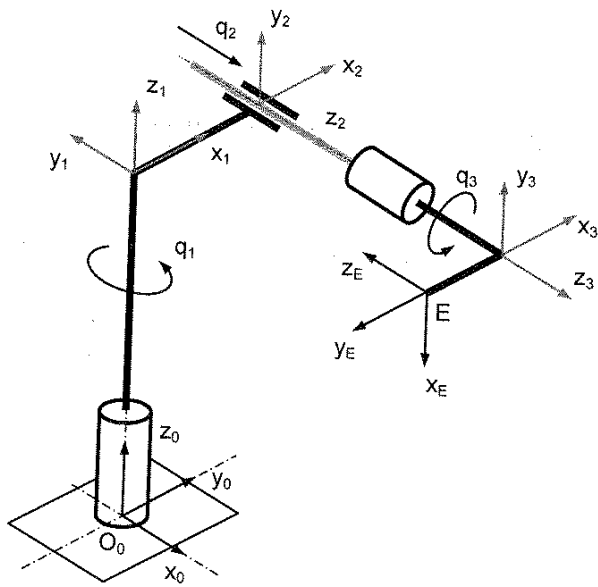
---

$c_i = \cos(q_i)$ ;  $s_i = \sin(q_i)$



**Exercise 8 – solution**

(the frames according to DH's method is not uniquely defined)



	$\alpha$	$a$	$d$	$\theta$
1	$0^\circ$	0	$h$	$90^\circ + q_1$
2	$90^\circ$	$a$	$q_2$	0
3	$0^\circ$	0	$b$	$q_3$

Transformation matrixes:

$${}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & -q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\hat{A}_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -c \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \cos(q_i)$$

$$s_i = \sin(q_i)$$

Unit vectors of the joints axes:  ${}^0\underline{k}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$ ;  ${}^0\underline{k}_3 = {}^0\underline{k}_2 = -{}^0\underline{j}_1 = [c_1 \ s_1 \ 0]^T$

Angular velocity:  ${}^0\underline{\omega}_E = {}^0\underline{\omega}_3 = \dot{q}_1 {}^0\underline{k}_1 + \dot{q}_3 {}^0\underline{k}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \dot{q}_3 \\ s_1 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$

Linear velocity:  $\underline{v}_E = \underline{\omega}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) + \underline{\omega}_2 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_2) + \underline{\omega}_1 \times (\underline{p}_2 - \underline{p}_1) + \dot{q}_2 \underline{k}_2 =$   
 $= \underline{\omega}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) + \underline{\omega}_1 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_1) + \dot{q}_2 \underline{k}_2 \quad (\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_1)$

Solution 2:

vectors in the expression of  $\bar{v}_E$  written initially in terms of components with respect to frame  $I$  and then  ${}^1\underline{v}_E$  transformed to frame  $0$

$${}^1(\underline{p}_E - \underline{p}_3) = \begin{bmatrix} -cc_3 \\ 0 \\ -cs_3 \end{bmatrix}; \quad {}^1(\underline{p}_3 - \underline{p}_1) = \begin{bmatrix} a \\ -b - q_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\underline{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\underline{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\underline{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 cs_3 \\ -\dot{q}_1 cc_3 \\ -\dot{q}_3 cc_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_1(b + q_2) \\ \dot{q}_1 a \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{q}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\underline{v}_E = {}^0A_1 {}^1\underline{v}_E = \begin{bmatrix} -s_1(\dot{q}_3 cs_3 + \dot{q}_1(b + q_2)) - c_1(-\dot{q}_1 cc_3 + \dot{q}_1 a - \dot{q}_2) \\ c_1(\dot{q}_3 cs_3 + \dot{q}_1(b + q_2)) - s_1(-\dot{q}_1 cc_3 + \dot{q}_1 a - \dot{q}_2) \\ -\dot{q}_3 cc_3 \end{bmatrix}$$

Check

Appli  
e  
fina

La Jacobiana è una matrice che lega un vettore che contiene le velocità dei link con un vettore di velocità generalizzato, raccoglie le velocità dell'ennesimo sistema di riferimento.

Vector of the velocity state of end-effector (link  $n$ )  
 composed of the elements of the linear velocity of origin  $O_n$   
 and angular velocity of the link

$$\underline{V}_n = \begin{Bmatrix} \underline{v}_n \\ \underline{\omega}_n \end{Bmatrix} \quad 6 \times 1$$

Vector of the  $n$  actuated joint rates

$$\underline{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad n \times 1$$

Le sommatore precedenti sono un legame lineare rappresentabile in forma matriciale ed è proprio la matrice Jacobiana

> **Jacobian matrix  $J$**  of the end-effector

$$\underline{V}_n = J \underline{q} \quad \begin{Bmatrix} \underline{v}_n \\ \underline{\omega}_n \end{Bmatrix} = [J_1 | J_2 | \dots | J_i | \dots | J_n] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}$$

where

$$6 \times n \quad J_i = \begin{bmatrix} \delta_i k_i + (1 - \delta_i) k_i \wedge (\underline{p}_n - \underline{p}_i) \\ (1 - \delta_i) k_i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 1 \end{matrix}$$

La Jacobiana può essere scritta per qualunque link del corpo. Generalmente non è una matrice quadrata. Possiamo esprimere termini geometrici in un sistema di riferimento

La Jacobiana è un modo di rappresentazione tra spazio giunto e spazio operativo. È utile anche per algoritmi di inverso cinematico più efficace di punto fisso.

$$\underline{q} = J^{-1} \underline{V}_n$$

vale solo se  $J^{-1}$  è quadrata. Negli altri casi si introduce il concetto di **MATRICE PSEUDO-INVERSA**.

► Matrici dei s.r. dei link rispetto al s.r. di base 0

$${}^0\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{A}_2 = {}^0\hat{A}_1 {}^1\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{A}_3 = {}^0\hat{A}_2 {}^2\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{A}_E = {}^0\hat{A}_3 {}^3\hat{A}_E = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

► Matrice jacobiana del s.r. 3

$$\underline{V}_3 = \begin{Bmatrix} v_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_1) & \underline{k}_2 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_2) & \underline{0} \\ \underline{k}_1 & \underline{k}_2 & \underline{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{k}_i = {}^0A_i [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\underline{p}_i = {}^0\hat{A}_i [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \\ \omega_{3x} \\ \omega_{3y} \\ \omega_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

Evidenzia i termini del s.r. 3 che non contribuiscono al vettore  $\{q\}$  solo 3 sono linearmente indipendenti. Solo quei 3 io posso controllare

In de

$$\begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ \omega_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ \omega_{3z} \end{Bmatrix} = J_3 \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

$J_3$  = matrice jacobiana del s.r. 3 espressa nel s.r. 0

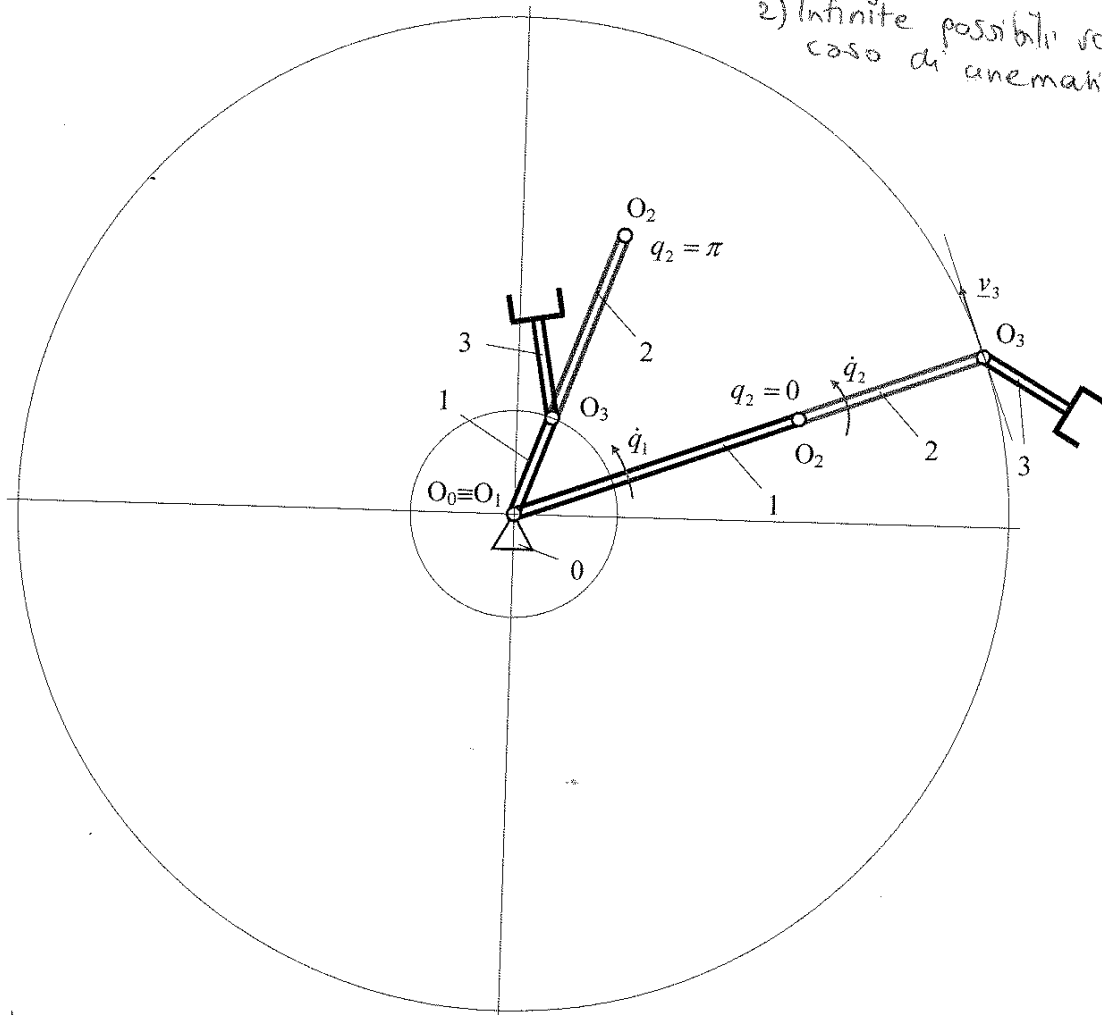
► Analisi delle singularità della matrice jacobiana  $J_3$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_3) = l_1 l_2 s_2$$

$$\det(J_3) = 0 \Rightarrow \sin q_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} q_2 = 0 \\ q_2 = \pi \end{matrix}$$

Con la singolarità:  
 1) perdo mobilità nella struttura rispetto ad una situazione generica. È una sovrapposizione del contributo di quei diversi che stiamo seguendo.  
 2) Infinite possibili soluzioni del caso di cinematica inversa.



Una situazione di singolarità prevedibile in quanto ai limiti dello spazio di lavoro di questo robot. Ci possono anche essere singolarità allo interno dello spazio lavoro

► Matrice jacobiana del s.r. E

$$\underline{V}_E = \begin{Bmatrix} \underline{v}_E \\ \underline{\omega}_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_1) & \underline{k}_2 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_2) & \underline{k}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) \\ \underline{k}_1 & \underline{k}_2 & \underline{k}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

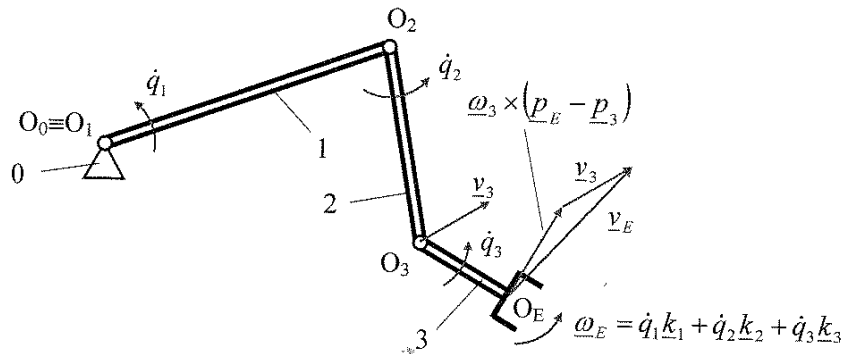
$$\underline{k}_i = {}^0A_i [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\underline{\hat{p}}_i = {}^0\hat{A}_i [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\begin{Bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ v_{Ez} \\ \omega_{Ex} \\ \omega_{Ey} \\ \omega_{Ez} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ \omega_{Ez} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_{Ex} \\ v_{Ey} \\ \omega_{Ez} \end{Bmatrix} = J_E \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

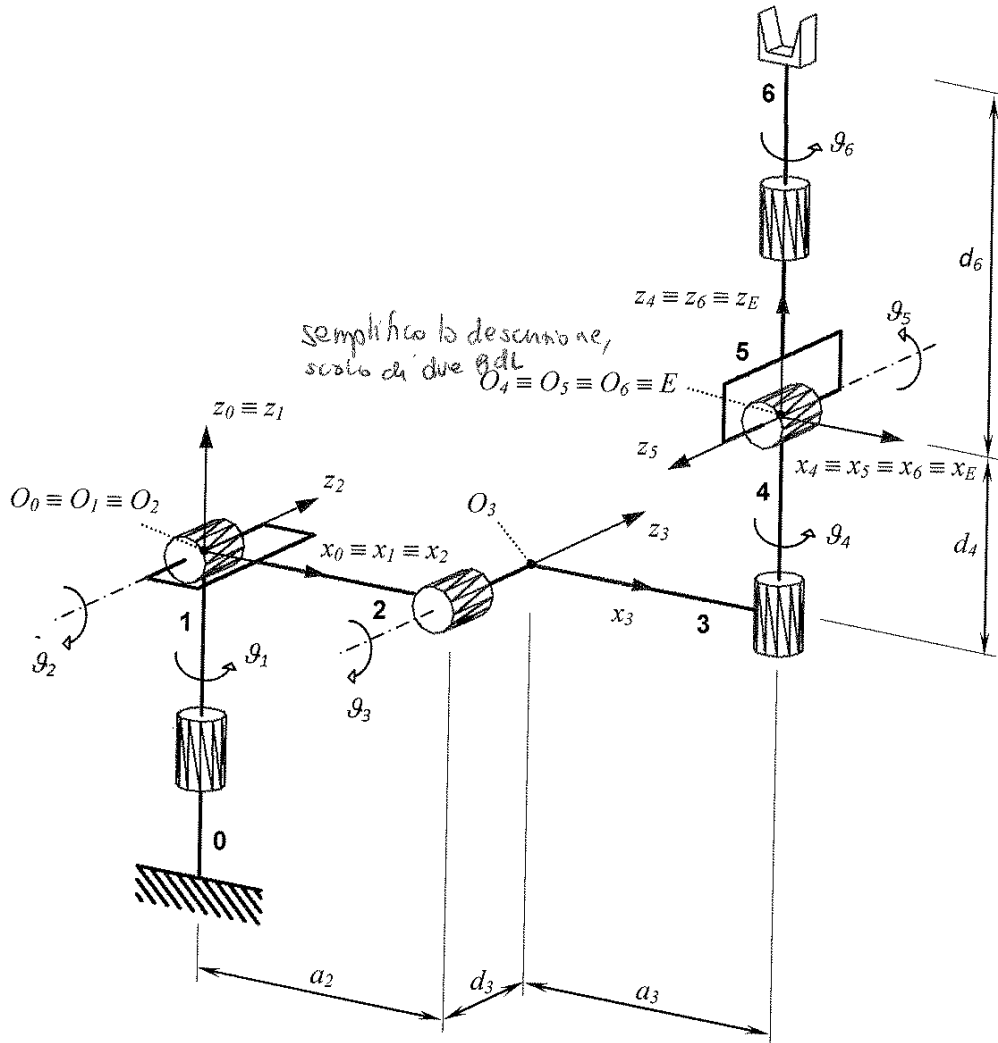
$J_E$  = matrice jacobiana del s.r. E espressa nel s.r. 0



$$\begin{aligned} \underline{v}_E &= \dot{q}_1 \underline{k}_1 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_1) + \dot{q}_2 \underline{k}_2 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_2) + \dot{q}_3 \underline{k}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) = \\ &= \dot{q}_1 \underline{k}_1 \times [(\underline{p}_E - \underline{p}_3) + (\underline{p}_3 - \underline{p}_1)] + \dot{q}_2 \underline{k}_2 \times [(\underline{p}_E - \underline{p}_3) + (\underline{p}_3 - \underline{p}_2)] + \dot{q}_3 \underline{k}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) = \\ &= \dot{q}_1 \underline{k}_1 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_1) + \dot{q}_2 \underline{k}_2 \times (\underline{p}_3 - \underline{p}_2) + (\dot{q}_1 \underline{k}_1 + \dot{q}_2 \underline{k}_2 + \dot{q}_3 \underline{k}_3) \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) = \\ &= \underline{v}_3 + \underline{\omega}_3 \times (\underline{p}_E - \underline{p}_3) \end{aligned}$$

$$\underline{\omega}_E \equiv \underline{\omega}_3 = \dot{q}_1 \underline{k}_1 + \dot{q}_2 \underline{k}_2 + \dot{q}_3 \underline{k}_3$$

### Robot ARTICOLATO + POLSO SFERICO a 3 gdl Analisi di singolarità



Configurazione rappresentata con gradi di libertà nei giunti nulli

vettore dei gradi di libertà nello spazio dei giunti:  $\underline{q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$

vettore di posizione generalizzata dell'end effector:  ${}^0P_6 = [x_6 \ y_6 \ z_6 \ \psi \ \chi \ \varphi]^T$

braccio: link 1 - 2 - 3

polso: link 4 - 5 - 6

centro polso: origini  $O_4 \equiv O_5 \equiv O_6$

s.r. end-effector  $\equiv$  s.r. link 6



➤ Matrice jacobiana del s.r. 6, coincidente con s.r. dell'end-effector

$$V_E = \begin{Bmatrix} v_E \\ \omega_E \end{Bmatrix} = J_E \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix}$$

Il peso di  $q_5$  e  $q_6$  è nullo al fine della velocità dell'EE

} gdl del polso

essendo:

$$J_{11} = [k_1 \times (p_E - p_1) \quad k_2 \times (p_E - p_2) \quad k_3 \times (p_E - p_3)]$$

$$J_{21} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

$$J_{22} = [k_4 \quad k_5 \quad k_6]$$

moto angolare dell'EE facendo intervenire il polso

Il problema è quindi distinto tra cinematica del braccio e cinematica del polso, distinguendo il problema in due sotto-problemi.

Calcolando:

$$k_i = {}^0A_i [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\hat{p}_i = {}^0\hat{A}_i [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

SINGOLARITÀ  $\det(J_E) = 0$

si ottengono:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -(s_1 c_{23} a_3 + s_1 s_{23} d_4 + s_1 c_2 a_2 - c_1 d_3) & -c_1 s_{23} a_3 + c_1 c_{23} d_4 - c_1 s_2 a_2 & -c_1 s_{23} a_3 + c_1 c_{23} d_4 \\ c_1 c_{23} a_3 + c_1 s_{23} d_4 + c_1 c_2 a_2 - s_1 d_3 & -s_1 s_{23} a_3 + s_1 c_{23} d_4 - s_1 s_2 a_2 & -s_1 s_{23} a_3 + s_1 c_{23} d_4 \\ 0 & -c_{23} a_3 - s_{23} d_4 - c_2 a_2 + 2s_1 c_1 d_3 & -c_{23} a_3 - s_{23} d_4 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{22} = A_3 \begin{bmatrix} {}^3k_4 & {}^3k_5 & {}^3k_6 \end{bmatrix} = {}^0A_3 \begin{bmatrix} 0 & s_4 & -c_4 s_5 \\ -1 & 0 & c_5 \\ 0 & -c_4 & -s_4 s_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 s_{23} & c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 + s_1 s_4 s_5 \\ s_1 s_{23} & s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & -s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 - c_1 s_4 s_5 \\ c_{23} & -s_{23} s_4 & s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}$$

⇒ una colonna di  $J_{II}$  è nulla; ad esempio:

*Il g.d.l. di quella colonna non ha peso sul moto dell'EE*

- nel caso di  $d_3 = 0$  e nella configurazione con centro polso sull'asse  $z_1$ ; in tale configurazione  $\underline{k}_1$  e  $(\underline{p}_E - \underline{p}_1)$  sono paralleli e la 1° colonna si annulla (fig. 3)
- nel caso di  $a_2^2 = a_3^2 + d_4^2$  e nella configurazione con centro polso sull'asse  $z_2$ ; in tale configurazione  $\underline{k}_2$  e  $(\underline{p}_E - \underline{p}_2)$  sono paralleli e la 2° colonna si annulla (fig. 4)

*È la situazione di ROBOT RIDONDANTE*

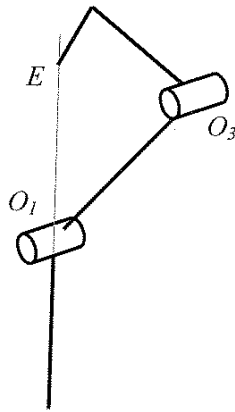


fig. 3

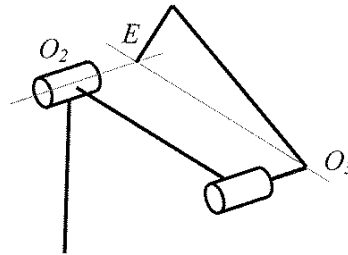


fig. 4

*Il robot gira su se stesso.*

► Analisi delle singularità della matrice jacobiana  $J_E$ , imposte dalla singularità di polso

Problema cinematico diretto

$$\underline{\omega}_E = \begin{Bmatrix} \omega_{Ex} \\ \omega_{Ey} \\ \omega_{Ez} \end{Bmatrix} = J_{21} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + J_{22} \begin{Bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix}$$

Problema cinematico inverso

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix} = J_{22}^{-1} \left[ \underline{\omega}_E - J_{21} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} \right]$$

Condizione di singularità:

$$\det(J_{22}) = \underline{k}_4 \times \underline{k}_5 \cdot \underline{k}_6 = 0$$

$\det(J_{22}) = 0$  si verifica quando gli assi  $z_4, z_5, z_6$  sono coplanari, ovvero quando  $\vartheta_5 = 0$  o  $\vartheta_5 = \pi$  (fig. 5)

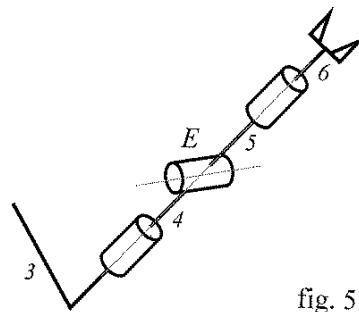
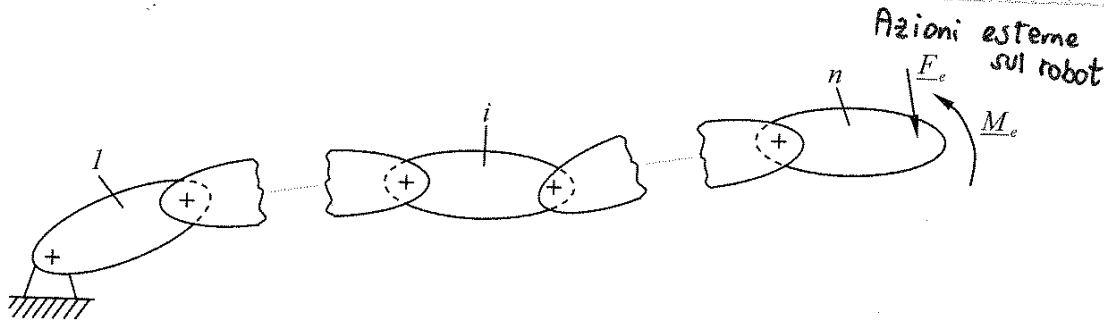


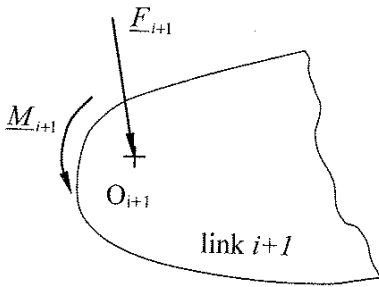
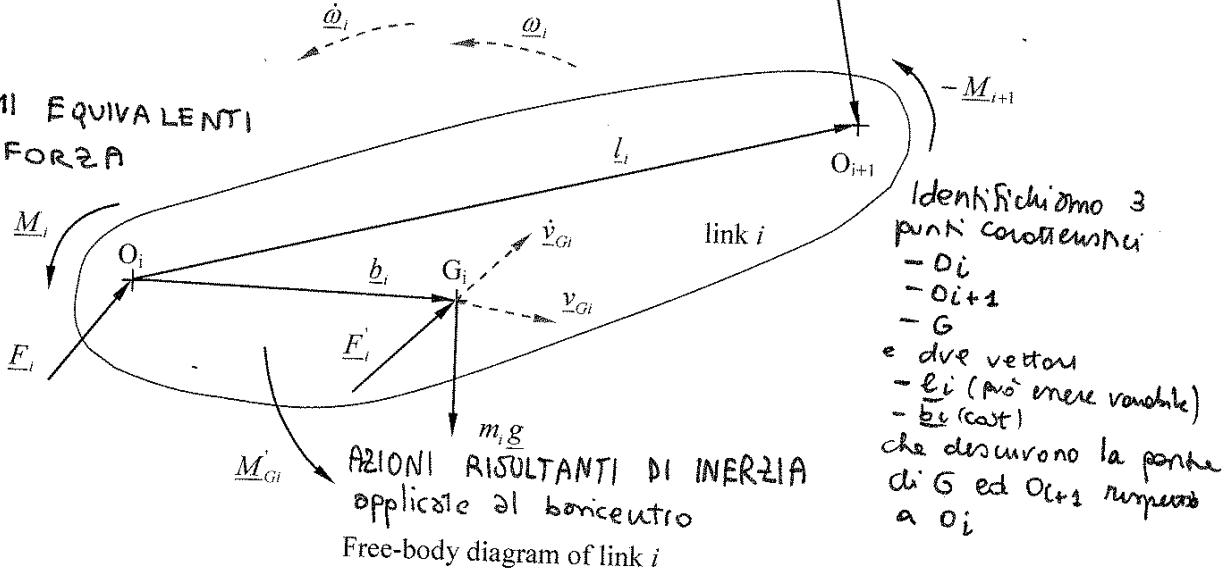
fig. 5

# DINAMICA DI UN SISTEMA MULTIBODY A CATENA APERTA

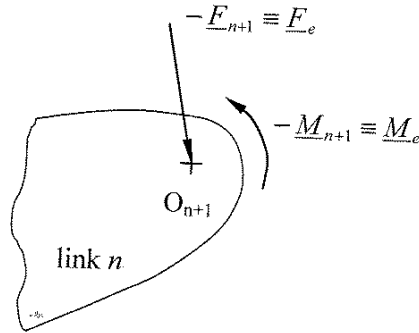


È generico, può essere usato per qualunque link

## SISTEMI EQUIVALENTI DI FORZA



Detail of the free-body diagram of link  $i+1$



Detail of the free-body diagram of the end link  $n$

libro dinamico noi due chiamare in causa le azioni che fanno muovere il robot, quindi forze e coppie. Tratteremo una struttura seriale composta da  $n$  giunti, composta da  $n$  giunti aventi un gdl  $q$  che esprime la libertà di movimento tra un corpo e l'altro. Ci saranno quindi in ogni giunto delle reazioni unilaterali, accompagnate dalle azioni motorie. In ogni giunto interno del sistema, riteniamo trascurabili le azioni di attrito nei giunti. Questo perché determinano dissipazioni non recuperabili. Se sono azioni interne alla struttura robot, ci saranno anche azioni esterne che ammetteremo solo sui due link all'estremo della catena, cioè sul link 0 (reazioni unilaterali) e link  $n$  (interazione dello

Potremmo scegliere punti di operare in un sistema baricentrico solido o meno. Noi scegliamo di esprimere il termine di inerzia in un sistema solido al corpo in modo che esso sia costante durante il movimento del corpo. Come scegliere il sistema di riferimento secondo la convenzione di Denavit - Hattenberg.

Tipicamente a use un CAD per ricevere queste informazioni. Spero però i due sistemi di riferimento non coincidono e pertanto

$${}^0I_{Gi} = {}^0A_i {}^iI_{Gi} {}^0A_i^T$$

♦ Inertia force:

$${}^iF_i = -m_i {}^i\dot{v}_{Gi}$$

♦ Inertia moment at the center of mass:

$${}^iM_{Gi} = -({}^iI_{Gi} {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^iI_{Gi} {}^i\omega_i) \quad (1)$$

Definiamo presto termine per inserirlo nelle equazioni di equilibrio

► Newton-Euler equations of motion expressed in the link reference frame  $i$

$${}^iF_i - {}^iF_{i+1} + m_i g - m_i {}^i\dot{v}_{Gi} = 0$$

$${}^iM_i - {}^iM_{i+1} + {}^iF_i \times (G_i - O_i) - {}^iF_{i+1} \times (G_i - O_{i+1}) - {}^iI_{Gi} {}^i\dot{\omega}_i - {}^i\omega_i \times ({}^iI_{Gi} {}^i\omega_i) = 0$$

or

$${}^iF_i - {}^iF_{i+1} + m_i g - m_i {}^i\dot{v}_{Gi} = 0$$

$${}^iM_i - {}^iM_{i+1} + {}^iF_i \times {}^i b_i + {}^iF_{i+1} \times ({}^i l_i - {}^i b_i) - {}^iI_{Gi} {}^i\dot{\omega}_i - {}^i\omega_i \times ({}^iI_{Gi} {}^i\omega_i) = 0$$

Queste sono le equazioni per risolvere l'equilibrio dinamico del generico link. Possono avere utilità per modelli differenti del sistema.

- LEGGI DI CONTROLLO DEL ROBOT coppie per impadronire ed erigere del task a partire dalle leggi di moto. Risolte in forma semplice perché non differenziali.

- SIMULAZIONE DEL COMPORTAMENTO quando applico forze siganti e punti le incognite sono grandette differenziali cinematiche.

Cio che interessa maggiormente è il primo approccio, utile per il dimensionamento del controllo motore.

Per risolvere questo problema possiamo usare degli algoritmi

*Kinematic equations:*

$${}^i\omega_i = {}^iA_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{q}_i (1-\delta_i) {}^i\mathbf{k}_i$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^iA_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i (1-\delta_i) {}^i\mathbf{k}_i + \dot{q}_i (1-\delta_i) ({}^iA_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times {}^i\mathbf{k}_i$$

$${}^i\dot{\mathbf{y}}_i = {}^iA_{i-1} [{}^{i-1}\dot{\mathbf{y}}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times ({}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1})] + \dot{q}_i \delta_i {}^i\mathbf{k}_i + 2\dot{q}_i \delta_i ({}^iA_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times {}^i\mathbf{k}_i$$

$${}^i\dot{\mathbf{y}}_{Gi} = {}^i\dot{\mathbf{y}}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{b}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{b}_i)$$

*Dynamic equations:*

$${}^i\mathbf{F}_i = {}^iA_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1} - m_i {}^iA_o \mathbf{g} + m_i {}^i\dot{\mathbf{y}}_{Gi}$$

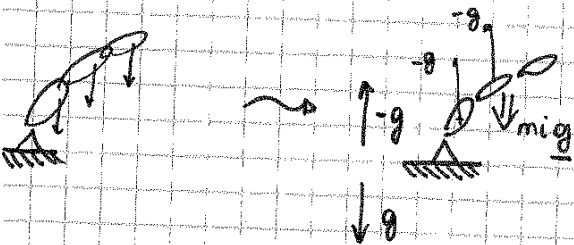
$${}^i\mathbf{M}_i = {}^iA_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{M}_{i+1} - {}^i\mathbf{F}_i \times {}^i\mathbf{b}_i - ({}^iA_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1}) \times ({}^i\mathbf{L}_i - {}^i\mathbf{b}_i) + {}^iI_i \dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times ({}^iI_i \omega_i)$$

*Actuator forces and torques:*

$$\tau_i = {}^i\mathbf{k}_i \cdot {}^i\mathbf{F}_i \quad \text{actuator force in a prismatic joint } i$$

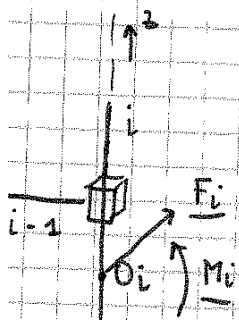
$$\tau_i = {}^i\mathbf{k}_i \cdot {}^i\mathbf{M}_i \quad \text{actuator torque in a revolute joint } i$$

si può considerare la forza peso assegnando un moto fittizio alla base.



Il moto del link uno, si aggiunge il contributo di accelerazione  $-g$  e così via per gli altri link. Automaticamente mi trovo  $-g$  su ciascuna massa, e automaticamente trovo il vettore di peso incluso nella forza di inerzia.

in facendo, il costo computazionale è inferiore

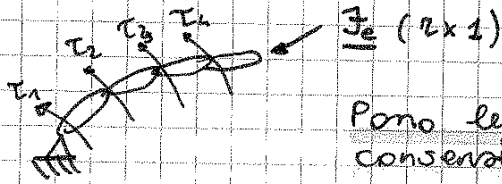


La rotazione relativa tra  $i$  e  $i-1$  è impedita, qualunque  $M_i$  è una reazione vincolare.

$$\mathbf{F}_i = \begin{cases} {}^iF_{ix} \\ {}^iF_{iy} \\ {}^iF_{iz} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} {}^iF_{ix} \\ {}^iF_{iy} \\ {}^iF_{iz} \end{cases}} \right\} \text{AZIONI VINCOLARI}$$

← allineata su asse giunto  
→ AZIONE MOTRICE

Anche nell'equilibrio entra in gioco la matrice Jacobiana, che è figlio della configurazione del robot.  
 Le azioni motrici servono per vincere le azioni di inerzia e vincere il carico esterno.  
 La parte di carico esterno può essere calcolata velocemente mediante la matrice Jacobiana.



$$\underline{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{Bmatrix}$$

Posso legare  $\underline{F}_e$  e  $\underline{\tau}$  applicando principio lavoro virtuale o conservazione dell'energia.

È come se trascuriamo gli effetti di forza peso/azioni inerziali.  
 La variazione di potenza, non essendo nulla, deve essere nulla, non abbiamo variazione di energia cinetica. Consideriamo quindi l'equilibrio statico trascurando il peso dei vari corpi.

$$W_{\tau} = \tau_1 \dot{q}_1 + \tau_2 \dot{q}_2 + \dots + \tau_n \dot{q}_n = \underline{\tau}^T \dot{\underline{q}}$$

$$W_e = \underline{F}_e^T \underline{v}_e$$

$$\underline{F}_e = \begin{Bmatrix} F_{ex} \\ F_{ey} \\ F_{ez} \\ M_{ex} \\ M_{ey} \\ M_{ez} \end{Bmatrix} \quad \underline{v}_e = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$W_{\tau} + W_e = 0$$

$$\rightarrow \underline{\tau}^T \dot{\underline{q}} = - \underline{F}_e^T \underline{v}_e = - \underline{F}_e^T \underline{J}_e \dot{\underline{q}} \rightarrow \underline{\tau} = - \underline{J}_e^T \underline{F}_e$$

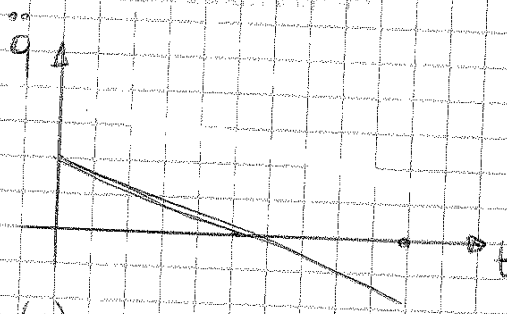
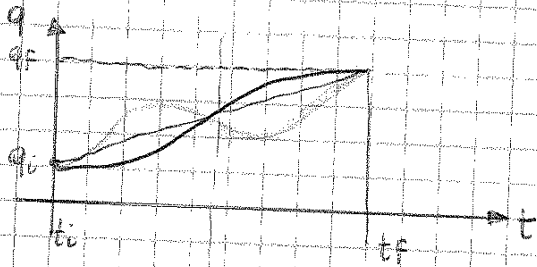
Serve per stimare facilmente il peso che azioni esterne danno n azioni motrici, a cui dovrai poi aggiungere le azioni motrici per l'inerzia.

Viene chiamato in cause per singolarità, dove perdo capacità di moto. Anche qui entrerà in gioco il comportamento della  $\underline{J}$  in caso di singolarità.

La singolarità induce ad una perdita di controllo di forza, che si ripercuote in reazioni incalcolabili.

Andremo a rappresentare due algoritmi di pianificazione  
 \* PRIMITIVA POLINOMIALE DI 3° GRADO  
 \* PRIMITIVA A TRAPEZI DI VELOCITA'  
 Volgova per il controllo di am, non solo nell'ambito della robotica.

Devo trovare una curva che unisce i due punti soddisfacendo i requisiti prima enunciati.  
 Parto fermo ed arrivo fermo. Devo avere all'inizio una tangente orizzontale e lo stesso alla fine del campione ad una velocità nulla.



Io devo trovare una  $q(t) / q(0) = q_i$

$$q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

$$\dot{q}(t_f) = 0$$

Per soddisfare parte 4 richieste, la funzione più semplice è una funzione polinomiale sufficientemente grande da rispettare parte richiesta, e quindi un polinomio di terzo grado.

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$$\ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2$$

$$\rightarrow a_0 = q_i$$

$$a_1 = 0$$

$$a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = q_f$$

$$3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = 0$$

Sostituendo nella funzione trapeziana

$$q(t) = \frac{2(q_f - q_i)}{t_f^3} t^3 + \frac{3(q_f - q_i)}{t_f^2} t^2 + q_i$$

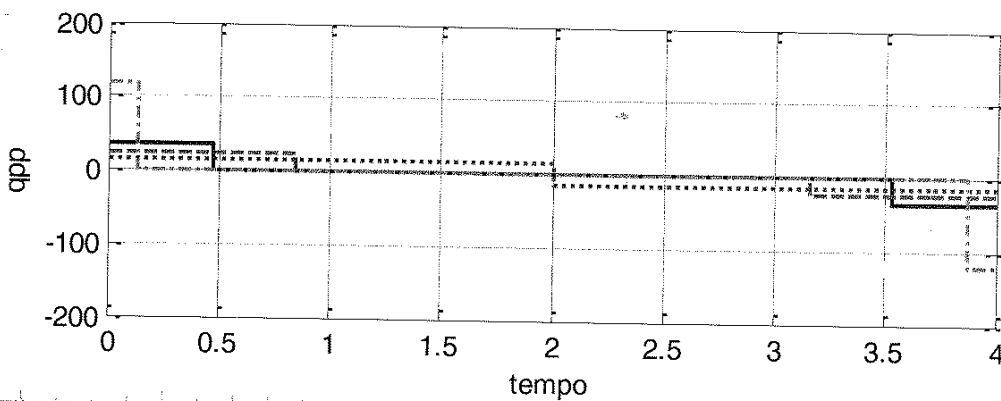
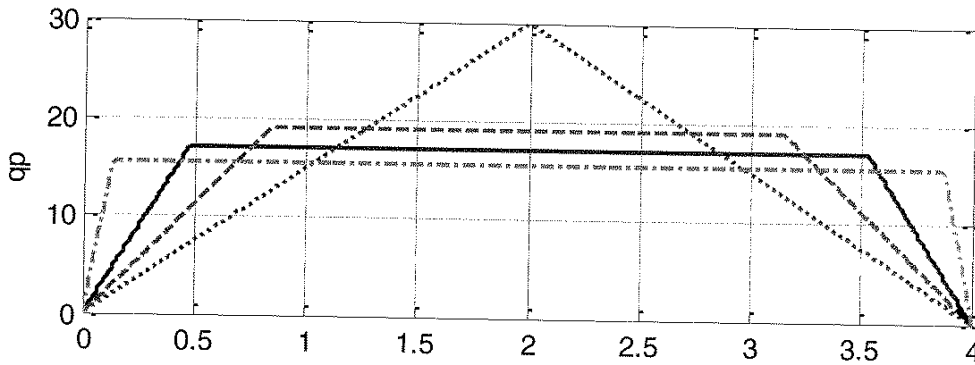
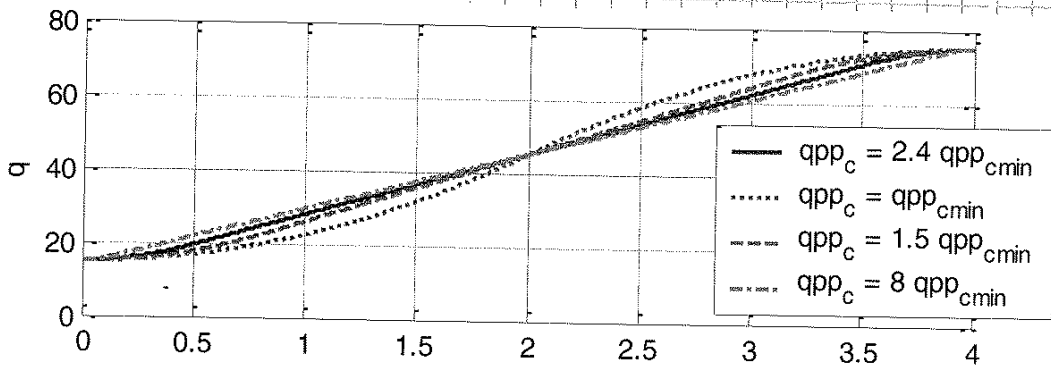
2. Funce taglia il requisito di unire  $q_i$  e  $q_f$  in 3 parti soddisfa le richieste, ma ottengo una funzione che ha una velocità ed una



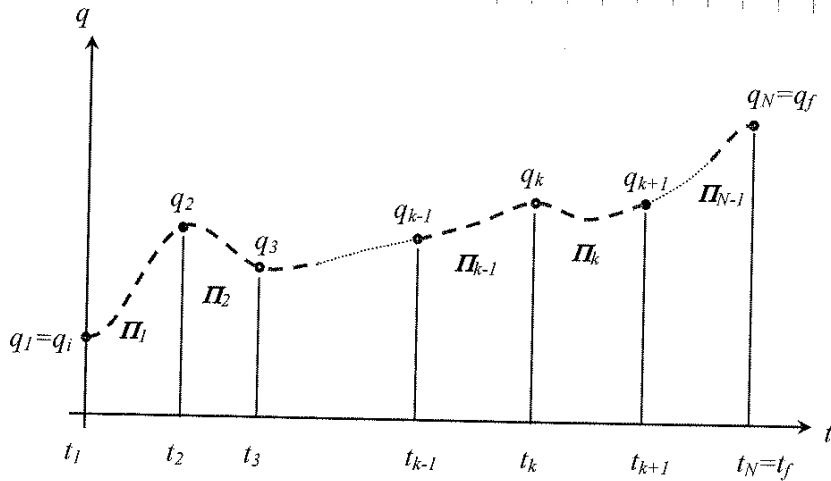
La trazione è riplice, continua fino alla derivata prima e definita a tratti.

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c \left( \frac{t-t_c}{2} \right) & t_c \leq t \leq t_F - t_c \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_F - t)^2 & t_F - t_c < t \leq t_F \end{cases}$$

Ci sono però dei limiti, come si può vedere in questo esempio



# PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA NELLO SPAZIO DEI GIUNTI TIPO PATH MOTION



Fino ad ora non abbiamo ipotizzato punti intermedi, ma in con-  
 proba può tornare utile avere punti intermedi (ad esempio  
 punto di sollevamento e di deposito) con dei valori di  
 tempo in corrispondenza dei quali il  $\dot{q}$  deve assumere  
 quel valore. In altri con la mia specie di traiettoria  
 ha più condizioni da far rispettare alla primitiva.

Devo cercare un'unica funzione interpolante con continuità  
 fino alla derivata prima. La miglior candidato è un  
 polinomio, ma per soddisfare  $q(t_k) = q_k$  con  $k = 1 \dots N$   
 devo avere  $N$  coefficienti e quindi un polinomio di grado  
 $N-1$ . Questo comporta problematiche computazionali, gli  
 algoritmi numerici portano ad errori nel calcolo dei  
 coefficienti, più è alto il grado del polinomio maggiori sono  
 i contributi oscillatori che portano ad un comportamento  
 non naturale, portando a bruciamenti dell'ore. Cercando di  
 interpolare con un'unica funzione basta cambiare un  
 punto della sequenza e devo ricalcolare tutto.

La pianificazione viene quindi fatta spettando la sequenza  
 a tanti tratti da avere funzioni primitive più semplici.  
 Basta modificare un tratto senza influenzare gli altri  
 calcoli.

Troviamo quindi una funzione a tratti composta da  $N-1$  polinomi  
 del tipo  $\pi_k(t)$   
 e condizioni al contorno sono di posizione e due  
 condizioni indipendenti di velocità all'inizio ed alla fine.

$$\begin{aligned} q(t_1) &= q_i; \dot{q}(t_1) = 0; \\ \dots q(t_k) &= q_k; \dots \\ q(t_N) &= q_N; \dot{q}(t_N) = 0. \end{aligned}$$

e condizioni di velocità sono spesso implicate nella traiettoria  
 per non chiamare nulla nulla accelerazione  
 abbiamo diversi con

**CASO** Aggiungo valori arbitrari di velocità ma non prima

Caso 3 Impiego delle condizioni di continuità sull'accelerazione.

$$\begin{aligned} \Pi_1(t_1) &= q_1 \\ \dot{\Pi}_1(t_1) &= \dot{q}_1 = 0 \\ \ddot{\Pi}_1(t_1) &= \ddot{q}_1 = 0 \end{aligned}$$

CONTINUITÀ DI VELOCITÀ

continuità e valore specifico di posizione

$$\begin{cases} \Pi_{k-1}(t_k) = q_k \\ \Pi_k(t_k) = q_k \end{cases}$$

CONTINUITÀ DI ACCELERAZIONE

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \ddot{\Pi}_k(t_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{N-1}(t_N) &= q_N \\ \dot{\Pi}_{N-1}(t_N) &= \dot{q}_N = 0 \\ \ddot{\Pi}_{N-1}(t_N) &= \ddot{q}_N = 0 \end{aligned}$$

Non impongo valori di velocità ed accelerazioni, ma solo che ci deve essere discontinuità.

Averemo punti

- \* 3 eq. nel punto iniziale  $q_1$
- \* 3 eq. nel punto finale  $q_N$
- \* 4 eq. per i punti intermedi, che sono  $N-2$  punti.

er un totale di  $4(N-2) + 6 = 4N-2$  equazioni.

si dimostra che il problema è risolvibile con polinomi per i tratti estremi di 4° grado e polinomi di 3° grado per i tratti intermedi.

4° grado 1° tratto  
5 coeff

3° grado  $N-3$  tratti  $\rightarrow 4(N-3) + 10 = 4N-2$  ✓

4° grado tratto  $N$   
5 coeff

Tanti coefficienti quante le equazioni che devo soddisfare

2° tratto estremi ho condizioni più vincolanti, cioè perché sono di grado superiore.

dimensione del problema cresce rapidamente. Le equazioni di grado 4 non sono couplere, sono tutte lineari. Ci sono degli algoritmi che ottimizzano la determinazione dei coefficienti. Se usi i polinomi faresti dello stesso grado l'ottimizzazione e sarebbe migliore.

(Si potrebbero assumere polinomi  $\Pi_k$  ( $k=1, \dots, N-1$ ) tutti di 3° grado introducendo due punti virtuali rispettivamente nel primo e ultimo tratto di traiettoria)

Questo approccio prevede l'introduzione di PUNTI VIRTUALI per poter imporre le traiettorie aggomando due punti virtuali in più in termini delle specifiche, attraverso i quali si ottiene il primo tratto in due tratti descritti da polinomi di terzo grado e si può ad imporre continuità di posizione, velocità ed accelerazione.